

# Потоки на графах и баланс интересов в рекомендательных системах

Александр Артемьев

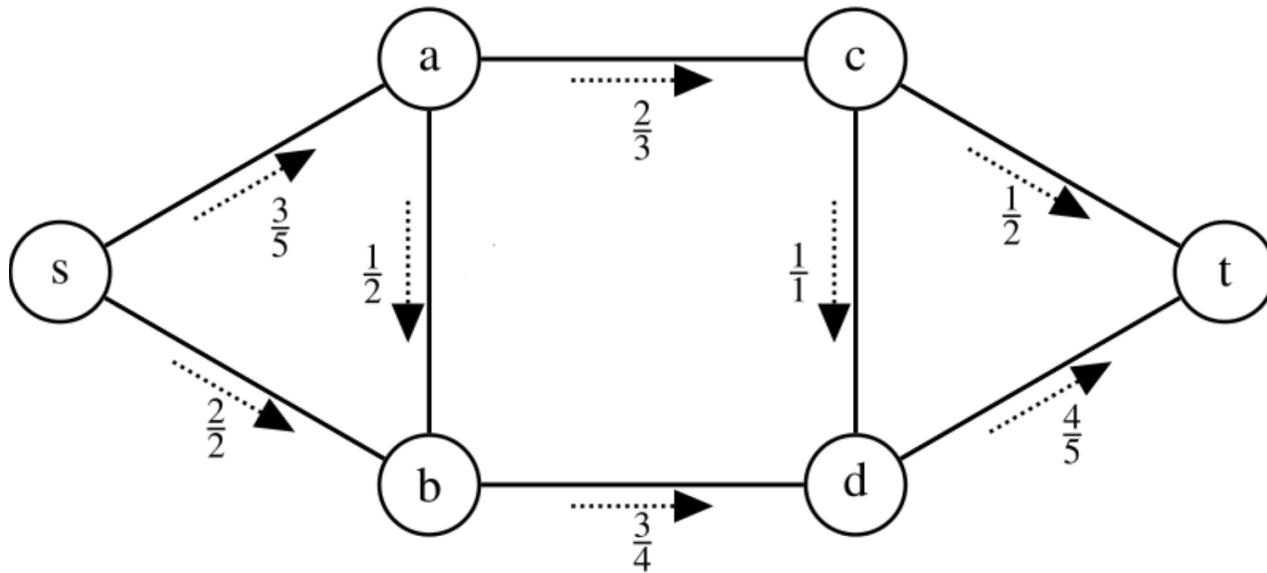
Телеграмм: @AlexanderArtemyev

E-mail: GALUNiK-1@yandex.ru

Тел. +7-903-794-7267

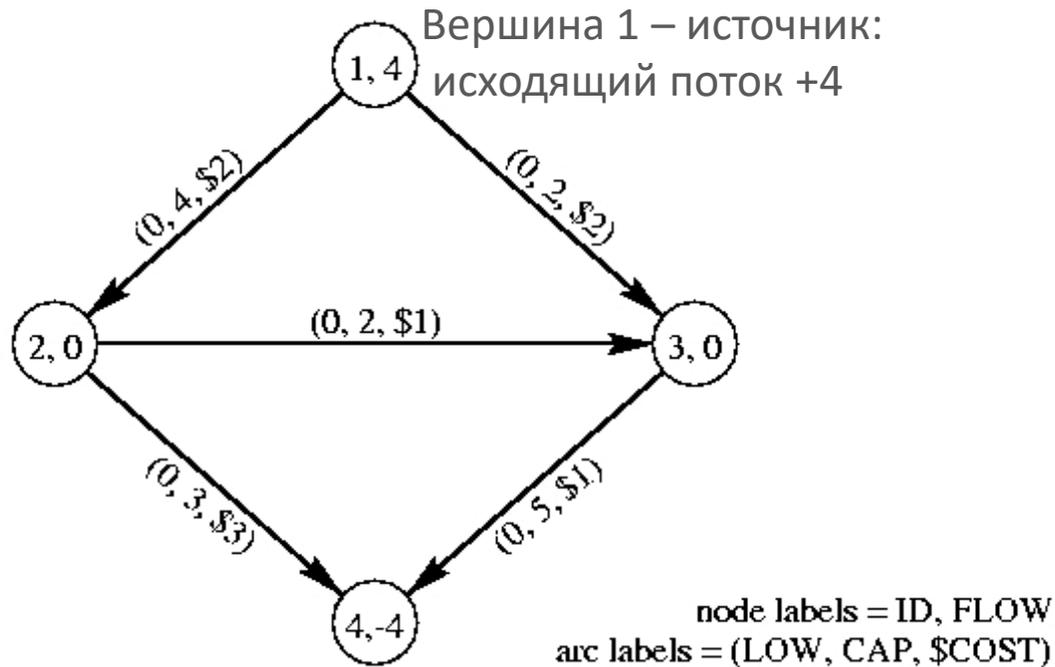
# Поток минимальной стоимости на графе

Найти наиболее экономный способ перевезти определённый поток по сети поставки (flow network)



Сеть поставки – ориентированный граф: откуда куда перемещаем поток  
Отмечены потоки / пропускные способности рёбер

# Minimum cost flow problem как задача LP



Вершина 4 – сток:  
входящий поток – 4

Как направить поток 4 из вершины 1 в 4, чтобы суммарная стоимость перевозки была минимальной?

Граф описывает ограничения и стоимость перевозки

Вершина 1, исходящий поток 4 – источник / supply  
Вершины 2 и 3, исходящий поток 0 – промежуточные  
Вершина 4, входящий поток –4 – сток / sink

Рёбра

- 1) из 1 в 2: поток от 0 до 4, цена за единицу потока \$2
- 2) из 1 в 3: поток от 0 до 2, цена перевозки \$2
- 3) из 2 в 3: поток от 0 до 2, цена перевозки \$1
- 4) из 2 в 4: поток от 0 до 3, цена перевозки \$3
- 5) из 3 в 4: поток от 0 до 5, цена перевозки \$1

Это частный случай задачи линейного программирования:

найти минимум линейной функции при наличии ограничений: линейных уравнений и неравенств

# Отличие от общей задачи LP

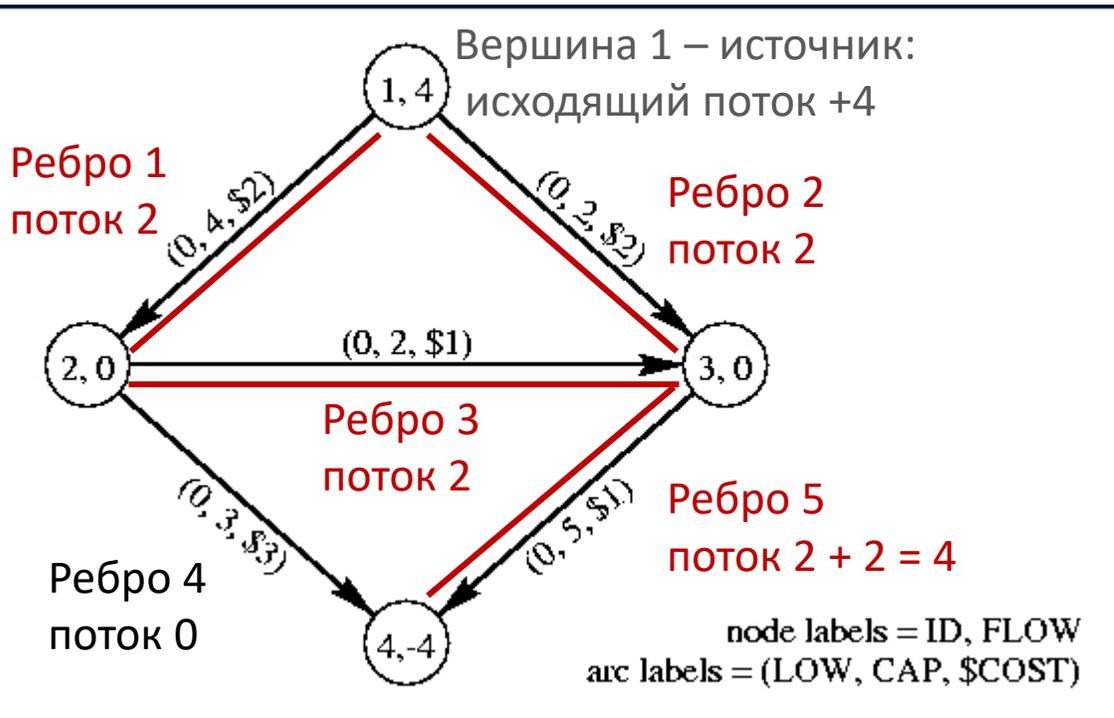
Описание задачи проще, чем LP

```

c This is a simple example file to demonstrate the DIMACS
c input file format for minimum cost flow problems. The solution
c vector is [2,2,2,0,4] with cost at 14.
c
c Problem line (nodes, links)
p min 4 5
c
c Node descriptor lines (supply+ or demand-)
n 1 4
n 4 -4
c
c Arc descriptor lines (from, to, minflow, maxflow, cost)
a 1 2 0 4 2
a 1 3 0 2 2
a 2 3 0 2 1
a 2 4 0 3 3
a 3 4 0 5 1
c
c End of file
    
```

Оптимальная загрузка рёбер

Variables	result
	14
C1	2
C2	2
C3	2
C4	0
C5	4



Вершина 4 – сток:  
входящий поток – 4

Оптимальное решение для потока величины 4:

- Рёбра отмечены **цветом**, величина потока – сбоку.
- Ребро C4 не используется, так как цена перевозки по рёбрам 1 и 4 равна  $2 + 3 = 5$  – больше других.

Если поток увеличить до 5, то ребро C4 будет использоваться

# Алгоритмы поиска потока минимальной стоимости

Решение можно найти быстрее, чем решить общую задачу линейного программирования

Алгоритмы используют специфику задачи. Например, работы Андрея Гольдберга "An Efficient Implementation of a Scaling Minimum-Cost Flow Algorithm", A.V. Goldberg, J. Algorithms, Vol. 22 (1997), pp. 1-29. <https://sci-hub.ru/10.1006/jagm.1995.0805>

Реализация: <https://web.archive.org/web/20130630185017/http://www.igsystems.com/cs2/cs2-4.6.tar>  
<https://github.com/iveney/cs2> <https://github.com/rick/CSA> <https://github.com/eigenpi/CS2-CPP>

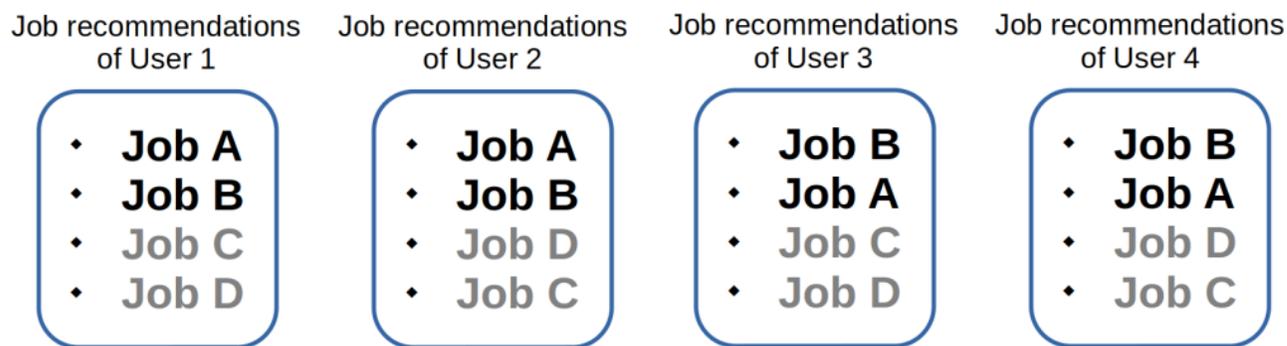
Соревнование «Network Flows and Matching Challenge» <http://archive.dimacs.rutgers.edu/Challenges/>  
Rutgers university, **DIMACS** - Center for **D**iscrete **M**athematics and **T**heoretical **C**omputer **S**cience

# Баланс интересов пользователей, поставщиков и системы

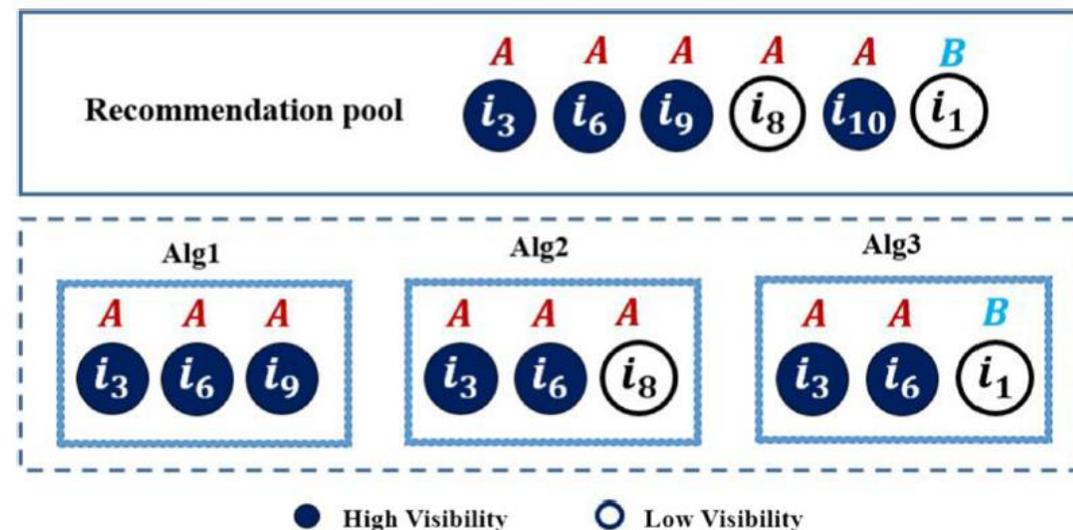
- Показать пользователям подходящие товары
- Показать товары всех продавцов
- Показать товары из длинного «хвоста»
- Обеспечить исполнение контрактов, максимизировать доход рекомендательной системы

# Баланс интересов пользователей, поставщиков и системы

- Показать пользователям подходящие товары
- Показать товары всех продавцов
- Показать товары из длинного «хвоста»
- Обеспечить исполнение контрактов, максимизировать доход рекомендательной системы



Если пользователи реагируют на top-2 рекомендации, то вакансии C и D (почти) не получают откликов



- Alg1 – top-3 по релевантности
- Alg2 – visibility-aware re-ranker
- Alg3 – supplier visibility-aware re-ranker

# Пример Minimum cost flow problem

Управляем количеством появлений каждого фильма в рекомендациях

"Post Processing Recommender Systems for Diversity", Arda Antikacioglu, R Ravi

KDD '17: Proceedings of the 23rd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining, Pages 707 - 716

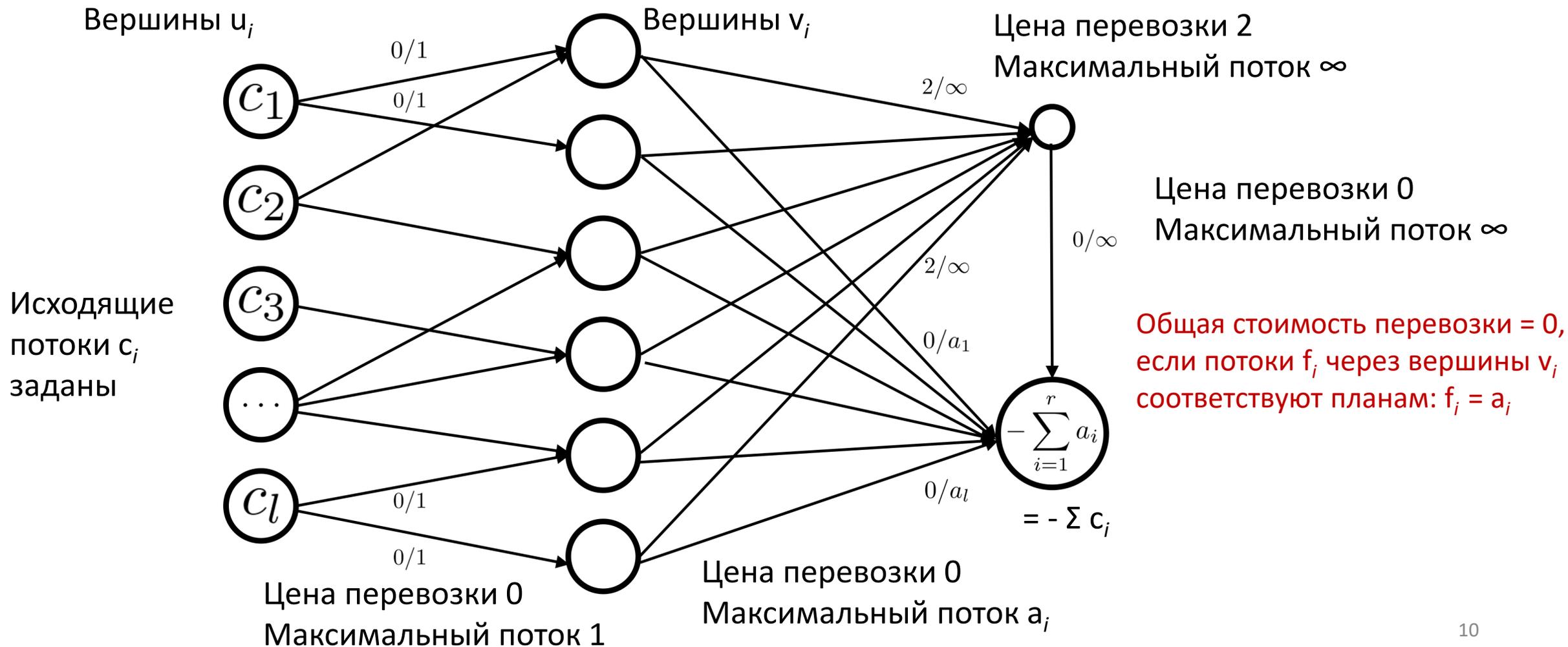
<https://www.contrib.andrew.cmu.edu/~ravi/kdd17.pdf>



# Реализуем план показа фильмов

Ограничение: Вершины  $u_i$  – степени  $c_i$ .

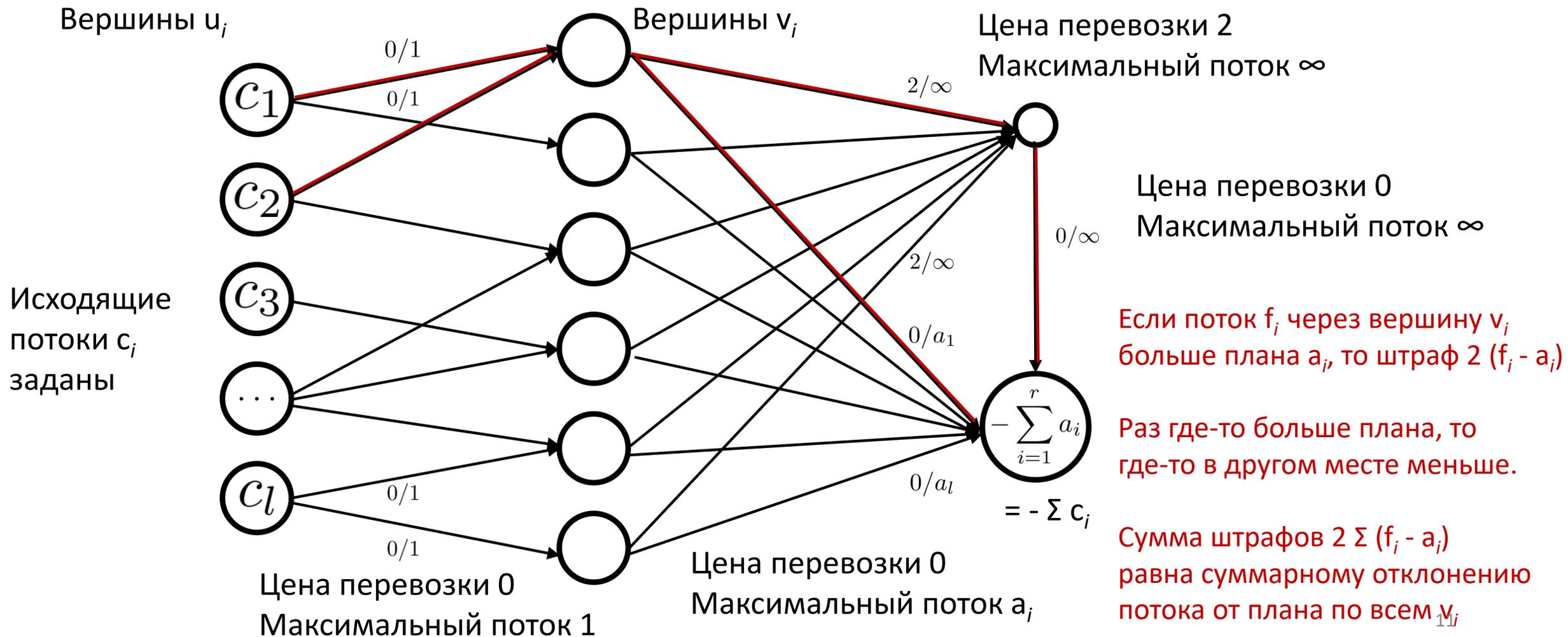
Цель: Вершины  $v_i$  – степени  $a_i$  – штраф за отклонение



# Реализуем план показа фильмов

Ограничение: Вершины  $u_i$  – степени  $c_i$ .

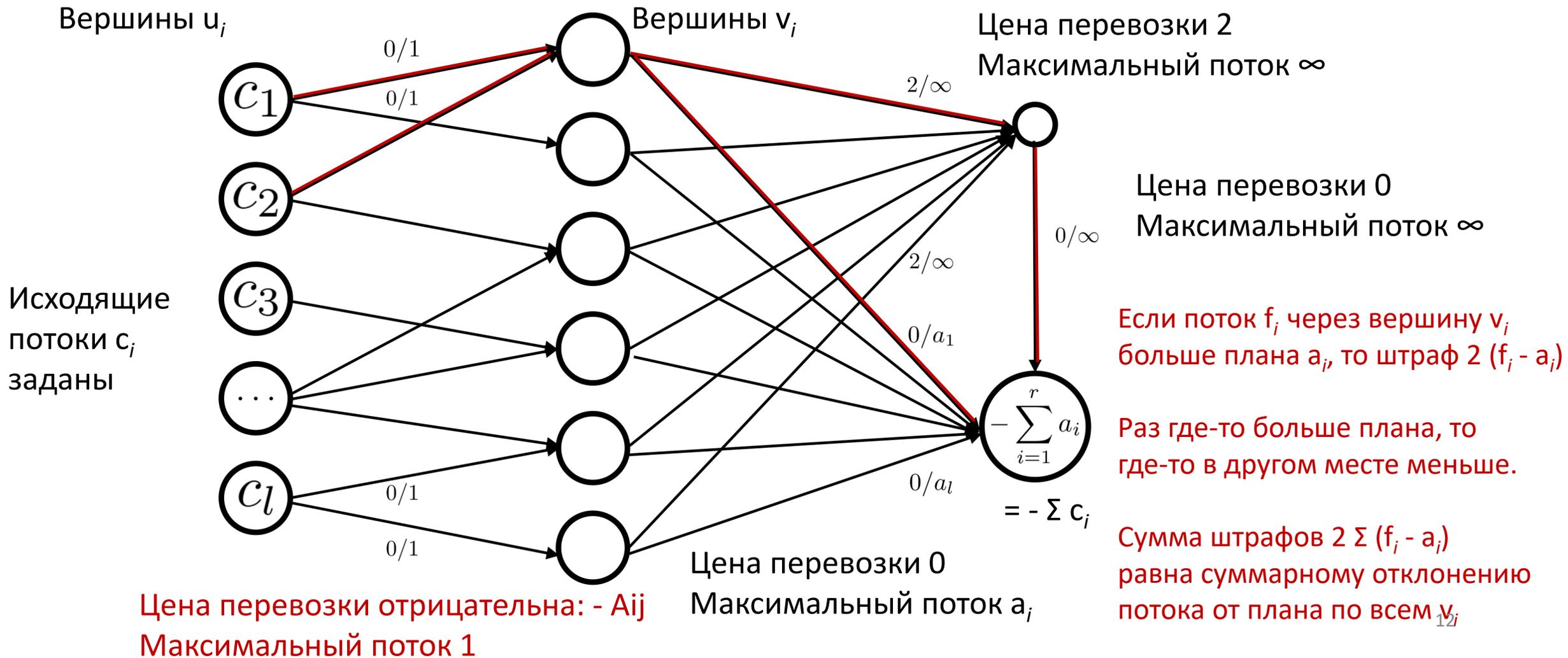
Цель: Вершины  $v_i$  – степени  $a_i$  – штраф за отклонение



# Учитываем качество рекомендаций

Ограничение: Вершины  $u_i$  – степени  $c_i$ .

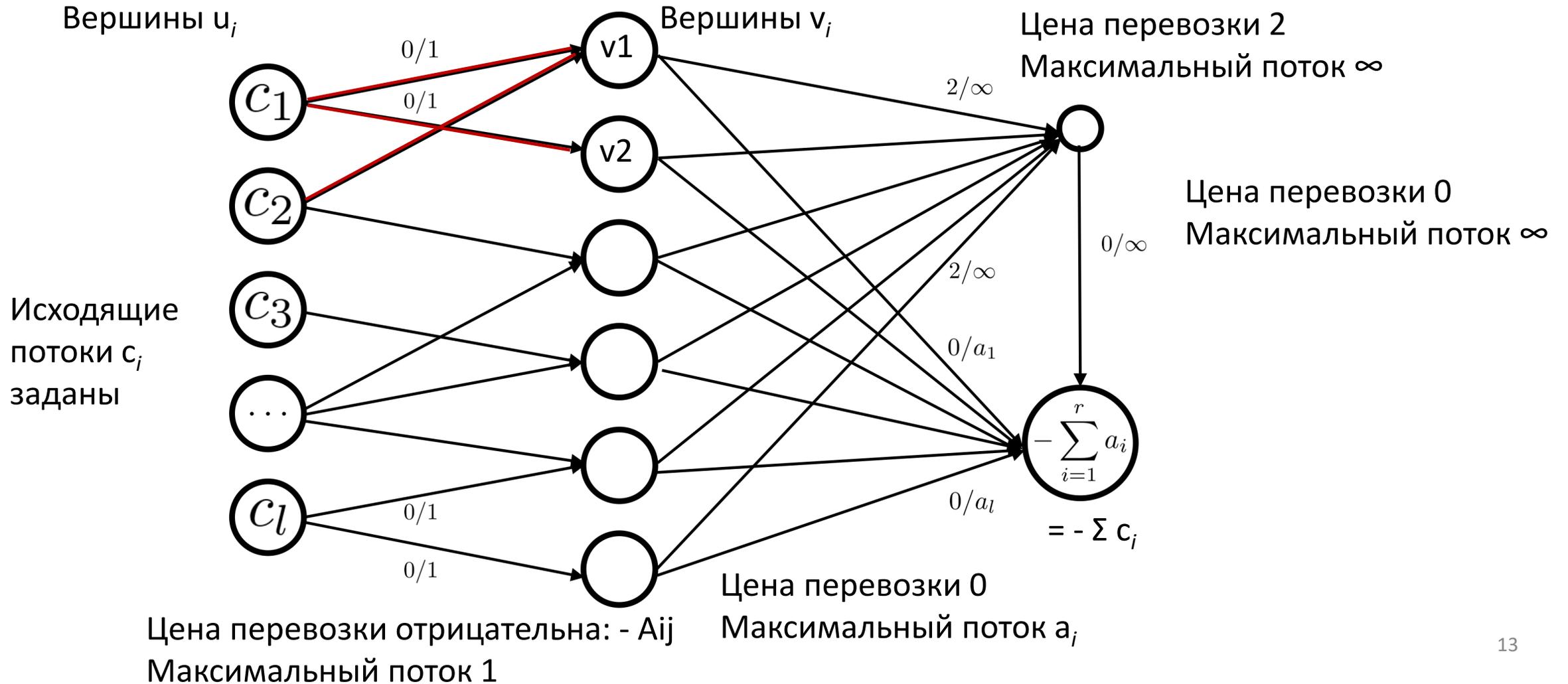
Цель: Вершины  $v_i$  – степени  $a_i$  – штраф за отклонение



# Как изменить граф, чтобы оптимизатор показал один раз либо $v_1$ , либо $v_2$ ?

Ограничение: Вершины  $u_i$  – степени  $c_i$ .

Цель: Вершины  $v_i$  – степени  $a_i$  – штраф за отклонение



# Применения Minimum cost flow

Как обеспечить наличие всех любимых жанров пользователя?

"Calibrated Recommendations as a Minimum-Cost Flow Problem"

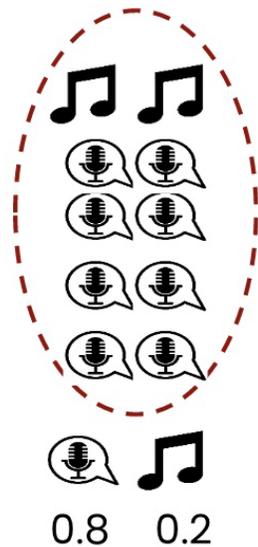
Himan Abdollahpouri, Himan Abdollahpouri, Zahra Nazari, Alex Gain, Clay Giibson, Maria Dimakopoulou, Jesse Anderton, Benjamin Carterette, Mounia Lalmas, Tony Jebara

WSDM 2023, <https://abdollahpouri.github.io/assets/docs/wsdm2023.pdf>

# Группы объектов по жанрам

Цель: частота жанров в рекомендациях соответствует истории пользователя

## User's interaction history



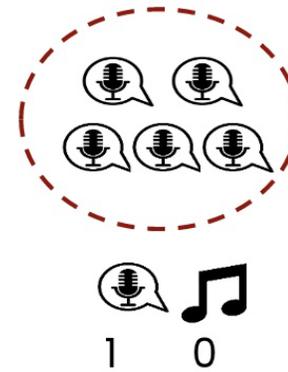
История  
пользователя  
80% подкасты  
20% музыка

## Recommendations

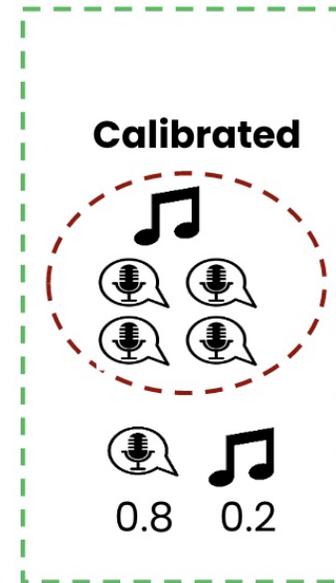
Non-calibrated



Non-calibrated



Calibrated



Рекомендации для  $n=5$  слотов

Выбор жанров по  
основному интересу  
в целом по системе или  
по основному интересу  
пользователя

Выбор жанров  
в пропорции  
интересов  
пользователя

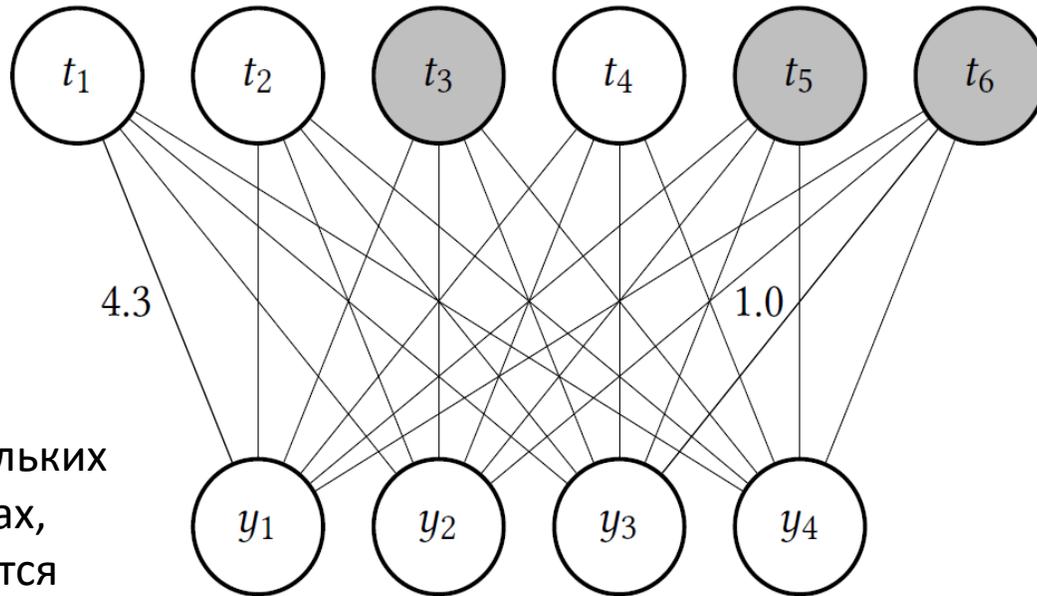
# Группы объектов по жанрам

Цель: частота жанров в рекомендациях соответствует истории пользователя

Рекомендуем  $m=6$  объектов из  $c=2$  категорий:

$t_1, t_2, t_4$  – категория 1 (белый) и

$t_3, t_5, t_6$  – категория 2 (серый)



Размещение объекта  $t_j$   
в слоте  $y_i$   
создаёт ценность  $A_{ij}$   
 $A_{11} = 4.3$     $A_{63} = 1$

При размещении нескольких  
объектов в разных слотах,  
ценности  $A_{ij}$  складываются

Рекомендации для  $n=4$  слотов

Баланс категорий (белый, серый)  
в рекомендациях обеспечиваем  
с помощью системы штрафов:

$E_{k,j}$  – штраф за выбор  
 $j$  объектов в категории  $k$

Выбираем пары  $M_{ij} = 1$  или  $0$   
так, чтобы максимизировать  
целевую функцию

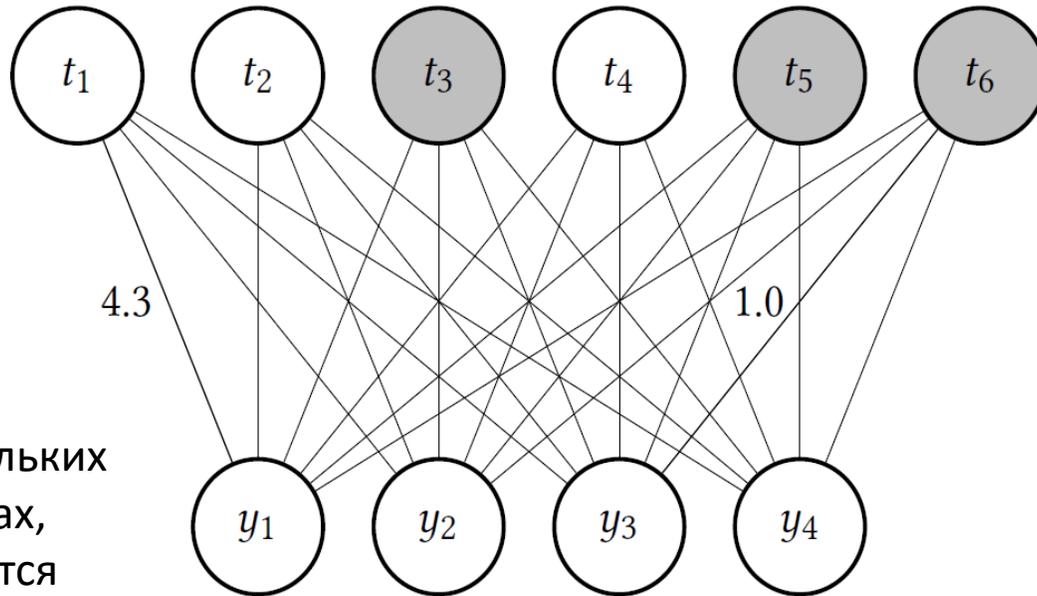
$$M^* = \arg \max_M (1 - \lambda) \times \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n M_{ij} A_{ij} - \lambda \times \sum_{k=1}^c E_{k, nq(k)}$$

# Группы объектов по жанрам

Цель: частота жанров в рекомендациях соответствует истории пользователя

Рекомендуем  $m=6$  объектов из  $c=2$  категорий:

$t_1, t_2, t_4$  – категория 1 (белый) и  
 $t_3, t_5, t_6$  – категория 2 (серый)



Размещение объекта  $t_j$   
 в слоте  $y_i$   
 создаёт ценность  $A_{ij}$   
 $A_{11} = 4.3$     $A_{63} = 1$

При размещении нескольких  
 объектов в разных слотах,  
 ценности  $A_{ij}$  складываются

Рекомендации для  $n=4$  слотов

Выбираем пары  $M_{ij} = 1$  или  $0$   
 так, чтобы максимизировать  
 целевую функцию

$$M^* = \arg \max_M (1 - \lambda) \times \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n M_{ij} A_{ij} - \lambda \times \sum_{k=1}^c E_{k,n} q(k)$$

Качество калибровки

$q(k) = j/n$  – фактическая частота  
 рекомендаций категории  $k$   
 $p(k)$  – желаемая частота  
 рекомендаций категории  $k$

Метрика ошибки калибровки

$$\mathcal{M}_{KL} = D_{KL}(P||Q) = - \sum_{k=1}^c q(k) \log \frac{q(k)}{p(k)}$$

Штраф  $E_{k,j}$  за выбор  $j$  объектов  
 категории  $k$  (miscalibration)

$$E_{k,j} = \frac{j}{n} \log \left( \frac{j}{n} \right) - \frac{j}{n} \log (p(k))$$

# Группы объектов по жанрам

Цель: частота жанров в рекомендациях соответствует истории пользователя

Размещение объекта  $t_j$

в слоте  $y_i$

создаёт ценность  $A_{ij}$

Цена -  $A_{ij}$  /  
Поток  $\leq 1$

Цена -  $A_{ij}$  /  
Поток  $\leq 1$

Цена ( $E_{11} - E_{01}$ )  
Поток  $\leq 1$

Цена ( $E_{21} - E_{11}$ )  
Поток  $\leq 1$

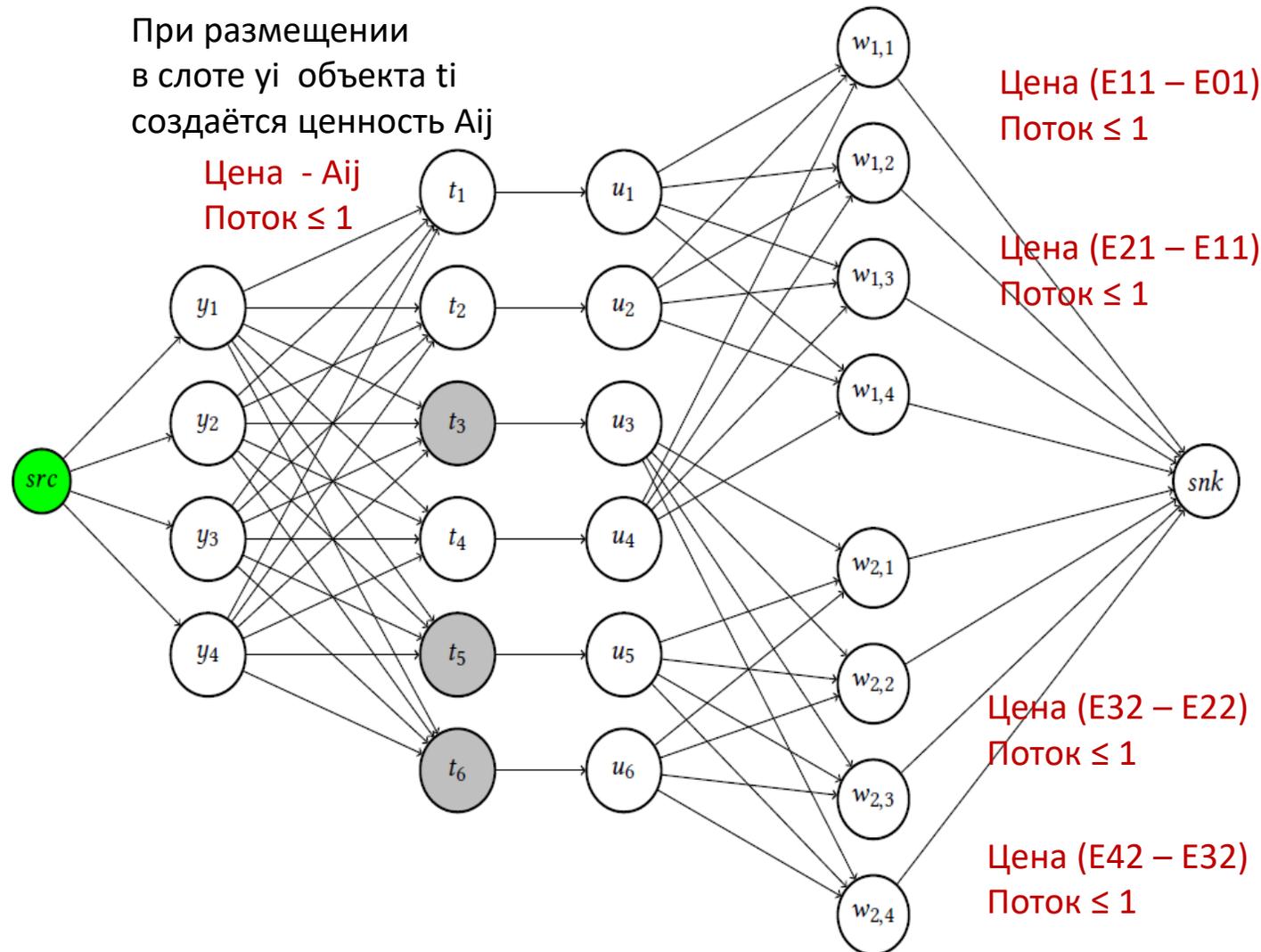
Цена ( $E_{32} - E_{22}$ )  
Поток  $\leq 1$

Цена ( $E_{42} - E_{32}$ )  
Поток  $\leq 1$

- (1) A source node  $src$ .
- (2)  $n$  nodes  $y_1, \dots, y_n$ , each corresponding to a slot, with zero-cost edges from  $src$ .
- (3)  $m$  nodes  $t_1, \dots, t_m$ , each corresponding to an item. For every  $i \in \{1, \dots, n\}$  and  $j \in \{1, \dots, m\}$ , we connect  $y_i$  to  $t_j$  with an edge of cost  $-A_{ij}$ .
- (4)  $m$  nodes  $u_1, \dots, u_m$ , each corresponding to an item. For every  $j \in \{1, \dots, m\}$ , we connect  $t_j$  to  $u_j$  with a zero-cost edge. This ensures each item to be picked for no more than one slot, as only a maximum flow of one is possible from  $t_j$  to  $u_j$ .
- (5) For each category  $k \in \{1, \dots, c\}$ ,  $n$  nodes  $w_{k,1}, w_{k,2}, \dots, w_{k,n}$ . For each item  $j \in \{1, \dots, m\}$ , if this item belongs to category  $k$ , we add zero-cost edges from  $u_j$  to all the  $n$  category nodes  $w_{k,i}$  corresponding to category  $k$ .
- (6) A sink node  $snk$  with edges from all category nodes  $w_{k,i}$ . The cost of the edge from node  $w_{k,i}$  to  $snk$  is set to  $E_{k,i} - E_{k,i-1}$ .

# Группы объектов по жанрам

Цель: частота жанров в рекомендациях соответствует истории пользователя



$E_{01}$  – штраф за выбор  $j = 0$  объектов в категории  $k = 1$

$E_{11}$  – штраф за выбор  $j = 1$  объектов в категории  $k = 1$

Поток минимальной стоимости максимизирует целевую функцию

$$(1 - \lambda) \times \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n M_{ij} A_{ij} - \lambda \times \sum_{k=1}^c E_{k,nq}(k)$$



# Мягкие ограничения на источнике и на стоке

Рекомендация людей, услуг, работы

Оптимизация для сайтов знакомств, трудоустройства, услуг мастеров и т.п.

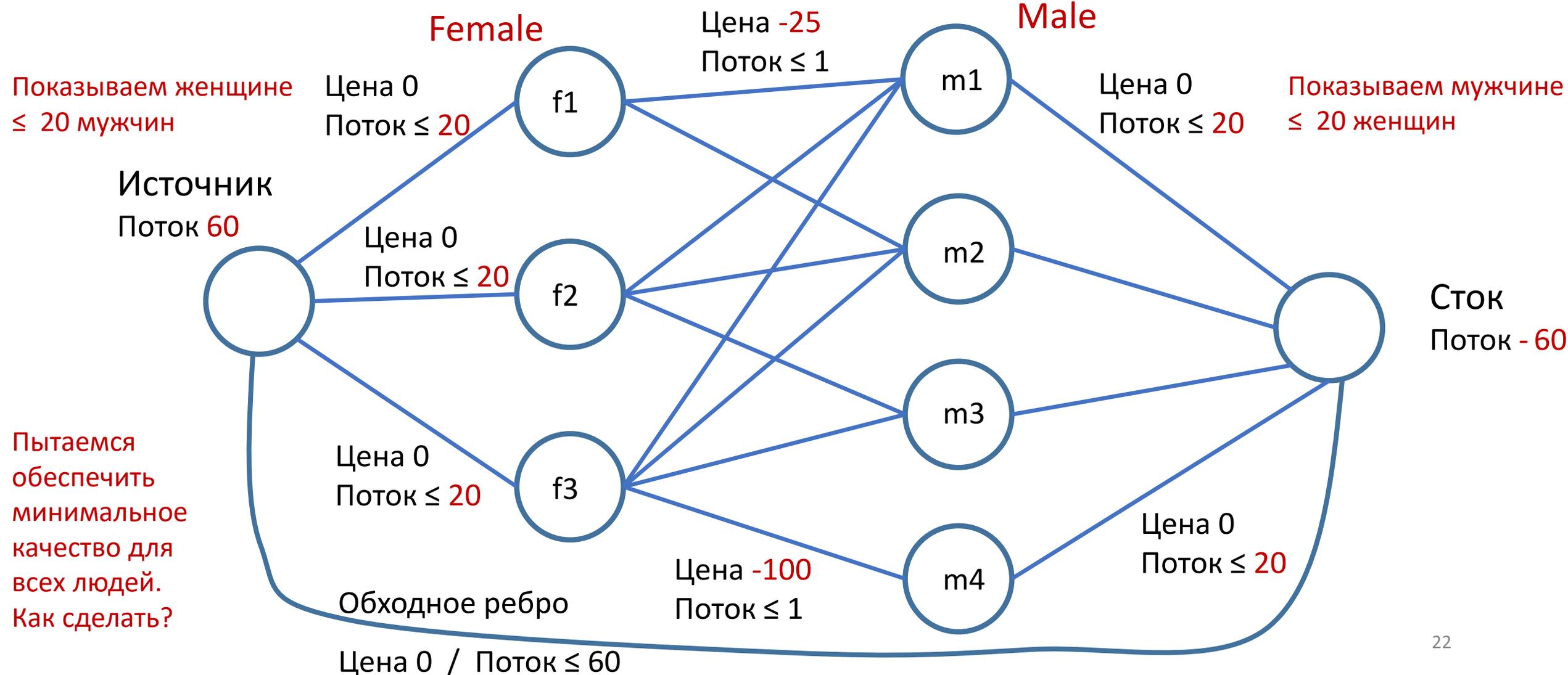
Hikima, Y.; Akagi, Y.; Kim, H.; Kohjima, M.; Kurashima, T.; Toda, H. Integrated Optimization of Bipartite Matching and Its Stochastic Behavior: New Formulation and Approximation Algorithm via Min-Cost Flow Optimization. *AAAI* **2021**, 35, 3796-3805.

<https://ojs.aaai.org/index.php/AAAI/article/view/16497>

# Распределение пар на сайте знакомств

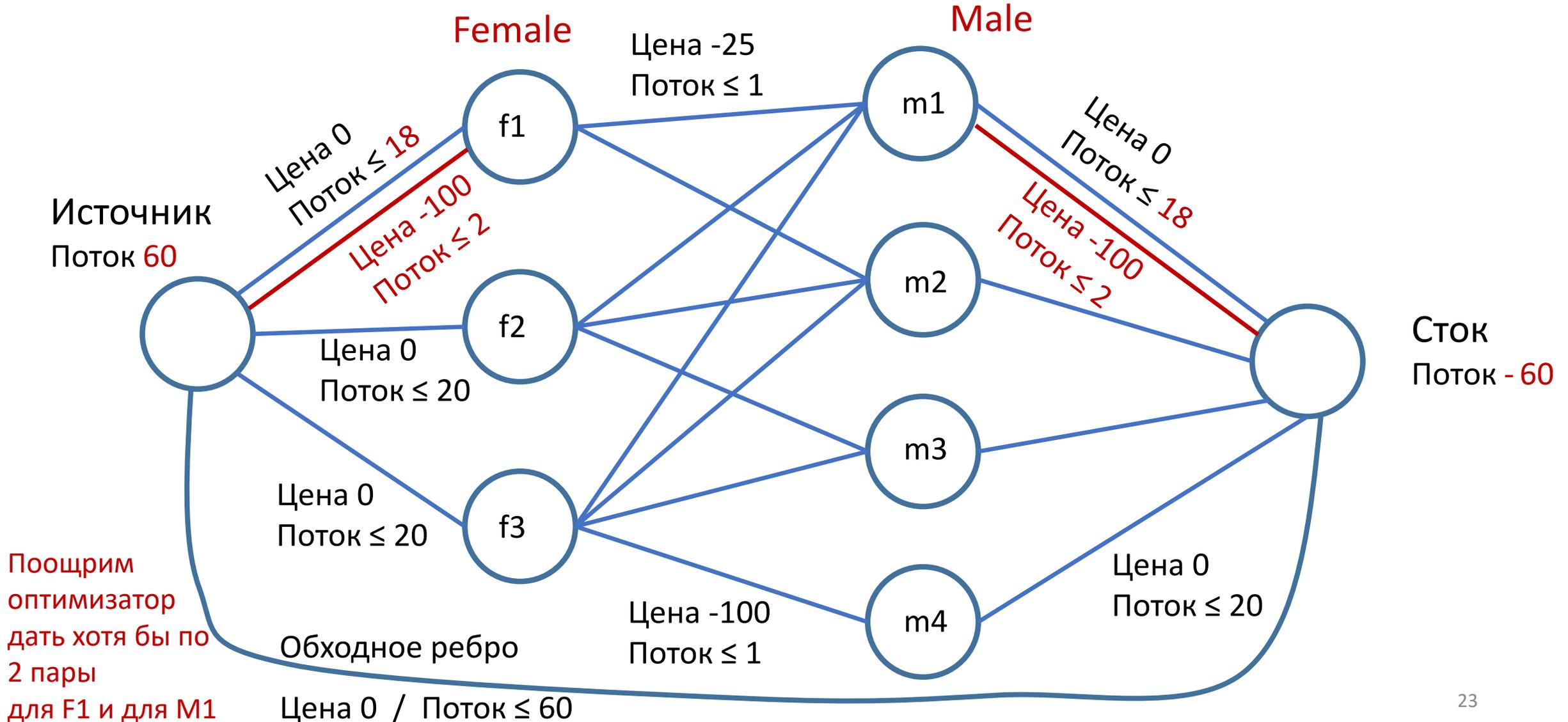
Каждому пользователю по подходящей паре

Допустимые рёбра: совместимость требований  
Цена – качество пары



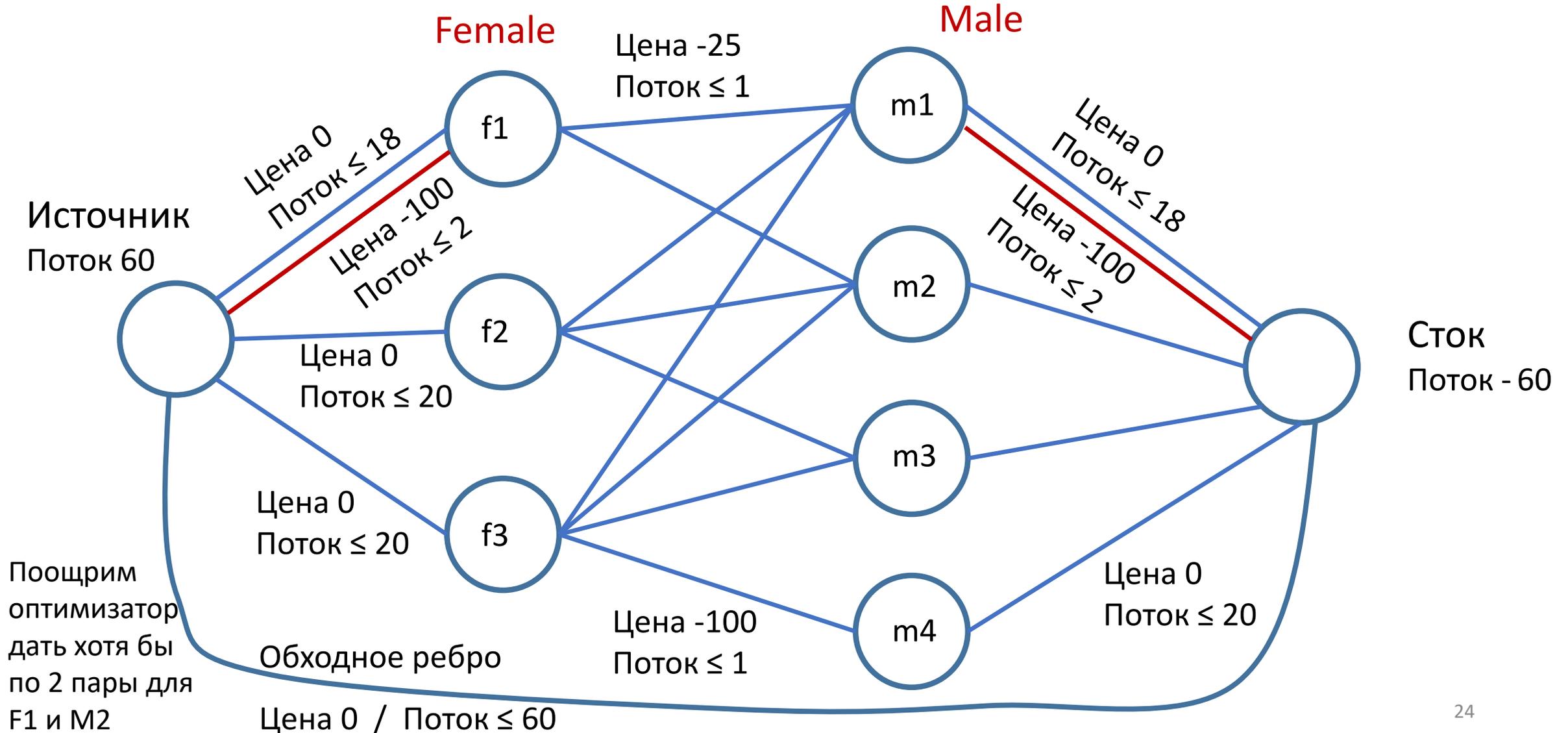
# Изменяем граф, чтобы дать каждому по паре

Допустимые рёбра: совместимость требований  
Качество рекомендации => цена перевозки -  $A_{ij}$



# Как учесть асимметрию online знакомств?

Допустимые рёбра: совместимость требований  
Качество рекомендации => цена перевозки -  $A_{ij}$



# Что выиграли и чем пожертвовали?

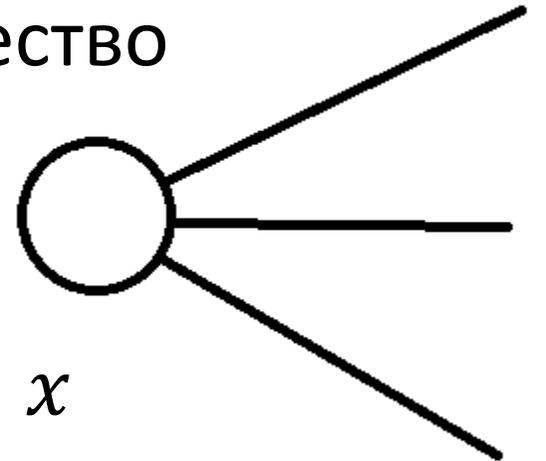
От общей задачи LP перешли к  
потокам минимальной стоимости

# Что выиграли и чем пожертвовали?

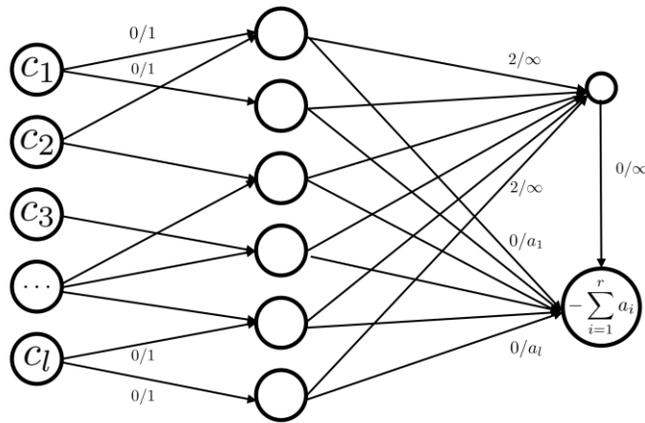
От общей задачи LP перешли к потокам минимальной стоимости

Нельзя выразить ограничение на СРЕДНЕЕ качество рекомендаций

$$\frac{M_{11}A_{11} + M_{12}A_{12} + M_{13}A_{13}}{M_{11} + M_{12} + M_{13}} \geq x$$



# Литература



## "Post Processing Recommender Systems for Diversity"

Arda Antikacioglu, R Ravi

KDD '17: Proceedings of the 23rd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining, Pages 707 - 716

<https://www.contrib.andrew.cmu.edu/~ravi/kdd17.pdf>

<https://dl.acm.org/doi/10.1145/3097983.3098173>

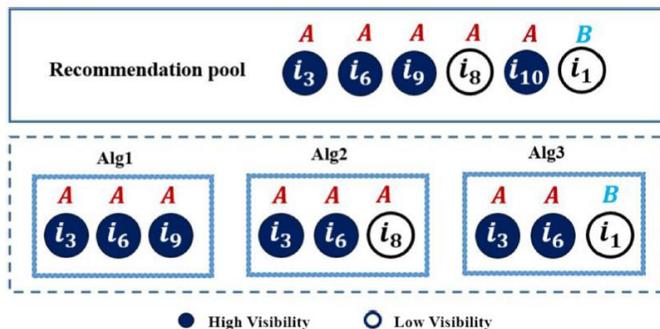
<https://www.youtube.com/watch?v=yE3jwoVIG3U>

## "A Graph-based Approach for Mitigating Multi-sided Exposure Bias in Recommender Systems "

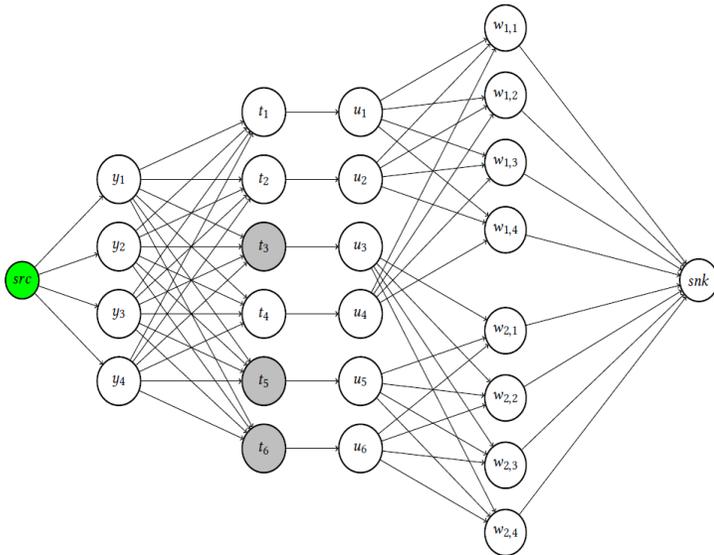
Mansoury, Masoud & Abdollahpouri, Himan & Pechenizkiy, Mykola & Mobasher, Bamshad & Burke, Robin

ACM Transactions on Information Systems 40(2):1-31, April 2022

<https://arxiv.org/abs/2107.03415>



# Литература



"Calibrated Recommendations as a Minimum-Cost Flow Problem"

Himan Abdollahpouri, Himan Abdollahpouri, Zahra Nazari, Alex Gain, Clay Gibson, Maria Dimakopoulou, Jesse Anderton, Benjamin Carterette, Mounia Lalmas, Tony Jebara

WSDM 2023, <https://abdollahpouri.github.io/assets/docs/wsdm2023.pdf>

<https://research.atspotify.com/publications/calibrated-recommendations-as-a-minimum-cost-flow-problem>

<https://abdollahpouri.github.io/>

"An Efficient Implementation of a Scaling Minimum-Cost Flow Algorithm",

A.V. Goldberg, J. Algorithms, Vol. 22 (1997), pp. 1--29.

<https://sci-hub.ru/10.1006/jagm.1995.0805>

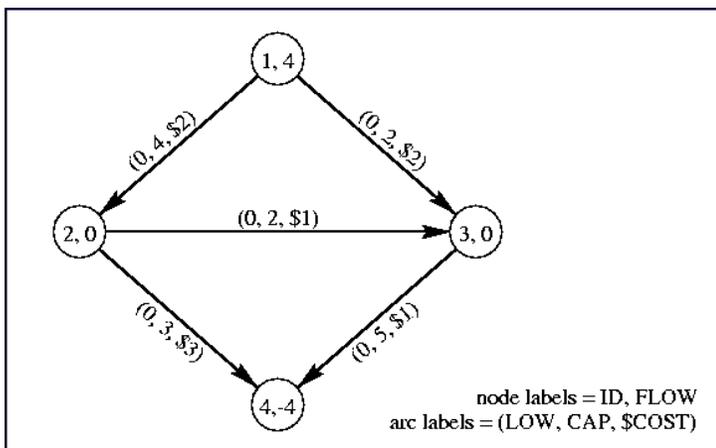
Реализация от автора:

<https://web.archive.org/web/20130630185017/http://www.igsystems.com/cs2/cs2-4.6.tar> и от других

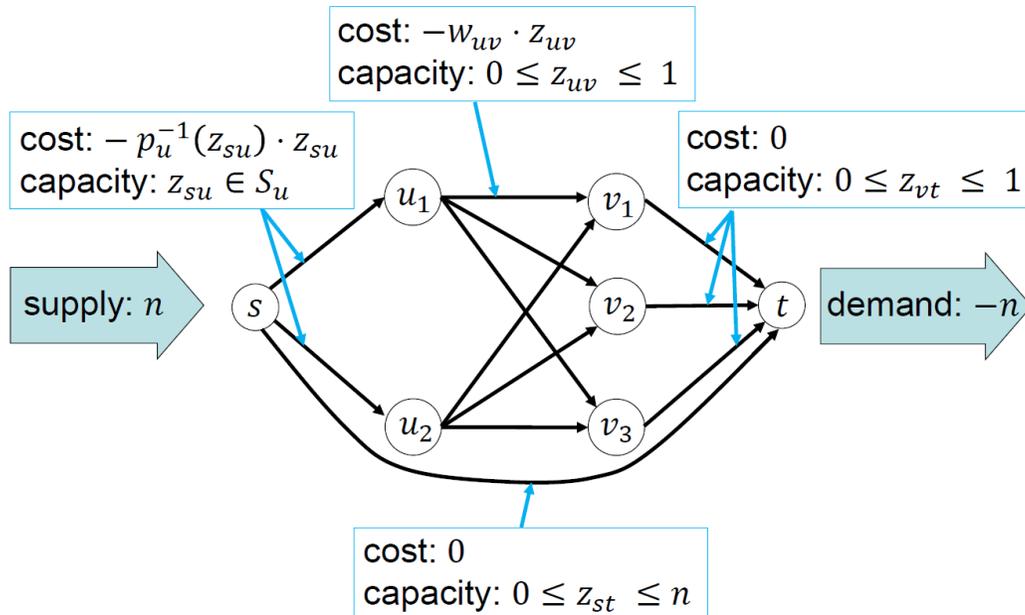
<https://github.com/iveney/cs2> <https://github.com/rick/CSA> <https://github.com/eigenpi/CS2-CPP>

Описание задачи: DIMACS <https://lpsolve.sourceforge.net/5.5/DIMACS.htm>

[https://lpsolve.sourceforge.net/5.5/DIMACS\\_mcf.htm](https://lpsolve.sourceforge.net/5.5/DIMACS_mcf.htm)



# Литература



Оптимизация для сайта знакомств, трудоустройства, услуг мастеров и т.п.

Hikima, Y.; Akagi, Y.; Kim, H.; Kohjima, M.; Kurashima, T.; Toda, H. Integrated Optimization of Bipartite Matching and Its Stochastic Behavior: New Formulation and Approximation Algorithm via Min-Cost Flow Optimization. *AAAI* **2021**, 35, 3796-3805.

<https://ojs.aaai.org/index.php/AAAI/article/view/16497>

<https://ojs.aaai.org/index.php/AAAI/article/view/16497/16304>

Spotify Research Blog <https://research.atspotify.com/>

Один из авторов <https://abdollahpouri.github.io/>

<https://arxiv.org/search/?query=Abdollahpouri&searchtype=all&source=header>