А. Л. Городенцев[*]

А Л Г Е Б Р А

для студентов-математиков

часть II

Москва, МЦНМО, 2023

[*]Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Независимый Московский университет, Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», e-mail: gorod@itep.ru, http://gorod.bogomolov-lab.ru/.

Оглавление

§1. Тензорные произведения

Всюду в этом параграфе мы обозначаем через K произвольное коммутативное кольцо с единицей, а через $\Bbbk$ — произвольное поле.

1.1. Тензорное произведение модулей. Напомню[1], что множество векторов E в модуле V над коммутативным кольцом K называется *базисом* этого модуля над K, если каждый вектор $v \in V$ допускает единственное разложение $v = \sum_{e \in E} x_e e$, в котором коэффициенты $x_e \in K$ отличны от нуля только для конечного числа векторов e. Например, мономы x^k с целыми неотрицательными k образуют базис модуля многочленов $K[x]$, но не образуют базиса в модуле степенных рядов $K[\![x]\!]$. Мы говорим, что множество векторов $B \subset V$ линейно порождает V над K, если каждый вектор из V является *конечной* линейной комбинацией векторов из B, а линейная зависимость множества векторов $M \subset V$ означает, что некоторая *конечная* линейная комбинация этих векторов с ненулевыми коэффициентами равна нулю в V.

Говоря вольно, тензорное произведение модулей $V_1, \dots, V_n$ — это K-линейная оболочка формальных произведений $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$ всевозможных векторов $v_i \in V_i$, а все линейные соотношения между такими произведениями порождаются соотношениями дистрибутивности

$$\dots \otimes (xu + yw) \otimes \dots = x \cdot (\dots \otimes u \otimes \dots) + y \cdot (\dots \otimes w \otimes \dots), \tag{1-1}$$

где $x, y \in K$, $u, w \in V_i$ и обозначенные многоточиями соответственные сомножители в левой и правой частях одинаковы. Формализуется это следующим образом.

Обозначим через $\mathcal{V}$ свободный K-модуль, базисом которого являются всевозможные n-буквенные слова $[v_1 \dots v_n]$, где в качестве i-той буквы может выступать любой вектор $v_i \in V_i$. Далее, обозначим через $\mathcal{R} \subset \mathcal{V}$ подмодуль, порождённый всеми трёхчленными линейными комбинациями вида

$$[\dots (xu + yw) \dots] - x[\dots u \dots] - y[\dots w \dots], \tag{1-2}$$

где указанные многоточиями соответственные фрагменты всех трёх слов одинаковы. Наконец, положим по определению

$$V_1 \otimes \dots \otimes V_n \overset{\text{def}}{=} \mathcal{V}/\mathcal{R}, \quad v_1 \otimes \dots \otimes v_n \overset{\text{def}}{=} [v_1 \dots v_n] \pmod{\mathcal{R}}. \tag{1-3}$$

Этот модуль называется *тензорным произведением* модулей $V_1, \dots, V_n$ над K, а его элементы называются *тензорами*. Если надо явно указать кольцо K, над которым рассматриваются модули, мы будем писать $\otimes_K$ вместо $\otimes$. Тензоры вида $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$, где $v_i \in V_i$, называются *разложимыми*. По построению, они линейно порождают модуль $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ над K. Подчеркнём, что K-линейная комбинация разложимых тензоров, скорее всего, будет не разложима. В силу того, что все трёхчленные комбинации (1-2) объявлены равными нулю, в модуле $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ выполняются соотношения (1-1), а отображение

$$\tau : V_1 \times \dots \times V_n \to V_1 \otimes \dots \otimes V_n, \quad (v_1, \dots, v_n) \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_n, \tag{1-4}$$

линейно по каждому аргументу при фиксированных остальных. Оно называется *тензорным умножением*, и его образ состоит в точности из разложимых тензоров. Обратите внимание, что отображение (1-4) обычно не сюрьективно, его образ *не является* K-подмодулем, но его линейная оболочка равна $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$. Это объясняется тем, что отображение (1-4) не линейно, но при этом однозначно линеаризует все полилинейные отображения $V_1 \times \dots \times V_n \to W$.

[1] См. n° 6.7 на стр. 108 части I.

1.1.1. Полилинейные отображения. Отображение множеств

$$\varphi : V_1 \times \ldots \times V_n \to W , \tag{1-5}$$

где $V_1, \ldots , V_n$ и W — произвольные K-модули, называется *полилинейным* (или *n-линейным*, когда важно точно указать количество аргументов), если оно линейно отдельно по каждому из своих аргументов при произвольным образом зафиксированных остальных:

$$\varphi(\ldots , \lambda v' + \mu v'' , \ldots) = \lambda\, \varphi(\ldots , v' , \ldots) + \mu\, \varphi(\ldots , v'' , \ldots) .$$

Например, 1-линейные отображения $V \to W$ суть просто линейные отображения, а 2-линейные отображения $V \times V \to K$ — это билинейные формы на модуле V. Полилинейные отображения (1-5) можно складывать и умножать на элементы из кольца K, так что они тоже образуют K-модуль. Он называется *модулем полилинейных отображений* и обозначается через $\mathrm{Hom}(V_1, \ldots , V_n; W)$ или $\mathrm{Hom}_K(V_1, \ldots , V_n; W)$, если важно явно указать кольцо.

Пример 1.1 (полилинейные отображения свободных модулей)
Если все модули V_i свободны с базисами $E_i \subset V_i$, то каждое полилинейное отображение (1-5) однозначно определяется своими значениями $\varphi(e_1, \ldots , e_n) \in W$ на всевозможных сочетаниях базисных векторов $(e_1, \ldots , e_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$, и эти значения могут быть произвольны. Если они заданы, то на любом наборе векторов $v_i = \sum_{e_i \in E_i} x_{e_i} e_i \in V_i$ отображение φ будет принимать значение

$$\varphi(v_1, \ldots , v_n) = \sum\nolimits_{(e_1,\ldots,e_n)\in E_1\times\ldots\times E_n} x_{e_1} \ldots x_{e_n} \varphi(e_1, \ldots , e_n) .$$

Если модуль W тоже свободен с базисом $E \subset W$ то векторы $\varphi(e_1, \ldots , e_n) \in W$ можно однозначно задавать их координатами в этом базисе. Пусть

$$\varphi(e_1, \ldots , e_n) = \sum\nolimits_{e\in E} a^{e}_{e_1,\ldots,e_n} e .$$

Сопоставим полилинейному отображению φ набор чисел $a^{e}_{e_1,\ldots,e_n} \in K$, который можно представлять себе как $(n+1)$-мерную матрицу, ячейки которой нумеруются элементами множества[1] $E \times E_1 \times \ldots \times E_n$. В терминах этой матрицы

$$\varphi(v_1, \ldots , v_n) = \sum\nolimits_{(e,e_1,\ldots,e_n)\in E\times E_1\times\ldots\times E_n} x_{e_1} \ldots x_{e_n} a^{e}_{e_1,\ldots,e_n} e .$$

При сложении полилинейных отображений и умножении их на числа из K сопоставленные этим отображениям матрицы поэлементно складываются и умножаются на числа. Таким образом, мы получаем K-линейный изоморфизм между модулем $\mathrm{Hom}(V_1, \ldots , V_n; W)$ и свободным модулем $(n+1)$-мерных матриц размера $E\times E_1\times\ldots\times E_n$, базис которого нумеруется элементами множества $E \times E_1 \times \ldots \times E_n$. При этом изоморфизме стандартная базисная матрица, имеющая единицу в позиции $(e, e_1, \ldots , e_n)$ и нули в остальных местах, переходит в полилинейное отображение $\delta^{e_1\ldots e_n}_e : (v_1, \ldots , v_n) \mapsto x_{e_1} \ldots x_{e_n} \cdot e$, значения которого на базисных векторах суть

$$\delta^{e_1\ldots e_n}_e(e'_1, \ldots , e'_n) = \begin{cases} e, & \text{если } (e'_1, \ldots , e'_n) = (e_1, \ldots , e_n), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{1-6}$$

Если ранги всех модулей конечны, то $\mathrm{rk}\,\mathrm{Hom}(V_1, \ldots , V_n; W) = \mathrm{rk}\, W \cdot \prod_i \mathrm{rk}\, V_i$.

[1] При $n = 1$ получается обычная двумермерная матрица линейного отображения $V \to W$, строки которой биективно соответствуют базисным векторам пространства W, а столбцы — базисным векторам пространства V.

Предложение 1.1 (универсальное свойство тензорного произведения)
Для любого полилинейного отображения K-модулей $\varphi : V_1\times\ldots\times V_n \to W$ существует единственное такое линейное отображение $\overline{\varphi} : V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \to W$, что $\varphi = \overline{\varphi}\circ\tau$, т. е. пара полилинейных сплошных стрелок в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
& V_1\otimes\ldots\otimes V_n \arrow[dd, dashed, "\overline{\varphi}"] \\
V_1\times\ldots\times V_n \arrow[ur, "\tau"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \\
& W
\end{tikzcd}$$

всегда замыкается в коммутативный треугольник единственным пунктирным линейным отображением.

Доказательство. Для любого отображения множеств $\varphi : V_1\times\ldots\times V_n \to W$ существует единственное линейное отображение $F : \mathcal{V} \to W$, переводящее базисный вектор $[v_1\ldots v_n] \in \mathcal{V}$ в $\varphi(v_1,\ldots,v_n)$. Для того, чтобы это отображение было корректно определено на фактор модуле $\mathcal{V}/\mathcal{R}$, достаточно проверить, что $\mathcal{R} \subset \ker F$. Для каждого соотношения (1-2) в силу полилинейности φ и линейности F имеем

$$\begin{aligned}F\big([\ldots(\lambda u+\mu w)\ldots] - \lambda\,[\ldots u\ldots] - \mu\,[\ldots w\ldots]\big) &=\\ = F\big([\ldots(\lambda u+\mu w)\ldots]\big) - \lambda\,F\big([\ldots u\ldots]\big) - \mu\,F\big([\ldots w\ldots]\big) &=\\ = \varphi(\ldots\,,(\lambda u+\mu w),\,\ldots) - \lambda\,\varphi(\ldots\,,u,\,\ldots) - \mu\,\varphi(\ldots\,,w,\,\ldots) &= 0\,,\end{aligned}$$

что и требовалось. □

Предложение 1.2 (единственность универсального полилинейного отображения)
Если полилинейные отображения $\tau_1 : V_1\times\ldots\times V_n \to U_1$ и $\tau_2 : V_1\times\ldots\times V_n \to U_2$ обладают универсальным свойством из предл. 1.1, т. е. для любых векторного пространства W и полилинейного отображения $\varphi : V_1\times\ldots\times V_n \to W$ существуют единственные такие линейные отображения $\overline{\varphi}_1 : U_1 \to W$ и $\overline{\varphi}_2 : U_2 \to W$, что $\varphi = \overline{\varphi}_1\circ\tau_1 = \overline{\varphi}_2\circ\tau_2$, то имеется единственный такой линейный изоморфизм $\iota : U_1 \xrightarrow{\sim} U_2$, что $\tau_2 = \iota\tau_1$.

Доказательство. В силу универсальности τ_1 и τ_2 существуют единственные такие линейные отображения $\overline{\tau}_{21} : U_1 \to U_2$ и $\overline{\tau}_{12} : U_2 \to U_1$, что $\tau_2 = \overline{\tau}_{21}\tau_1$ и $\tau_1 = \overline{\tau}_{12}\tau_2$, т. е. коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[dr, dashed, "\overline{\tau}_{21}"] \arrow[dd, equal, "\mathrm{Id}_{U_1}"'] & & & & U_2 \arrow[dl, dashed, "\overline{\tau}_{12}"'] \arrow[dd, equal, "\mathrm{Id}_{U_2}"] \\
& U_2 \arrow[dl, dashed, "\overline{\tau}_{12}"] & V_1\times\ldots\times V_n \arrow[l, "\tau_2"'] \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[ull, "\tau_1"'] \arrow[dll, "\tau_1"] \arrow[urr, "\tau_2"] \arrow[drr, "\tau_2"'] & U_1 \arrow[dr, dashed, "\overline{\tau}_{21}"'] & \\
U_1 & & & & U_2\,.
\end{tikzcd}$$

Равенства $\overline{\tau}_{21}\overline{\tau}_{12} = \mathrm{Id}_{U_2}$ и $\overline{\tau}_{12}\overline{\tau}_{21} = \mathrm{Id}_{U_1}$ выполняются в силу того, что разложения $\tau_1 = \varphi\circ\tau_1$ и $\tau_2 = \psi\circ\tau_2$ единственны и имеют место для $\varphi = \mathrm{Id}_{U_1}$, $\psi = \mathrm{Id}_{U_2}$. □

Предложение 1.3
Если каждый из модулей V_i свободен с базисом $E_i \subset V_i$, то их тензорное произведение $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ также свободно с базисом

$$e_1 \otimes \ldots \otimes e_n\,, \quad e_i \in E_i\,. \tag{1-7}$$

В частности, если $\operatorname{rk} V_i = |E_i| < \infty$ для всех i, то $\operatorname{rk} V_1 \otimes \ldots \otimes V_n = \prod \operatorname{rk} V_i$.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{W}$ свободный модуль с базисом из выражений (1-7), которые мы временно будем воспринимать как формальные символы. Полилинейное отображение $\tau: V_1 \times \ldots \times V_n \to \mathcal{W}$, переводящее каждый набор базисных векторов $(e_1, \ldots, e_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$ в соответствующий базисный вектор (1-7) модуля $\mathcal{W}$, универсально, поскольку для полилинейного $\varphi: V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ и линейного $F: \mathcal{W} \to W$ равенство $\varphi = F \circ \tau$ равносильно выполнению для всех $(e_1, \ldots, e_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$ равенств $F(e_1 \otimes \ldots \otimes e_n) = \varphi(e_1, \ldots, e_n)$, которые однозначно определяют F, если дано φ, и наоборот. По предл. 1.2 имеется единственный линейный изоморфизм $\mathcal{W} \xrightarrow{\sim} V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$, переводящий базисные векторы (1-7) модуля $\mathcal{W}$ в соответствующие тензорные произведения базисных векторов, вычисленные в $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$. Тем самым, последние тоже образуют базис. □

Пример 1.2 (многочлены)
Обратите внимание, что предл. 1.3 справедливо и для свободных модулей *бесконечного* ранга. Например, тензорное произведение n экземпляров модуля многочленов $K[x] \otimes \ldots \otimes K[x]$ изоморфно модулю многочленов от n переменных $K[x_1, \ldots, x_n]$. Изоморфизм сопоставляет базисному разложимому тензору $x^{m_1} \otimes \ldots \otimes x^{m_n}$ базисный моном $x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}$.

Предостережение 1.1. Для произвольных модулей над произвольным коммутативным кольцом строение модуля $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ отнюдь не очевидно из его определения в терминах образующих и соотношений. Например, при взаимно простых $m, n \in \mathbb{Z}$ тензорное произведение $\mathbb{Z}$-модулей $\mathbb{Z}/(m) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(n) = 0$, поскольку класс $[n]_m \in \mathbb{Z}/(m)$ обратим, и каждый элемент $[a]_m \in \mathbb{Z}/(m)$ представляется в виде $[a]_m = [na']_m$, откуда каждый разложимый тензор

$$[a]_m \otimes [b]_n = [na']_m \otimes [b]_n = n \cdot ([a']_m \otimes [b]_n) = [a']_m \otimes [nb]_n = [a']_m \otimes [0]_n = 0$$

ибо тензорное произведение с нулевым вектором всегда нулевое:

$$a \otimes 0 = a \otimes (0 \cdot 0) = 0 \cdot (a \otimes 0) = 0\,.$$

Упражнение 1.1. Докажите, что в общем случае $\mathbb{Z}/(m) \otimes \mathbb{Z}/(n) \simeq \mathbb{Z}/(\text{нод}(m, n))$.

Предложение 1.4
Для любого K-модуля V отображение $K \otimes V \xrightarrow{\sim} V$, $x \otimes u \mapsto xu$, является K-линейным изоморфизмом.

Доказательство. Достаточно убедиться, что билинейное отображение

$$\tau: K \times V \xrightarrow{\sim} V\,, \quad (x, u) \mapsto xu\,,$$

универсально. Для любого билинейного отображения $\varphi: K \times V \xrightarrow{\sim} W$ отображение $\widetilde{\varphi}: V \to W$ со свойством $\widetilde{\varphi}\tau = \varphi$ обязано переводить каждый вектор $v \in V$ в $\varphi(1, v)$. Очевидно, что это отображение линейно и $\widetilde{\varphi}(xv) = \varphi(1, xv) = x\varphi(1, v) = \varphi(x, v)$ для любых $x \in K$ и $v \in V$. □

Упражнение 1.2. Докажите, что $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}$.

1.1.2. Тензорные произведения векторных пространств. Если $V_1, \dots, V_n$ являются векторными пространствами над полем $\Bbbk$ размерностей $d_1, \dots, d_n$, то их тензорное произведение $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ имеет размерность $d_1 \dots d_n$. На геометрическом языке тензорное умножение

$$\tau : V_1 \times \dots \times V_n \to V_1 \otimes \dots \otimes V_n$$

отображает произведение проективных пространств $\mathbb{P}_{m_i} = \mathbb{P}(V_i)$, где $m_i = d_i - 1$, в проективное пространство $\mathbb{P}_m = \mathbb{P}\left(V_1 \otimes \dots \otimes V_n\right)$ размерности $m = d_1 \dots d_n - 1 = (m_1 + 1) \dots (m_n + 1) - 1$:

$$s : \mathbb{P}_{m_1} \times \dots \times \mathbb{P}_{m_n} \to \mathbb{P}_m . \tag{1-8}$$

Оно переводит набор одномерных подпространств, натянутых на ненулевые векторы $v_i \in V_i$, в одномерное подпространство, порождённое тензором $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$.

Упражнение 1.3. Убедитесь, что отображение (1-8) корректно определено[1], инъективно, и его образ не содержится ни в какой гиперплоскости.

Отображение (1-8) называется *вложением Сегре*. Его образ состоит из классов пропорциональности разложимых тензоров и называется *многообразием Сегре*. Он линейно порождает объемлющее проективное пространство, имея при этом размерность $m_1 + \dots + m_n$, обычно намного меньшую, чем m. По построению, многообразие Сегре заметается n семействами проективных подпространств размерностей $m_1, \dots, m_n$ так, что подпространства в каждом из семейств попарно не пересекаются, а любые n подпространств из разных семейств пересекаются в одной точке, и каждая точка многообразия Сегре является точкой пересечения n таких подпространств.

Пример 1.3 (изоморфизм $U^* \otimes V \simeq \mathrm{Hom}(U, V)$ и разложимые операторы)
Для произвольных векторных пространств U, W над полем $\Bbbk$ имеется билинейное отображение

$$W \times U^* \to \mathrm{Hom}(U, W) \tag{1-9}$$

переводящее пару $(w, \xi) \in W \times U^*$ в линейный оператор

$$U \to W , \quad u \mapsto \xi(u) \cdot w , \tag{1-10}$$

с ядром $\mathrm{Ann}(\xi) \subset U$ и образом $\Bbbk\, w$. При ненулевых ξ, w оператор (1-10) имеет ранг 1. Поскольку образ любого оператора $F : U \to W$ ранга 1 порождается некоторым ненулевым вектором $w \in W$, который определяется по F однозначно с точностью до пропорциональности, значение такого оператора на произвольном векторе $u \in U$ равно $F(u) = \xi(u) \cdot w$ для некоторого $\xi \in \mathrm{Ann} \ker F \subset U^*$, однозначно определяемого по F и w. Мы заключаем, что *вложение Сегре*

$$s : \mathbb{P}(W) \times \mathbb{P}(U^*) \hookrightarrow \mathbb{P}\big(\mathrm{Hom}(U, W)\big)$$

биективно отображает произведение $\mathbb{P}(W) \times \mathbb{P}(U^*)$ на множество рассматриваемых с точностью до пропорциональности линейных операторов $U \to W$ ранга 1.

В силу универсального свойства тензорного произведения, билинейное отображение (1-9) однозначно задаёт линейное отображение

$$W \otimes U^* \to \mathrm{Hom}(U, V) \tag{1-11}$$

[1] Т. е. тензор $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$ отличен от нуля при любых ненулевых $v_i \in V_i$ и заменяется на пропорциональный при замене векторов v_i на пропорциональные.

переводящее каждый разложимый тензор $w \otimes \xi$ в оператор (1-10). Если пространства U и W конечномерны с базисами $u_1, \dots, u_n$ и $w_1, \dots, w_m$, то mn разложимых тензоров $w_j \otimes u_i^*$, где $u_1^*, \dots, u_n^* \in U^*$ образуют двойственный к $u_1, \dots, u_n$ базис пространства U^*, образуют базис пространства $W \otimes U^*$. Отображение (1-11) переводит базисный тензор $w_j \otimes u_i^*$ в линейный оператор

$$U \to W\,, \quad u_k \mapsto \begin{cases} w_j & \text{при } k = i \\ 0 & \text{в остальных случаях}\,, \end{cases}$$

матрицей которого в выбранных базисах является стандартная базисная матрица E_{ij} с единицей в клетке (i,j) и нулями в остальных местах. Мы заключаем, что отображение (1-11) является линейным изоморфизмом. В дальнейшем мы часто будем отождествлять пространства $W \otimes U^*$ и $\mathrm{Hom}(U,W)$ при помощи изоморфизма (1-11) и обозначать оператор (1-10) через $w \otimes \xi$. Если записывать операторы $U \to W$ их матрицами $A = (a_{ij})$ в выбранных выше базисах, то точки $w = (x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_m = \mathbb{P}(W)$ и $\xi = (y_0 : y_1 : \dots : y_m) \in \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(U^*)$ перейдут при вложении Сегре в $m \times n$ матрицу $A = w^t \cdot \xi$ с элементами $a_{ij} = x_i y_j$, а его образ, состоящий из матриц ранга 1, задастся однородными квадратичными уравнениями

$$\det \begin{pmatrix} a_{ij} & a_{ik} \\ a_{\ell j} & a_{\ell k} \end{pmatrix} = a_{ij}a_{\ell k} - a_{ik}a_{\ell j} = 0\,.$$

Два семейства координатных пространств $\xi \times \mathbb{P}_m$ и $\mathbb{P}_n \times w$ при этом перейдут в два семейства лежащих на многообразии Сегре проективных пространств, образованных матрицами ранга 1 с фиксированными отношениями между строками и столбцами соответственно.

Пример 1.4 (квадрика Сегре в $\mathbb{P}_3$)
При $U = W = \Bbbk^2$ вложение Сегре задаёт биекцию между $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ и точками гладкой 1-планарной[1] *квадрики Сегре*

$$S = V(\det) = \{X \in \mathrm{Mat}_2(\Bbbk) \mid \det X = 0\} \tag{1-12}$$

в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\mathrm{Mat}_2(\Bbbk))$, которая состоит из классов пропорциональности 2×2 матриц ранга 1, т. е. ненулевых $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ с $ad - bc = 0$. На языке координат вложение Сегре переводит пару точек $(x_0 : x_1)$ и $(y_0 : y_1)$ из $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ в матрицу

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0y_0 & x_1y_0 \\ x_0y_1 & x_1y_1 \end{pmatrix} \tag{1-13}$$

и отображает два семейства координатных прямых $\mathbb{P}_1 \times \{y\}$, $\{x\} \times \mathbb{P}_1 \subset \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ в два семейства проективных прямых на квадрике Сегре, образованных матрицами ранга 1 с фиксированными отношениями [строка 1] : [строка 2] $= (x_0 : x_1)$ и [столбец 1] : [столбец 2] $= (y_0 : y_1)$. В каждом из семейств все прямые попарно скрещиваются, а любые две прямые из разных семейств пересекаются, при этом каждая точка квадрики Сегре является точкой пересечения ровно одной пары прямых из разных семейств, и никаких других прямых на квадрике Сегре нет.

Упражнение 1.4. Докажите все эти геометрические утверждения.

Поскольку все гладкие 1-планарные квадратичные поверхности в $\mathbb{P}_3$ проективно эквивалентны друг другу над любым полем, мы заключаем, лежащие на любой из них прямые ведут себя точно также, как на квадрике Сегре.

[1]См. n° 17.5.3 на стр. 323 части I.

1.2. Канонические изоморфизмы. Всюду в этом разделе речь идёт о произвольных модулях над любым коммутативным кольцом K. Линейные отображения $f : V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \to W$ удобно задавать указанием значений $f(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n)$ на разложимых тензорах, а затем по линейности продолжать f на произвольные тензоры. Поскольку разложимые тензоры линейно порождают модуль $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$, такое продолжение единственно при условии, что оно существует. Последнее равносильно тому, что все линейные соотношения, которые имеются между разложимыми тензорами, выполняются и между их образами в модуле W. Так как все эти соотношения линейно порождаются соотношениями полилинейности из форм. (1-1) на стр. 6, мы получаем следующий полезный критерий.

Лемма 1.1
Линейное отображение $f : V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \to W$, $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \mapsto f(v_1, \ldots, v_n)$, существует если и только если векторы $f(v_1, \ldots, v_n) \in W$ полилинейно зависят[1] от векторов $v_i \in V_i$. □

Предложение 1.5
Имеется канонический изоморфизм $U \otimes W \simeq W \otimes U$, $u \otimes w \mapsto w \otimes u$.

Доказательство. Так как правило $u \otimes w \mapsto w \otimes u$ билинейно по u, w, оно по лем. 1.1 корректно определяет линейное отображение $U \otimes W \to W \otimes U$. Аналогично, существует линейное отображение $W \otimes U \to U \otimes W$, $w \otimes u \mapsto u \otimes w$. Оно обратно предыдущему, поскольку обе их композиции тождественно действуют на разложимых тензорах. □

Предложение 1.6 (ассоциативность тензорного умножения)
Имеются канонические изоморфизмы $V \otimes (U \otimes W) \simeq V \otimes U \otimes W \simeq (V \otimes U) \otimes W$, переводящие тензоры $v \otimes (u \otimes w)$, $v \otimes u \otimes w$ и $(v \otimes u) \otimes w$ друг в друга.

Доказательство. Поскольку тензор $v \otimes (u \otimes w) \in V \otimes (U \otimes W)$ трилинейно зависит от (v, u, w), существует линейное отображение $V \otimes U \otimes W \to V \otimes (U \otimes W)$, $v \otimes u \otimes w \mapsto v \otimes (u \otimes w)$. Обратное отображение строится в два шага. При каждом $v \in V$ тензор $v \otimes u \otimes w$ билинейно зависит от u и w. Поэтому имеется линейное отображение

$$\tau_v : U \otimes W \to V \otimes U \otimes W, \quad u \otimes w \mapsto v \otimes u \otimes w,$$

которое само по себе линейно зависит от v. Так как тензор $\tau_v(t) = v \otimes t$ билинеен по $v \in V$ и $t \in U \otimes W$, мы получаем искомое линейное отображение

$$V \otimes (U \otimes W) \to V \otimes U \otimes W, \quad v \otimes (u \otimes w) \mapsto v \otimes u \otimes w.$$

Изоморфизм $V \otimes U \otimes W \simeq (V \otimes U) \otimes W$ устанавливается аналогично. □

Предложение 1.7 (дистрибутивность тензорного умножения)
Имеются канонические изоморфизмы

$$V \otimes (U \oplus W) \simeq (V \otimes U) \oplus (V \otimes W) \quad \text{и} \quad (U \oplus W) \otimes V \simeq (U \otimes V) \oplus (W \otimes V),$$

действующие на разложимые тензоры по правилам:

$$v \otimes (u \dotplus w) \leftrightarrows (v \otimes u) \dotplus (v \otimes w) \quad \text{и} \quad (u \dotplus w) \otimes v \leftrightarrows (u \otimes v) \dotplus (w \otimes v)$$

где через $a \dotplus b$ для $a \in A$ и $b \in B$ обозначено сложение элементов $(a, 0)$ и $(0, b)$ в прямой сумме модулей $A \oplus B$.

[1] Т. е. линейны по каждому v_i при фиксированных остальных.

Доказательство. Достаточно построить первый изоморфизм, второй получится из него применением предл. 1.5. Отображение

$$V \otimes (U \oplus W) \to (V \otimes U) \oplus (V \otimes W), \quad v \otimes (u \dotplus w) \mapsto (v \otimes u) \dotplus (v \otimes w), \tag{1-14}$$

существует, поскольку $(v \otimes u) \dotplus (v \otimes w)$ билинеен по v и $u \dotplus w$. Обратное отображение снова строится в два шага: сначала строим линейные отображения

$$f_1 : V \otimes U \to V \otimes (U \oplus W), \quad v \otimes u \mapsto v \otimes (u \dotplus 0),$$
$$f_2 : V \otimes W \to V \otimes (U \oplus W), \quad v \otimes w \mapsto v \otimes (0 \dotplus w),$$

затем складываем их в отображение

$$f : (V \otimes U) \oplus (V \otimes W) \to V \otimes (U \oplus W), \quad a \dotplus b \mapsto f_1(a) + f_2(b),$$

очевидно, линейное и обратное к (1-14). □

1.3. Тензорное произведение линейных отображений. Для любого набора K-линейных отображений $f_i : U_i \to W_i$ между произвольными модулями над коммутативным кольцом K, тензор

$$f_1(u_1) \otimes \dots \otimes f_n(u_n) \in W_1 \otimes \dots \otimes W_n$$

полилинейно зависит от векторов $(u_1, \dots, u_n) \in U_1 \times \dots \times U_n$. Поэтому существует единственное линейное отображение

$$f_1 \otimes \dots \otimes f_n : U_1 \otimes \dots \otimes U_n \to W_1 \otimes \dots \otimes W_n,$$
$$u_1 \otimes \dots \otimes u_n \mapsto f_1(u_1) \otimes \dots \otimes f_n(u_n).$$

Оно называется *тензорным произведением* отображений $f_i : U_i \to W_i$.

Пример 1.5 (кронекерово произведение матриц)
Рассмотрим векторные пространства U и W с базисами $u_1, \dots, u_n \in U$ и $w_1, \dots, w_m \in W$. Если линейные операторы $f : U \to U$ и $g : W \to W$ имеют в этих базисах матрицы $F = (\varphi_{ij})$ и $G = (\gamma_{k\ell})$, то матрица оператора $f \otimes g : U \otimes W \to U \otimes W$ в базисе из тензоров $u_j \otimes w_\ell$ имеет размеры $(mn) \times (mn)$, а её элементы естественно нумеруются упорядоченными парами (α, β), $1 \leqslant \alpha \leqslant n$, $1 \leqslant \beta \leqslant m$. Эта матрица называется *кронекеровым произведением* матриц F, G и обозначается $F \otimes G$. Поскольку

$$f \otimes g\,(u_j \otimes w_\ell) = \Big(\sum_i u_i \varphi_{ij}\Big) \otimes \Big(\sum_k w_k \gamma_{k\ell}\Big) = \sum_{i,k} \varphi_{ij}\gamma_{k\ell} \cdot u_i \otimes w_k,$$

в пересечении (i,k)-ой строки и (j,ℓ)-го столбца матрицы $F \otimes G$ стоит произведение $\varphi_{ij}\gamma_{k\ell}$. В лексикографически упорядоченном базисе

$$u_1 \otimes w_1, \dots, u_1 \otimes w_m, u_2 \otimes w_1, \dots, u_2 \otimes w_m, \dots, u_n \otimes w_1, \dots, u_n \otimes w_m$$

матрица $F \otimes G$ имеет блочный вид и состоит из n^2 блоков размера $m \times m$, каждый из которых пропорционален матрице G:

$$F \otimes G = (\varphi_{ij}) \otimes (\gamma_{k\ell}) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}G & \varphi_{12}G & \dots & \varphi_{1n}G \\ \varphi_{21}G & \varphi_{22}G & \dots & \varphi_{2n}G \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1}G & \varphi_{n2}G & \dots & \varphi_{nn}G \end{pmatrix}.$$

Лемма 1.2
Если гомоморфизм K-модулей $f : U \twoheadrightarrow W$ сюрьективен, то для любого K-модуля V, гомоморфизм $\mathrm{Id}_V \otimes f : V \otimes U \to V \otimes W$ тоже сюрьективен.

Доказательство. Образ $\mathrm{im}(f \otimes \mathrm{Id}_V)$ содержит все разложимые тензоры $v \otimes w \in V \otimes W$. □

Лемма 1.3
Если ненулевой K-модуль F свободен, то для любого инъективного гомоморфизма K-модулей $f : U \hookrightarrow W$ гомоморфизм $\mathrm{Id}_F \otimes f : F \otimes U \to F \otimes W$ тоже инъективен.

Доказательство. Если $F \simeq K$ имеет ранг 1, изоморфизм из предл. 1.4

$$K \otimes U \xrightarrow{\sim} U\,,\ x \otimes u \mapsto xu\,, \quad \text{и} \quad K \otimes W \xrightarrow{\sim} W\,,\ y \otimes w \mapsto yw\,,$$

отождествляет отображение $\mathrm{Id}_F \otimes f : K \otimes U \to K \otimes W$ с исходным $f : U \to W$, инъективным по условию. Произвольный свободный модуль с базисом E является прямой суммой $F \simeq \bigoplus_{e \in E} Ke$ свободных модулей ранга 1, занумерованных базисными векторами $e \in E$. По предл. 1.7 и предл. 1.4 модули

$$\begin{aligned} F \otimes U &\simeq \bigoplus\nolimits_{e \in E} (Ke \otimes U) \simeq \bigoplus\nolimits_{e \in E} U_e \\ F \otimes W &\simeq \bigoplus\nolimits_{e \in E} (Ke \otimes W) \simeq \bigoplus\nolimits_{e \in E} W_e \end{aligned} \tag{1-15}$$

являются прямыми суммами занумерованных базисными векторами $e \in E$ одинаковых копий $U_e \overset{\text{def}}{=} Ke \otimes U \simeq U$ и $W_e \overset{\text{def}}{=} Ke \otimes W \simeq W$ модулей U, W, причём изоморфизмы (1-15) отождествляют линейное отображение $\mathrm{Id}_F \otimes f$ с диагональным отображением $\bigoplus_{e \in E} U_e \to \bigoplus_{e \in E} U_e$, переводящим последовательность векторов $\left(u_e\right)_{e \in E}$ в последовательность векторов $\left(f(u_e)\right)_{e \in E}$. При инъективном f такое отображение тоже инъективно. □

Предостережение 1.2. Если модуль V не свободен, тензорное произведение

$$\mathrm{Id}_V \otimes f : V \otimes U \to V \otimes W$$

может оказаться не инъективным даже для вложения $f : U \hookrightarrow W$ свободных модулей. Например, вложение $\mathbb{Z}$-модулей $f : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$, $z \mapsto 2z$, при тензорном умножении на тождественный эндоморфизм модуля $\mathbb{Z}/(2)$ превращается в нулевой гомоморфизм $\mathbb{Z}/(2) \to \mathbb{Z}/(2)$, $[1]_2 \mapsto [0]_2$.

1.4. Образующие и соотношения. В n° 6.7.2 на стр. 110 части I мы видели, что если K-модуль V линейно порождается над K векторами $v_1, \dots, v_n$, то он изоморфен фактору K^n / R_v свободного модуля K^n по подмодулю $R_v \subset K^n$ линейных соотношений между образующими v_i, который состоит из всех таких строк $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$, что $\sum x_i e_i = 0$ в V. Следующая далее теор. 1.1 описывает тензорное произведение $V_1 \otimes V_2$ двух представленных таким способом K-модулей $V_1 \simeq F_1 / R_1$ и $V_2 \simeq F_2 / R_2$ как фактор свободного модуля $F_1 \otimes F_2$ по подмодулю соотношений, устроенному следующим образом. По лем. 1.3 вложения $\iota_1 : R_1 \hookrightarrow F_1$ и $\iota_2 : R_2 \hookrightarrow F_2$ задают вложения $\iota_1 \otimes \mathrm{Id}_{F_2} : R_1 \otimes F_2 \hookrightarrow F_1 \otimes F_2$ и $\mathrm{Id}_{F_1} \otimes \iota_2 : F_1 \otimes R_2 \hookrightarrow F_1 \otimes F_2$, позволяющие рассматривать тензорные произведения $R_1 \otimes F_2$ и $F_1 \otimes R_2$ как подмодули свободного модуля $F \otimes G$. Искомый модуль соотношений является линейной оболочкой этих двух подмодулей и обозначается $R_1 \otimes F_2 + F_1 \otimes R_2 \subset F_1 \otimes F_2$.

Теорема 1.1
$\left(F_1/R_1\right) \otimes \left(F_1/R_1\right) \simeq \left(F_1 \otimes F_2\right) / \left(R_1 \otimes F_2 + F_1 \otimes R_2\right)$ для любых свободных модулей F_1, F_2 над произвольным коммутативным кольцом K и любых их подмодулей $R_1 \subset F_1$, $R_2 \subset F_2$.

Доказательство. Положим $V_1 = F_1/R_1$, $V_2 = F_2/R_2$, $S = R_1 \otimes F_2 + F_1 \otimes R_2 \subset F_1 \otimes F_2$. Для любых $f_1 \in F_1$, $f_2 \in F_2$ класс $[f_1 \otimes f_2]_S = f_1 \otimes f_2 \pmod{S} \in \big(F_1 \otimes F_2\big)/S$ зависит только от классов $[f_1]_{R_1} = f_1 \pmod{R_1} \in V_1$ и $[f_2]_{R_2} = f_2 \pmod{R_2} \in V_2$, так как для всех $r_1 \in R_1$, $r_2 \in R_2$

$$(f_1 + r_1) \otimes (f_2 + r_2) = f_1 \otimes f_2 + \big(r_1 \otimes f_2 + f_1 \otimes r_2 + r_1 \otimes r_2\big) \equiv f_1 \otimes f_2 \pmod{S} \ .$$

Поэтому корректно определено билинейное отображение

$$\overline{\tau} :\ V_1 \times V_2 \to \big(F_1 \otimes F_2\big)/S\,, \quad ([f_1]_{R_1}, [f_2]_{R_2}) \mapsto [f_1 \otimes f_2]_S\,, \tag{1-16}$$

включающееся в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
F_1 \times F_2 \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\pi_1\times\pi_2"'] & F_1 \otimes F_2 \arrow[d, "\pi"] \\
V_1 \times V_2 \arrow[r, "\overline{\tau}"] & \big(F_1 \otimes F_2\big)/S
\end{tikzcd}$$

где через $\tau :\ F_1 \times F_2 \to F_1 \otimes F_2$ обозначено универсальное билинейное отображение, а

$$\pi_1 :\ F_1 \twoheadrightarrow V_1\,, \quad \pi_2 :\ F_2 \twoheadrightarrow V_2\,, \quad \pi :\ F_1 \otimes F_2 \twoheadrightarrow (F_1 \otimes F_2)/S$$

суть линейные проекции на факторы. Покажем, что отображение (1-16) универсально. Для любого билинейного отображения $\varphi :\ V_1 \times V_2 \to W$ композиция

$$\varphi \circ (\pi_1 \times \pi_2) :\ F_1 \times F_2 \to W\,, \quad (f_1, f_2) \mapsto \varphi\left([f_1]_{R_1}, [f_2]_{R_2}\right)\,,$$

тоже билинейна. Поэтому существует единственное такое линейное отображение

$$\psi :\ F_1 \otimes F_2 \to W\,,$$

что $\psi \circ \tau = \varphi \circ (\pi_1 \times \pi_2)$, т. е. мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
F_1 \times F_2 \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\pi_1\times\pi_2"'] & F_1 \otimes F_2 \arrow[d, "\pi"] \arrow[ddr, "\psi"] & \\
V_1 \times V_2 \arrow[r, "\overline{\tau}"] \arrow[drr, "\varphi"'] & \big(F_1 \otimes F_2\big)/S \arrow[dr, "\overline{\psi}"'] & \\
& & W\,.
\end{tikzcd} \tag{1-17}$$

Поскольку для всех $f_1 \in F_1$, $f_2 \in F_2$ выполняется равенство $\psi(f_1 \otimes f_2) = \varphi\left([f_1]_{R_1}, [f_2]_{R_2}\right)$, отображение ψ аннулирует оба линейно порождающих S подмодуля $R_1 \otimes F_2, F_1 \otimes R_2 \subset F_1 \otimes F_2$ и факторизуется до линейного отображения $\overline{\psi} :\ \big(F_1 \otimes F_2\big)/S \to W$, удовлетворяющего соотношению $\overline{\psi} \circ \pi \circ \tau = \varphi \circ (\pi_1 \times \pi_2)$. Поэтому $\overline{\psi} \circ \overline{\tau} \circ (\pi_1 \times \pi_2) = \overline{\psi} \circ \pi \circ \tau = \varphi \circ (\pi_1 \times \pi_2)$. Так как проекция $\pi_1 \times \pi_2$ сюрьективна, $\varphi = \overline{\psi} \circ \overline{\tau}$. Остаётся проверить, что любое линейное отображение $\eta :\ \big(F_1 \otimes F_2\big)/S \to W$, удовлетворяющее соотношению $\varphi = \eta \circ \overline{\tau}$, совпадает с $\overline{\psi}$. Поскольку

$$\eta \circ \pi \circ \tau = \eta \circ \overline{\tau} \circ (\pi_1 \times \pi_2) = \varphi \circ (\pi_1 \times \pi_2) = \overline{\psi} \circ \pi \circ \tau\,,$$

универсальное свойство отображения τ влечёт равенство $\eta \circ \pi = \overline{\psi} \circ \pi$. Равенство $\eta = \overline{\psi}$ вытекает из него силу сюрьективности проекции π. □

Пример 1.6 (тензорные произведения абелевых групп, ср. с прим. 6.6 на стр. 103 части I)
Из теор. 1.1 вытекает, что для любых $m, n \in \mathbb{Z}$

$$\frac{\mathbb{Z}}{(m)} \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{\mathbb{Z}}{(n)} \simeq \frac{\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}}{(m) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (n)} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{(m, n)} = \frac{\mathbb{Z}}{(\text{нод}(m, n))},$$

где предпоследнее равенство задаётся изоморфизмом из предл. 1.4 на стр. 9. При помощи изоморфизмов дистрибутивности из предл. 1.7 на стр. 12 это позволяет вычислить все тензорные произведения конечно порождённых абелевых групп.

1.5. Расширение скаляров. Для любой K-алгебры[1] A и K-модуля M тензорное произведение

$$M_A \stackrel{\text{def}}{=} A \otimes_K M$$

обладает структурой модуля над кольцом A: умножение разложимого тензора $a \otimes w$, где $a \in A$, $w \in M$, на скаляр $b \in A$ задаётся правилом $b\,(a \otimes w) = (ba) \otimes w$ и по корректно продолжается до линейного отображения $b : M_A \to M_A$, $v \mapsto bv$, которое линейно зависит от $b \in A$. В этой ситуации говорят, что A-модуль M_A получен из K-модуля M *расширением скаляров* от K до A.

Пример 1.7 (комплексификация вещественного векторного пространства)
Каждое векторное пространство V над полем $\mathbb{R}$ расширяется до векторного пространства

$$V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$$

над $\mathbb{C}$, которое называется *комплексификацией* пространства V. Поскольку числа $1, i \in \mathbb{C}$ составляют базис $\mathbb{C}$ как векторного пространства над $\mathbb{R}$, каждый вектор $w \in V_{\mathbb{C}}$ однозначно записывается в виде $w = 1 \otimes u + i \otimes v$, где $u, v \in V$. Векторы вида $1 \otimes v$, где $v \in V$, называются *вещественными* и образуют векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, изоморфное исходному пространству V. Оно обозначается через $V \subset V_{\mathbb{C}}$. Векторы вида $i \otimes v$, где $v \in V$, называются *чисто мнимыми* и тоже образуют векторное пространство над $\mathbb{R}$, изоморфное исходному пространству V. Оно обозначается через $iV \subset V_{\mathbb{C}}$. Таким образом, как векторное пространство над $\mathbb{R}$, пространство $V_{\mathbb{C}} = V \oplus iV$ является прямой суммой двух копий векторного пространства V. Векторы $1 \otimes v$ из первого слагаемого принято записывать просто как v, а векторы $i \otimes v$ из второго — как iv. Таким образом, каждый вектор из $V_{\mathbb{C}}$ имеет вид $u + iw$, где $u, w \in V$, и равенство $u_1 + iw_1 = u_2 + iw_2$ в $V_{\mathbb{C}}$ равносильно паре равенств $u_1 = u_2$ и $w_1 = w_2$ в V. Векторы $u \in V$ и $w \in V$ называются *вещественной* и *мнимой* частями вектора $u + iw \in V_{\mathbb{C}}$. В этих обозначениях умножение вектора $u + iw$ на комплексное число $z = x + iy \in \mathbb{C}$ задаётся буквально той же самой формулой $(x + iy)(u + iw) = (xu - yw) + i(xw + yu)$, что и умножение чисел в поле[2] $\mathbb{C}$.

Упражнение 1.5. Убедитесь в этом.

Каждый базис $e_1, \dots, e_n$ пространства V над полем $\mathbb{R}$, рассматриваемый как набор вещественных векторов в $V_{\mathbb{C}}$, является базисом пространства $V_{\mathbb{C}}$ над полем $\mathbb{C}$, поскольку единственность представления векторов $v_1, v_2 \in V$ в виде $v_1 = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, $v_2 = y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n$ с $x_\nu, y_\nu \in \mathbb{R}$ равносильна единственности представления вектора $w = v_1 + iv_2 \in V \oplus iV$ в виде

$$w = z_1 e_1 + \ldots + z_n e_n\,, \text{ где } z_\nu = x_\nu + iy_\nu \in \mathbb{C}\,.$$

Таким образом, $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V$.

[1] См. n° 8.1 на стр. 131 части I.
[2] Ср. с n° 3.4 на стр. 51 части I.

Пример 1.8 (тензорное произведение полей)
Пусть поле $\mathbb{K} = \Bbbk[x]/(f)$ получается из поля $\Bbbk$ присоединением корня[1] неприводимого в $\Bbbk[x]$ сепарабельного[2] многочлена $f \in \Bbbk[x]$, который над некоторым другим полем $\mathbb{F} \supset \Bbbk$ раскладывается в произведение $f = g_1 \dots g_m$ неприводимых в $\mathbb{F}[x]$ многочленов $g_i \in \mathbb{F}[x]$. Обозначим через $\mathbb{L}_i = \mathbb{F}[x]/(g_i)$ поля, получающиеся из $\mathbb{F}$ присоединением корней этих многочленов. В теории чисел и теории Галуа важную роль играет изоморфизм $\Bbbk$-алгебр

$$\mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} \mathbb{K} \xrightarrow{\sim} \mathbb{L}_1 \times \dots \times \mathbb{L}_m\,, \quad z \otimes [h]_f \mapsto ([zh]_{g_1}, \dots, [zh]_{g_m})\,, \tag{1-18}$$

который является композицией изоморфизма

$$\mathbb{F} \otimes_{\Bbbk} \mathbb{K} \simeq \mathbb{F}[x]/(f)\,, \quad z \otimes [h]_f \mapsto [zh]_f\,, \tag{1-19}$$

и изоморфизма $\mathbb{F}[x]/(f) \xrightarrow{\sim} \mathbb{L}_1 \times \dots \times \mathbb{L}_m$, $\quad [h]_f \mapsto ([h]_{g_1}, \dots, [h]_{g_m})$, из китайской теоремы об остатках[3], которая имеет место, поскольку из сепарабельности многочлена f вытекает, что неприводимые многочлены g_i попрано различны и, тем самым, взаимно просты в $\mathbb{F}[x]$.

Упражнение 1.6. Убедитесь, что отображение (1-19) корректно определено и является гомоморфизмом $\Bbbk$-алгебр.

Для доказательства того, что гомоморфизм (1-19) является изоморфизмом, достаточно убедиться, что $\Bbbk$-билинейное отображение векторных пространств над полем $\Bbbk$

$$\tau:\ \mathbb{F} \times \mathbb{K} \to \mathbb{F}[x]/(f)\,, \quad (z, [h]_f) \mapsto [zh]_f\,,$$

универсально. Но для любого $\Bbbk$-билинейного отображения $\varphi:\ \mathbb{F} \times \mathbb{K} \to W$ линейное над $\Bbbk$ отображение $\widetilde{\varphi}:\ \mathbb{F}[x]/(f) \to W$ со свойством $\widetilde{\varphi} \circ \tau = \varphi$ обязано действовать по правилу

$$[z_0 + z_1 x + \dots + z_m x^m]_f \mapsto \varphi(z_0, [1]_f) + \varphi(z_1, [x]_f) + \dots + \varphi(z_m, [x^m]_f)\,,$$

где $z_0, z_1, \dots, z_m \in \mathbb{F}$.

Упражнение 1.7. Убедитесь, что это правило и впрямь корректно задаёт $\Bbbk$-линейное отображение $\mathbb{F}[x]/(f) \to W$.

Пример 1.9 (тензорное произведение алгебр)
Если K-модули A и B являются ассоциативными K-алгебрами[4], то на их тензорном произведении $A \otimes_K B$ имеется естественная структура алгебры, задаваемая покомпонентным перемножением разложимых тензоров

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2) \tag{1-20}$$

продолженным на линейные комбинации разложимых тензоров по дистрибутивности. В самом деле, при фиксированных $a \in A$ и $b \in b$ тензор $(ax) \otimes (by)$ билинеен по $x \in A$ и $y \in B$, и стало быть, корректно определено линейное отображение

$$\lambda_{a \otimes b}:\ A \otimes B \to A \otimes B\,, \quad x \otimes y \mapsto (ax) \otimes (by)\,,$$

[1] См. n° 3.3.1 на стр. 48 части I.
[2] См. n° 3.3.4 на стр. 50 части I.
[3] См. теор. 3.1 на стр. 47 части I.
[4] См. n° 8.1 на стр. 131 части I.

билинейно зависящее от $a \in A$ и $b \in b$. Поэтому правило $a \otimes b \mapsto \lambda_{a\otimes b}$ корректно продолжается до линейного отображения

$$\lambda : A \otimes B \to \operatorname{End}_K(A \otimes B), \quad t \mapsto \lambda_t,$$

сопоставляющего каждому тензору $t : A \otimes B$ линейный оператор $\lambda_t : A \otimes B \to A \otimes B$ левого умножения на этот тензор так, что разложимые тензоры перемножаются по формуле (1-20). Если алгебры A и B ассоциативны, то и алгебра $A \otimes B$ ассоциативна, поскольку на разложимых тензорах проверка ассоциативности сводится к покомпонентной её проверке отдельно в каждом тензорном множителе. Если в алгебрах A и B есть единицы $1_A \in A$ и $1_B \in B$, то их тензорное произведение $1_A \otimes 1_B$ является единицей алгебры $A \otimes B$, поскольку умножение на $1_A \otimes 1_B$ тождественно действует на разложимые тензоры. Если алгебры A и B коммутативны, то алгебра $A \otimes B$ тоже коммутативна.

Например, построенный в прим. 1.2 на стр. 9 изоморфизм K-модулей

$$K[x]^{\otimes n} = K[x] \otimes \ldots \otimes K[x] \xrightarrow{\sim} K[x_1, \ldots, x_n], \quad x^{m_1} \otimes \ldots \otimes x^{m_n} \mapsto x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n},$$

является изоморфизмом K-алгебр, где структура алгебры на $K[x]^{\otimes n}$ задаётся покомпонентным умножением разложимых тензоров, а алгебра многочленов $K[x_1, \ldots, x_n]$ рассматривается со своей стандартной структурой.

Задачи для самостоятельного решения к §1

Задача 1.1. Над произвольным коммутативным кольцом K докажите, что

а) $K \otimes_K M \simeq M$ для всех K модулей M

б) $(K/I) \otimes_K (K/J) \simeq K/(I+J)$ для всех идеалов $I, J \subset K$.

Задача 1.2. Пусть $f_m : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $z \mapsto mz$, и $g_k : \mathbb{Z}/(n) \to \mathbb{Z}/(n)$, $[z] \mapsto [kz]$. Канонический изоморфизм $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(n) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/(n)$, $x \otimes [y]_n \mapsto [xy]_n$, превращает каждый гомоморфизм $\mathbb{Z}$-модулей $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(n) \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(n)$ в гомоморфизм $\mathbb{Z}/(n) \to \mathbb{Z}/(n)$. В какие гомоморфизмы $\mathbb{Z}/(n) \to \mathbb{Z}/(n)$ превратятся $f_m \otimes_{\mathbb{Z}} g_k$ при разных $m, k \in \mathbb{N}$? Опишите их ядра и образы, а также ядра и образы самих f_m и g_k. Не забудьте рассмотреть случаи $m = 1$ и $k = 1$.

Задача 1.3. Для произвольных модулей над коммутативным кольцом с единицей постройте канонический изоморфизм $\operatorname{Hom}(L \otimes M, N) \simeq \operatorname{Hom}(L, \operatorname{Hom}(M, N))$.

Задача 1.4. Напишите стандартное представление в виде прямой суммы циклических групп $\mathbb{Z}/(p^m)$ для абелевой группы

а) $\mathbb{Z}/(270) \otimes \mathbb{Z}/(360)$ б) $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/(270), \mathbb{Z}/(360))$ в) $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/(360), \mathbb{Z}/(270))$.

Задача 1.5. Докажите, что а) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}$ б) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0$ в) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0$ г) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(n) = 0$ д) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(n) = 0$.

Задача 1.6. Опишите группу автоморфизмов[1] аддитивных абелевых групп

а) $\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}/(p^n))$ б) $\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}/(p))^n$, где p — простое в) $\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}/(30))$ г) $\operatorname{Aut}((\mathbb{Z}/(6)) \oplus \mathbb{Z})$

[1] Групповой операцией в которой является композиция автоморфизмов.

Задача 1.7. Для любого расширения полей $\Bbbk \subset \mathbb{K}$ и многочлена $f \in \Bbbk[x]$ постройте изоморфизмы колец $\mathbb{K} \otimes_{\Bbbk} \Bbbk[x] \simeq \mathbb{K}[x]$ и $\mathbb{K} \otimes_{\Bbbk} (\Bbbk[x]/(f)) \simeq \mathbb{K}[x]/(f)$.

Задача 1.8 (геометрическое изображение алгебраических чисел). Пусть неприводимый многочлен $f \in \mathbb{Q}[x]$ имеет r вещественных и s пар комплексно сопряжённых не вещественных корней в поле $\mathbb{C}$. Покажите, что $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} (\mathbb{Q}[x]/(f)) \simeq \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s$.

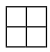
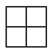
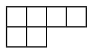
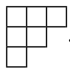
Далее во всех задачах речь идёт про конечномерные векторные пространства над произвольным полем $\Bbbk$.

Задача 1.9. Докажите, что среди векторов $v_1, \dots, v_n$, лежащих соответственно в пространствах $V_1, \dots, V_n$, тогда и только тогда есть нулевой вектор, когда все полилинейные отображения $V_1 \times \dots \times V_n \to W$ во все пространства W зануляются на наборе аргументов $(v_1, \dots, v_n)$.

Задача 1.10. Пользуясь каноническим изоморфизмом $W \otimes U^* \simeq \mathrm{Hom}(U, W)$, запишем операторы $g : U \to V$ и $f : V \to W$ в виде $g = \sum_i v_i \otimes \varphi_i$, $f = \sum_j w_j \otimes \psi_j$ с $v_i \in V$, $\varphi_i \in U^*$, $w_j \in W$, $\psi_j \in V^*$. Запишите их композицию $fg \in \mathrm{Hom}(U, W) \simeq W \otimes U^*$ в виде а) $\sum_j w_j \otimes \xi_j$ б) $\sum_i u_i \otimes \varphi_i$, явно вычислив $\xi_j \in U^*$ и $u_i \in W$.

Задача 1.11. Рассмотрим двойственные друг другу базисы $e_1, \dots, e_n$ и $x_1, \dots, x_n$ в V и в V^*. В какой оператор $V \to V$ переходит при изоморфизме из зад. 1.10 *тензор Казимира* $\sum x_i \otimes e_i$?

Задача 1.12. Покажите, что линейное отображение $\tau :\ \mathrm{End}(V) \simeq V \otimes V^* \to (V \otimes V^*)^* \simeq \mathrm{End}(V)^*$, переводящее $v \otimes \xi$ в линейную форму $u \otimes \varphi \mapsto \xi(u) \cdot \varphi(v)$, корректно определено и задаёт на векторном пространстве $\mathrm{End}(V)$ корреляцию[1]. Какая билинейная форма на $\mathrm{End}(V)$ ей отвечает[2]? Вырождена ли она? Симметрична ли? Какую квадратичную форму задаёт?

Задача 1.13. Опишите цикловой тип тензорного квадрата $f^{\otimes 2} : V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}$ нильпотентного оператора $f : V \to V$ циклового типа а)  $\cdots$  б)  $\cdots$  в)  г) .

Задача 1.14. Найдите ЖНФ линейного оператора $f \otimes g : U \otimes W \to U \otimes W$, если

а) $f : U \to U$ имеет две клетки 2×2 с собственными числами 0 и -1, а $g : W \to W$ имеет одну клетку 2×2 с собственным числом 0 и одну клетку 3×3 с собственным числом 0

б) $f : U \to U$ имеет две клетки 2×2, каждая с собственным числом 0, а $g : W \to W$ имеет одну клетку 2×2 с собственным числом 1 и одну клетку 3×3 с собственным числом 0

Задача 1.15. Векторы $e_1, \dots, e_n$ линейно независимы. Выясните, разложимы ли тензоры

а) $\sum_i e_i^{\otimes 2}$ б) $\sum_i e_i^{\otimes 3}$ в) $\sum_{ij} e_i^{\otimes 2} \otimes e_j$ г) $\sum_{ij} ij\, e_i \otimes e_j$ д) $\sum_{ij} (i+j)\, e_i \otimes e_j$ е) $\sum_{ijk} 2^{i+j+k^2} e_i \otimes e_j \otimes e_k$

ж) $5e_1 \otimes e_1 - 4e_2 \otimes e_1 + 3e_3 \otimes e_1 - 2e_1 \otimes e_2 - 5e_2 \otimes e_2 + 6e_3 \otimes e_2 - 2e_1 \otimes e_3 + 6e_2 \otimes e_3 - 3e_3 \otimes e_3$

з) $-12e_1 \otimes e_1 + 15e_2 \otimes e_1 - 12e_3 \otimes e_1 + 24e_1 \otimes e_2 - 30e_2 \otimes e_2 + 24e_3 \otimes e_2 + 4e_1 \otimes e_3 - 5e_2 \otimes$ $\otimes e_3 + 4e_3 \otimes e_3$.

Если да — предъявите разложение явно, если нет — объясните, почему.

Задача 1.16. Пусть операторы $f : U \to U$ и $g : W \to W$ диагонализуемы с собственными числами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и $\mu_1, \dots, \mu_m$. Перечислите собственные числа оператора $f \otimes g$.

Задача 1.17. Докажите для линейных отображений $f_1 : U_1 \to W_1$ и $f_2 : U_2 \to W_2$ равенства а) $\mathrm{im}\, f_1 \otimes f_2 = \mathrm{im}\, f_1 \otimes \mathrm{im}\, f_2$ б) $\ker f_1 \otimes f_2 = \ker f_1 \otimes U_2 + U_1 \otimes \ker f_2$.

[1] Напомню, что *корреляцией* (или, на физической фене, *спуском индексов*) на векторном пространстве W называется линейное отображение $\beta^\wedge : W \to W^*$, см. n° 15.1.1 на стр. 272 части I.

[2] Явно вычислите эту форму в терминах матриц операторов.

Задача 1.18. Существуют ли такие ненулевые линейные операторы $F_1, \dots, F_m : V \to V$ и отличный от нулевого набор констант $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, что $\lambda_1 F_1^{\otimes n} + \ldots + \lambda_m F_m^{\otimes n} = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$?

Задача 1.19. Для конечномерных векторных пространств U, V, W постройте изоморфизмы:

а) $\mathrm{Hom}(U \otimes W, V) \simeq \mathrm{Hom}(W, \mathrm{Hom}(U, V))$ и $\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(U, W), V) \simeq \mathrm{Hom}(W, U \otimes V)$

б) $\mathrm{Hom}\big(U \otimes \mathrm{Hom}(U, W)\,,\, W\big) \simeq \mathrm{End}\big(\mathrm{Hom}(U, W)\big) \simeq \mathrm{Hom}\big(U\,,\, \mathrm{Hom}(U, W)^* \otimes W\big)$

в) $\mathrm{End}(U \otimes V \otimes W) \simeq \mathrm{Hom}\big(\mathrm{Hom}(U, V) \otimes \mathrm{Hom}(V, W), \mathrm{Hom}(U, W)\big)$.

Задача 1.20. В какое линейное отображение $\mathrm{Hom}(U, V) \otimes \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(U, W)$ переходит в зад. 1.19 (в) тождественный эндоморфизм пространства $U \otimes V \otimes W$?

Задача 1.21. Какому эндоморфизму пространства $\mathrm{Hom}(U, W)$ отвечает в зад. 1.19 (б) отображение $c : U \otimes \mathrm{Hom}(U, W) \to W$, $u \otimes \varphi \mapsto \varphi(u)$? Как устроено ядро соответствующего ему линейного отображения $U \to \mathrm{Hom}(U, W)^* \otimes W$?

§2. Комплексные и вещественные векторные пространства

2.1. Овеществление комплексного пространства. Каждое векторное пространство W над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ одновременно является векторным пространством и над подполем вещественных чисел $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Когда комплексное векторное пространство W рассматривается как векторное пространство над $\mathbb{R}$, оно обозначается $W_{\mathbb{R}}$ и называется *овеществлением* комплексного пространства W. Если множество векторов $E \subset W$ является базисом пространства W над $\mathbb{C}$, то множество $E \sqcup iE$, состоящее из векторов e и ie, где $e \in E$, является базисом пространства $W_{\mathbb{R}}$ над $\mathbb{R}$, поскольку существование и единственность представления произвольного вектора $w \in W$ в виде комплексной линейной комбинации

$$w = \sum\nolimits_e z_e e = \sum\nolimits_e (x_e + iy_e)\, e\,, \quad \text{где} \quad z_e = x_e + iy_e \in \mathbb{C}\,,$$

означает в точности существование и единственность линейного выражения

$$w = \sum\nolimits_e x_e e + \sum\nolimits_e y_e\, ie$$

вектора w через векторы e и ie с вещественными коэффициентами $x_e = \operatorname{Re} z_e$, $y_e = \operatorname{Im} z_e$. В частности, $\dim_{\mathbb{R}} W_{\mathbb{R}} = 2 \dim_{\mathbb{C}} W$, где для избежания недоразумений мы здесь и далее пишем $\dim_{\mathbb{R}}$ и $\dim_{\mathbb{C}}$ для обозначения размерности векторных пространств над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ соответственно. Обратите внимание, что вещественные векторные пространства, возникающие как овеществления комплексных, всегда чётномерны.

Комплексно линейные операторы $F : W \to W$ составляют алгебру $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(W)$ над полем $\mathbb{C}$, а вещественно линейные $G : W_{\mathbb{R}} \to W_{\mathbb{R}}$ — алгебру $\operatorname{End}_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}})$ над полем $\mathbb{R}$, содержащую алгебру комплексно линейных эндоморфизмов в качестве подалгебры $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(W) \subset \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}})$. Сопоставление операторам из $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(W)$ и $\operatorname{End}_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}})$ их матриц, соответственно, в базисе $e_1, \dots, e_n$ пространства W над $\mathbb{C}$ и базисе $e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n$ пространства $W_{\mathbb{R}}$ над $\mathbb{R}$ отождествляет алгебру $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(W)$ с алгеброй $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{C})$ комплексных матриц размера $n \times n$, а алгебру $\operatorname{End}_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}})$ — с алгеброй $\operatorname{Mat}_{2n}(\mathbb{R})$ вещественных матриц размера $2n \times 2n$, которые мы будем записывать блочно:

$$G = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{2-1}$$

согласно разбиению базиса $e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n$ на части $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n)$ и $i\boldsymbol{e} = (ie_1, \dots, ie_n)$.

Предложение 2.1 (условия Коши – Римана)
Вещественно линейный оператор (2-1) тогда и только тогда комплексно линеен, когда $C = -B$ и $D = A$. В базисе $e_1, \dots, e_n$ пространства W над $\mathbb{C}$ такой оператор записывается комплексной $n \times n$-матрицей $A + iB$.

Доказательство. $\mathbb{C}$-линейность оператора F с матрицей (2-1) означает равенство $F(iw) = iF(w)$ для всех $w \in W_{\mathbb{R}}$, которое достаточно проверять на базисных векторах $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n)$. Но $F(i\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{e}B + i\boldsymbol{e}D$, а $iF(\boldsymbol{e}) = i(\boldsymbol{e}A + i\boldsymbol{e}C) = -\boldsymbol{e}C + i\boldsymbol{e}A$, откуда $B = -C$ и $D = A$. □

Пример 2.1 (комплексно дифференцируемые функции)
Рассмотрим одномерное комплексное пространство $W = \mathbb{C}$ со стандартным базисным вектором $e = 1$. Его овеществление $W_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$ имеет базис $(e, ie) = (1, i)$. Каждый комплексно линейный

оператор $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ является умножением на некое комплексное число $z = a + ib$ и в базисе $(1, i)$ записывается 2×2-матрицей

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} .$$

Произвольная функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto w = f(z)$, одной переменной $z \in \mathbb{C}$, представляет собою отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ и может быть задана парой вещественных функций $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ от двух вещественных переменных x, y, связанных с комплексными переменными z, w по формулам $w = u + iv$, $z = x + iy$. Функция f называется *комплексно дифференцируемой* в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, если её приращение как функции от z имеет вид

$$f(z_0 + \vartriangle z) = f(z_0) + \zeta \cdot \vartriangle z + o(\vartriangle z) , \text{ где } \zeta \in \mathbb{C} .$$

Функция f называется *вещественно дифференцируемой*, если

$$\begin{pmatrix} u(x_0 + \vartriangle x, y_0 + \vartriangle y) \\ v(x_0 + \vartriangle x, y_0 + \vartriangle y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x_0, y_0) \\ v(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vartriangle x \\ \vartriangle y \end{pmatrix} + o(\vartriangle x, \vartriangle y) , \text{ где } a, b, c, d \in \mathbb{R} .$$

Из курса анализа известно, что линейные операторы, описывающие линейную часть приращения, в обоих случаях выражаются через производные:

$$\zeta = f'(z_0) = \lim_{\vartriangle z \to 0} \frac{f(z_0 + \vartriangle z) - f(z_0)}{\vartriangle z} , \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} , \quad \text{где}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\vartriangle x \to 0} \frac{g(x_0 + \vartriangle x, y_0) - g(x_0, y_0)}{\vartriangle x} , \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\vartriangle y \to 0} \frac{g(x_0, y_0 + \vartriangle y) - g(x_0, y_0)}{\vartriangle y} .$$

Из предл. 2.1 вытекает, что пара вещественных непрерывно дифференцируемых функций двух вещественных переменных тогда и только тогда задаёт комплексно дифференцируемую функцию $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, когда эти функции удовлетворяют дифференциальным *уравнениям Коши – Римана*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} .$$

2.2. Комплексификация вещественного пространства. В прим. 1.7 на стр. 16 мы видели, что каждое векторное пространство V над полем $\mathbb{R}$ канонически расширяется до векторного пространства $V_{\mathbb{C}} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$, овеществление которого $(V_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} = V \oplus iV$ является прямой суммой двух копий векторного пространства V (векторы из второго слагаемого обозначаются iv, где $v \in V$) и состоит из векторов $u + iw$, где $u, w \in V$, и их умножение на числа $z = x + iy \in \mathbb{C}$ происходит по тому же правилу $(x + iy)(u + iw) \overset{\text{def}}{=} (xu - yw) + i(yu + xw)$, что и умножение в самом поле $\mathbb{C}$, а каждый базис $e_1, \dots, e_n$ пространства V над $\mathbb{R}$ является одновременно базисом пространства $V_{\mathbb{C}}$ над $\mathbb{C}$. Такие базисы пространства $V_{\mathbb{C}}$ называются *вещественными*.

2.2.1. Комплексное сопряжение. На пространстве $V_{\mathbb{C}}$ имеется $\mathbb{R}$-линейная инволюция

$$\sigma : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}} , \quad v = u + iw \mapsto \overline{v} \overset{\text{def}}{=} u - iw ,$$

которая называется *комплексным сопряжением*. По построению, $\sigma^2 = \mathrm{Id}$, и вещественные подпространства V и iV являются для неё собственными с собственными числами $+1$ и -1 соответственно. По отношению к умножению на комплексные числа инволюция σ *полулинейна*[1], т. е. удовлетворяет для всех $z \in \mathbb{C}$ и $w \in V_{\mathbb{C}}$ соотношению $\sigma(zw) = \overline{z}\sigma(w)$.

[1]См. опр. 13.1 на стр. 240 части I.

2.2.2. Комплексификация операторов. Всякий $\mathbb{R}$-линейный оператор $f : U \to W$ между вещественными векторными пространствами U, W продолжается по линейности до $\mathbb{C}$-линейного оператора $f_{\mathbb{C}} : U_{\mathbb{C}} \to W_{\mathbb{C}}$, $u + iw \mapsto f(u) + if(w)$, который называется *комплексификацией* оператора f. Оператор $f_{\mathbb{C}}$ коммутирует с комплексным сопряжением: для всех $u + iw \in U_{\mathbb{C}}$

$$\overline{f_{\mathbb{C}}(u+iw)} = \overline{fu + ifw} = fu - ifw = f_{\mathbb{C}}(u - iw) = f_{\mathbb{C}}(\overline{u+iw})\,. \tag{2-2}$$

Если $f : V \to V$ является эндоморфизмом вещественного пространства V, то его комплексификация $f_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ обязательно имеет ненулевой собственный вектор. Так как равенства $fv = \lambda v$ и $f\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v}$ комплексно сопряжены друг другу согласно (2-2), вектор $v \in V_{\mathbb{C}}$ является собственным для $f_{\mathbb{C}}$ с собственным числом $\lambda \in \mathbb{C}$ если и только если сопряжённый ему вектор $\overline{v}$ собственный для $f_{\mathbb{C}}$ с собственным числом $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}$.

Предложение 2.2

Комплексная линейная оболочка $W = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}(v, \overline{v}) \subset V_{\mathbb{C}}$ пары сопряжённых собственных векторов $v = u + iw$ и $\overline{v} = u - iw$ оператора $f_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ с сопряжёнными собственными числами $\lambda = a + ib$ и $\overline{\lambda} = a - ib$ является комплексификацией вещественного инвариантного подпространства $U = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(u, w) \subset V$ оператора $f : V \to V$, и ограничение $f|_U : U \to U$ имеет в образующих (u, w) матрицу

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}. \tag{2-3}$$

Доказательство. Равенство $f_{\mathbb{C}}(u + iw) = (a + ib)(u + iw)$ означает, что

$$f(u) + if(w) = (au - bw) + i(bu + aw)\,,$$

откуда $f(u) = au - bw$, $f(w) = bu + aw$. Тем самым, оператор f переводит вещественное подпространство $U = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(u, w)$ в себя и имеет в нём матрицу (2-3). Комплексификация $U_{\mathbb{C}} = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}(u, w)$ содержит векторы $v = u + iw$, $\overline{v} = u - iw$ и линейно порождается ими над $\mathbb{C}$, ибо $u = (v + \overline{v})/2$, $w = (v - \overline{v})/2i$. □

Следствие 2.1 (Ср. с прим. 12.5 на стр. 222 части I)

Каждый $\mathbb{R}$-линейный оператор на конечномерном вещественном векторном пространстве обладает одномерным или двумерным инвариантным подпространством. □

Предложение 2.3

Каждый элементарный делитель оператора f вида $(t - \lambda)^m$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, является элементарным делителем оператора $f_{\mathbb{C}}$, а каждому элементарному делителю оператора f вида $(t^2 - 2bt + a)^m$, где $a, b \in \mathbb{R}$ и $b^2 < a$, отвечают два сопряжённых элементарных делителя $(t - \mu)^m$ и $(t - \overline{\mu})^m$, где $\mu = b + i\sqrt{a - b^2} \in \mathbb{C}$ оператора $f_{\mathbb{C}}$, и никаких других элементарных делителей у $f_{\mathbb{C}}$ нет.

Доказательство. По теор. 12.1 на стр. 207 части I оператор f подобен умножению на t в прямой сумме фактор колец $\mathbb{R}[t]/\big((t - \lambda)^m\big)$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, и $\mathbb{R}[t]/\big((t^2 - 2bt + a)^m\big)$, где $a, b \in \mathbb{R}$ и $b^2 < a$. В прим. 1.8 на стр. 17 мы видели, что $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \big(\mathbb{R}[t]/((t - \lambda)^m)\big) \simeq \mathbb{C}[t]/((t - \lambda)^m)$, а

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\mathbb{R}[t]}{\big((t^2 - 2bt + a)^m\big)} \simeq \frac{\mathbb{C}[t]}{\big((t - \mu)^m\big)} \oplus \frac{\mathbb{C}[t]}{\big((t - \overline{\mu})^m\big)}\,.$$

Поэтому оператор $f_{\mathbb{C}}$ подобен умножению на t в прямой сумме фактор колец, полученной заменой каждого слагаемого $\mathbb{R}[t]/\big((t - \lambda)^m\big)$ слагаемым $\mathbb{C}[t]/\big((t - \lambda)^m\big)$, а каждого слагаемого $\mathbb{R}[t]/\big((t^2 - 2bt + a)^m\big)$ — суммой $\mathbb{C}[t]/\big((t - \mu)^m\big) \oplus \mathbb{C}[t]/\big((t - \overline{\mu})^m\big)$. □

Следствие 2.2
Для каждого вещественного собственного числа $\lambda \in \operatorname{Spec}(f) \subset \mathbb{R}$ комплексификации

$$\mathbb{C} \otimes V_\lambda,\ \mathbb{C} \otimes K_\lambda \subset \mathbb{C} \otimes V$$

собственного и корневого подпространств $V_\lambda, K_\lambda \subset V$ оператора f являются, соответственно, собственным и корневым подпространствами оператора $f_\mathbb{C}$. □

Следствие 2.3
Для каждого невещественного собственного числа $\lambda \in \operatorname{Spec}(f_\mathbb{C})$ комплексное сопряжение

$$V_\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} V_\mathbb{C}\,, \quad w \mapsto \overline{w}\,,$$

задаёт $\mathbb{C}$-полулинейные изоморфизмы $K_\lambda \xrightarrow{\sim} K_{\overline{\lambda}} = \overline{K}_\lambda$ и $V_\lambda \xrightarrow{\sim} V_{\overline{\lambda}} = \overline{V}_\lambda$ между корневыми и собственными подпространствами оператора $f_\mathbb{C}$ с сопряжёнными собственными числами λ и $\overline{\lambda}$, а прямые суммы $K_\lambda \oplus K_{\overline{\lambda}}$ и $V_\lambda \oplus V_{\overline{\lambda}}$ являются комплексификациями вещественных f-инвариантных подпространств оператора f. □

Замечание 2.1. Предыдущие результаты согласуются с тем, что в любом вещественном базисе пространства $V_\mathbb{C}$ над $\mathbb{C}$ операторы f и $f_\mathbb{C}$ имеют одну и ту же вещественную матрицу. Поэтому их характеристические многочлены $\chi_f(t) = \chi_{f_\mathbb{C}}(t) \in \mathbb{R}[t]$ одинаковы и вещественны, откуда без вычислений видно, что невещественные собственные числа оператора $f_\mathbb{C}$ разбиваются на пары комплексно сопряжённых, имеющих одинаковые кратности.

2.2.3. Комплексификация билинейной формы. Точно также как и линейный оператор, каждая вещественно билинейная форма $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ на векторном пространстве V над полем $\mathbb{R}$ канонически продолжается до *комплексно билинейной* формы $\beta_\mathbb{C} : V_\mathbb{C} \times V_\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, значения которой на векторах $v_1 = u_1 + iw_1$, $v_2 = u_2 + iw_2 \in V_\mathbb{C}$ вычисляются по правилу

$$\beta_\mathbb{C}(u_1 + iw_1, u_2 + iw_2) \stackrel{\text{def}}{=} \big(\beta(u_1, u_2) - \beta(w_1, w_2)\big) + i\,\big(\beta(u_1, w_2) + \beta(w_1, u_2)\big)\,.$$

Упражнение 2.1. Покажите, что $\mathbb{C}$-билинейное продолжение $\beta_\mathbb{C} : V_\mathbb{C} \times V_\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ любой $\mathbb{R}$-билинейной формы $V \times V \to \mathbb{R}$ перестановочно с комплексным сопряжением векторов, т. е.

$$\overline{\beta_\mathbb{C}(v_1, v_2)} = \beta_\mathbb{C}(\overline{v}_1, \overline{v}_2) \text{ для всех } v_1, v_2 \in V_\mathbb{C}\,.$$

Матрица Грама формы $\beta_\mathbb{C}$ в любом вещественном базисе пространства $V_\mathbb{C}$ совпадает с матрицей Грама формы β в том же базисе. Если форма β симметрична или кососимметрична, то такова же и её комплексификация $\beta_\mathbb{C}$. Обратите внимание, что комплексификации не изоморфных друг вещественно билинейных форм одинакового ранга, но разной сигнатуры[1], изометрически изоморфны друг другу над полем $\mathbb{C}$. Например, $\mathbb{C}$-билинейная комплексификация евклидова скалярного произведения на пространстве V является гиперболической формой[2] на $V_\mathbb{C}$ если $\dim_\mathbb{R} V = \dim_\mathbb{C} V_\mathbb{C}$ чётна, и прямой ортогональной прямой суммой гиперболической и одномерной анизотропной формы, если $\dim_\mathbb{R} V$ нечётна, и в любом случае у этой комплексной формы имеются изотропные подпространства размерности $[\dim_\mathbb{C} V_\mathbb{C}/2]$.

[1] См. n° 17.4 на стр. 316 части I.
[2] См. прим. 15.2 на стр. 275 части I.

2.2.4. Полуторалинейное продолжение билинейной формы. В метрической геометрии вместо $\mathbb{C}$-билинейного продолжения вещественной билинейной формы $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ на комплексификацию $V_{\mathbb{C}}$ пространства V обычно используется *полуторалинейное* или *эрмитово* продолжение $\beta_{\mathrm{H}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$, которое $\mathbb{C}$-линейно по первому аргументу и полулинейно[1] по второму. Последнее означает, что $\beta_{\mathrm{H}}(zv_1, v_2) = z\beta_{\mathrm{H}}(v_1, v_2)$, но $\beta_{\mathrm{H}}(v_1, zv_2) = \overline{z}\beta_{\mathrm{H}}(v_1, v_2)$ для всех $z \in \mathbb{C}$ и $v_1, v_2 \in V_{\mathbb{C}}$. Значение такой формы на векторах $v_1 = u_1 + iw_1,\ v_2 = u_2 + iw_2 \in V_{\mathbb{C}}$ равно

$$\beta_{\mathrm{H}}(u_1 + iw_1, u_2 + iw_2) \overset{\text{def}}{=} \big(\beta(u_1, u_2) + \beta(w_1, w_2)\big) + i\,\big(\beta(u_1, w_2) - \beta(w_1, u_2)\big)\,. \tag{2-4}$$

Упражнение 2.2. Покажите, что полуторалинейное продолжение $\beta_{\mathrm{H}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ любой $\mathbb{R}$-билинейной формы $V \times V \to \mathbb{R}$ перестановочно с комплексным сопряжением векторов, т. е.

$$\overline{\beta_{\mathrm{H}}(v_1, v_2)} = \beta_{\mathrm{H}}(\overline{v}_1, \overline{v}_2) \text{ для всех } v_1, v_2 \in V_{\mathbb{C}}\,.$$

Если $\mathbb{R}$-билинейная форма $g : V \times V \to \mathbb{R}$ симметрична, то вещественная часть

$$\operatorname{Re} g_{\mathrm{H}}(u_1 + iw_1, u_2 + iw_2) = g(u_1, u_2) + g(w_1, w_2)$$

её эрмитова продолжения является симметричной $\mathbb{R}$-билинейной формой $V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}$, а

$$\operatorname{Im} g_{\mathrm{H}}(u_1 + iw_1, u_2 + iw_2) = g(w_1, u_2) - g(u_1, w_2)$$

кососимметрична. Поэтому эрмитово продолжение симметричной формы при перестановке аргументов сопрягается:

$$g_{\mathrm{H}}(v_2, v_1) = \overline{g_{\mathrm{H}}(v_1, v_2)} \text{ для всех } v_1, v_2 \in V_{\mathbb{C}}\,.$$

Это свойство называют *эрмитовой симметричностью*. Обратите внимание, что скалярный квадрат любого вектора относительно эрмитово симметричной формы вещественен:

$$g_{\mathrm{H}}(v, v) = \overline{g_{\mathrm{H}}(v, v)} \in \mathbb{R} \text{ для всех } v \in V_{\mathbb{C}}\,.$$

Если $\mathbb{R}$-билинейная форма $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ кососимметрична, то наоборот форма $\operatorname{Re}\omega_{\mathrm{H}}$ кососимметрична, а $\operatorname{Im}\omega_{\mathrm{H}}$ симметрична. Поэтому скалярные квадраты всех векторов относительно эрмитово продолженной кососимметричной формы ω_{H} чисто мнимы:

$$\omega_{\mathrm{H}}(v, v) = 2i\,\omega(u, w) \in i\mathbb{R} \text{ для всех } v = u + iw \in V_{\mathbb{C}}\,.$$

Пример 2.2 (эрмитово продолжение евклидовой структуры)
Рассмотрим вещественное евклидово векторное пространство[2] V со скалярным произведением $(\,*\,,\,*\,) : V \times V \to \mathbb{R}$ и его эрмитово продолжение $(\,*\,,\,*\,)_{\mathrm{H}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ на комплексификацию $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes V$ пространства V. Форма $(\,*\,,\,*\,)_{\mathrm{H}}$ эрмитово симметрична, вещественно билинейна, комплексно полуторалинейна и *положительна* в том смысле, что $(v, v)_{\mathrm{H}} > 0$ для всех ненулевых $v \in V_{\mathbb{C}}$. Абстрактное комплексное векторное пространство W, оснащённое формой

$$(\,*\,,\,*\,) : W \times W \to \mathbb{C}$$

[1] См. опр. 13.1 на стр. 240 части I.
[2] См. n° 14.1 на стр. 255 части I.

с такими свойствами, называется *эрмитовым*, а сама форма — *эрмитовым скалярным произведением* или *эрмитовой структурой* на W.

Например, комплексификацией вещественного координатного пространства $V = \mathbb{R}^n$ со стандартной евклидовой структурой $(x, y) = \sum x_\nu y_\nu$ является комплексное координатное пространство $V_\mathbb{C} = \mathbb{C}^n$ с эрмитовой структурой $(z, w)_\mathrm{H} = \sum z_\nu \overline{w}_\nu$, которая называется *стандартной* эрмитовой структурой на $\mathbb{C}^n$.

Аналогично, комплексификацией пространства $C^0([a, b], \mathbb{R})$ вещественных непрерывных функций на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ с евклидовым скалярным произведением

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)\,dt \tag{2-5}$$

является пространство $C^0([a, b], \mathbb{C})$ непрерывных функций $[a, b] \to \mathbb{C}$ с эрмитовой структурой

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g}(x)\,dx\,, \tag{2-6}$$

где под интегралом от комплекснозначной функции f по определению понимается комплексное число

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \operatorname{Re} f(x)\,dx + i\int_a^b \operatorname{Im} f(x)\,dx\,,$$

действительная и мнимая части которого равны интегралам от вещественной и мнимой частей $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f : [a, b] \to \mathbb{R}$ функции f.

2.3. Вещественные структуры на комплексном пространстве. Рассмотрим произвольное векторное пространство W над полем $\mathbb{C}$. Всякая $\mathbb{R}$-линейная $\mathbb{C}$-полулинейная[1] инволюция[2]

$$\sigma : W_\mathbb{R} \to W_\mathbb{R} \tag{2-7}$$

называется *вещественной структурой* или *оператором комплексного сопряжения* на пространстве W. Например, если пространство $W = V_\mathbb{C}$ является комплексификацией вещественного векторного пространства V, то комплексное сопряжение $\sigma : W_\mathbb{R} \to W_\mathbb{R}$, $u + iw \mapsto u - iv$, является вещественной структурой на W.

Если на комплексном векторном пространстве W задана вещественная структура (2-7), то согласно прим. 12.6 на стр. 222 части I овеществлённое пространство $W_\mathbb{R} = V_+ \oplus V_-$ распадается в прямую сумму собственных подпространств

$$V_+ = \{w \in W_\mathbb{R} \mid \sigma w = w\} \quad \text{и} \quad V_- = \{w \in W_\mathbb{R} \mid \sigma w = -w\}$$

оператора σ с собственными числами $+1$ и -1. Из $\mathbb{C}$ полулинейности оператора σ вытекает, что равенство $\sigma(u) = u$ влечёт равенство $\sigma(iu) = -i\sigma(u) = -iu$, а равенство $\sigma(w) = -w$ влечёт равенство $\sigma(-iw) = i\sigma(w) = -iw$, т. е. $\mathbb{R}$-линейные операторы умножения на i и на $-i$ задают взаимно обратные изоморфизмы между вещественными векторными пространствами V_+ и V_-:

$$i : V_+ \to V_-\,,\ u \mapsto iu\,, \qquad -i : V_+ \to V_-\,,\ w \mapsto -iw\,.$$

[1]Т. е. обладающая для всех $z \in \mathbb{C}$ и $w \in W$ свойством $\sigma(zw) = \overline{z}\sigma(w)$.

[2]Т. е. обратное самому себе отображение.

Таким образом, $W_{\mathbb{R}} = V \oplus iV$, где $V = V_+$, $iV = V_-$, а умножение вектора $v = u + iw \in W$ на комплексное число $z = x + iy \in \mathbb{C}$ происходит по той же формуле

$$(x + iy)(u + iw) = (xu - yw) + i(xw + yu)\,,$$

что в комплексификации $V_{\mathbb{C}}$ вещественного векторного пространства $V = V_+$. Мы заключаем, что задание на комплексном векторном пространстве W вещественной структуры σ равносильно отождествлению этого пространства с комплексификацией $W = \mathbb{C} \otimes V_+$ вещественного векторного пространства $V_+ = \{u \in W \mid \sigma(w) = w\}$ неподвижных векторов оператора σ.

По этой причине собственные подпространства V_+ и V_- вещественной структуры σ называются пространствами *вещественных* и *чисто мнимых* векторов этой структуры.

Подчеркнём, что на абстрактном векторном пространстве W над полем $\mathbb{C}$ имеется много разных вещественных структур, и никакого естественного предпочтения между ними *a priori* не существует, т. е. у абстрактного комплексного вектора нет канонически определённых «вещественной» и «мнимой» частей — они появляются лишь тогда, когда на пространстве W фиксируется какая-нибудь (одна из многих) вещественная структура.

Пример 2.3 (эрмитово сопряжение матриц)
На пространстве комплексных матриц $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ имеется вещественная структура

$$\times\colon\ \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})\,, \quad M \mapsto M^{\times} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{M}^t\,,$$

сопоставляющее матрице $M = (m_{ij})$ комплексно сопряжённую к транспонированной матрице M^t матрицу $M^{\times} = (m^{\times}_{ij})$ с элементами $m^{\times}_{ij} = \overline{m}_{ji}$. Вещественное подпространство V_+ этой структуры обозначается

$$\mathrm{Mat}^+_n(\mathbb{C}) = \{M = (m_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid m_{ij} = \overline{m}_{ji}\}$$

и называется пространством *эрмитовых матриц*, а мнимое подпространство V_- обозначается

$$\mathrm{Mat}^-_n(\mathbb{C}) = \{M = (m_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid m_{ij} = -\overline{m}_{ji}\}$$

и называется пространством *косоэрмитовых матриц*. Это *вещественные* (не комплексные!) векторные подпространства в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ вещественной размерности n^2, и овеществление $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})_{\mathbb{R}} = \mathrm{Mat}^+_n(\mathbb{C}) \oplus \mathrm{Mat}^-_n(\mathbb{C})$. Матрица H эрмитова если и только если матрица iH косоэрмитова и наоборот. Например, при $n = 2$ базис вещественного пространства $\mathrm{Mat}^+_2(\mathbb{C})$ эрмитовых матриц составляют матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Умножая эти матрицы на i, получаем базис в пространстве $\mathrm{Mat}^-_2(\mathbb{C})$ косоэрмитовых матриц:

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы, обратные к своим эрмитово сопряжённым, называются *унитарными*. Они образуют в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ мультипликативную подгруппу

$$U_n \stackrel{\text{def}}{=} \{F \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid F^{\times} = F^{-1}\}\,, \tag{2-8}$$

которая называется *унитарной группой*.

2.4. Комплексные структуры на вещественном пространстве. Вещественно линейный оператор $I : V \to V$ на векторном пространстве V над полем $\mathbb{R}$ называется *комплексной структурой*, если он удовлетворяет соотношению $I^2 = -\mathrm{Id}_V$. Например, когда $V = W_{\mathbb{R}}$ является овеществлением[1] векторного пространства W над полем $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$-линейный оператор $I : V \to V$, $v \mapsto iv$, умножения векторов $v \in W$ на $i \in \mathbb{C}$, является комплексной структурой на V. Наоборот, если на векторном пространстве V над полем $\mathbb{R}$ задана комплексная структура $I : V \to V$, то можно определить умножение векторов $v \in V$ на комплексные числа правилом

$$(x + iy)\, v \overset{\text{def}}{=} x\, v + y\, I(v)\,. \tag{2-9}$$

Упражнение 2.3. Убедитесь прямым вычислением, что это правило задаёт на V структуру векторного пространства над полем $\mathbb{C}$, и выведите отсюда, что $\dim_{\mathbb{R}} V$ чётна.

Чтобы увидеть это без вычислений, рассмотрим комплексификацию $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V = V \oplus iV$ пространства V и комплексифицированный $\mathbb{C}$-линейный оператор $I_{\mathbb{C}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{R}} I$. Так как оператор $I_{\mathbb{C}}$ тоже удовлетворяет соотношению $I_{\mathbb{C}}^2 = -\mathrm{Id}_{V_{\mathbb{C}}}$, т. е. аннулируется сепарабельным многочленом $t^2 + 1 = (t+i)(t-i)$, его собственные значения исчерпываются числами $\pm i \in \mathbb{C}$, а комплексное пространство $V_{\mathbb{C}} = W_+ \oplus W_-$ распадается в прямую сумму[2] комплексных собственных подпространств $W_+ = \{w \in V_{\mathbb{C}} \mid I_{\mathbb{C}}(w) = iw\}$ и $W_- = \{w \in V_{\mathbb{C}} \mid I_{\mathbb{C}}(w) = -iw\}$ оператора $I_{\mathbb{C}}$. Согласно предл. 2.2 для каждого собственного вектора w оператора $I_{\mathbb{C}}$ сопряжённый вектор $\overline{w}$ тоже собственный и имеет сопряжённое собственное число. Поэтому оператор комплексного сопряжения задаёт $\mathbb{C}$-полулинейный инволютивный изоморфизм $W_+ \leftrightarrows W_-$, $w \leftrightarrow \overline{w}$. Тем самым, $W_- = \overline{W}_+$, $\dim_{\mathbb{C}} W_- = \dim_{\mathbb{C}} W_+$ и $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = 2\dim_{\mathbb{C}} W_+$ чётна.

Заметим теперь, что для любого разложения пространства $V_{\mathbb{C}}$ в прямую сумму

$$V_{\mathbb{C}} = U \oplus \overline{U} \tag{2-10}$$

двух комплексно сопряжённых друг другу комплексных векторных подпространств $U, \overline{U} \subset V_{\mathbb{C}}$ сопоставление вектору $w = u + iv \in V_{\mathbb{C}}$ его удвоенной вещественной части $2\,\mathrm{Re}\, w = 2u = w + \overline{w} \in V$ задаёт $\mathbb{R}$-линейный изоморфизм

$$2\,\mathrm{Re} : U \xrightarrow{\sim} V\,, \quad w \mapsto \mathrm{Re}\, w = w + \overline{w}\,. \tag{2-11}$$

В самом деле, с точки зрения разложения (2-10) комплексное сопряжение $V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$, $w \mapsto \overline{w}$, переводит вектор $(u_1, \overline{u}_2) \in U \oplus \overline{U}$, где $u_1, u_2 \in U$, в вектор $(u_2, \overline{u}_1)$. Поэтому сопряжённые сами себе вещественные векторы $v \in V \subset V_{\mathbb{C}}$ имеют вид $v = (u, \overline{u}) = u + \overline{u} = 2\,\mathrm{Re}\, u$, где $u \in U$. Иначе говоря, для любого вектора $v \in V \subset V_{\mathbb{C}}$ существует единственный такой вектор $u \in U$, что $2\,\mathrm{Re}\, u = v$. Вещественный изоморфизм (2-11) превращает имеющийся в комплексном векторном пространстве U оператор умножения на i в $\mathbb{R}$-линейный оператор $I_U : V \to V$, отправляющий вектор $v = 2\,\mathrm{Re}(u) \in V$, где $u \in U$, в вектор $2\,\mathrm{Re}(iu) \in V$. Очевидно, что подпространства $U, \overline{U} \subset V_{\mathbb{C}}$ являются собственными подпространствами комплексифицированного оператора $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{R}} I_U : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ с собственными числами i и $-i$ соответственно. В частности, $I_U^2 = -\mathrm{Id}_V$. При этом формула (2-9), написанная для оператора I_U в роли I, задаёт на пространстве V такое умножение на комплексные числа, что изоморфизм (2-11) становится $\mathbb{C}$-линейным.

[1] См. n° 2.1 на стр. 21.

[2] См. предл. 12.4 на стр. 221 части I.

Применяя сказанное к подпространству $U = W_+$, мы заключаем, что взятие удвоенной вещественной части задаёт $\mathbb{R}$-линейный изоморфизм между комплексным векторным пространством W_+ и вещественным пространством V, причём умножение на i в W_+ переходит при этом изоморфизме в действие оператора I на V. Тем самым формула (2-9) действительно задаёт на V структуру векторного пространства над $\mathbb{C}$, в которой изоморфизм $2\,\mathrm{Re} : W_+ \xrightarrow{\sim} V$ становится $\mathbb{C}$-линейным. Подытожим сказанное как

Предложение 2.4
Следующие структуры на вещественном векторном пространстве V размерности $\dim_{\mathbb{R}} V = 2n$ находятся в канонической биекции друг с другом:

1) умножение $\mathbb{C} \times V \to V$ векторов из V на комплексные числа, согласованное с имеющимся в V умножением на вещественные числа $\mathbb{R} \times V \to V$ и превращающее V в n-мерное векторное пространство над $\mathbb{C}$

2) вещественно линейный оператор $I : V \to V$ с $I^2 = -\mathrm{Id}_V$

3) n-мерное комплексное векторное подпространство $U \subset V_{\mathbb{C}}$, такое, что[1] $U \cap \overline{U} = 0$.

Структуре (1) отвечает в (2) оператор $I : v \mapsto iv$ умножения векторов на i, а в (3) — собственное подпространство $U = \{w \in V_{\mathbb{C}} \mid I_{\mathbb{C}} w = iw\}$ с собственным числом i комплексифицированного оператора $I_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$. Комплексному подпространству $U \subset V_{\mathbb{C}}$ из (3) отвечает в (1) умножение на комплексные числа по правилу $zv = 2\,\mathrm{Re}(zu)$, где $u \in U$ имеет $2\,\mathrm{Re}\,u = v$, а в (2) — оператор $I_U : V \to V$, получающийся ограничением на V комплексно линейного автоморфизма пространства $V_{\mathbb{C}} = U \oplus \overline{U}$, действующего на подпространствах U и $\overline{U}$ умножением на i и $-i$ соответственно. □

2.5. Эрмитовы структуры и кэлеровы тройки. Векторное пространство W над полем $\mathbb{C}$ называется *эрмитовым*, если на нём задана *эрмитова структура*[2] — полуторалинейная эрмитово симметричная положительная форма $(*\,,\, *) : W \times W \to \mathbb{C}$, где эрмитова симметричность означает, что $(u, w) = \overline{(w, u)}$ для всех $u, w \in W$, а положительность — что вещественное число $(v, v) = \overline{(v, v)}$ положительно для всех ненулевых $v \in W$. Полагая

$$g(u, w) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Re}(u, w) \quad \text{и} \quad \omega(u, w) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Im}(u, w)\,,$$

получаем две вещественно билинейные формы $g, \omega : W_{\mathbb{R}} \times W_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$. Эрмитова симметричность комплекснозначной формы $(u, w) = g(u, w) + i\omega(u, w)$ равносильна симметричности g и кососимметричности ω. Положительность формы (u, w) влечёт положительность формы g, задающей тем самым евклидову структуру на овеществлённом пространстве $W_{\mathbb{R}}$. Равенство

$$(u, iw) = -i(u, w)$$

равносильно паре равенств $g(u, iw) = \omega(u, w)$ и $\omega(u, iw) = -g(u, w)$, переходящих друг в друга при замене w на iw. На языке матриц первое из этих равенств означает, что записанные в произвольном базисе пространства $W_{\mathbb{R}}$ над полем $\mathbb{R}$ матрицы Грама G, Ω форм g, ω и матрица

[1] Это условие равносильно тому, что $V_{\mathbb{C}} = U \oplus \overline{U}$.
[2] См. прим. 2.2 на стр. 25.

оператора $I: W_{\mathbb{R}} \to W_{\mathbb{R}}$, $w \mapsto iw$, связаны соотношением $GI = \Omega$, из которого вытекает, в частности, что $\det \Omega \neq 0$, т. е. форма ω невырождена и задаёт на овеществлённом пространстве $W_{\mathbb{R}}$ симплектическую структуру.

Наоборот, пусть на вещественном векторном пространстве V размерности $\dim_{\mathbb{R}} V = 2n$ заданы

- евклидова структура[1] $g: V \times V \to \mathbb{R}$
- симплектическая структура[2] $\omega: V \times V \to \mathbb{R}$
- комплексная структура[3] $I: V \to V$.

Рассмотрим V как комплексное векторное пространство, в котором умножение на комплексные числа задаётся при помощи оператора I по форм. (2-9) на стр. 28, и обозначим через

$$(\,*\,,\,*\,): V \times V \to \mathbb{C}$$

вещественно билинейную форму, сопоставляющую векторам $u, w \in V$ комплексное число

$$(u, w) \overset{\text{def}}{=} g(u, w) + i\omega(u, w) \tag{2-12}$$

Упражнение 2.4. Убедитесь, что эта форма вещественно билинейна, эрмитово симметрична и положительна.

Данные (I, g, ω) называются *кэлеровой тройкой*, если они удовлетворяют лем. 2.1 ниже.

Лемма 2.1
Следующие свойства тройки (I, g, ω) эквивалентны друг другу:

1) форма (2-12) задаёт на комплексном векторном пространстве V эрмитову структуру
2) форма (2-12) $\mathbb{C}$-линейна по первому аргументу
3) форма (2-12) $\mathbb{C}$-полулинейна по второму аргументу
4) $g(u, Iw) = \omega(u, w)$ для всех $u, w \in V$
5) $\omega(u, Iw) = -g(u, w)$ для всех $u, w \in V$
6) записанные в одном базисе пространства V над полем $\mathbb{R}$ матрицы Грама G, Ω форм g, ω и матрица оператора I связаны равенством $GI = \Omega$.

Доказательство. Равенство $(Iu, w) = i(u, w)$ равносильно паре равенств

$$g(Iu, w) = -\omega(u, w) \quad \text{и} \quad \omega(Iu, w) = g(u, w)\,,$$

переходящих друг в друга при замене u на Iu, так как $I^2 = -\mathrm{Id}$. Равенство $(u, Iw) = -i(u, w)$ равносильно паре равенств

$$g(u, Iw) = \omega(u, w) \quad \text{и} \quad \omega(u, Iw) = -g(u, w)\,,$$

[1] Т. е. симметричная положительно определённая $\mathbb{R}$-билинейная форма.
[2] Т. е. невырожденная кососимметричная $\mathbb{R}$-билинейная форма.
[3] Т. е. $\mathbb{R}$-линейный эндоморфизм с квадратом $-\mathrm{Id}_V$, см. n° 2.4 на стр. 28.

переходящих друг в друга при замене w на Iw. В силу симметричности g и кососимметричности ω выполнение для всех $u, w \in V$ первой пары равенств эквивалентно выполнению второй. Это доказывает эквивалентность первых пяти свойств. Условие (6) является матричной записью условия (4). □

Следствие 2.4
Любые два элемента кэлеровой тройки (I, g, ω) однозначно задают третий.

Доказательство. Это вытекает из свойства (6) и обратимости матриц I, G, Ω. □

Следствие 2.5
Оператор I в кэлеровой тройке (I, g, ω) одновременно является ортогональным для g и симплектическим для ω, т. е. $g(Iu, Iw) = g(u, w)$ и $\omega(Iu, Iw) = \omega(u, w)$ для всех $u, w \in V$.

Доказательство. Из (1) вытекает, что $(Iu, Iw) = (u, w)$. Сравнивая вещественную и мнимую части, получаем требуемое. □

2.5.1. Келеровы тройки с заданным $\boldsymbol{g}$. Пусть на вещественном векторном пространстве V задана евклидова структура $g : V \times V \to \mathbb{R}$. По сл. 2.5 в любой кэлеровой тройке (I, g, ω) комплексная структура I является g-ортогональным оператором, т. е. $g(Iu, Iw) = g(u, w)$ для всех $u, w \in V$. Для любой такой комплексной структуры I вещественная билинейная форма $\omega(u, w) \overset{\text{def}}{=} g(u, Iw)$ имеет матрицу Грама $\Omega = GI$ и, стало быть невырождена. Выкладка

$$\omega(u, w) = g(u, Iw) = g(Iu, I^2 w) = -g(Iu, w) = -g(w, Iu) = -\omega(w, u)$$

показывает, что форма ω кососимметрична. Тем самым тройка (I, g, ω) кэлерова. Мы заключаем, что кэлеровы тройки (I, g, ω) с заданной евклидовой структурой g находятся в биекции с g-ортогональными комплексными структурами.

Предложение 2.5
Пусть на $2n$-мерном вещественном пространстве V задано евклидово скалярное произведение $g : V \times V \to \mathbb{R}$. Обозначим через $g_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ его комплексно билинейное продолжение[1] на комплексификацию $V_{\mathbb{C}}$ пространства V. Соответствие из предл. 2.4 на стр. 29 задаёт каноническую биекцию между кэлеровыми тройками (I, g, ω) и изотропными[2] для формы $g_{\mathbb{C}}$ комплексными подпространствами $U \subset V_{\mathbb{C}}$ размерности $\dim_{\mathbb{C}} U = n$.

Доказательство. В предл. 2.4 комплексной структуре $I : V \to V$ ставится в соответствие собственное подпространство U её комплексификации $I_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ с собственным числом i. Мы должны показать что это соответствие задаёт биекцию между g-ортогональными комплексными структурами I и $g_{\mathbb{C}}$-изотропными n-мерными комплексными подпространствами $U \subset V_{\mathbb{C}}$.

Упражнение 2.5. Пусть $\mathbb{R}$-линейный оператор $F : V \to V$ является изометрией $\mathbb{R}$-билинейной формы $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$, т. е. $\beta(Fv_1, Fv_2) = \beta(v_1, v_2)$ для всех $v_1, v_2 \in V$. Убедитесь, что его комплексификация $F_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ является изометрией $\mathbb{C}$-билинейного продолжения $\beta_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ формы β, т. е. $\beta_{\mathbb{C}}(F_{\mathbb{C}} w_1, F_{\mathbb{C}} w_2) = \beta_{\mathbb{C}}(w_1, w_2)$ для всех $w_1, w_2 \in V_{\mathbb{C}}$.

Из упражнения вытекает, что оба собственных подпространства $W_{\pm} = \{w \in V_{\mathbb{C}} \mid I_{\mathbb{C}}(w) = \pm i w\}$ комплексификации любой g-ортогональной комплексной структуры I изотропны для формы $g_{\mathbb{C}}$,

[1] См. n° 2.2.3 на стр. 24.
[2] См. n° 17.1.1 на стр. 309 части I.

поскольку $g_{\mathbb{C}}(w_1, w_2) = g_{\mathbb{C}}(I_{\mathbb{C}}w_1, I_{\mathbb{C}}w_2) = g_{\mathbb{C}}(\pm iw_1, \pm iw_2) = -g_{\mathbb{C}}(w_1, w_2)$ при $w_1, w_2 \in U_{\pm}$, откуда $g_{\mathbb{C}}(w_1, w_2) = 0$.

Покажем, что если n-мерное комплексное векторное подпространство $U \subset V_{\mathbb{C}}$ изотропно для $g_{\mathbb{C}}$, то оно удовлетворяет условию (3) из предл. 2.4, т. е. $U \cap \overline{U} = 0$. Пусть $u_1 = \overline{u}_2$ для некоторых $u_1, u_2 \in U$. Тогда вещественный вектор $u_1 + u_2 \in U \cap V$ изотропен. Так как у формы g нет ненулевых изотропных векторов в V, мы заключаем, что $u_2 = -u_1$, откуда $\overline{u}_1 = -u_1$. Тем самым, $u_1 = iv$ для некоторого $v \in V$. Но тогда $g(v, v) = g_{\mathbb{C}}(v, v) = g_{\mathbb{C}}(-iu_1, -iu_1) = -g_{\mathbb{C}}(u_1, u_1) = 0$, откуда $v = 0$. Итак, $U \cap \overline{U} = 0$ и $V_{\mathbb{C}} = U \oplus \overline{U}$.

По упр. 2.1 на стр. 24 $g_{\mathbb{C}}(\overline{u}_1, \overline{u}_2) = \overline{g_{\mathbb{C}}(u_1, u_2)} = 0$ для всех $u_1, u_2 \in U$, т. е. подпространство $\overline{U}$ тоже изотропно для $g_{\mathbb{C}}$. Поэтому оператор $J : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$, для которого подпространства U и $\overline{U}$ собственные с собственными числами i и $-i$ соответственно, является изометрией формы $g_{\mathbb{C}}$:

$$g_{\mathbb{C}}\big(J(u_1 + \overline{u}_2), J(u_1 + \overline{u}_2)\big) = g_{\mathbb{C}}(iu_1, -i\overline{u}_2) + g_{\mathbb{C}}(-i\overline{u}_1, iu_2) = \\ = g_{\mathbb{C}}(u_1, \overline{u}_2) + g_{\mathbb{C}}(\overline{u}_1, u_2) = g_{\mathbb{C}}(u_1 + \overline{u}_2, u_1 + \overline{u}_2)\,.$$

Соответствие из предл. 2.4 на стр. 29 сопоставляет разложению $V_{\mathbb{C}} = U \oplus \overline{U}$ комплексную структуру $I_U = J|_V : V \to V$ — ограничение оператора J на вещественное подпространство V. Она является изометрией формы $g = g_{\mathbb{C}}|_V$, что и требовалось. □

2.5.2. Келеровы тройки с заданным $\boldsymbol{\omega}$. Пусть теперь на вещественном векторном пространстве V задана симплектическая структура $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$. По сл. 2.5 в любой кэлеровой тройке (I, g, ω) комплексная структура I является изометрией формы ω, т. е.

$$\omega(Iu, Iw) = \omega(u, w) \text{ для всех } u, w \in V\,. \tag{2-13}$$

Для любой такой комплексной структуры I вещественная билинейная форма

$$g(u, w) \stackrel{\text{def}}{=} \omega(Iu, w) = -\omega(u, Iw)$$

невырождена и симметрична, так как $g(u, w) = \omega(Iu, w) = -\omega(u, Iw) = \omega(Iw, u) = g(w, u)$. Тем самым, тройка (I, g, ω) кэлерова если и только если квадратичная форма $g(v, v) = \omega(Iv, v)$ положительно определена на V. Мы заключаем, что кэлеровы тройки (I, g, ω) с заданной симплектической структурой ω находятся в биекции с комплексными структурами I, которые удовлетворяют условию (2-13) и таковы, что квадратичная форма $g(v, v) = \omega(Iv, v)$ положительна.

Предложение 2.6

Пусть на $2n$-мерном вещественном пространстве V задана невырожденная кососимметричная билинейная форма $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$. Обозначим через $\omega_{\mathbb{C}}(w_1, w_2)$ и $\omega_{\mathrm{H}}(w_1, w_2) \stackrel{\text{def}}{=} \omega_{\mathbb{C}}(w_1, \overline{w}_2)$ её комплексно билинейное и полуторалинейное продолжения на комплексификацию $V_{\mathbb{C}}$ пространства V. Соответствие из предл. 2.4 на стр. 29 задаёт каноническую биекцию между кэлеровыми тройками (I, g, ω) и такими комплексными подпространствами $U \subset V_{\mathbb{C}}$ размерности $\dim_{\mathbb{C}} U = n$, что ограничение на U формы $\omega_{\mathbb{C}}$ нулевое, а ограничение формы $i\omega_{\mathrm{H}}$ является эрмитовой структурой на U.

Доказательство. Как и в доказательстве предл. 2.5, из упр. 2.5 на стр. 31 вытекает, что ограничение формы $\omega_{\mathbb{C}}$ на собственные подпространства $W_{\pm} = \{w \in V_{\mathbb{C}} \mid I_{\mathbb{C}}(w) = \pm iw\}$ оператора $I_{\mathbb{C}}$ изотропны для формы $\omega_{\mathbb{C}}$.

Упражнение 2.6. Убедитесь в этом.

Покажем, что полуторалинейная форма $i\omega_{\mathrm{H}}$ задаёт эрмитову структуру на собственном подпространстве $W_+ = \{w \in V_{\mathbb{C}} \mid I_{\mathbb{C}} w = iw\}$ если и только если полуторалинейная форма $V \times V \to \mathbb{C}$, заданная правилом

$$(v_1, v_2) = g(v_1, v_2) + i\omega(v_1, v_2)\,, \quad \text{где} \quad g(u_1, u_2) = -\omega(u_1, Iu_2)\,, \tag{2-14}$$

задаёт эрмитову структуру на V. Как мы видели в предл. 2.2 на стр. 23, равенство $I_{\mathbb{C}}(w) = iw$ для вектора $w = u + iv$ с $u, v \in V$ означает, что $Iu = -v$. Поэтому из равенств (2-13) и $I^2 = -\mathrm{Id}$ вытекает, что для всех $w_1 = u_1 + iv_1$, $w_2 = u_2 + iv_2$ из W_+

$$\begin{aligned} i\omega_{\mathrm{H}}(w_1, w_2) &= \omega(u_1, v_2) - \omega(v_1, u_2) + i\left(\omega(u_1, u_2) + \omega(v_1, v_2)\right) = \\ &= -\omega(u_1, Iu_2) + \omega(Iu_1, u_2) + i\big(\omega(u_1, u_2) + \omega(Iu_1, Iu_2)\big) = \\ &= 2\left(-\omega(u_1, Iu_2) + i\omega(u_1, u_2)\right) = 2\left(g(u_1, u_2) + i\omega(u_1, u_2)\right) = \big(2\,\mathrm{Re}(w_1), 2\,\mathrm{Re}(w_2)\big)/2\,. \end{aligned} \tag{2-15}$$

Мы заключаем, что положительность ограничения формы $i\omega_{\mathrm{H}}$ на W равносильна положительности формы (2-14) на V.

Рассмотрим теперь произвольное n-мерное комплексное подпространство $U \subset V_{\mathbb{C}}$, на которое $\omega_{\mathbb{C}}$ ограничивается в тождественно нулевую, а $i\omega_{\mathbb{C}}(U, \overline{U})$ — в положительно определённую форму. Тогда $U \cap \overline{U} = 0$, ибо если $u_1, u_2 \in U$ таковы, что $\overline{u}_1 = u_2$, то $\omega_{\mathrm{H}}(u_1, u_1) = i\,\omega_{\mathbb{C}}(u_1, \overline{u}_1) = i\omega_{\mathbb{C}}(u_1, u_2) = 0$, откуда $u_2 = 0$. Поэтому $V = U \oplus \overline{U}$. Как и в доказательстве предл. 2.5, из упр. 2.1 на стр. 24 вытекает, что подпространство $\overline{U}$ изотропно для билинейной формы $\omega_{\mathbb{C}}$, ибо $\omega_{\mathbb{C}}(\overline{u}_1, \overline{u}_2) = \overline{\omega_{\mathbb{C}}(u_1, u_2)} = 0$ для всех $u_1, u_2 \in U$, а оператор $J : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$, действующий на U и на $\overline{U}$ умножениями на i и на $-i$ соответственно, является изометрией формы $\omega_{\mathbb{C}}$:

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbb{C}}\big(J(u_1 + \overline{v}_1), J(u_2 + \overline{v}_2)\big) &= \omega_{\mathbb{C}}(iu_1, -i\overline{v}_2) + \omega_{\mathbb{C}}(-i\overline{v}_1, iu_2) = \\ &= \omega_{\mathbb{C}}(u_1, \overline{v}_2) + \omega_{\mathbb{C}}(\overline{v}_1, u_2) = \omega_{\mathbb{C}}(u_1 + \overline{v}_1, u_2 + \overline{v}_2)\,, \end{aligned}$$

и значит, комплексная структура $I_U = J|_V$, задаваемая его ограничением на V, является изометрией формы $\omega = \omega_{\mathbb{C}}|_V$. Вычисление (2-15) показывает, что $\mathbb{C}$-линейный изоморфизм

$$2\,\mathrm{Re} : U \to V_I$$

из форм. (2-11) на стр. 28 переводит эрмитову форму $i\omega_{\mathrm{H}}$ на U положительное кратное формы (2-14) на V, которая, тем самым, тоже эрмитова, а значит, тройка (I, g, ω) кэлерова. □

2.5.3. Зигелево полупространство $\mathfrak{H}_n \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. Мы продолжаем рассматривать $2n$-мерное вещественное пространство V с заданной на нём невырожденной кососимметричной билинейной формой $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$. Зафиксируем в V симплектический базис[1]

$$(\boldsymbol{e}', \boldsymbol{e}'') = (e'_1, \dots, e'_n, e''_1, \dots, e''_n)\,,$$

в котором матрица Грама формы ω имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}\,, \tag{2-16}$$

[1] См. n° 16.4 на стр. 298 части I.

и обозначим через $V', V'' \subset V$ изотропные подпространства, натянутые на первые n и на последние n базисных векторов соответственно. Тогда $V = V' \oplus V''$ и $V_{\mathbb{C}} = V'_{\mathbb{C}} \oplus V''_{\mathbb{C}}$, где оба подпространства $V'_{\mathbb{C}}, V''_{\mathbb{C}}$ изотропны для $\omega_{\mathbb{C}}$.

Пусть задано разложение $V_{\mathbb{C}} = U \oplus \overline{U}$, в котором сопряжённые друг другу комплексные векторные подпространства $U, \overline{U} \subset V_{\mathbb{C}}$ изотропны для комплексно билинейной формы $\omega_{\mathbb{C}}$. Если полуторалинейная форма $i\omega_{\mathrm{H}}$ положительно определена на U, то U имеет нулевые пересечения со всеми изотропными подпространствами формы $\omega_{\mathbb{C}}$, возникающими как комплексификации вещественных изотропных подпространств $W \subset V$, в силу того, что $i\omega_{\mathrm{H}}(w_1 + iw_2, w_1 + iw_2) = 0$ для всех $w_1, w_2 \in W$. В частности, $U \cap V''_{\mathbb{C}} = 0$ и проекция подпространства U на $V'_{\mathbb{C}}$ вдоль $V''_{\mathbb{C}}$ является изоморфизмом комплексных векторных пространств. Мы заключаем, что в U существует единственный базис $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)$, векторы которого переходят при этой проекции в первые n базисных векторов $\boldsymbol{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ зафиксированного нами симплектического базиса $(\boldsymbol{e}', \boldsymbol{e}'')$ в V. Иначе говоря,

$$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{e}', \boldsymbol{e}'') \begin{pmatrix} E \\ S \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}' + \boldsymbol{e}'' S \tag{2-17}$$

для некоторой матрицы $S \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, причём подпространство U матрица S однозначно определяют друг друга. Так как матрицы Грама форм $\omega_{\mathbb{C}}$ и $i\omega_{\mathrm{H}}$ в базисе $\boldsymbol{u}$ имеют вид

$$\omega_{\mathbb{C}}|_U = \begin{pmatrix} E & S^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E \\ S \end{pmatrix} = S - S^t ,$$
$$i\omega_{\mathrm{H}}|_U = i \cdot \begin{pmatrix} E & S^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E \\ \overline{S} \end{pmatrix} = i\,(\overline{S} - S^t),$$

подпространство U изотропно если и только если матрица S симметрична, и в этом случае

$$i\,(\overline{S} - S^t) = \mathrm{Im}\, S .$$

Поэтому положительность ограничения формы $i\omega_{\mathrm{H}}$ на U означает, что вещественная симметрическая матрица $\mathrm{Im}\, S$ положительно определена.

Множество симметричных матриц $S \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ с положительно определённой мнимой частью, т. е. таких, что

$$S^t = S \quad \text{и} \quad \boldsymbol{x} \cdot \mathrm{Im}\, S \cdot \boldsymbol{x}^t > 0 \text{ для всех ненулевых } \boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n , \tag{2-18}$$

называется *полупространством Зигеля*[1] и обозначается $\mathfrak{H}_n$. Условия (2-18) известны как *соотношения Римана*[2].

[1]По аналогии со случаем $n = 1$, когда условия (2-18) задают верхнюю полуплоскость $\mathrm{Im}\, z > 0$ в $\mathbb{C} = \mathrm{Mat}_1(\mathbb{C})$.

[2]Эти соотношения возникают в самых разных разделах геометрии. Например, они необходимы и достаточны для того, чтобы n-мерный комплексный тор $\mathbb{C}^n / \Lambda$, где $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^{2n}$ — целочисленная решётка, натянутая на n стандартных базисных векторов пространства $\mathbb{C}^n$ и n столбцов матрицы S, можно было аналитически вложить в комплексное проективное пространство как алгебраическое подмногообразие (подробности см. в книгах: *Д. Мамфорд*. *Лекции о тэта-функциях*. М., «Мир», 1988 и: *В. В. Шокуров*. *Римановы поверхности и алгебраические кривые*. М., «ВИНИТИ», 1988, сер. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.», т. 23 «Алгебраическая Геометрия 1»).

Теорема 2.1
Комплексные структуры, которые расширяют стандартную симплектическую структуру (2-16) на $\mathbb{R}^{2n}$ до эрмитовой структуры, взаимно однозначно соответствуют точкам зигелева полупространства $\mathfrak{H}_n$. В стандартном симплектическом базисе $(\boldsymbol{e}', \boldsymbol{e}'')$ комплексная структура I_S, задаваемая матрицей $S = X + iY \in \mathfrak{H}_n$, где $X, Y \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, имеет блочную матрицу

$$I_S = \begin{pmatrix} -Y^{-1}X & Y^{-1} \\ -Y - XY^{-1}X & XY^{-1} \end{pmatrix}. \tag{2-19}$$

Доказательство. Нам осталось проверить только формулу (2-19). По предл. 2.4 комплексная структура $I_U : V \to V$, отвечающая разложению $V_{\mathbb{C}} = U \oplus \overline{U}$, переводит вектор $v = \mathrm{Re}\, u$, где $v \in V$, $u \in U$, в вектор $\mathrm{Re}(iu)$. Если $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}' + \boldsymbol{e}''(X + iY)$, то $\mathrm{Re}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{e}' + \boldsymbol{e}''X$ и $\mathrm{Re}(i\boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{e}''Y$. Поэтому

$$I(\boldsymbol{e}'') = I\big(\mathrm{Re}(-i\boldsymbol{u}Y^{-1})\big) = \mathrm{Re}(\boldsymbol{u})Y^{-1} = \boldsymbol{e}'Y^{-1} + \boldsymbol{e}''XY^{-1}$$
$$I(\boldsymbol{e}') = I(\mathrm{Re}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{e}''X) = \mathrm{Re}(i\boldsymbol{u}) - I(\boldsymbol{e}'')X = -\boldsymbol{e}'Y^{-1}X + \boldsymbol{e}''(-Y + XY^{-1}X).$$

□

Задачи для самостоятельного решения к §2

Задача 2.1. Существуют ли на $\mathbb{R}^2$ комплексная структура и эрмитово скалярное произведение, вещественная и мнимая части которого имеют в стандартном базисе матрицы Грама
а) $\begin{pmatrix} 22 & 16 \\ 16 & 18 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 16 & -14 \\ -14 & \frac{25}{2} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$?

Задача 2.2. Рассмотрим комплексное векторное пространство W и его овеществление $W_{\mathbb{R}}$.
а) Найдите вещественную коразмерность подпространства $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$ в $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}})$.
б) Покажите, что $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}}) = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W) \oplus \mathrm{End}'_{\mathbb{C}}(W)$, где

$$\mathrm{End}'_{\mathbb{C}}(W) = \{f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}}) \mid \forall z \in \mathbb{C}, \forall w \in W \; f(zw) = \overline{z} f(w)\}$$

является пространством $\mathbb{C}$-полулинейных отображений $f : W \to W$, причём компоненты $f_c \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$ и $f_s \in \mathrm{End}'_{\mathbb{C}}(W)$ разложения $f = f_c + f_s$ вычисляются по формулам

$$f_c = \frac{f - IfI}{2}, \quad f_s = \frac{f + IfI}{2}, \quad \text{где} \quad I : W \to W, \; w \mapsto iw.$$

Задача 2.3. Рассмотрим комплексное векторное пространство W с эрмитовым скалярным произведением $(*, *) : W \times W \to \mathbb{C}$ и обозначим через $\omega(u, w) = \mathrm{im}(u, w)$ соответствующую симплектическую структуру на $W_{\mathbb{R}}$. Покажите, что
а) унитарная группа[1] $\mathrm{U}(W) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W) \mid \forall u, w \in W \; (fu, fw) = (u, w)\}$ пространства W является пересечением полной линейной группы $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(W) \subset \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}})$ с симплектической группой $\mathrm{Sp}_{\omega}(W_{\mathbb{R}}) = \{f \in \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}}) \mid \forall u, w \in W \; \omega(fu, fw) = \omega(u, w)\}$ формы ω
б) $\mathbb{C}$-линейная компонента f_c из зад. 2.2 (б) любого оператора $f \in \mathrm{Sp}_{\omega}(W_{\mathbb{R}})$ лежит в $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(W)$ и $(f_c u, w) = (u, (f^{-1})_c w)$ для всех $u, w \in W$.

[1] Ср. с форм. (2-8) на стр. 27.

Задача 2.4. Рассмотрим в евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^2$ отражение[1] $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ в какой-нибудь прямой и любой нетождественный поворот[2] $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Обозначим через $\sigma_{\mathbb{C}}, \tau_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ их комплексификации. Как действует $\sigma_{\mathbb{C}}$ на собственные векторы оператора $\tau_{\mathbb{C}}$?

Задача 2.5. Как связаны друг с другом а) характеристические многочлены б) собственные числа в) собственные векторы г) жордановы нормальные формы комплексного линейного оператора $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ и комплексификации его овеществления $(f_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}^{2n}$? Если общий случай вызывает затруднения, начните с оператора умножения на i в одномерном пространстве $\mathbb{C}$.

Задача 2.6 (сопряжённые комплексные структуры). Рассмотрим комплексное векторное пространство W и обозначим через $\overline{W}$ пространство, совпадающее с W как аддитивная абелева группа, но с умножением векторов на комплексные числа по формуле $z \circ w \overset{\text{def}}{=} \overline{z} \cdot w$ (слева стоит произведение в $\overline{W}$, а справа — произведение в W). Покажите, что

а) $\overline{W}$ является векторным пространством над $\mathbb{C}$ и $\dim_{\mathbb{C}} \overline{W} = \dim_{\mathbb{C}} W$

б) комплексифицированное овеществление $(W_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$ пространства W канонически изоморфно $W \oplus \overline{W}$ как комплексное векторное пространство.

Задача 2.7. Покажите, что зигелево полупространство $\mathfrak{H}_n \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ непрерывно стягивается по себе в точку.

---

[1] См. n° 17.1.2 на стр. 309 части I.

[2] См. прим. 17.1 на стр. 311 части I.

§3. Эрмитовы пространства

3.1. Эрмитова геометрия. Напомню[1], что векторное пространство W над полем $\mathbb{C}$ называется *эрмитовым* или *унитарным*, если на нём задано полуторалинейное[2] эрмитово симметричное положительное скалярное произведение

$$(\,*\,,*\,)\colon\ W\times W\to\mathbb{C}\,.$$

В n° 2.5 на стр. 29 мы видели, что вещественная билинейная форма

$$g(u,w)\stackrel{\text{def}}{=}\mathrm{Re}(u,w)$$

задаёт на овеществлённом пространстве $W_{\mathbb{R}}$ евклидову структуру, а вещественная форма

$$\omega(u,w)\stackrel{\text{def}}{=}\mathrm{Im}(u,w)$$

задаёт на $W_{\mathbb{R}}$ симплектическую структуру. Таким образом, эрмитово векторное пространство сочетает в себе свойства евклидова и симплектического пространств.

На матричном языке эрмитова симметричность скалярного произведения означает, что матрица Грама[3] $G_{\boldsymbol{w}}=\big((w_i,w_j)\big)=\boldsymbol{w}^t\boldsymbol{w}$ любого набора векторов $\boldsymbol{w}=(w_1,\dots,w_m)$ *эрмитова*[4], т. е. $G_{\boldsymbol{w}}^t=\overline{G}_{\boldsymbol{w}}$. Так как эрмитово скалярное произведение полулинейно по второму аргументу, при линейной замене векторов по формуле $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}\,C_{\boldsymbol{uw}}$ матрица Грама меняется по правилу

$$G_{\boldsymbol{w}}=\boldsymbol{w}^t\boldsymbol{w}=C_{\boldsymbol{uw}}^t\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{u}\,\overline{C}_{\boldsymbol{uw}}=C_{\boldsymbol{uw}}^tG_{\boldsymbol{u}}\overline{C}_{\boldsymbol{uw}}\,.$$

3.1.1. Эрмитова норма вектора. Вещественное число

$$\|w\|\stackrel{\text{def}}{=}\sqrt{(w,w)}=\sqrt{g(w,w)}\tag{3-1}$$

называется *эрмитовой нормой* или *длиной* вектора $w\in W$. Обратите внимание, что эрмитова длина совпадает с евклидовой длиной вектора w относительно вещественного евклидова скалярного произведения g на $W_{\mathbb{R}}$. Эрмитово скалярное произведение $W\times W\to\mathbb{C}$ однозначно восстанавливается по функции длины $W\to\mathbb{R}$, так как

$$\begin{aligned}2\,\mathrm{Re}(w_1,w_2)&=(w_1,w_2)+\overline{(w_1,w_2)}=(w_1,w_2)+(w_2,w_1)=\|w_1+w_2\|^2-\|w_1\|^2-\|w_2\|^2\\2i\,\mathrm{Im}(w_1,w_2)&=(w_1,w_2)-\overline{(w_1,w_2)}=(w_1,w_2)-(w_2,w_1)=-i\left(\|w_1+iw_2\|^2-\|w_1\|^2-\|w_2\|^2\right)\end{aligned}$$

в силу полуторалинейности скалярного произведения.

---

[1] См. прим. 2.2 на стр. 25 и n° 2.5 на стр. 29.

[2] Линейное по первому аргументу и полулинейное по второму.

[3] Здесь и далее при перемножении матриц, элементами которых являются векторы пространства W, мы считаем, что $u\cdot w\stackrel{\text{def}}{=}(u,w)\in\mathbb{C}$. Таким образом, произведение двух матриц из векторов является матрицей из комплексных чисел. Ср. с n° 8.2 на стр. 137 части I.

[4] См. прим. 2.3 на стр. 27.

3.1.2. Ортогонализация Грама – Шмидта. Набор векторов $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n)$ в эрмитовом пространстве W называется *ортонормальным* если его матрица Грама $G_{\boldsymbol{e}}$ единичная, т. е. когда все векторы попарно ортогональны друг другу и имеют единичную длину. Как и в евклидовом пространстве[1], в $\mathbb{C}$-линейной оболочке любого набора ненулевых векторов $w_1, \dots, w_m$ эрмитова пространства W можно указать такой ортонормальный базис $e_1, \dots, e_n$, что при каждом k линейная оболочка векторов $w_1, \dots, w_k$ содержится в линейной оболочке векторов $e_1, \dots, e_k$. Индуктивная процедура построения такого базиса называется *ортогонализацей Грама – Шмидта*. В качестве первого вектора берётся $e_1 = w_1/\|w_1\|$. Если для векторов $w_1, \dots, w_k$ уже построены такие ортонормальные векторы $e_1, \dots, e_i$, что $i \leqslant k$ и

$$\operatorname{span}(e_1, \dots, e_i) = \operatorname{span}(w_1, \dots, w_k)\,, \tag{3-2}$$

то положим $v_{i+1} = w_{k+1} - \sum_{\nu=1}^{i}(w_{k+1}, e_\nu) \cdot e_\nu$. Так как для каждого из уже построенных векторов e_j выполняется равенство $(v_{i+1}, e_j) = (v_{k+1}, e_j) - (v_{k+1}, e_j)(e_j, e_j) = 0$, вектор v_{i+1} ортогонален подпространству (3-2). Если $v_{i+1} = 0$, то вектор w_{k+1} лежит в подпространстве (3-2) и набор $w_1, \dots, w_k$ можно увеличить до набора $w_1, \dots, w_{k+1}$. Если $v_{i+1} \neq 0$, добавляем к векторам $e_1, \dots, e_i$ вектор $e_{i+1} = v_{i+1}/\|v_{i+1}\|$.

Лемма 3.1
Определитель Грама $\det G_{\boldsymbol{w}}$ любого набора векторов $\boldsymbol{w} = (w_1, \dots, w_m)$ является вещественным неотрицательным числом и обращается в нуль если и только если $\boldsymbol{w}$ линейно зависим.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{e}\, C_{\boldsymbol{ew}}$, где $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — ортонормальный базис в $\operatorname{span} \boldsymbol{w}$. Тогда $G_{\boldsymbol{w}} = C_{\boldsymbol{ew}}^t \overline{C}_{\boldsymbol{ew}}$. Если $n < m$, то ранг матрицы $G_{\boldsymbol{w}}$ строго меньше её размера, и $\det G_{\boldsymbol{w}} = 0$. Если $n = m$, то $\det G_{\boldsymbol{w}} = \det C_{\boldsymbol{ew}} \cdot \overline{\det C}_{\boldsymbol{ew}} = |\det C_{\boldsymbol{ew}}|^2 > 0$. □

3.1.3. Неравенство Коши – Буняковского – Шварца. Неотрицательность определителя Грама любой пары векторов $v, w \in W$

$$\det \begin{pmatrix} (v,v) & (v,w) \\ (w,v) & (w,w) \end{pmatrix} = \|v\|^2 \|w\|^2 - (v,w) \cdot \overline{(v,w)} \geqslant 0$$

переписывается как эрмитова версия неравенства Коши – Буняковского – Шварца[2]

$$|(v,w)| \leqslant \|v\| \cdot \|w\|\,, \tag{3-3}$$

равенство в котором равносильно пропорциональности векторов v и w над полем $\mathbb{C}$.

Следствие 3.1 (неравенство треугольника для эрмитовой нормы)
$\|w_1\| + \|w_2\| \geqslant \|w_1 + w_2\|$ для всех $w_1, w_2 \in W$.

Доказательство. $\|w_1 + w_2\|^2 = \|w_1\|^2 + \|w_2\|^2 + 2\,|(w_1, w_2)| \leqslant \|w_1\|^2 + \|w_2\|^2 + 2\|w_1\| \cdot \|w_2\| = \left(\|w_1\| + \|w_2\right)^2$. □

[1]См. предл. 14.1 на стр. 256 части I.
[2]Ср. с прим. 14.3 на стр. 257 части I.

3.1.4. Унитарная группа. Линейный оператор $f : W \to W$ на эрмитовом пространстве W называется *унитарным*, если $\|fw\| = \|w\|$ для всех $w \in W$. Так как эрмитово скалярное произведение однозначно выражается через длину[1], каждый унитарный оператор f сохраняет скалярное произведение:

$$(fv, fw) = (v, w) \quad \forall\, v, w \in W\,.$$

Поэтому матрица F унитарного оператора f в любом базисе связана с матрицей Грама G этого базиса соотношением

$$F^t G \overline{F} = G\,. \tag{3-4}$$

Беря определители, заключаем, что $|\det F| = 1$. В частности, каждый унитарный оператор F обратим, и $F^{-1} = \overline{G}^{-1}\overline{F}^t\overline{G} = G^{t\,-1}\overline{F}^t G^t$. В ортонормальном базисе эта формула редуцируется до

$$F^{-1} = \overline{F}^t\,.$$

Унитарные операторы на эрмитовом пространстве W образуют группу, которая обозначается $\mathrm{U}(W)$ и называется *унитарной группой* пространства W. Запись унитарных операторов матрицами в фиксированном ортонормальном базисе $e_1, \dots, e_n$ пространства W, задаёт изоморфизм унитарной группы с группой *унитарных матриц*[2]

$$\mathrm{U}_n = \{F \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid F^{-1} = \overline{F}^t\}\,.$$

Её подгруппа $\mathrm{SU}_n = \{F \in \mathrm{U}_n \mid \det F = 1\}$, состоящая из матриц определителя 1, называется *специальной* унитарной группой. В отличие от вещественных ортогональных матриц определитель унитарной матрицы может принимать любое значение на единичной окружности

$$\mathrm{U}_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z\overline{z} = 1\}\,.$$

Поэтому в эрмитовом пространстве отсутствует понятие *ориентации*[3].

3.1.5. Эрмитов объём. Зафиксируем в эрмитовом пространстве W какой-нибудь ортонормальный базис $e_1, \dots, e_n$ в качестве базиса единичного объёма и определим *эрмитов объём* n-мерного параллелепипеда, натянутого на векторы $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}\, C_{\boldsymbol{ev}}$ формулой

$$\mathrm{Vol}(v_1, \dots, v_n) \stackrel{\text{def}}{=} |\det C_{\boldsymbol{ev}}|\,.$$

Так как абсолютная величина определителя унитарной матрицы перехода между любыми двумя ортонормальными базисами равна единице, эрмитов объём не зависит от выбора эталонного ортонормального базиса, а квадрат эрмитова объёма, как и в евклидовом случае, равен абсолютной величине определителя Грама:

$$\mathrm{Vol}^2(v_1, \dots, v_n) = |\det C_{\boldsymbol{ev}}|^2 = \det C_{\boldsymbol{ev}}^t \cdot \overline{\det C}_{\boldsymbol{ev}} = \det(C_{\boldsymbol{ev}}^t \overline{\det C}_{\boldsymbol{ev}}) = |\det G_{\boldsymbol{v}}|\,.$$

[1] См. n° 3.1.1 на стр. 37.
[2] См. формулу (2-8) на стр. 27.
[3] Ср. с **??** на стр. **??** части I.

3.1.6. Эрмитова двойственность. В силу полуторалинейности эрмитова скалярного произведения каждый вектор w эрмитова пространства W задаёт полулинейно зависящий от w комплексно линейный функционал $h_w : W \to \mathbb{C}$, $u \mapsto (u, w)$, правого скалярного умножения на w. Полулинейное отображение

$$h : W \to W^* , \quad w \mapsto h_w , \tag{3-5}$$

называется *эрмитовой корреляцией*. Оно инъективно, поскольку $h_w(w) = (w, w) \neq 0$ для ненулевого w в силу положительности эрмитовой формы. Так как пространства W и W^* имеют одинаковую размерность над $\mathbb{C}$, их овеществления имеют одинаковую размерность над $\mathbb{R}$. Поэтому отображение (3-5) является вещественно линейным комплексно полулинейным изоморфизмом векторных пространств. Это означает, что для любого $\mathbb{C}$-линейного функционала $\varphi : W \to \mathbb{C}$ существует единственный такой вектор $u \in W$, что $\varphi(w) = (w, u)$ для всех $w \in W$, причём этот вектор $\mathbb{C}$-полулинейно зависит от φ.

В частности, у любого базиса $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)$ эрмитова пространстве W имеется *эрмитово двойственный* базис $\boldsymbol{u}^\times = (u_1^\times, \dots, u_n^\times)$, состоящий из прообразов $u_i^\times \stackrel{\text{def}}{=} h^{-1}(u_i^*)$ ковекторов двойственного к $\boldsymbol{u}$ базиса $\boldsymbol{u}^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$ в W^* и однозначно задаваемый соотношениями

$$(u_i, u_j^\times) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j \\ 1 & \text{при } i = j \,. \end{cases}$$

На матричном языке эти соотношения означают, что $\boldsymbol{u}^t \boldsymbol{u}^\times = E$. Поэтому матрица $C_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^\times}$, линейно выражающая базис $\boldsymbol{u}^\times$ через базис $\boldsymbol{u}$ по формуле $\boldsymbol{u}^\times = \boldsymbol{u} C_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^\times}$, удовлетворяет равенству

$$E = \boldsymbol{u}^t \boldsymbol{u}^\times = \boldsymbol{u}^t \boldsymbol{u}\, \overline{C}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^\times} = G_{\boldsymbol{u}} \overline{C}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^\times} \,,$$

откуда $(u_1^\times, \dots, u_n^\times) = (u_1, \dots, u_n)\, \overline{G}_{\boldsymbol{u}}^{-1}$.

Упражнение 3.1. Убедитесь, что $u_i^{\times\times} = u_i$ для любого базиса $u_1, \dots, u_n$.

Ортонормальность базиса означает, что он совпадает со своим эрмитово двойственным.

Так как координаты вектора $w \in W$ в базисе $\boldsymbol{u}$ равны $u_i^*(w) = (w, u_i^\times)$, разложение любого вектора w по любому базису $\boldsymbol{u}$ имеет вид

$$v = \sum_i e_i \cdot (v, e_i^\times) \,.$$

3.1.7. Ортогонал и ортогональная проекция. В эрмитовом пространстве W у любого подпространства $U \subset W$ имеется выделенное дополнительное подпространство

$$U^\perp = \{ w \in W \mid \forall\, u \in U \ (u, w) = 0 \} = \{ w \in W \mid \forall\, u \in U \ (w, u) = 0 \} \,,$$

которое называется *ортогоналом* к U. Каждый вектор $w \in W$ задаёт линейный функционал

$$h_w : U \to \mathbb{C} \,, \quad u \mapsto (u, w) \,.$$

Как мы видели выше, существует единственный такой вектор $w_U \in U$, что $(u, w) = (u, w_U)$ для всех $u \in U$. Разность $w_{U^\perp} \stackrel{\text{def}}{=} w - w_U$ лежит в $U^\perp$, так $(u, w_{U^\perp}) = (u, w) - (u, w_U) = 0$ для всех $u \in U$. Полученное нами разложение $w = w_U + w_{U^\perp}$, в котором $w_U \in U$, а $w_{U^\perp} \in U^\perp$, единственно, так как для любого такого разложения и всех $u \in U$ выполняются равенства $(u, w) = (u, w_U)$, однозначно задающие вектор $w_U \in U$. Таким образом, $W = U \oplus U^{\perp}$.

Комплексно линейный оператор $\pi_U : W \to W, w \mapsto w_U$, проектирующий W на U вдоль $U^{\perp}$ называется *ортогональным проектором*. Так как для любой пары эрмитово двойственных базисов $u_1, \dots, u_m$ и $u_1^{\times}, \dots, u_m^{\times}$ подпространства U

$$w_U = \sum\nolimits_i (w_U, u_i^{\times})\, u_i = \sum\nolimits_i \overline{(u_i^{\times}, w_U)}\, u_i = \sum\nolimits_i \overline{(u_i^{\times}, w)}\, u_i = \sum\nolimits_i (w, u_i^{\times})\, u_i\,,$$

координатами ортогональной проекции w_U вектора w на U в любом базисе $u_1, \dots, u_m$ подпространства U являются скалярные произведения $(w, u_i^{\times})$ вектора w с векторами эрмитово двойственного базиса.

Иначе ортогональная проекция w_U вектора w на U описывается как единственный вектор из U, на котором (нелинейный) функционал расстояния до вектора w

$$U \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto \|u - w\|\,,$$

достигает своего абсолютного минимума на U. В самом деле, для всех $v \in U$

$$\|w - (w_U + v)\|^2 = \big((w - w_U) - v, (w - w_U) - v\big) = \|w - w_U\|^2 + \|v\|^2 \geqslant \|w - w_U\|^2\,,$$

и равенство равносильно тому, что $v = 0$.

3.1.8. Угол между комплексными прямыми. В евклидовом пространстве угол

$$\measuredangle L_1 L_2 \in [0, \pi/2]$$

между вещественными прямыми $L_1 = \mathbb{R}\, u$ и $L_2 = \mathbb{R}\, w$ с направляющими векторами u, w определялся равенством[1]

$$\cos \measuredangle L_1 L_2 = \frac{|(u, w)|}{\|u\| \cdot \|w\|} = (u/\|u\|, w/\|w\|)\,, \tag{3-6}$$

правая часть которого лежит на отрезке $[0, 1]$ в силу неравенства Коши – Буняковского – Шварца. Направляющие векторы единичной длины $u/\|u\|$ и $w/\|w\|$ на каждой прямой единственны с точностью до умножения на ± 1. Пересекающиеся прямые L_1, L_2 разбивают натянутую на них вещественную плоскость на две пары смежных вертикальных углов. Формула (3-6) вычисляет косинус наименьшего из них.

В евклидовых терминах комплексные прямые $L_1 = \mathbb{C}\, u$, $L_2 = \mathbb{C}\, w$ в эрмитовом пространстве W представляют собою двумерные вещественные плоскости в овеществлённом пространстве $W_{\mathbb{R}}$, пересекающиеся в единственной точке $0 \in W$. Линейная оболочка этих плоскостей $V = (L_1 \oplus L_2)_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^4$ является четырёхмерным вещественным пространством. Базисные векторы единичной длины заметают в каждой плоскости L_i единичную окружность с центром в нуле. Эти две окружности не пересекаются и лежат на компактной вещественной трёхмерной сфере $S^3 = \{\, v \in V \mid \|v\| = 1\}$. Поэтому евклидов угол между векторами $e_1 \in L_1$ и $e_2 \in L_2$ длины 1 ограничен и достигает своего минимального значения на некоторой паре векторов e_1, e_2. Евклидов угол $\measuredangle e_1 e_2$ между этими векторами называется *эрмитовым углом* между комплексными прямыми L_1 и L_2 и обозначается $\measuredangle L_1 L_2$. Покажем, что он вычисляется по той же самой формуле (3-6), что и в евклидовом пространстве.

[1] См. n° 14.4.1 на стр. 263 части I.

Пусть векторы $u \in L_1$ и $w \in L_2$ имеют длину 1. При умножении этих векторов на комплексные числа единичной длины $|(u,w)|$ не меняется. Поэтому правая часть формулы (3-6) и сумма[1] $g^2(u,w)+\omega^2(u,w) = |(u,w)|^2$ не зависят от выбора векторов u и w на единичных окружностях в L_1 и L_2. Максимальное значение $\cos^2 \measuredangle uw = g^2(u,w)$ получается при минимальном значении $\omega^2(u,w)$, которое достигается и равно нулю, поскольку трёхмерное в силу невырожденности формы ω вещественное подпространство $u^{\perp}_{\omega} = \{v \in V \mid \omega(u,v) = 0\}$ имеет в четырёхмерном пространстве V ненулевое пересечение с двумерным подпространством L_2. Таким образом, для каждого вектора $u \in L_1$ длины 1 существует такой вектор $w \in L_2$ длины 1, что $\omega^2(u,w) = 0$, а $g^2(u,w) = |(u,w)|^2$ максимально возможное. Для этих векторов формула (3-6) выдаёт минимально возможный евклидов угол между вещественными прямыми $\mathbb{R}\,u$ и $\mathbb{R}\,w$ в евклидовой структуре, задаваемой формой g.

3.2. Эрмитово сопряжение линейных отображений. Напомню[2], что с каждым линейным отображением $f : U \to W$ канонически связано *двойственное отображение*

$$f^* : W^* \to U^*, \quad \varphi \mapsto \varphi \circ f,$$

которое однозначно описывается тем, что $\langle fu, \varphi \rangle = \langle u, f^*\varphi \rangle$ для всех $u \in U$ и $\varphi \in W^*$, где

$$\langle *, * \rangle : V \times V^* \to \mathbb{C}$$

обозначает свёртку векторов с ковекторами. Сопрягая f^* эрмитовыми корреляциями

$$h_U : U \to U^*, \quad u \mapsto (*, u), \quad \text{и} \quad h_W : W \to W^*, \quad w \mapsto (*, w),$$

из форм. (3-5) на стр. 40, получаем линейное отображение

$$f^{\times} \overset{\text{def}}{=} h_U^{-1} f^* h_W : W \to U, \tag{3-7}$$

которое называется *эрмитово сопряжённым* к f и однозначно описывается тем, что

$$(fu, w) = (u, f^{\times}w) \tag{3-8}$$

для всех $u \in U$ и $w \in W$. Если зафиксировать в U и W базисы $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)$ и $\boldsymbol{w} = (w_1, \dots, w_m)$, то равенство (3-8) станет эквивалентно mn соотношениям $(fu_i, w_j) = (u_i, f^{\times}w_j)$ на скалярные произведения базисных векторов, которые собираются в матричное равенство

$$f(\boldsymbol{u})^t\, \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}^t\, f^{\times}(\boldsymbol{w}).$$

Подставляя в него $f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{w}\, F_{\boldsymbol{wu}}$ и $f^{\times}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u}\, F^{\times}_{\boldsymbol{uw}}$, получаем соотношение $F^t_{\boldsymbol{wu}} G_{\boldsymbol{w}} = G_{\boldsymbol{u}} \overline{F}^{\times}_{\boldsymbol{uw}}$, связывающее матрицы Грама $G_{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}^t \boldsymbol{u}$ и $G_{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{w}^t \boldsymbol{w}$ базисов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{w}$ с матрицами $F_{\boldsymbol{wu}}$ и $F^{\times}_{\boldsymbol{uw}}$ операторов f и $f^{\times}$ в этих базисах. Из него вытекает, что $F^{\times}_{\boldsymbol{uw}} = \overline{G_{\boldsymbol{u}}^{-1} F^t_{\boldsymbol{wu}} G_{\boldsymbol{w}}}$.

Если базисы $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{w}$ ортонормальны, последнее равенство упрощается до $F^{\times}_{\boldsymbol{uw}} = \overline{F}^t$. Таким образом, матрицы эрмитово сопряжённых операторов в ортонормальных базисах эрмитово сопряжены[3] друг другу.

[1] Напомню, что $g(u,w) = \mathrm{Re}(u,w)$, а $\omega(u,w) = \mathrm{Im}(u,w)$, см. стр. 37.
[2] См. n° 7.4.4 на стр. 127 части I.
[3] См. прим. 2.3 на стр. 27.

Предложение 3.1
Эрмитово сопряжение $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U,W) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W,U)$, $f \mapsto f^{\times}$, является инволютивным полулинейным изоморфизмом комплексных векторных пространств. При этом для любого линейного отображения $f : U \to W$ выполняются равенства

$$f^{\times\times} = f\,, \quad \ker f^{\times} = (\operatorname{im} f)^{\perp}\,, \quad \operatorname{im} f^{\times} = (\ker f)^{\perp}\,,$$

а для любой пары линейных отображений $f : U \to V$, $G : V \to W$ — равенство $(Gf)^{\times} = f^{\times}G^{\times}$.

Доказательство. Инволютивность и полулинейность вытекают из (3-8) и, соответственно, эрмитовой симметричности и полуторалинейности скалярного произведения: равенства

$$(f^{\times}w, u) = \overline{(u, f^{\times}w)} = \overline{(fu, w)} = (w, fu)$$

означают, что $f^{\times\times} = f$, а равенства $(zfu, w) = z(fu, w) = z(u, f^{\times}w) = (u, \overline{z}f^{\times}w)$ — что $(zf)^{\times} = \overline{z}\, f^{\times}$. Вектор $w \in \ker f^{\times}$ если и только если $(u, f^{\times}w) = 0$ для всех $u \in U$. В силу (3-8) это равносильно равенству $(fu, w) = 0$ для всех $u \in U$, т. е. ортогональности подпространства $\operatorname{im} f$ вектору w. Поэтому $\ker f^{\times} = (\operatorname{im} f)^{\perp}$. Написав это для оператора $f^{\times}$ в роли f и взяв ортогонал к обеим частям, получаем $(\ker f)^{\perp} = \operatorname{im} f^{\times}$. Последнее утверждение вытекает из равенств $(Gfu, w) = (fu, G^{\times}w) = (u, f^{\times}G^{\times}w)$. □

3.2.1. Эрмитово сопряжение эндоморфизмов эрмитова пространства W задаёт на комплексном векторном пространстве $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$ вещественную структуру[1]

$$\times : \ \mathrm{End}(W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(W)\,, \quad f \longmapsto f^{\times}\,.$$

Вещественное подпространство этой структуры обозначается

$$\mathrm{End}^{+}_{\mathbb{C}}(W) = \{f \mid f^{\times} = f\} \tag{3-9}$$

и называется пространством *самосопряжённых* или *эрмитовых* операторов, а чисто мнимое подпространство обозначается

$$\mathrm{End}^{-}_{\mathbb{C}}(W) = \{f \mid f^{\times} = -f\} \tag{3-10}$$

и называется пространством *антисамосопряжённых* или *косоэрмитовых* операторов. Это вещественные (не комплексные!) векторные пространства и умножения операторов на i и на $-i$ задают взаимно обратные $\mathbb{R}$-линейные изоморфизмы между этими пространствами. Овеществление пространства $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$ является прямой суммой

$$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)_{\mathbb{R}} = \mathrm{End}^{+}_{\mathbb{C}}(W) \oplus \mathrm{End}^{-}_{\mathbb{C}}(W)\,.$$

Компоненты разложения $f = f_{+} + f_{-}$ произвольного $\mathbb{C}$-линейного оператора $f : W \to W$ в сумму самосопряжённого и антисамосопряжённого операторов суть

$$f_{+} = \frac{f + f^{\times}}{2} \in \mathrm{End}^{+}_{\mathbb{C}}(W) \quad \text{и} \quad f_{-} = \frac{f - f^{\times}}{2} \in \mathrm{End}^{-}_{\mathbb{C}}(W)\,.$$

Если зафиксировать в W ортонормальный базис и отождествить $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$ с $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, где $n = \dim W$, записав все операторы матрицами в этом базисе, то эрмитово сопряжение операторов превратится в эрмитово сопряжение матриц из прим. 2.3 на стр. 27.

[1] См. n° 2.3 на стр. 26.

Пример 3.1 (унитарные операторы)
Поскольку каждый унитарный[1] оператор $f : W \to W$ взаимно однозначен, любой вектор $w \in W$ имеет вид $f^{-1}v$ для некоторого $v \in W$. Поэтому выполнение для любых векторов u, w равенства $(fu, fw) = (u, w)$ равносильно выполнению для любых векторов u и $v = fw$ равенства $(fu, v) = (u, f^{-1}v)$. Мы заключаем, что оператор унитарен если и только если он эрмитово сопряжён своему обратному. На языке матриц это означает, что в унитарном базисе матрица унитарного оператора эрмитово сопряжена к своей обратной, т. е. $\overline{f}^t = f^{-1}$.

3.2.2. Нормальные операторы. Оператор f на эрмитовом пространстве W, называется *нормальным*, если он перестановочен со своим эрмитово сопряжённым оператором, т. е.

$$f^\times \cdot f = f \cdot f^\times .$$

Например, нормальными являются все (анти) самосопряжённые и унитарные операторы, так как для них $f^\times$ равен $\pm f$ и f^{-1} соответственно.

Теорема 3.1
Действующий в эрмитовом пространстве оператор f нормален если и только если он диагонализуем в ортонормальном базисе. При этом диагональная матрица для f с точностью до перестановки диагональных элементов не зависит от выбора ортонормального базиса, в котором f диагонален.

Доказательство. Если оператор $f : W \to W$ имеет в ортонормальном базисе $\boldsymbol{e}$ диагональную матрицу $f_{\boldsymbol{e}}$, то сопряжённый к нему оператор имеет в этом базисе диагональную матрицу $\overline{f}_{\boldsymbol{e}}$, которая коммутирует с $f_{\boldsymbol{e}}$. Поэтому f нормален. Обратная импликация доказывается индукцией по $\dim W$. Если оператор f скалярен (что так при $\dim W = 1$), то доказывать нечего. Если f не скалярен, то у него есть ненулевое собственное подпространство $U \subsetneq W$ и $W = U \oplus U^\perp$. Согласно n° 12.4 на стр. 228 части I перестановочный f оператор $f^\times$ переводит U в себя. Поэтому для всех $u \in U$ и любого $w \in U^\perp$ выполняется равенство $(fw, u) = (w, f^\times u) = 0$, т. е. $fw \in U^\perp$. Таким образом, оператор f переводит $U^\perp$ в себя. По индукции, $f|_{U^\perp}$ диагонализуем в некотором ортонормальном базисе пространства $U^\perp$. Добавляя к этому базису любой ортонормальный базис собственного подпространства U, получаем базис пространства W, в котором матрица f диагональна. Последнее утверждение теоремы имеет место для любого диагонализуемого оператора, что было установлено нами в n° 12.2.6 на стр. 221 части I. □

Следствие 3.2
Самосопряжённые операторы — это диагонализуемые в ортонормальном базисе операторы с вещественными собственными значениями.

Следствие 3.3
Антисамосопряжённые операторы — это диагонализуемые в ортонормальном базисе операторы с чисто мнимыми собственными значениями.

Следствие 3.4
Унитарные операторы — это диагонализуемые в ортонормальном базисе операторы с собственными значениями, по модулю равными единице.

Упражнение 3.2. Покажите, что унитарная группа U_n является компактным линейно связным подмножеством в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$.

[1] См. n° 3.1.4 на стр. 39.

3.3. Евклидово сопряжение операторов. Напомню[1], что со скалярным произведением

$$(* , *) : V \times V \to \mathbb{R}$$

на вещественном евклидовом пространстве V, как и со всякой невырожденной (косо)симметричной билинейной формой, тоже связано сопряжение операторов $f \mapsto f^{\times}$, которое задаётся ровно той же самой формулой[2] (3-8), что эрмитово сопряжение, и является инволютивным антиавтоморфизмом $\mathbb{R}$-алгебры $\mathrm{End}_{\mathbb{R}} V$. Если перейти от V к его комплексификации $V_{\mathbb{C}}$ и полуторалинейно продолжить[3] евклидову структуру до эрмитова скалярного произведения

$$(* , *)_{\mathrm{H}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C} ,$$

то эрмитово сопряжение операторов на $V_{\mathbb{C}}$ будет согласовано с евклидовым сопряжением на V в том смысле, что комплексификации $f_{\mathbb{C}}$ и $f_{\mathbb{C}}^{\times}$ евклидово сопряжённых операторов оказываются сопряжёнными относительно эрмитовой структуры, т. е. $(f^{\times})_{\mathbb{C}} = (f_{\mathbb{C}})^{\times}$ и скобки можно опустить. В самом деле, любой евклидово ортонормальный базис пространства V над $\mathbb{R}$ одновременно является эрмитово ортонормальным базисом $V_{\mathbb{C}}$ над $\mathbb{C}$. Операторы f и $f_{\mathbb{C}}$ имеют в нём одну и ту же вещественную матрицу F, а евклидово и эрмитово сопряжённые им операторы $f^{\times}$ и $(f_{\mathbb{C}})^{\times}$ — транспонированную матрицу $F^t = \overline{F}^t$.

Очевидно, что комплексификации евклидово (анти)самосопряжённых и изометрических[4] операторов на пространстве V являются, соответственно, (косо)эрмитовыми и унитарными операторами на $V_{\mathbb{C}}$. Мы заключаем, что для любого нормального[5] оператора $f : V \to V$ в пространстве $V_{\mathbb{C}}$ существует такой эрмитово ортонормальный базис, в котором матрица комплексифицированного оператора $f_{\mathbb{C}}$ диагональна.

Поскольку все собственные числа самосопряжённого оператора f вещественны, из сл. 2.2 на стр. 24 вытекает, что все собственные подпространства комплексифицированного оператора $f_{\mathbb{C}}$ являются комплексификациями собственных подпространств оператора f. В частности, последние евклидово ортогональны друг другу, и стало быть, в пространстве V можно выбрать евклидово ортонормальный базис, в котором матрица оператора f диагональна, что согласуется с прим. 16.1 на стр. 295 части I.

Если оператор f антисамосопряржён, то по сл. 2.3 на стр. 24 собственные подпространства оператора $f_{\mathbb{C}}$ разбиваются на пары сопряжённых V_{ia} и $\overline{V}_{ia} = V_{-ia}$, отвечающих комплексно сопряжённым чисто мнимым собственным числам $ia, -ia \in \mathrm{Spec}(f_{\mathbb{C}})$. Каждому эрмитово ортонормальному базису $w_1, \dots , w_m$ пространства V_{ia} отвечает комплексно сопряжённый базис $\overline{w}_1, \dots , \overline{w}_m$ пространства V_{-ia}. В силу упр. 2.2 на стр. 25 базис $\overline{w}_1, \dots , \overline{w}_m$ тоже ортонормален. По предл. 2.2 на стр. 23 $\mathbb{C}$-линейная оболочка каждой пары сопряжённых базисных векторов $w_\nu = u_\nu + iv_\nu, \overline{w}_\nu = u_\nu - iv_\nu$ является комплексификацией двумерного вещественного f-инвариантного подпространства U_ν с базисом u_ν, v_ν, в котором оператор f имеет матрицу[6]

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} . \tag{3-11}$$

[1] См. n° 16.2 на стр. 293 части I, в частности, прим. 16.1 на стр. 295.

[2] Ср. с форм. (16-4) на стр. 293 части I.

[3] См. прим. 2.2 на стр. 25.

[4] Т. е. сохраняющих евклидово скалярное произведение, см. n° 15.2.3 на стр. 277 части I.

[5] Как и в эрмитовом случае, линейный оператор $f : V \to V$ на евклидовом пространстве называется *нормальным*, если он перестановочен со своим евклидово сопряжённым, см. зад. 16.6 на стр. 307 части I.

[6] См. формулу (2-3) на стр. 23.

Из равенств

$$1 = (u_\nu + iv_\nu, u_\nu + iv_\nu)_{\mathrm{H}} = (u_\nu, u_\nu) + (v_\nu, v_\nu) + i\big((v_\nu, u_\nu) - (u_\nu, v_\nu)\big) \tag{3-12}$$

$$0 = (u_\nu + iv_\nu, u_\nu - iv_\nu)_{\mathrm{H}} = (u_\nu, u_\nu) - (v_\nu, v_\nu) + i\big((v_\nu, u_\nu) + (u_\nu, v_\nu)\big) \tag{3-13}$$

вытекает, что $(u_\nu, v_\nu) = 0$, а $(u_\nu, u_\nu) = (v_\nu, v_\nu) = 1/2$. Тем самым, векторы $\sqrt{2}u_\nu$ и $\sqrt{2}v_\nu$ образуют ортонормальный базис в U. Мы заключаем, что евклидово антисамосопряжённый оператор f в подходящем ортонормальном базисе пространства V записывается блочно диагональной матрицей из 2×2 блоков вида (3-11) с $a > 0$ и такое представление с точностью до перестановки блоков не зависит от выбора базиса.

Упражнение 3.3. Докажите последнее утверждение.

Собственные значения изометрического оператора f исчерпываются вещественными числами ± 1 и невещественными парами лежащих на единичной окружности сопряжённых чисел $\lambda, \overline{\lambda} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$, где $0 < \varphi < \pi$. Собственные подпространства оператора $f_{\mathbb{C}}$ с собственными числами ± 1 являются комплексификациями вещественных собственных подпространств $V_{\pm 1} \subset V$ оператора f, и в них имеются вещественные евклидово ортонормальные базисы. А каждому эрмитово ортонормальному базису $w_1, \dots, w_m$ пространства V_λ отвечает комплексно сопряжённый базис $\overline{w}_1, \dots, \overline{w}_m$ пространства $V_{\overline{\lambda}}$. При этом, как и выше, $\mathbb{C}$-линейная оболочка каждой пары сопряжённых базисных векторов $w_\nu = u_\nu + iv_\nu$, $\overline{w}_\nu = u_\nu - iv_\nu$ является комплексификацией двумерного вещественного f-инвариантного подпространства U_ν с евклидово ортонормальным базисом $\sqrt{2}u_\nu$, $\sqrt{2}v_\nu$, в котором оператор f имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{3-14}$$

Мы заключаем, что ортогональный оператор f на евклидовом пространстве V в подходящем ортонормальном базисе записывается блочно диагональной матрицей из 1×1 блоков ±1 и 2×2 блоков вида (3-14) с $0 < \varphi < \pi$, и такое представление с точностью до перестановки блоков не зависит от выбора базиса, что согласуется с прим. 17.1 на стр. 311 части I.

3.4. Сингулярные числа и сингулярные направления. С каждым $\mathbb{C}$-линейным отображением $f : U \to W$ между эрмитовыми пространствами U, W связаны самосопряжённые операторы

$$f^\times f : U \to U \quad \text{и} \quad f f^\times : W \to W .$$

По сл. 3.2 на стр. 44 оба они имеют вещественный спектр.

Лемма 3.2
Оба спектра неотрицательны, и $\ker f^\times f = \ker f$, а $\ker f f^\times = (\operatorname{im} f)^\perp$.

Доказательство. Если $f^\times f v = \lambda v$ для ненулевого v, то

$$(fv, fv) = (f^\times f v, v) = (\lambda v, v) = \lambda\,(v, v)\,,$$

откуда либо $fv \neq 0$ и $\lambda = (fv, fv)/(v, v) > 0$, либо $\lambda = 0$ и $v \in \ker f$. Последнее означает, что $\ker f^\times f = \ker f$. Аналогично, если $ff^\times v = \lambda v$ для ненулевого v, то

$$(f^\times v, f^\times v) = (ff^\times v, v) = (\lambda v, v) = \lambda\,(v, v)\,.$$

Поэтому либо $f^\times v \neq 0$ и в этом случае $\lambda = (f^\times v, f^\times v)/(v, v) > 0$, либо $f^\times v = 0$ и $\lambda = 0$, откуда $\ker ff^\times = \ker f^\times$, а $\ker f^\times = (\operatorname{im} f)^\perp$ по предл. 3.1 на стр. 43. □

Теорема 3.2
Каждое $\mathbb{C}$-линейное отображение $f : U \to W$ между эрмитовыми пространствами U, W раскладывается в композицию $f = ghp$ ортогональной проекции $p : U \twoheadrightarrow V$ на подпространство $V = (\ker f)^{\perp} \subset U$, самосопряжённого оператора $h : V \xrightarrow{\sim} V$ с положительными собственными числами $\alpha_1, \dots \alpha_r$, где $r = \operatorname{rk} f = \dim V$, и унитарного вложения $g : V \hookrightarrow W$, изометрически отображающего V на $\operatorname{im} f \subset W$. Операторы g и h однозначно определяются этими свойствами по оператору f, а квадраты $\alpha_1^2, \dots \alpha_r^2$ собственных чисел оператора h — это в точности все (с учётом кратностей) ненулевые собственные числа оператора $f^{\times} f : U \to U$.

Доказательство. Зафиксируем в U ортонормальный базис $u_1, \dots, u_n$ из собственных векторов самосопряжённого оператора $f^{\times} f : U \to U$. Пусть собственное значение $f^{\times} f$ на векторе u_i равно α_i^2, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$ неотрицательно. Упорядочим векторы u_i так, чтобы первые r чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ были положительны, а остальные α_j с $j > r$ — нулевыми. Таким образом, $u_j \in \ker f^{\times} f = \ker f$ при $j > r$. При $1 \leqslant k, \ell \leqslant r$ выполняются равенства

$$(fu_k, fu_\ell) = (f^{\times} f u_k, u_\ell) = \alpha_k^2 (u_k, u_\ell) = \begin{cases} \alpha_k^2 > 0 & \text{при } k = \ell \\ 0 & \text{при } k \neq \ell\,. \end{cases}$$

Поэтому векторы $w_i = fu_i / \alpha_i$ с $i \leqslant r$ образуют ортонормальный набор в пространстве W. В частности, они линейно независимы. Поскольку $f(u_j) = 0$ при $j > r$, для каждого вектора $u = \sum x_i u_i \in U$ выполняется равенство $fu = \alpha_1 x_1 w_1 + \ldots + \alpha_r x_r w_r$. Мы заключаем, что векторы w_i с $i \leqslant r$ составляют ортонормальный базис в $\operatorname{im} f$, векторы u_i с $i \leqslant r$ — ортонормальный базис в $(\ker f)^{\perp} = V$, а оператор f является композицией ортогональной проекции $p : U \twoheadrightarrow V$ вдоль $\ker f$, диагонального оператора $h : V \to V$, $u_i \mapsto \alpha_i u_i$, и изометрического изоморфизма $g : V \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} f$, $u_i \mapsto w_i$, как и утверждалось.

Упражнение 3.4. Убедитесь, что всякий ортогональный проектор p самосопряжён.

Пусть самосопряжённый оператор $h_1 : V \to V$ с положительным спектром и изометрический изоморфизм $g_1 : V \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} f$ таковы, что $f = g_1 h_1 p$. Так как $g_1^{\times} = g_1^{-1}$ как операторы $\operatorname{im} f \to V$, а $h^{\times} = h$, выполняется равенство $f^{\times} f = p^{\times} h_1^{\times} g_1^{\times} g_1 h_1 p = p h_1^2 p = h_1^2 p$, откуда $h_1^2 = f^{\times} f|_V$. Так как h_1 перестановочен с $h_1^2 = f^{\times} f|_V$, операторы h_1 и $f^{\times} f|_V$ диагонализуемы в одном базисе. Следовательно, h_1 действует на каждом собственном подпространстве $V_{\alpha_i^2}$ оператора $f^{\times} f|_V$ умножением на α_i и тем самым совпадает с h. Так как

$$g_1^{-1} f|_V = h = g^{-1} f|_V$$

и оператор $f|_V : V \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} f$ биективен, мы заключаем, что $g_1^{-1} = g^{-1}$, а значит, $g_1 = g$. □

Упражнение 3.5. Убедитесь, что оператор $f^{\times} : W \to V$ действует на построенные в доказательстве теор. 3.2 векторы $w_1, \dots, w_r \in W$ по правилу $w_i \mapsto \alpha_i u_i$ и аннулирует ортогональное дополнение к их линейной оболочке. Выведите отсюда, что множества всех (с учётом кратностей) ненулевых собственных чисел у операторов $f^{\times} f$ и $f f^{\times}$ одинаковы.

Замечание 3.1. (сингулярные числа и сингулярные направления) Говоря неформально, предыдущая теорема утверждает, что каждое линейное отображение $f : U \to W$ сначала проектирует U вдоль своего ядра на его ортогональное дополнение $V \subset U$, потом растягивает пространство V в попарно перпендикулярных направлениях с положительными коэффициентами, а потом изометрически вкладывает его в W. Направления, в которых происходит растяжение, т. е. одномерные подпространства, порождённые базисными векторами u_i из доказательства теор. 3.2, называют *сингулярными направлениями* отображения f. Обратите внимание, что они определены однозначно, только если все собственные подпространства оператора $f^{\times}f$ одномерны, а в общем случае их выбор означает выбор ортогонального базиса в каждом собственном подпространстве. Набор из $\dim U$ неотрицательных вещественных чисел α_i, равных квадратным корням из всех (включая нулевые) собственных чисел самосопряжённого оператора

$$f^{\times}f : U \to U ,$$

или — что то же самое по упр. 3.5 — корням из собственных чисел оператора

$$ff^{\times} : W \to W ,$$

называется *набором сингулярных чисел* отображения $f : U \to W$. Ровно $\operatorname{rk} f$ из них положительны. Эпитеты «сингулярные» в этих названиях перекочевали из анализа, где в целом ряде задач возникают функции типа «коэффициента удлинения», имеющие вид

$$\varphi : U \smallsetminus 0 \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto (fu, fu)/(u, u) ,$$

где U — эрмитово (или евклидово) пространство, а $f : U \to W$ — линейное отображение в эрмитово (или евклидово) пространство.

Упражнение 3.6. Покажите, что производная функции φ зануляется в точности на собственных подпространствах оператора $f^{\times}f$.

3.4.1. Полярное разложение. Для обратимого линейного эндоморфизма $f \in \mathrm{GL}(W)$ эрмитова пространства W теор. 3.2 утверждает существование и единственность разложения $f = g_1h_1$, в котором $g_1 \in \mathrm{U}(W)$, а $h_1 \in \mathrm{GL}(W)$ самосопряжён и имеет положительный спектр. Переходя в обеих частях равенства к обратным операторам, заключаем что каждый оператор $f \in \mathrm{GL}(W)$ также имеет единственное разложение $f = h_2g_2$, в котором $g_2 \in \mathrm{U}(W)$, а $h_2 \in \mathrm{GL}(W)$ самосопряжён и имеет положительный спектр. Разложения $f = g_1h_1 = h_2g_2$ называются *полярными разложениями*[1], поскольку для $W = \mathbb{C}$ они представляют ненулевое комплексное число $z \in \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{\times}$ в виде $z = \varrho e^{i\vartheta}$, где число $\varrho = |z|$ вещественно и положительно, а число $e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$ лежит на единичной окружности $\mathrm{U}_1 \subset \mathbb{C}^{\times}$. Компоненты полярных разложений находятся из равенств

$$\begin{aligned} f^{\times}f &= (g_1h_1)^{\times}(g_1h_1) = h_1g_1^{-1}g_1h_1 = h_1^2 \\ ff^{\times} &= (h_2g_2)(h_2g_2)^{\times} = h_2g_2g_2^{-1}h_2 = h_2^2 . \end{aligned}$$

Таким образом, $h_1 = \sqrt{f^{\times}f}$, $h_2 = \sqrt{ff^{\times}}$ являются многочленами от $f^{\times}f$ и $ff^{\times}$ и вычисляются как объяснялось в **??** на стр. **??** части I, а $g_1 = fh_1^{-1}$, $g_2 = h_2^{-1}f$.

Пример 3.2
Найдём полярное разложение $f = gh$ оператора $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, имеющего в стандартном базисе матрицу

$$F = \begin{pmatrix} 2(1+i) & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}(1-i) \end{pmatrix} .$$

[1] Ср. с зад. 16.3 на стр. 306 части I.

Вычисляем матрицу оператора $F^{\times}F$:

$$\begin{pmatrix} 2(1+i) & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}(1-i) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2(1-i) & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3}(1+i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{73}{9} & -\frac{16}{9}(1-i) \\ -\frac{16}{9}(1+i) & \frac{17}{9} \end{pmatrix}$$

Её характеристический многочлен $\det(tE - F^{\times}F) = t^2 - 10t + 9 = (t-1)(t-9)$. Согласно **??** на стр. **??** части I, $\sqrt{F^{\times}F} = aF^{\times}F + bE$, где линейный двучлен $p(t) = at + b$ имеет $p(1) = 1$ и $p(9) = 3$, откуда $a = 1/4$, $b = 3/4$. Таким образом, операторы h и g имеют матрицы

$$H = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \frac{73}{9} & -\frac{16}{9}(1-i) \\ -\frac{16}{9}(1+i) & \frac{17}{9} \end{pmatrix} + \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{25}{9} & -\frac{4}{9}(1-i) \\ -\frac{4}{9}(1+i) & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$$

$$G = FH^{-1} = \begin{pmatrix} 2(1+i) & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}(1-i) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{11}{27} & \frac{4}{27}(1-i) \\ \frac{4}{27}(1+i) & \frac{25}{27} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(1+i) & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}(1-i) \end{pmatrix}.$$

3.4.2. Экспоненциальное отображение. Алгебра аналитических функций[1] $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ алгебраически вычислима[2] на любом $\mathbb{C}$-линейном операторе $f : W \to W$ на комплексном векторном пространстве W. В частности, для любого оператора f определена экспонента $e^f : W \to W$. Если пространство W эрмитово, а оператор f косоэрмитов, то он диагонализуем в некотором ортонормальном базисе $e_1, \dots, e_n$ пространства W и имеет чисто мнимые собственные числа $i\varphi_1, \dots, i\varphi_n$. Как мы видели в доказательстве теор. 12.4 на стр. 224 части I, в этом случае оператор e^f переводит каждое собственное подпространство $W_{i\varphi} = K_{i\varphi}$ оператора f в себя и действует на нём умножением на $e^{i\varphi}$. Мы заключаем, что оператор e^f диагонализуем в том же ортонормальном базисе, что и f, и все его собственные числа $e^{i\varphi_1}, \dots, e^{i\varphi_n}$ лежат на единичной окружности. Тем самым, оператор e^f унитарен. Так как каждый унитарный оператор имеет указанный вид в подходящем ортонормальном базисе, мы заключаем, что экспоненциальное отображение

$$\exp : \operatorname{End}^-(W) \twoheadrightarrow U(W), \quad f \mapsto e^f, \tag{3-15}$$

сюрьективно отображает вещественное векторное пространство косоэрмитовых матриц на унитарную группу. В частности, полярное разложение $f = hg$ оператора $f \in \mathrm{GL}(W)$ можно записать в виде $f = he^{is}$, где h, s самосопряжены и h положителен, однако в отличие от унитарного оператора g, самосопряжённый оператор s, такой, что $e^{is} = g$, определён уже не однозначно, так как экспонента не инъективна: например, $e^{i2\pi \mathrm{Id}} = \mathrm{Id} = e^0$.

Упражнение 3.7 (по анализу). Убедитесь, что отображение (3-15) непрерывно и дифференцируемо в каждой точке, и вычислите его производную.

Из этого упражнения среди прочего вытекает, что унитарная группа линейно связна[3].

[1] Функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ называется *аналитической*, если она является сумой абсолютно сходящегося всюду в $\mathbb{C}$ степенного ряда.

[2] См. **??** на стр. **??** части I.

[3] См. упр. 3.2 на стр. 44.

Задачи для самостоятельного решения к §3

Задача 3.1. Приведите пример линейного оператора в эрмитовом пространстве, имеющего инвариантное подпространство, ортогонал к которому не инвариантен.

Задача 3.2. Найдите ортогональные проекции вектора $(i, 1-i, -1, 1+i) \in \mathbb{C}^4$ на пространство
а) решений системы $x_1 - i\,x_2 + (2-i)\,x_3 + (1+i)\,x_4 = i\,x_1 + (1+i)\,x_2 + (3-i)\,x_3 - x_4 = 0$
б) порождённое векторами $(1, 0, i, -i)$ и $(1+2i, -1+i, 0, 3-i)$, а также на ортогональные дополнения к этим подпространствам в стандартной эрмитовой структуре на $\mathbb{C}^4$.

Задача 3.3. В стандартном базисе эрмитова пространства $\mathbb{C}^4$ напишите матрицы ортогональных проекторов на все четыре подпространства из предыдущей задачи.

Задача 3.4. Переводится ли в эрмитовом пространстве $\mathbb{C}^2$ неупорядоченная пара одномерных комплексных векторных подпространств, порождённых векторами $(i, -3+3i)$ и $(-2i, 2-2i)$, в неупорядоченную пару подпространств, порождённых векторами
а) $(3-6i, 6-8i)$ и $(-2+8i, -4+8i)$ б) $(4+43i, 49+3i)$ и $(8-22i, -46+6i)$
линейным оператором из SU_2?

Задача 3.5. Выясните, нормален ли оператор, имеющий матрицу
а) $\begin{pmatrix} 13-3i & -2-14i \\ 10-10i & 14-6i \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 47-47i & -80+48i \\ -48+80i & -47+47i \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 13-8i & 10 \\ -6-8i & 14-10i \end{pmatrix}$
в стандартном базисе эрмитова пространства $\mathbb{C}^2$, и если да, укажите ортонормальный базис, в котором его матрица диагональна, и эту диагональную матрицу.

Задача 3.6. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ приведите к главным осям[1] грассмановы квадратичные формы, имеющие в стандартных координатах вид
а) $-\frac{4}{3}\xi_1 \wedge \xi_2 + \frac{8}{3}\xi_1 \wedge \xi_3 - \frac{8}{3}\xi_1 \wedge \xi_4 - \frac{20}{3}\xi_2 \wedge \xi_3 - \frac{20}{3}\xi_2 \wedge \xi_4 - \frac{10}{3}\xi_3 \wedge \xi_4$
б) $-\frac{7}{9}\xi_1 \wedge \xi_2 - \frac{11}{9}\xi_1 \wedge \xi_3 + \frac{32}{9}\xi_1 \wedge \xi_4 + \frac{16}{9}\xi_2 \wedge \xi_3 + \frac{13}{9}\xi_2 \wedge \xi_4 + \frac{1}{9}\xi_3 \wedge \xi_4$
в) $\frac{52}{15}\xi_1 \wedge \xi_2 + \frac{64}{15}\xi_1 \wedge \xi_3 - 2\xi_1 \wedge \xi_4 - \frac{4}{3}\xi_2 \wedge \xi_3 - \frac{12}{5}\xi_2 \wedge \xi_4 + \frac{16}{5}\xi_3 \wedge \xi_4$.

Задача 3.7. Пусть $V = U \oplus W$, где сумма не предполагается ортогональной, и $\pi : V \to V$ — проекция на W вдоль U. Верно ли, что $V = U^\perp \oplus W^\perp$? Опишите ядро, образ и действие сопряжённого к π оператора $\pi^\times : V \to V$.

Задача 3.8. Рассмотрим пространство W бесконечно гладких функций $[0,1] \to \mathbb{C}$, зануляющихся в точках 0, 1 вместе со всеми своими производными.
а) Покажите, что форма $(f, g) = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx$ задаёт на нём эрмитову структуру.
б) Вычислите сопряжённый к оператору $f \mapsto a_0 f + a_1 f'(x) + a_2 f''(x)$, где $a_0, a_1, a_2 \in W$ — заданные функции.
в) Самосопряжён ли оператор $x^2(x-1)^2\frac{d^2}{dx^2} + 2x(x-1)\frac{d}{dx}$?

Задача 3.9 (гармонические многочлены). Пусть $V = \mathbb{R}^3$. Введём на пространстве $S^m V^*$ однородных многочленов степени m от стандартных координат (x, y, z) на V евклидову структуру, в которой все мономы $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ ортогональны друг другу и имеют скалярные квадраты $\alpha!\beta!\gamma!$.
а) Опишите линейный оператор $\Delta^\times : S^{m-2}V^* \to S^m V^*$, евклидово сопряжённый к *оператору Лапласа* $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} : S^m V^* \to S^{m-2}V^*$.

---

[1] Укажите какой-нибудь ортонормальный базис, в котором матрица Грама имеет блочно-диагональный вид из 2×2 блоков $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, где $a > 0$, и саму эту матрицу.

б) Покажите, что $S^mV^* = H_m \oplus g\,H_{m-2} \oplus g^2\,H_{m-4} \oplus \cdots$, где $H_m = \{f \in S^mV^* \mid \Delta f = 0\}$ обозначает подпространство *гармонических многочленов*, а $g \overset{\text{def}}{=} x^2 + y^2 + z^2 \in S^2V^*$ — квадрат евклидовой длины на V.

Задача 3.10 (теорема Шура). Докажите, что любой оператор на эрмитовом пространстве записывается в подходящем ортонормальном базисе верхнетреугольной матрицей.

Задача 3.11. Покажите, что для самосопряжённых операторов f, g на эрмитовом пространстве W равенство $(fw, w) = (gw, w)$ для всех $w \in W$ равносильно равенству $f = g$.

Задача 3.12. Пусть вектор $w \in W$ является собственным для обоих сопряжённых операторов f и $f^\times$. Покажите, что их собственные значения на этом векторе сопряжены.

Задача 3.13. Постройте изоморфизм групп $\mathrm{U}_n \simeq \mathrm{O}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$.

Задача 3.14. Всякая ли унитарная матрица является произведением вещественной ортогональной и комплексной симметричной матриц?

Задача 3.15. Всякая ли матрица из SU_2 подобна вещественной ортогональной матрице?

Задача 3.16 (нормальные операторы). Докажите, что нормальность оператора f в эрмитовом пространстве равносильна каждому из следующих свойств:

а) $||fv|| = ||f^\times v||$ для всех $v \in V$

б) каждый собственный вектор оператора f собственный и для $f^\times$

в) ортогонал к любому f-инвариантному подпространству f-инвариантен

г) всякое f-инвариантное подпространство $f^\times$-инвариантно

д) компоненты разложения f в сумму эрмитова и косоэрмитова операторов перестановочны

Задача 3.17. Докажите, что обратимый оператор нормален если и только если компоненты его полярного разложения перестановочны?

Задача 3.18. Докажите, что для любых $h \in \mathrm{U}_n$ и $k \in \mathbb{N}$ существует такой $g \in \mathrm{U}_n$, что $g^k = h$. Много ли таких g? Все ли они являются многочленами от h?

Задача 3.19. Пусть $f : V \to V$ самосопряжённый линейный оператор с собственными значениями $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$. Для подпространства $U \subset V$ с ортонормальным базисом $u_1, \ldots, u_r$ положим $R_U(f) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^r (u_i, fu_i)$.

а) Зависит ли $R_U(f)$ от выбора ортонормального базиса в U?

б) Найдите $\max_U R_U(A)$ по всем r-мерным подпространствам $U \subset V$ в предположении, что все собственные числа оператора f попарно различны.

Задача 3.20. В условиях предыдущей задачи обозначим через $m_U(f)$ и $M_U(f)$ минимальное и максимальное значения квадратичной формы $q_f(u) \overset{\text{def}}{=} (u, fu)$ на единичной сфере $S^{r-1} \subset U$. Докажите, что

а) (принцип минимакса) $\max_U m_U(f) = \alpha_r = \min_W M_W(f)$, где максимум и минимум берутся, соответственно, по всем r-мерным подпространствам $U \subset V$ и всем $(n+1-r)$-мерным подпространствам $W \subset V$

б) для любой гиперплоскости $H \subset V$ существует единственный такой самосопряжённый оператор $h : H \to H$, что $q_f(u) = (u, hu)$ для всех $u \in H$

в*) собственные числа $\beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \ldots \geqslant \beta_{n-1}$ оператора $h : H \to H$ из предыдущего пункта удовлетворяют неравенствам $\alpha_1 \geqslant \beta_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \beta_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_{n-1} \geqslant \beta_{n-1} \geqslant \alpha_n$.

Задача 3.21. Найдите полярное разложение gh, где g — унитарен, а h — самосопряжён и положителен, линейного оператора на эрмитовом координатном пространстве, имеющего в стандартном ортонормальном базисе матрицу а) $\begin{pmatrix} -\frac{4}{3}i & -\frac{2}{3}+\frac{4}{3}i \\ \frac{1}{3}+\frac{2}{3}i & \frac{2}{3}i \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} -2+2i & 1 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3}-\frac{4}{3}i \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} \frac{5}{8}+\frac{3}{4}i & -\frac{19}{16}+\frac{9}{16}i & \frac{25}{16}+\frac{15}{16}i \\ -\frac{7}{16}-\frac{1}{16}i & \frac{19}{16}-\frac{1}{2}i & -\frac{7}{8}+\frac{15}{16}i \\ -\frac{7}{16}+\frac{13}{16}i & -\frac{1}{8}+\frac{5}{16}i & \frac{11}{16}-\frac{1}{4}i \end{pmatrix}$.

Задача 3.22. Найдите полярное разложение $f = gh$, где $g \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$, а $h \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ самосопряжён и положителен, для оператора $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, имеющего в стандартном ортонормальном базисе матрицу

а) $\begin{pmatrix} -2/9 & -8/9 & 4/9 \\ 10/9 & -5/9 & -2/9 \\ -2/9 & 10/9 & 13/9 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} -2/9 & 16/9 & 4/3 \\ -22/9 & -7/9 & -2/3 \\ 4/9 & -8/9 & 2 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} -4/15 & -16/15 & 14/15 \\ -2/3 & 4/3 & 4/3 \\ -22/15 & -13/15 & 2/15 \end{pmatrix}$.

Задача 3.23. Найдите ядро, сингулярные числа, сингулярные направления и образы сингулярных направлений оператора $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, имеющего в стандартных ортонормальных базисах матрицу

а) $\begin{pmatrix} -3/10 & 3/10 & 19/10 & -3/10 \\ -37/30 & 37/30 & 17/10 & 13/30 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} -19/30 & 31/30 & -3/10 & 7/6 \\ 19/15 & -1/15 & 3/5 & -1/3 \end{pmatrix}$.

Задача 3.24 (унитарно изоморфные отображения). Назовём $\mathbb{C}$-линейные отображения

$$f_1, f_2 : U \to W$$

унитарно изоморфными, если существуют такие унитарные операторы

$$g_U : U \xrightarrow{\sim} U \quad \text{и} \quad g_W : W \xrightarrow{\sim} W\,,$$

что $f_2 = g_W f_1 g_U^{-1}$. Докажите, что отображения унитарно изоморфны если и только если у них одинаковые сингулярные числа.

Задача 3.25. Линейное отображение $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ имеет в стандартных ортонормальных базисах матрицу

$$\begin{pmatrix} 17/39 & 53/78 & 19/39 \\ -7/39 & 4/39 & 22/39 \end{pmatrix}.$$

Существуют ли ортонормальные базисы, в которых это отображение записывается матрицей

а) $\begin{pmatrix} -4/45 & -7/18 & 34/45 \\ -28/45 & -2/9 & 13/45 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 32/45 & -22/45 & 52/45 \\ -76/45 & -4/45 & -11/45 \end{pmatrix}$?

Задача 3.26. Существует ли такая матрица $X \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{C})$, что матрица e^X равна

а) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 8 & 5 & -9 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$?

Если да, предъявите такую матрицу явно. Если нет, объясните почему.

Задача 3.27. Докажите, что отображения $A \mapsto (E - A)(E + A)$ и $U \mapsto (U - E)^{-1}(U + E)$ задают взаимно обратные биекции между косоэрмитовыми матрицами A и такими унитарными матрицами U, что $1 \notin \operatorname{Spec} U$.

§4. Кватернионы

4.1. Три инволюции на пространстве $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$. Обозначим через $U = \mathbb{C}^2$ двумерное эрмитово координатное пространство, а через $W = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{End}_{\mathbb{C}} U = U^* \otimes U$ — четырёхмерное пространство его $\mathbb{C}$-линейных эндоморфизмов. На W есть три невырожденные формы $W \times W \to \mathbb{C}$:

- симметричная билинейная форма $\langle A , B \rangle \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(AB)$, сопоставляющая паре разложимых операторов $a \otimes \alpha$, $b \otimes \beta \in U \otimes U^*$ половину их полной свёртки $\frac{1}{2}\langle a , \beta \rangle \langle b , \alpha \rangle$

- поляризация квадратичной формы[1] $\det A = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(AA^\vee)$ — симметричная билинейная форма $\widetilde{\det}(A, B) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(AB^\vee) = \langle A , B^\vee \rangle$, где
$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}^\vee = \begin{pmatrix} c_{22} & -c_{12} \\ -c_{21} & c_{11} \end{pmatrix} \tag{4-1}$$
обозначает присоединённую матрицу[2]

- стандартная эрмитова структура на $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ — эрмитово симметричная полуторалинейная форма $(A, B) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(AB^\times) = \langle A , B^\times \rangle$, где
$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}^\times = \begin{pmatrix} \bar{c}_{11} & \bar{c}_{21} \\ \bar{c}_{12} & \bar{c}_{22} \end{pmatrix} \tag{4-2}$$
обозначает эрмитово сопряжённую матрицу[3], на матрицах (a_{ij}) и (b_{ij}) значение
$$(A, B) = \frac{1}{2} \sum\nolimits_{ij} a_{ij} \bar{b}_{ij} \,.$$

Упражнение 4.1. Напишите матрицы Грама всех трёх форм в стандартном базисе из матричных единиц E_{ij}.

Линейная инволюция (4-1) и полулинейная инволюция (4-2) оборачивают сомножители в произведениях: $(AB)^\vee = B^\vee A^\vee$ и $(AB)^\times = B^\times A^\times$.

Упражнение 4.2. Проверьте первое из этих равенств[4].

Инволюции (4-1) и (4-2) коммутируют друг с другом. Их композиция сопоставляет матрице комплексно сопряжённую к матрице алгебраических дополнений и обозначается
$$\begin{gathered} \sigma : \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}) \,, \quad C \mapsto C^\sigma \overset{\text{def}}{=} C^{\vee\times} = C^{\times\vee} \,, \text{ где} \\ \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}^\sigma = \begin{pmatrix} \bar{c}_{22} & -\bar{c}_{21} \\ -\bar{c}_{12} & \bar{c}_{11} \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{4-3}$$

Инволюция (4-3) полулинейна и перестановочна с произведением: $(AB)^\sigma = A^\sigma B^\sigma$.

Упражнение 4.3. Убедитесь, что и три инволюции (4-1) – (4-3) образуют вместе с тождественным преобразованием группу Клейна $V_4 \simeq \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$.

[1] См. 11-22 на стр. 198 части I.
[2] См. n° 11.4 на стр. 198 части I.
[3] См. n° 3.2 на стр. 42.
[4] Второе равенство было установлено нами в предл. 3.1 на стр. 43.

Полулинейная инволюция σ задаёт на пространстве $W = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ вещественную структуру[1]. Пространство её вещественных векторов обозначается через

$$\mathbb{H} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Re}_\sigma(W) = \{X \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}) \mid X^\sigma = X\} \simeq \mathbb{R}^4$$

и состоит из матриц вида

$$X = \begin{pmatrix} x_1 + i\,x_2 & x_2 + i\,x_3 \\ -x_2 + i\,x_3 & x_1 - i\,x_2 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 . \tag{4-4}$$

Так как $\widetilde{\det}(A, B) = (A, B^\sigma)$, билинейная форма $\widetilde{\det}$ и эрмитова структура $(\,*\,,\,*\,)$ ограничиваются на $\mathbb{H}$ в одну и ту же вещественно билинейную симметричную положительно определённую форму, задающую на $\mathbb{H}$ евклидову структуру.

Упражнение 4.4. Убедитесь, скалярный квадрат матрицы (4-4) равен

$$\|X\|^2 = (X, X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 ,$$

а матрицы

$$\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} . \tag{4-5}$$

образуют ортонормальный базис в $\mathbb{H}$.

Формы $\widetilde{\det}$ и $(\,*\,,\,*\,)$ задают, соответственно, $\mathbb{C}$-билинейное и эрмитово продолжения этой евклидовой структуры с $\mathbb{H}$ на комплексификацию $\mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} \mathbb{H} = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$. Так как инволюция σ является гомоморфизмом относительно матричного умножения, пространство её неподвижных точек $\mathbb{H} \subset \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ является $\mathbb{R}$-подалгеброй в алгебре матриц. Эта подалгебра называется *алгеброй кватернионов*. Эрмитово сопряжение матриц $X \leftrightarrow X^\times$ и переход к присоединённой матрице $X \leftrightarrow X^\vee$ переводят алгебру $\mathbb{H}$ в себя и задают на ней одну и ту же инволюцию, которая называется *кватернионным сопряжением* и обозначается звёздочкой: $q^* \stackrel{\text{def}}{=} q^\times = q^\vee$.

Упражнение 4.5. Убедитесь, что кватернионное сопряжение тождественно действует на $\boldsymbol{e}$, меняет знак у $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ и оборачивает порядок сомножителей в произведении: $(pq)^* = q^* p^*$ для всех $p, q \in \mathbb{H}$.

4.2. Тело кватернионов. Кватернион $\boldsymbol{e}$ является единичным элементом алгебры $\mathbb{H}$ и обычно обозначается просто 1, а в произведениях опускается вовсе. Таблица умножения остальных базисных кватернионов (4-5) такова:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1 , \\ \boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k} , \quad \boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj} = \boldsymbol{i} , \quad \boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{ik} = \boldsymbol{j} . \end{gathered} \tag{4-6}$$

Произвольная пара кватернионов перемножается по правилу

$$\begin{aligned} (x_0 + x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k}) \cdot (y_0 + y_1\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + y_3\boldsymbol{k}) = \\ = (x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3) + \\ + (x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2)\,\boldsymbol{i} + \\ + (x_0y_2 + x_2y_0 + x_3y_1 - x_1y_3)\,\boldsymbol{j} + \\ + (x_0y_3 + x_3y_0 + x_1y_2 - x_2y_1)\,\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{4-7}$$

[1] См. n° 2.3 на стр. 26.

Упражнение 4.6. Попробуйте убедиться прямым вычислением, что таблица умножения (4-6) задаёт на абстрактном вещественном векторном пространстве с базисом $\{1, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ структуру ассоциативной $\mathbb{R}$-алгебры.

По аналогии с комплексными числами, кватернионы из одномерного подпространства $\mathbb{R}\,\boldsymbol{e} \subset \mathbb{H}$ называются *вещественными*. Вещественность кватерниона q равносильна тому, что $q^* = q$. Трёхмерный ортогонал к вещественным кватернионам обозначается через

$$\mathbb{I} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{e}^{\perp} = \{x \cdot \boldsymbol{i} + y \cdot \boldsymbol{j} + z \cdot \boldsymbol{k} \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

и называется пространством *чисто мнимых* кватернионов. Кватернион q чисто мним если и только если $q^* = -q$. На языке матриц вещественные кватернионы — это вещественные скалярные матрицы, а чисто мнимые кватернионы — это бесследные косоэрмитовы матрицы:

$$\mathbb{I} = \{X \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}) \mid X^{\times} = -X \;\&\; \operatorname{tr} X = 0\}\,.$$

Кватернионы $\operatorname{Re} q \stackrel{\text{def}}{=} (q + q^*)/2 \in \mathbb{R}\,\boldsymbol{e}$ и $\operatorname{Im} q \stackrel{\text{def}}{=} (q - q^*)/2 \in \mathbb{I}$ называются *вещественной* и *мнимой* частями кватерниона $q \in \mathbb{H}$.

4.2.1. Норма и деление. Так как $\|X\|^2 = \det X$ для всех $X \in \mathbb{H}$, длина кватернионов мультипликативна по отношению к кватернионному умножению: $\|pq\| = \|p\| \cdot \|q\|$ для всех $p, q \in \mathbb{H}$. В терминах формул (4-7) равенство $\|p\|^2\|q\|^2 = \|pq\|^2$ выражается *тождеством Эйлера*[1]

$$(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \cdot (y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = (x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3)^2 +$$
$$+ (x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_0y_2 + x_2y_0 + x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_0y_3 + x_3y_0 + x_1y_2 - x_2y_1)^2\,.$$

Поскольку эрмитово сопряжение совпадает на $\mathbb{H}$ со взятием присоединённой матрицы,

$$XX^{\times} = XX^{\vee} = \det(X)\,E = X^{\vee}X = X^{\times}X \text{ для всех } X \in \mathbb{H}\,,$$

т. е. $\|q\|^2 = qq^* = q^*q$ для всех $q \in \mathbb{H}$. Из этого соотношения вытекает, что каждый ненулевой кватернион q обратим, и $q^{-1} = q^*/\|q\|^2$ является двусторонним обратным к q.

Ассоциативное кольцо с единицей, в котором каждый ненулевой элемент обратим, называется *телом*[2]. Таким образом, кватернионы образуют тело.

Упражнение 4.7. Убедитесь, что $\operatorname{Re}(pq^*) = \operatorname{Re}(p^*q) = (p, q)$ для всех $p, q \in \mathbb{H}$.

4.2.2. Геометрия мнимых кватернионов. Зададим на трёхмерном евклидовом пространстве $\mathbb{I}$ ориентацию[3], объявив положительно ориентированным базис $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ из форм. (4-5) на стр. 54. Напомню[4], что *векторным произведением* $u \times w$ в ориентированном трёхмерном евклидовом пространстве V называется вектор, длина которого равна евклидовой площади параллелограмма[5], натянутого на u, w, и — если она ненулевая — направленный перпендикулярно плоскости этого параллелограмма так, что базис $u \times w, u, w$ положительно ориентирован. Вектор $u \times w$ однозначно задаётся тем, что для всех $v \in V$ выполняется равенство

$$\omega(v, u, w) = (v, u \times w)\,,$$

[1]Которое играет важную роль в доказательстве теоремы о представимости натурального числа в виде суммы четырёх квадратов, ибо редуцирует его к анализу представимости простых чисел.

[2]Таким образом поля — это коммутативные тела.

[3]См. **??** на стр. **??** части I.

[4]См. прим. 14.12 на стр. 268 части I.

[5]См. n° 14.2.1 на стр. 260 части I.

где $\omega : V \times V \times V \to \mathbb{R}$ — форма ориентированного объёма[1], равная единице на положительно ориентированном ортонормальном базисе. Из второго описания вытекает, что координатами вектора $u \times w$ в любом положительно ориентированном ортонормальном базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ пространства V являются алгебраические дополнения к элементам первой строки 3×3 матрицы, по строкам корой написаны координаты векторов v, u, w в базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, т. е.

$$u \times w = (x_2 y_3 - x_3 y_2, -x_1 y_3 + x_3 y_1, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$
$$\text{для} \quad u = (x_1, x_2, x_3), \quad w = (y_1, y_2, y_3).$$

Сравнивая это с форм. (4-7) на стр. 54, заключаем, что для всех $q_1, q_2 \in \mathbb{I}$

$$\operatorname{Re}(q_1 q_2) = -(q_1, q_2), \quad \operatorname{Im}(q_1 q_2) = q_1 \times q_2. \tag{4-8}$$

Лемма 4.1
Произвольные $p, q \in \mathbb{H}$ ортогональны если и только если $pq^* \in \mathbb{I}$. Ортогональность чисто мнимых кватернионов $p, q \in \mathbb{I}$ равносильна равенству $pq = -qp$, и в этом случае кватернион $pq = -qp$ тоже чисто мним и ортогонален плоскости, натянутой на p и q.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из упр. 4.7, остальные — из формул (4-8). □

Лемма 4.2
Множество решений уравнения $x^2 = -1$ в теле $\mathbb{H}$ представляет собою двумерную сферу $S^2 \subset \mathbb{I}$, состоящую из чисто мнимых кватернионов единичной длины.

Доказательство. Если $q^2 = -1$, то $\|q\|^2 = \|-1\|^2 = 1$ и $q^* = q^{-1} = -q$. □

Упражнение 4.8. Убедитесь, что уравнение $x^2 = 1$ имеет в $\mathbb{H}$ ровно два решения $x = \pm 1$.

Лемма 4.3
Кватернионы $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{H}$ тогда и только тогда удовлетворяют соотношениям (4-6):

$$\boldsymbol{l}^2 = \boldsymbol{m}^2 = \boldsymbol{n}^2 = -1,$$
$$\boldsymbol{lm} = -\boldsymbol{ml} = \boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{mn} = -\boldsymbol{nm} = \boldsymbol{l}, \quad \boldsymbol{nl} = -\boldsymbol{ln} = \boldsymbol{m}$$

когда они образуют положительно ориентированный ортонормальный базис в $\mathbb{I}$.

Доказательство. Из верхней строки вытекает, что все три кватерниона чисто мнимы длины 1, а из нижней — что $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{l} \times \boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{l}$. □

4.3. Универсальные накрытия $\mathrm{SU}_2 \to \mathrm{SO}_3$ и $\mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2 \to \mathrm{SO}_4$. Кватернионы единичной длины образуют трёхмерную сферу $S^3 = \{q \in \mathbb{H} \mid \|q\| = 1\}$. На языке матриц, условие $X \in S^3$ означает, что $\det X = 1$, откуда $X^\times = X^\vee = X^{-1}$. Мы заключаем, что $S^3 = \mathrm{SU}_2$ — это двумерная специальная унитарная группа[2]. Она действует на теле $\mathbb{H}$ сопряжениями

$$\mathrm{Ad}_q : \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \quad h \mapsto qhq^{-1} = qhq^*, \quad \text{где} \quad q \in \mathrm{SU}_2 \subset \mathbb{H}. \tag{4-9}$$

[1] См. n° 14.2 на стр. 258 части I.
[2] См. n° 3.1.4 на стр. 39.

Упражнение 4.9. Убедитесь, что $\mathrm{Ad} :\ SU_2 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$, $q \mapsto \mathrm{Ad}_q$, является гомоморфизмом группы SU_2 в группу автоморфизмов[1] тела кватернионов.

Так как $\det(qhq^{-1}) = \det h$, оператор Ad_q сохраняет евклидово скалярное произведение на $\mathbb{H}$, а так как $\mathrm{Ad}_q(1) = 1$, оператор Ad_q переводит трёхмерное подпространство $\mathbb{I} = 1^{\perp} \subset \mathbb{H}$ в себя. Поскольку непрерывная функция $\det\mathrm{Ad} :\ S^3 \to \{\pm 1\}$, $q \mapsto \det \mathrm{Ad}_q|_{\mathbb{I}}$, постоянна и равна 1 при $q = 1$, ортогональный оператор $\mathrm{Ad}_q|_{\mathbb{I}} :\ \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ собственный. Мы получаем гомоморфизм групп

$$S^3 = SU_2 \to SO_3(\mathbb{R}) = SO(\mathbb{I})\,, \quad q \mapsto \mathrm{Ad}_q|_{\mathbb{I}}\,. \tag{4-10}$$

Из равенств $\mathrm{Ad}_q(1) = 1$, $\mathrm{Ad}_q(q) = q$ вытекает, что при $q \neq 1$ оператор Ad_q тождественно действует на двумерной плоскости $\Pi_q = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(1, q)$. Мы заключаем, что ограничение $\mathrm{Ad}_q|_{\mathbb{I}}$ является вращением вокруг прямой $\ell_q = \Pi_q \cap \mathbb{I}$. Зафиксируем на этой прямой один из двух (различающихся знаком) чисто мнимых кватернионов $\boldsymbol{l}$ единичной длины и отождествим плоскость Π_q с полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ по правилу

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \Pi_q\,, \quad x + iy \mapsto x\boldsymbol{e} + \boldsymbol{l}y\,. \tag{4-11}$$

В результате такого отождествления каждый кватернион $p \in \Pi_q \simeq \mathbb{C}$ приобретает *аргумент*

$$\alpha = \mathrm{Arg}_{\boldsymbol{l}}\, p \in \mathbb{R} :\ p = \cos\alpha + \boldsymbol{l}\sin\alpha\,.$$

При этом $p^{-1} = p^* = \cos \mathrm{Arg}_{\boldsymbol{l}}\, p - \boldsymbol{l} \sin \mathrm{Arg}_{\boldsymbol{l}}\, p$.

Лемма 4.4

Оператор $\mathrm{Ad}_q|_{\mathbb{I}} \in SO(\mathbb{I})$ является поворотом вокруг прямой ℓ_q на угол $2\,\mathrm{Arg}_{\boldsymbol{l}}(q)$ по часовой стрелке, если смотреть вдоль зафиксированного выше единичного вектора $\boldsymbol{l} \in \ell_q$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{Arg}_{\boldsymbol{l}}\, q = \alpha$. Дополним $\boldsymbol{l}$ до положительно ориентированного ортонормального базиса $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ пространства $\mathbb{I}$. По лем. 4.3 на стр. 56 таблица умножения кватернионов $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ такая же, как у $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ из форм. (4-6) на стр. 54. Поэтому

$$\begin{aligned} q\boldsymbol{m}q^{-1} &= (\cos\alpha + \boldsymbol{l}\sin\alpha)\boldsymbol{m}(\cos\alpha - \boldsymbol{l}\sin\alpha) = (\boldsymbol{m}\cos\alpha + \boldsymbol{n}\sin\alpha)(\cos\alpha - \boldsymbol{l}\sin\alpha) = \\ &= \boldsymbol{m}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2\boldsymbol{n}\cos\alpha\sin\alpha = \boldsymbol{m}\cos(2\alpha) + \boldsymbol{n}\sin(2\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q\boldsymbol{n}q^{-1} &= (\cos\alpha + \boldsymbol{l}\sin\alpha)\boldsymbol{n}(\cos\alpha - \boldsymbol{l}\sin\alpha) = (\boldsymbol{n}\cos\alpha - \boldsymbol{m}\sin\alpha)(\cos\alpha - \boldsymbol{l}\sin\alpha) = \\ &= \boldsymbol{n}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - 2\boldsymbol{m}\cos\alpha\sin\alpha = \boldsymbol{n}\cos(2\alpha) - \boldsymbol{m}\sin(2\alpha)\,, \end{aligned}$$

т. е. действие оператора Ad_q на векторы $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ задаётся матрицей $\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$. □

Следствие 4.1

Гомоморфизм (4-10) сюрьективен и имеет ядро $\{\pm 1\} \simeq \mathbb{Z}/(2)$.

Доказательство. Для каждого ненулевого вектора v и угла $\varphi \in [0, 2\pi]$ поворот по часовой стрелке на угол φ вокруг оси направленной по вектору v представляется как поворот на угол 2α в ту же сторону вокруг той же оси ровно для двух углов $\alpha = \varphi/2$ и $\alpha = \pi + \varphi/2$. □

[1] Т. е. биекций, перестановочных со сложением, умножением, вычитанием и делением.

Замечание 4.1. (топологическое) С топологической точки зрения, гомоморфизм (4-10) является двулистным накрытием, склеивающим между собою диаметрально противоположные точки сферы $S^3 \subset \mathbb{H}$. Результатом такой склейки является трёхмерное вещественное проективное пространство $\mathbb{P}_3(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{H})$, поскольку каждое одномерное векторное подпространство в $\mathbb{R}^3$ пересекает сферу S^3 ровно в двух противоположных точках. Таким образом, накрытие (4-10) задаёт гомеоморфизм между $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ и $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. Так как сфера S^3 *односвязна*[1], а группа $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ линейно связна, накрытие (4-10) является *универсальным*. В частности, $\pi_1(\mathrm{SO}_3) = \mathbb{Z}/(2)$. Это равенство означает, что в группе SO_3 имеется нестягиваемая петля, квадрат которой стягиваем. Эту петлю можно увидеть и почувствовать: держа на ладони книгу, непрерывным движением руки поворачиваем её на 360° так, чтобы книга в течение всей манипуляции оставалась горизонтальной, как показано на[2] рис. 4◇1 (первый столбец сверху вниз). Изогнутая рука задаёт петлю в SO_3, и напряжение локтевого сустава красноречиво свидетельствует о её нестягиваемости. Если превозмочь неприятное ощущение и продолжить вращение книгу дальше в том же направлении (второй столбец снизу вверх), то после ещё одного полного оборота скрученный локоть полностью распрямится. Неформально говоря, взятие прообраза при накрытии (4-10) означает «извлечение корня» из вращения трёхмерного пространства, и два различающихся знаком значения этого корня являются диаметрально противоположными точками трёхмерной сферы или, что то же самое, отличающимися знаком унитарными операторами из SU_2.

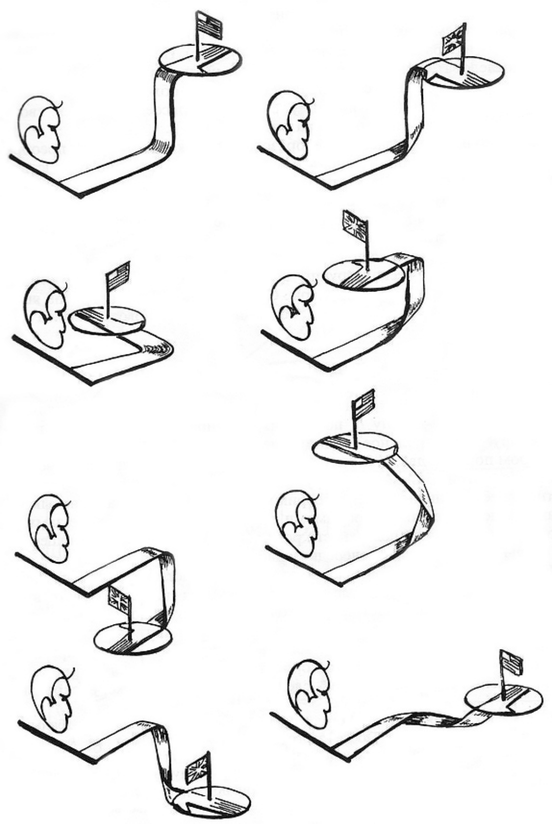


Рис. 4◇1. Образующая $\pi_1(\mathrm{SO}_3) = \mathbb{Z}/(2)$.

4.3.1. Накрытие $\mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2 \to \mathrm{SO}_4$. Отображение $\sigma_1 : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $h \mapsto -h^*$, является отражением в гиперплоскости $1^\perp = \mathbb{I}$. Так как левое умножение $q : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $h \mapsto qh$, на кватернион $q \in \mathrm{SU}_2$ является ортогональным линейным преобразованием $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ и переводит 1 в q, отражение $\sigma_q = q\sigma_1 q^{-1} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ в гиперплоскости $q^\perp$ действует по правилу

$$\sigma_q : h \mapsto -q(q^{-1}h)^* = -qh^*q\,.$$

У сопряжения из форм. (4-9) на стр. 56 есть бивариантная версия: сопоставим каждой паре кватернионов $p, q \in \mathrm{SU}_2$ ортогональное преобразование $\varphi_{pq} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $h \mapsto phq^{-1} = phq^*$.

Предложение 4.1

Отображение $\varphi : \mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2 \twoheadrightarrow \mathrm{SO}_4 = \mathrm{SO}(\mathbb{H})$, $(p, h) \mapsto \varphi_{pq}$, является сюрьективным гомомор-

[1] Т. е. фундаментальная группа $\pi_1(S^3)$ единичная.

[2] Рисунок взят из книги *Франсис Дж. Книжка с картинками по топологии*. М. «Мир» 1991.

физмом групп с ядром $\{\pm(1,1)\} \simeq \mathbb{Z}/(2)$.

Доказательство. Каждое собственное ортогональное преобразование $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ является композицией чётного числа отражений[1] σ_q с $q \in S^3$. Так как

$$\sigma_p\sigma_q : h \mapsto pq^*hq^*p = \varphi_{rs}(h)$$

для $r = pq^*$, $s = p^*q$, гомоморфизм φ сюрьективен. Если $phq^* = h$ для всех $h \in \mathbb{H}$, то полагая $h = 1$, заключаем, что $q = p^* = p^{-1}$, откуда $p = \pm 1$ по сл. 4.1. □

4.4. Бинарные группы платоновых тел. Согласно теор. 20.2 на стр. 382 части I, конечные группы отражений, действующие в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, с точностью до сопряжения исчерпываются диэдральными группами D_n и полными группами тетраэдра, октаэдра и икосаэдра. Отсюда нетрудно вывести[2], что конечные подгруппы в $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ с точностью до сопряжения исчерпываются циклическими группами C_n порядка $n \in \mathbb{N}$, диэдральными группами D_n порядка $2n$, собственной группой тетраэдра $T \simeq A_4$ порядка 12, собственной группой октаэдра $O \simeq S_4$ порядка 24, и собственной группой икосаэдра $I \simeq A_5$ порядка 60.

Определение 4.1

Полные прообразы собственных групп диэдра, тетраэдра, октаэдра и икосаэдра относительно универсального двулистного накрытия $\mathrm{SU}_2 \twoheadrightarrow \mathrm{SO}_3$ из форм. (4-10) на стр. 57 обозначаются через $\mathfrak{D}_n$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{I}$ и называются *бинарными группами* диэдра, тетраэдра, октаэдра и икосаэдра. Они имеют порядки $|\mathfrak{D}_n| = 4n$, $|\mathfrak{T}| = 24$, $|\mathfrak{O}| = 48$, $|\mathfrak{I}| = 120$.

Предложение 4.2

Каждая конечная мультипликативная подгруппа $G \subset \mathbb{H}$ чётного порядка является системой корней[3] в $\mathbb{H}$.

Доказательство. Так как $g^{|G|} = 1$ для всех $g \in G$, все элементы группы имеют единичную длину, т. е. $G \subset \mathrm{SU}_2$.

Упражнение 4.10. Докажите, что в каждой 2-группе[4] есть элемент порядка 2.

Поскольку в G есть силовская 2-подгруппа, в G имеется элемент g порядка 2. По упр. 4.8 на стр. 56 $g = -1$, т. е. $-1 \in G$. Тогда для любых $g, h \in G$

$$\sigma_g(h) = -gh^*g = -gh^{-1}g \in G\,.$$

Если $xg \in G$ для некоторых $g \in G$ и $x \in \mathbb{R}$, то $x \in G$, откуда $|x| = 1$. Тем самым, оба свойства из форм. (20-14) на стр. 374 части I выполняются. □

Пример 4.1 (гурвицевы кватернионы и бинарная группа тетраэдра)

Восемь кватернионов ± 1, $\pm\boldsymbol{i}$, $\pm\boldsymbol{j}$, $\pm\boldsymbol{k}$, составляющих мультипликативную группу Q_8, располагаются в вершинах стандартного четырёхмерного октаэдра. Пропорциональные центрам шестнадцати его трёхмерных граней кватернионы $(\pm 1 \pm \boldsymbol{i} \pm \boldsymbol{j} \pm \boldsymbol{k})/2$ располагаются в вершинах

[1] См. теор. 17.2 на стр. 310 части I.
[2] См. зад. 20.11 на стр. 385 части I.
[3] См. n° 20.5 на стр. 374 части I.
[4] См. n° 19.6 на стр. 359 части I.

вписанного в единичную сферу $S^3 \subset \mathbb{H}$ четырёхмерного куба, гомотетичного стандартному. Целочисленная линейная оболочка этих 24 кватернионов, т. е. кватернионы $x_1 + x_2\boldsymbol{i} + x_3\boldsymbol{j} + x_4\boldsymbol{k}$, координаты x_i которых либо все целые, либо все полуцелые, образует подкольцо в $\mathbb{H}$.

Упражнение 4.11. Углядите это из форм. (4-7) на стр. 54.

Оно обозначается через H и называется кольцом *целых* или *гурвицевых* кватернионов. Целые кватернионы минимальной ненулевой длины 1 — это в точности 24 перечисленных выше кватерниона. Тем самым, они образуют мультипликативную группу $\mathfrak{T} \overset{\text{def}}{=} H^{\times}$ обратимых элементов кольца H, транзитивно действующую на себе левым умножениями, кои являются ортогональными преобразованиями $\mathbb{H} \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}$. Универсальное накрытие (4-10):

$$\mathrm{Ad}: \ \mathrm{SU}_2 \twoheadrightarrow \mathrm{SO}(\mathbb{I}), \quad q \mapsto \mathrm{Ad}_q ,$$

переводит группу $\mathfrak{T}$ в собственную группу $T \subset \mathrm{SO}_3$ правильного тетраэдра. В самом деле, по сл. 4.1 шесть кватернионов $\pm\boldsymbol{i}$, $\pm\boldsymbol{j}$, $\pm\boldsymbol{k}$ задают в $\mathbb{I}$ три поворота на угол π вокруг осей $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, а 16 кватернионов $(\pm 1 \pm \boldsymbol{i} \pm \boldsymbol{j} \pm \boldsymbol{k})/2$ — восемь поворотов на углы $\pm 2\pi/3$ вокруг четырёх осей, порождённых векторами $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

Упражнение 4.12. Убедитесь, что кватернион $q = (1+\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})/2$ имеет аргумент $\pm\pi/3$ в зависимости от знака выбранного в плоскости Π_q чисто мнимого кватерниона $\boldsymbol{l}$ длины[1] 1.

Эти 11 поворотов вместе с тождественным отображением образуют группу вращений двух централько симметричных друг другу тетраэдров с вершинами в центрах граней стандартного трёхмерного октаэдра с вершинами $\pm\boldsymbol{i}$, $\pm\boldsymbol{j}$, $\pm\boldsymbol{k}$. Если раскрасить грани октаэдра в шахматном порядке, то один из тетраэдров будет иметь вершины в центрах белых граней

$$(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})/3, \quad (\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})/3, \quad (-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})/3, \quad (-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})/3,$$

а другой — в центрах чёрных граней

$$(-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})/3, \quad (-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})/3, \quad (\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})/3, \quad (\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})/3$$

(обратите внимание, что у первого тетраэдра чётное число минусов в каждой вершине, у второго — нечётное). По этой причине группу $\mathfrak{T}$ называют *бинарной группой тетраэдра*.

Упражнение 4.13. Постройте коммутативную диаграмму гомоморфизмов групп

$$\begin{tikzcd} \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, two heads] & \mathfrak{T} \arrow[d, two heads] \\ \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \arrow[r, "\sim"] & T , \end{tikzcd}$$

где горизонтальные стрелки — изоморфизмы, а вертикальные — факторизации по ± 1.

С геометрической точки зрения 24 элемента группы $\mathfrak{T}$ образуют октаплекс[2] — правильный самодвойственный четырёхмерный многогранник с символом Шлефли[3] $(3,4,3)$ и полной группой с графом Коксетера[4] F_4.

[1] См. формулу (4-11) на стр. 57.
[2] См. зад. 14.11 на стр. 270 части I.
[3] См. зад. 20.12 (в) на стр. 385 части I.
[4] См. теор. 20.2 на стр. 382 части I.

Упражнение 4.14. Убедитесь в этом: опишите звезду вершины 1 и примыкающие к 1 грани всех размерностей, подсчитайте их количества, найдите порядок несобственной группы октаплекса и убедитесь, что она транзитивно действует на его флагах.

Пример 4.2 (бинарная группа октаэдра)
Собственная группа O трёхмерного октаэдра с вершинами $\pm\boldsymbol{i}$, $\pm\boldsymbol{j}$, $\pm\boldsymbol{k}$ получается расширением собственной группы тетраэдра T, вложенной в O как нормализатор[1] белых граней[2] при помощи шести поворотов на углы $\pm\pi/2$ вокруг осей $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ и шести поворотов на угол π вокруг осей, проходящих через середины противоположных рёбер октаэдра. По лем. 4.4 эти 12 поворотов задаются 24 кватернионами $(\pm\boldsymbol{m}\pm\boldsymbol{n})/\sqrt{2}$, где $\{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\}$ пробегает неупорядоченные пары различных базисных кватернионов[3] ± 1, $\pm\boldsymbol{i}$, $\pm\boldsymbol{j}$, $\pm\boldsymbol{k}$. Добавляя эти 24 кватерниона к 24 кватернионам группы $\mathfrak{T}$ получаем мультипликативную подгруппу $\mathfrak{O} \subset \mathbb{H}$ из 48 элементов, которая называется *бинарной группой октаэдра*.

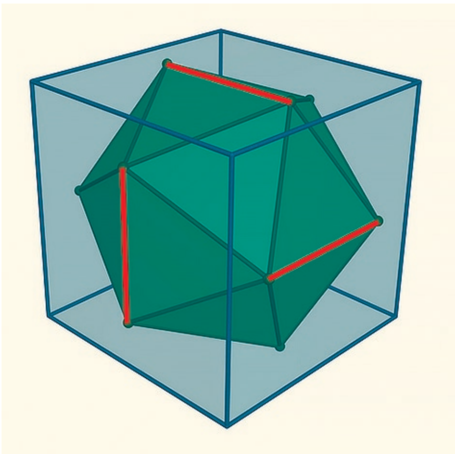


Рис. 4◇2. Три пары противоположных рёбер.

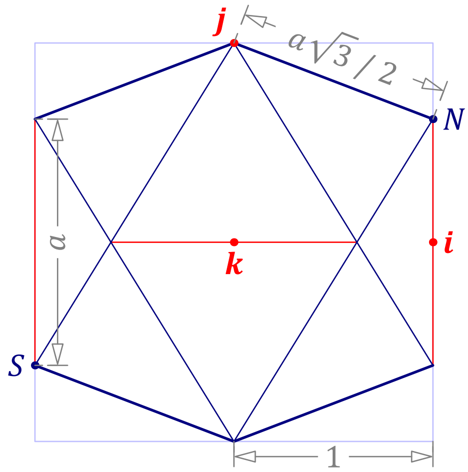


Рис. 4◇3. Проекция на грань куба.

Пример 4.3 (бинарная группа икосаэдра)
Если вписать икосаэдр в стандартный куб, как на рис. 4◇2, то центры красных рёбер попадут в вершины стандартного октаэдра. Выбрать три пары противоположных рёбер икосаэдра с центрами в вершинах октаэдра можно пятью способами — при каждом таком выборе на каждой из 12 пятиугольных «тюбетеек» икосаэдра, образованных пятью гранями с общей вершиной, отмечается ровно два ребра: одно идёт из центра тюбетейки в одну из её вершин, а другое соединяет две противоположные вершины на периметре тюбетейки, поэтому выбор любого из пяти лучей какой-либо фиксированной тюбетейки однозначно продолжается на весь икосаэдр. Группа икосаэдра транзитивно действует на пяти тройках перпендикулярных осей, проходящих через средины отмеченных рёбер, и стабилизатор каждой тройки состоит из 12 вращений соответствующего октаэдра, нормализующих оба ассоциированных с ним тетраэдра с вершинами на чёрных и белых гранях. Мы заключаем, что группа вращений икосаэдра является произведением $I = TC$ группы T тетраэдра, ассоциированного с октаэдром с вершинами $\pm\boldsymbol{i}$, $\pm\boldsymbol{j}$, $\pm\boldsymbol{k}$, и

[1] См. n° 18.3 на стр. 339 части I.
[2] Совпадающий с нормализатором чёрных граней.
[3] Поворотам на $\pm\pi/2$ отвечают три пары, содержащие 1.

циклической группы C вращений на кратные $2\pi/5$ углы вокруг оси SN на рис. 4◇3, где изображена проекция рис. 4◇2 на верхнюю грань куба[1].

Упражнение 4.15. Обозначим *золотое сечение* через $\vartheta = (1+\sqrt{5})/2$. Убедитесь, что сторона икосаэдра на рис. 4◇3 равна $a = \sqrt{5}-1 = 2\vartheta^{-1}$, а направленный в сторону N единичный вектор оси SN равен $(\vartheta\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})/\sqrt{1+\vartheta^2}$.

Таким образом *бинарная группа икосаэдра* $\mathfrak{J} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Ad}^{-1}(I) \subset \mathrm{SU}_2$ является произведением $\mathfrak{J} = \mathfrak{T}\mathfrak{C}$ бинарной группы тетраэдра $\mathfrak{T}$ и циклической подгруппы $\mathfrak{C} \subset \mathrm{SU}_2$, порождённой кватернионом

$$c = \cos\frac{\pi}{5} + \frac{\vartheta\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}}{\sqrt{1+\vartheta^2}}\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\vartheta}{2} + (\vartheta\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})\sqrt{\frac{1-\vartheta^2/4}{1+\vartheta^2}} = \frac{1}{2}(\vartheta+\boldsymbol{i}+\vartheta^{-1}\boldsymbol{j})\,. \tag{4-12}$$

Упражнение 4.16. Убедитесь, что помимо 24 кватернионов из группы $\mathfrak{T}$ группа $\mathfrak{J}$ содержит ещё 96 кватернионов, которые можно получить из c чётными перестановками базисных векторов $\{1, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ и произвольным выбором знака при каждом из них, и эти 120 кватернионов являются вершинами правильного четырёхмерного многогранника с символом Шлефли[2] $(3,3,5)$ и полной группой с графом Коксетера[3] H_4.

4.5. Два семейства комплексных структур на $\mathbb{H}$. По лем. 4.2 на стр. 56 операторы левого и правого умножения на чисто мнимый кватернион $\boldsymbol{n}$ единичной нормы

$$\begin{aligned} I'_{\boldsymbol{n}} &: \mathbb{H}\to\mathbb{H}\,, \quad q\mapsto \boldsymbol{n}q\,,\\ I''_{\boldsymbol{n}} &: \mathbb{H}\to\mathbb{H}\,, \quad q\mapsto q\boldsymbol{n}\,, \end{aligned} \tag{4-13}$$

являются ортогональными и задают на вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{H}$ комплексные структуры[4]. Таким образом, на $\mathbb{H}$ имеется два семейства эрмитовых структур, согласованных с евклидовым скалярным произведением[5], и каждое из них биективно параметризуется точками единичной сферы $S^2 \subset \mathbb{I}$ чисто мнимых кватернионов длины 1.

Упражнение 4.17. Убедитесь, что все эти структуры различны.

4.5.1. Чистые спиноры. Согласно предл. 2.5, комплексные структуры на $\mathbb{H}$, продолжающие евклидово скалярное произведение до кэлеровой тройки, биективно соответствуют двумерным изотропным подпространствам $\mathbb{C}$-билинейной формы $\widetilde{\det}$ на $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{H} = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$. Проективизации этих подпространств являются прямыми на квадрике Серге[6]

$$S = \{X \in \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})) \mid \det X = 0\} \simeq \mathbb{P}(U)\times\mathbb{P}(U^*)\,.$$

Как мы видели в прим. 1.4 на стр. 11, эти прямые разбиваются на два семейства, которые биективно параметризуются точками двух комплексных проективных прямых $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$ и $\mathbb{P}_1^\times = \mathbb{P}(U^*)$, где $U = \mathbb{C}^2$ — двумерное эрмитово пространство, алгеброй линейных эндоморфизмов которого является рассматриваемая нами алгебра матриц[7] $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(U)$. Точки прямых $\mathbb{P}_1$

[1] Красным нарисованы проекции отмеченных рёбер, жирным синим — проекции четырёх граней икосаэдра, перпендикулярных верхней грани куба.

[2] См. зад. 20.12 (в) на стр. 385 части I.

[3] См. теор. 20.2 на стр. 382 части I.

[4] См. n° 2.4 на стр. 28.

[5] См. n° 2.5.1 на стр. 31.

[6] См. прим. 1.4 на стр. 11.

[7] См. самое начало n° 4.1 на стр. 53.

и $\mathbb{P}_1^{\times}$ называются *чистыми спинорами* (противоположной *киральности*[1]). Между двойственными прямыми $\mathbb{P}_1$ и $\mathbb{P}_1^{\times}$ имеется канонический проективный изоморфизм

$$\delta : \mathbb{P}(U) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(U^*), \quad u \mapsto \det(\,*\,, u)\,, \tag{4-14}$$

переводящий точку $u \in \mathbb{P}_1$ в единственную с точностью до пропорциональности ненулевую линейную форму[2] $w \mapsto \det(w, u)$, которая зануляется в этой точке. В стандартных координатах на $\mathbb{C}^2$ изоморфизм (4-14) переводит точку $z = (z_0 : z_1) \in \mathbb{P}_1$ в точку $z^\delta = (z_1 : -z_0) \in \mathbb{P}_1^{\times}$.

Покажем, что комплексные структуры на $\mathbb{H}$, задаваемые изотропными подпространствами $z \otimes U^*$ и $U \otimes z^\delta$ формы det на $U \otimes U^* = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ имеют вид (4-13) для однозначно определяемого точкой $z = (z_0 : z_1) \in \mathbb{P}(U)$ чисто мнимого кватерниона $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(z)$ единичной длины. Пространство $z \otimes U^*$ содержит матрицу

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0 & 0 \\ z_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4-15}$$

Поэтому сопряжённое ему относительно вещественной структуры[3] σ на $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ пространство содержит матрицу

$$\begin{pmatrix} z_0 & 0 \\ z_1 & 0 \end{pmatrix}^{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -\overline{z}_1 \\ 0 & \overline{z}_0 \end{pmatrix}. \tag{4-16}$$

Если существует такая матрица $X \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$, что матрицы (4-15) и (4-16) являются собственными с собственными числами i и $-i$ для оператора левого умножения на X

$$\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})\,, \quad Y \mapsto XY\,,$$

то столбцы матрицы

$$Z = \begin{pmatrix} z_0 & -\overline{z}_1 \\ z_1 & \overline{z}_0 \end{pmatrix} \tag{4-17}$$

являются собственными векторами линейного оператора $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ с матрицей X в стандартном базисе. Так как матрица этого оператора в базисе пространства $\mathbb{C}^2$, образованном столбцами матрицы (4-17), диагональна с элементами $(i, -i)$ на диагонали, мы заключаем, что[4]

$$X = Z \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} Z^{-1} = \frac{i}{\|z\|^2} \begin{pmatrix} z_0 & -\overline{z}_1 \\ z_1 & \overline{z}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z}_0 & \overline{z}_1 \\ z_1 & -z_0 \end{pmatrix} = \frac{i}{\|z\|^2} \begin{pmatrix} |z_0|^2 - |z_1|^2 & 2z_0\overline{z}_1 \\ 2\overline{z}_0 z_1 & |z_1|^2 - |z_0|^2 \end{pmatrix}.$$

Это бесследная косоэрмитова матрица определителя 1, т. е. чисто мнимый кватернион длины 1.

Упражнение 4.18. Убедитесь, что подпространства $z \otimes U^*$ и $U^* \otimes z^\delta$ действительно являются собственными с собственным числом i для операторов $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$, задаваемых, соответственно, левым и правым умножениями на матрицу X.

[1] Термин «киральность» происходит от греческого $\chi\varepsilon\varrho\iota$ (рука) и является калькой с английского *chirality*, отражающего принадлежность к одному из двух зеркально симметричных классов, как левая и правая руки. Этимология использованных тут названий отчасти объясняется в §§ 9, 11 второй части книги: *А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. Линейная алгебра и геометрия*. М., изд. МГУ, 1980, стр. 176, и в §3.6 книги: *Дж. Х. Конвей, Д. А. Смит. О кватернионах и октавах*. М., МЦНМО, 2009, стр. 46.

[2] Через $\det(w, u)$ обозначен определитель матрицы координат векторов $u, w \in U$ в каком-либо базисе, и при выборе другого базиса эта форма умножается на ненулевую константу.

[3] См. формулу (4-3) на стр. 53.

[4] См. прим. 8.10 на стр. 143 части I.

Таким образом, все комплексные структуры на четырёхмерном вещественном пространстве $\mathbb{H}$, продолжающие евклидово скалярное произведение на $\mathbb{H}$ до кэлеровой тройки, распадаются на два непересекающихся семейства, каждое из которых параметризуется точками римановой сферы $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}^2) \simeq S^2$ так, что точке $z = (z_0 : z_1)$ отвечают две комплексные структуры (4-13), задаваемые левым и правым умножением на чисто мнимый кватернион единичной длины

$$\boldsymbol{n}(z) = \frac{i}{\|z\|^2}\begin{pmatrix} |z_0|^2 - |z_1|^2 & 2z_0\bar{z}_1 \\ 2\bar{z}_0 z_1 & |z_1|^2 - |z_0|^2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})\,. \tag{4-18}$$

Упражнение 4.19. Каким точкам $z \in \mathbb{P}_1$ отвечают комплексные структуры $I, J, K : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, задаваемые левыми умножениями на $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$?

4.5.2. Расслоение Хопфа. Комплексная проективная прямая $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$ является фактором множества $\mathbb{C}^2 \smallsetminus 0$ по действию мультипликативной группы $\mathbb{C}^\times$ скалярными гомотетиями. Так как $\mathbb{C}^\times = \mathbb{R}^\times_{>0} \times \mathrm{U}(1)$, факторизацию можно осуществить в два приёма: сначала рассмотреть фактор по действию вещественных растяжений, а потом дофакторизовать его по действию U_1. Орбиты группы вещественных растяжений $\mathbb{R}^\times_{>0}$ биективно соответствуют точкам единичной сферы $S^3 \subset \mathbb{C}^2$, состоящей из векторов эрмитовой длины 1. Эта сфера расслоена на непересекающиеся орбиты группы $\mathrm{U}_1 \simeq S^1$. Множество этих орбит[1] — это комплексная проективная прямая $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$, т. е. риманова сфера S^2. Получающееся таким образом расслоение

$$\pi : S^3 = \mathbb{C}^2/\mathbb{R}^\times_{>0} \twoheadrightarrow S^2 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^2) = \mathbb{C}^2/\mathbb{C}^\times$$

со слоями $\mathrm{U}_1 = S^1$ называется *расслоением Хопфа*. Задаваемое формулой (4-18) отображение

$$\mathbb{C}^2 \smallsetminus 0 \twoheadrightarrow S^2 = \{q \in \mathbb{I} \mid \|q\| = 1\}\,, \quad z \mapsto \boldsymbol{n}(z)\,,$$

тоже постоянно вдоль U_1-орбит: матрица $\boldsymbol{n}(z)$ не меняется при умножении z на комплексные числа единичной длины. Поэтому ограничение этого отображения на трёхмерную сферу векторов $z \in \mathbb{C}^2$ эрмитовой длины 1 задаёт расслоение Хопфа явной алгебраической формулой:

$$\pi : (z_0, z_1) \mapsto i\begin{pmatrix} |z_0|^2 - |z_1|^2 & 2z_0\bar{z}_1 \\ 2\bar{z}_0 z_1 & |z_1|^2 - |z_0|^2 \end{pmatrix} \in S^2 \subset \mathbb{I} \subset \mathbb{H} \subset \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})\,,$$

показывающей, среди прочего, что расслоение Хопфа гладкое.

Задачи для самостоятельного решения к §4

Задача 4.1. Найдите $x, y \in \mathbb{H}$, удовлетворяющие системе уравнений

а) $$\begin{cases} (-4 - \boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k})\,x + (2 - \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k})\,y = -13 + 41\boldsymbol{i} - 12\boldsymbol{j} + 13\boldsymbol{k} \\ (-1 - 4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k})\,x + (4 - 3\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k})\,y = -20 - 13\boldsymbol{i} - 9\boldsymbol{j} - 35\boldsymbol{k} \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} (-2 - 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k})\,x + (4 - 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k})\,y = -42 + 10\boldsymbol{i} + 15\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k} \\ (-1 - 4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k})\,x + (2 - 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k})\,y = -19 + 25\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + 33\boldsymbol{k} \end{cases}$$

[1] Каждая такая орбита представляет собою множество векторов единичной длины в одномерном комплексном подпространстве, отвечающем данной точке в $\mathbb{P}_1$, ср. с n° 3.1.8 на стр. 41.

в) $\begin{cases} (2+\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k})\,x+(4+3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})\,y=14+10\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j}-21\boldsymbol{k} \\ (2-4\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})\,x+(4-2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})\,y=-30+7\boldsymbol{i}+26\boldsymbol{j}-20\boldsymbol{k}\,. \end{cases}$

Задача 4.2. Какой бывает размерность подпространства $C_q = \{h \in \mathbb{H} \mid qh = hq\}$ для данного $q \in \mathbb{H}$? Для каждого из возможных значений $\dim C_q$ опишите все $q \in \mathbb{H}$, на которых оно достигается. В частности, найдите центр тела кватернионов.

Задача 4.3. Покажите, что для любого $q \in \mathbb{H}$ с $q^2 = -1$ множество кватернионов вида $\alpha + q\beta$ с $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ является подполем, изоморфным $\mathbb{C}$.

Задача 4.4. Покажите, что $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \boldsymbol{j}\mathbb{C} = \{z_1 + \boldsymbol{j}z_2 \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ \boldsymbol{j}^2 = -1 \in \mathbb{C}\ \&\ \forall z \in \mathbb{C}\ z\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\overline{z}\}$.

Задача 4.5. Верно ли, что любой невещественный кватернион является корнем квадратного уравнения с вещественными коэффициентами и отрицательным дискриминантом?

Задача 4.6 (чисто мнимые кватернионы). Пусть $\mathbb{I} \overset{\text{def}}{=} \{q \in \mathbb{H} \mid q^* = -q\}$. Покажите, что

а) $\mathbb{I} = \{q \in \mathbb{H} \mid q^2 \in \mathbb{R}_{\leqslant 0}\}$

б) форма $(p, q) \overset{\text{def}}{=} (pq^* + qp^*)/2$ задаёт на $\mathbb{I}$ евклидово скалярное произведение

в) $\mathbb{I}$ замкнуто относительно взятия коммутатора $[x, y] \overset{\text{def}}{=} xy - yx$

г) $[x, y]$ ортогонален x, y, а $\|[x, y]\|$ равна абсолютной величине площади параллелограмма, натянутого на x, y

Задача 4.7. Для данной 2×2 матрицы $h \in \mathrm{SU}_2$ явно вычислите 3×3 матрицу $F_h \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, которой записывается в базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ оператор Ad_h.

Задача 4.8. Напишите в стандартном базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ матрицу оператора $\mathrm{Ad}_q : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ сопряжения кватернионом а) $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{k}$ б) $\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j} - \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{k}$ в) $1 + \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ и укажите ось и угол поворота, осуществляемого этим оператором.

Задача 4.9. Для данных 2×2 матриц $p, q \in \mathrm{SU}_2$ явно вычислите 4×4 матрицу $\Phi_{pq} \in \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$, которой записывается в базисе 1, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ оператор $\varphi_{p,q}$.

Задача 4.10. Для каждого $z \in \mathbb{F}_9$ положим $\overline{z} \overset{\text{def}}{=} F_3(z) = z^3$. Не встречали ли Вы раньше группу

$$\mathrm{SU}_2(\mathbb{F}_9) \overset{\text{def}}{=} \{X \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{F}_9) \mid \overline{X}X^t = E\}\,?$$

Задача 4.11. Покажите, что бинарная группа тетраэдра[1] $\mathfrak{T}$ является системой корней типа[2] D_4, явно выпишите какую-нибудь систему её простых корней и найдите порядок группы $W_{\mathfrak{T}} \subset \mathrm{SO}(\mathbb{H})$, порождённой отражениями $\sigma_q : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $h \mapsto -qh^*q$, где $q \in \mathfrak{T}$.

Задача 4.12 (бинарная группа икосаэдра). Явно выпишите какую-нидудь систему простых корней для группы $W_{\mathfrak{J}} \subset \mathrm{SO}(\mathbb{H})$, порождённой отражениями $\sigma_q : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $h \mapsto -qh^*q$, где $q \in \mathfrak{J}$ пробегает бинарную группу икосаэдра[3], и покажите, что а) стабилизатор точки $\boldsymbol{e} \in \mathbb{H}$ в группе $W_{\mathfrak{J}}$ порождается отражениями в ортогоналах к 30 чисто мнимым кватернионам из $\mathfrak{J}$ и изоморфен несобственной группе икосаэдра[4] б) кватернионы из группы $\mathfrak{J}$ являются вершинами правильного многогранника с символом Шлефли[5] $(3, 3, 5)$: опишите звезду вершины $\boldsymbol{e}$ и примыкающие к $\boldsymbol{e}$ грани всех размерностей, подсчитайте их количества, найдите порядок

[1] См. прим. 4.1 на стр. 59.
[2] См. теор. 20.2 на стр. 382 части I.
[3] См. прим. 4.3 на стр. 61.
[4] См. n° 20.3 на стр. 367 части I.
[5] См. зад. 20.12 (в) на стр. 385 части I.

несобственной группы многогранника и убедитесь, что она транзитивно действует на флагах. в) Найдите $|W_{\mathfrak{J}}|$.

Задача 4.13. Для каждого $z \in \mathbb{F}_{25}$ положим $\overline{z} \stackrel{\text{def}}{=} F_5(z) = z^5$. Сколько элементов в группе

$$\mathrm{SU}_2(\mathbb{F}_{25}) \stackrel{\text{def}}{=} \{X \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{F}_{25}) \mid \overline{X}X^t = E\} ?$$

Не встречалась ли она Вам раньше?

Задача 4.14 (бинарная группа октаэдра). Явно выпишите какую-нидудь систему простых корней для группы $W_{\mathfrak{O}} \subset \mathrm{SO}(\mathbb{H})$, порождённой отражениями $\sigma_q : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $h \mapsto -qh^*q$, где $q \in \mathfrak{O}$ пробегает бинарную группу октаэдра[1], и покажите, что стабилизатор точки $\boldsymbol{e} \in \mathbb{H}$ в группе порождается отражениями в ортогоналах к чисто мнимым кватернионам из $\mathfrak{O}$. Сколько их? какую фигуру они образуют? Найдите $|W_{\mathfrak{J}}|$.

Задача 4.15. Для каждого $z \in \mathbb{F}_4$ положим $\overline{z} \stackrel{\text{def}}{=} F_2(z) = z^2$. Сколько элементов в группе

$$\mathrm{SU}_2(\mathbb{F}_4) \stackrel{\text{def}}{=} \{X \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{F}_4) \mid \overline{X}X^t = E\}?$$

Каковы её факторы Жордана – Гёльдера? Разложима ли она в (полу)прямое произведение?

Задача 4.16. Докажите, что все ненулевые элементы конечномерной ассоциативной $\Bbbk$-алгебры с единицей обратимы если и только если в этой алгебре нет делителей нуля.

Задача 4.17 (обобщённые кватернионы). Обозначим через $H_{\Bbbk}(\alpha, \beta)$ ассоциативную $\Bbbk$-алгебру с единицей, порождённую (как $\Bbbk$-алгебра) элементами i, j с соотношениями $ij = -ji$, $i^2 = \alpha$, $j^2 = \beta$, где $\alpha, \beta \in \Bbbk^{\times}$. Например, $H_{\mathbb{R}}(-1, -1) = \mathbb{H}$. Покажите, что

а) $H_{\Bbbk}(\alpha, 1) \simeq \mathrm{Mat}_2(\Bbbk)$ для всех $\alpha \in \Bbbk^{\times}$ б) $H_{\Bbbk}(\delta^2\alpha, \gamma^2\beta) \simeq H_{\Bbbk}(\alpha, \beta)$ для всех $\gamma, \delta \in \Bbbk^{\times}$

в) обратимость всех ненулевых элементов $H_{\Bbbk}(\alpha, \beta)$ равносильна анизотропности квадратичной формы $x_0^2 - \alpha x_1^2 - \beta x_2^2 + \alpha\beta x_3^2$.

Задача 4.18 (октавы). Зададим на 8-мерном вещественном пространстве $\mathbb{O} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{H} \oplus \boldsymbol{l}\mathbb{H}$ умножение, сопряжение и норму формулами $(p_1 + \boldsymbol{l}q_1)(p_2 + \boldsymbol{l}q_2) \stackrel{\text{def}}{=} (p_1q_1 - q_2q_1^*) + \boldsymbol{l}(p_2q_1 + p_1^*q_2)$, $(p + \boldsymbol{l}q)^* \stackrel{\text{def}}{=} p^* - \boldsymbol{l}q$, $\|w\| \stackrel{\text{def}}{=} ww^*$. Для любого ненулевого $a \in \mathbb{O}$ докажите, что $\|a\| \in \mathbb{R}_{>0}$ и каждое из уравнений $ax = b$ и $xa = b$ имеет единственное решение[2] при всех $b \in \mathbb{O}$.

[1] См. прим. 4.3 на стр. 61.

[2] Будьте внимательны: алгебра $\mathbb{O}$ не ассоциативна.

§5. Тензорная алгебра векторного пространства

Всюду в этом параграфе через V обозначается векторное пространство над произвольным полем $\Bbbk$.

5.1. Тензорные степени. Тензорное произведение[1] n экземпляров векторного пространства V с самим собой называется n-той *тензорной степенью* пространства V и обозначается

$$V^{\otimes n} \stackrel{\text{def}}{=} V \otimes \ldots \otimes V .$$

Мы полагаем $V^{\otimes 0} \stackrel{\text{def}}{=} \Bbbk$ и $V^{\otimes 1} \stackrel{\text{def}}{=} V$. Тензорное умножение векторов[2] задаёт на прямой сумме

$$TV \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus\nolimits_{n \geqslant 0} V^{\otimes n}$$

структуру (некоммутативной) ассоциативной градуированной[3] $\Bbbk$-алгебры. Если зафиксировать в V базис $E \subset V$, то по предл. 1.3 на стр. 9 части I моном $1 \in V^0$ и всевозможные тензорные мономы

$$e_1 \otimes \ldots \otimes e_m , \quad e_i \in E , \; m \in \mathbb{N} , \tag{5-1}$$

составят базис векторного пространства TV. Умножение мономов (5-1) заключается в приписывании их друг к другу через знак $\otimes$, моном 1 служит единицей. Таким образом, фиксация базиса E в V позволяет отождествить алгебру TV с алгеброй многочленов от *не коммутативных* переменных $e \in E$. Каждое прямое слагаемое $V^{\otimes n} \subset TV$ является пространством однородных многочленов степени n. Алгебра TV называется *тензорной алгеброй* пространства V или *свободной ассоциативной $\Bbbk$-алгеброй*, порождённой пространством V. Вложение $\iota : V \hookrightarrow TV$ в качестве подпространства $V^{\otimes 1}$ обладает следующим универсальным свойством.

Предложение 5.1 (универсальное свойство тензорной алгебры)
Для любого линейного отображения $f : V \to A$ в произвольную ассоциативную $\Bbbk$-алгебру A существует единственный такой гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр $\alpha : TV \to A$, что $f = \alpha \circ \iota$. Другими словами, гомоморфизмы $\Bbbk$-алгебр $TV \to A$ находятся в канонической биекции с линейными отображениям $V \to A$.

Доказательство. Искомый гомоморфизм α должен переводить каждый разложимый тензор

$$v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \in TV$$

в произведение $f(v_1) \ldots f(v_n) \in A$. Поскольку разложимые тензоры линейно порождают алгебру TV, гомоморфизм α единствен, если существует. Так как для любого линейного отображения $f : V \to A$ произведение $f(v_1) \ldots f(v_n) \in A$ полилинейно по v_i, для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует линейное отображение[4] $\alpha_n : V^{\otimes n} \to A$, $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \mapsto f(v_1) \ldots f(v_n)$. Требуемый гомоморфизм $\alpha : TV \to A$ переводит конечную сумму $\sum_k t_k$ однородных тензоров $t_k \in V^{\otimes k}$ в сумму $\sum_k \alpha_k(t_k) \in A$, где $\alpha_0 : V^0 \to A$ переводит единицу в единицу. □

Упражнение 5.1. Убедитесь, что $\Bbbk$-алгебра TV вместе с вложением $\iota : V \hookrightarrow TV$ определяются своим универсальным свойством однозначно с точностью до единственного изоморфизма $\Bbbk$-алгебр, перестановочного с вложением ι.

---

[1] См. n° 1.1 на стр. 6 части I.

[2] См. формулу (1-4) на стр. 6 части I.

[3] Алгебра A над полем $\Bbbk$ называется *градуированной*, если она является прямой суммой векторных пространств $A = \bigoplus_{k \geqslant 0} A_k$, которые перемножаются так, что $A_k A_m \subset A_{k+m}$ для всех k, m.

[4] См. лем. 1.1 на стр. 12 части I.

5.2. Свёртки. Для двойственных векторных пространств V, V^* над полем $\Bbbk$ и пары разложимых тензоров одинаковой степени $t = v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$ и $\vartheta = \xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_n \in V^{*\otimes n}$ число

$$\langle\, t\,,\,\vartheta\,\rangle \overset{\text{def}}{=} \prod\nolimits_{i=1}^{n} \xi_i(v_i) = \prod\nolimits_{i=1}^{n} \langle\, v_i\,,\,\xi_i\,\rangle \in \Bbbk \tag{5-2}$$

называется *полной свёрткой* тензоров t и ϑ. Поскольку при каждом $\vartheta \in V^{*\otimes n}$ число (5-2) полилинейно по векторам v_i, существует единственный ковектор $c_\vartheta \in V^{\otimes n *}$

$$c_\vartheta : V^{\otimes n} \to \Bbbk\,, \quad v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \mapsto \langle\, v_1 \otimes \ldots \otimes v_n\,,\,\vartheta\,\rangle\,,$$

и этот ковектор полилинеен по сомножителям $\xi_1, \ldots, \xi_n$ разложимого тензора ϑ. Поэтому существует единственное линейное отображение

$$V^{*\otimes n} \to V^{\otimes n *}\,, \quad \vartheta \mapsto c_\vartheta\,. \tag{5-3}$$

Иначе говоря, полная свёртка (5-2) корректно задаёт билинейное спаривание[1]

$$V^{\otimes n} \times V^{*\otimes n} \to \Bbbk\,, \quad (t, \vartheta) \mapsto \langle\, t\,,\,\vartheta\,\rangle\,. \tag{5-4}$$

Предложение 5.2

Для конечномерного пространства V спаривание (5-4) совершенно[2], т. е. линейное отображение (5-3) является изоморфизмом.

Доказательство. Тензорные мономы $e_1 \otimes \ldots \otimes e_n$ и $e_1^* \otimes \ldots \otimes e_n^*$, составленные из векторов $e_i \in E$ и ковекторов $e_i^* \in E^*$ двойственных друг другу базисов E и E^* пространств V и V^* образуют двойственные базисы в $V^{\otimes n}$ и $V^{*\otimes n}$. □

Следствие 5.1

Сопоставление разложимому тензору $\xi = \xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_n \in V^{*\otimes n}$ полилинейной формы

$$\xi : V \times \ldots \times V \to \Bbbk\,, \quad \xi(v_1, \ldots, v_n) = \prod\nolimits_{i=1}^{n} \xi_i(v_i)\,,$$

задаёт для любого конечномерного пространства V изоморфизм

$$V^{*\otimes n} \simeq \operatorname{Hom}(V, \ldots, V;\, \Bbbk)\,, \tag{5-5}$$

где через $\operatorname{Hom}(V, \ldots, V;\, \Bbbk)$ обозначено пространство n-линейных форм $V \times \ldots \times V \to \Bbbk$.

Доказательство. В силу универсального свойства тензорного произведения пространство $V^{\otimes n *}$ линейных отображений $V^{\otimes n} \to \Bbbk$ изоморфно пространству n-линейных форм $V \times \ldots \times V \to \Bbbk$. Изоморфизм (5-5) является композицией этого изоморфизма с изоморфизмом (5-3). □

[1] См. n° 7.4.2 на стр. 123.

[2] См. лем. 7.2 на стр. 123 части I.

5.2.1. Частичные свертки. Пара инъективных (возможно не монотонных) отображений

$$\{1,\dots,p\} \xleftarrow{I} \{1,\dots,m\} \xrightarrow{J} \{1,\dots,q\}$$

задаёт два слова $I = (i_1, \dots, i_m)$, $J = (j_1, \dots, j_m)$ одинаковой длины m, состоящие из не повторяющихся в пределах каждого слова индексов $i_\nu = I(\nu)$ и $j_\nu = J(\nu)$. Линейный оператор

$$\begin{gathered} c^I_J : V^{*\otimes p} \otimes V^{\otimes q} \to V^{*\otimes(p-m)} \otimes V^{\otimes(q-m)}, \\ \xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_p \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_q \mapsto \prod_{\nu=1}^m \xi_{i_\nu}(v_{j_\nu}) \cdot \bigotimes_{i \notin I} \xi_i \otimes \bigotimes_{j \notin J} v_j , \end{gathered} \tag{5-6}$$

который для каждого $\nu = 1, \dots, m$ сворачивает i_ν-й сомножитель произведения $V^{*\otimes p}$ с j_ν-м сомножителем произведения $V^{\otimes q}$, оставляя все остальные тензорные сомножители в их первоначальном порядке, называется *частичной сверткой* по индексам I и J. Обратите внимание, что разные пары отображений I, J задают, вообще говоря, разные свёртки в тех случаях, когда пары их теоретико-множественных образов одинаковы, но отличаются нумерацией элементов в образах.

Пример 5.1 (свёртка вектора с полилинейной формой)
Посредством изоморфизма из сл. 5.1 интерпретируем n-линейную форму $\varphi : V \times \dots \times V \to \Bbbk$ как тензор $\varphi \in V^{*\otimes n}$. Его свёртка с произвольно выбранным вектором $v \in V$ по первому тензорному сомножителю лежит в $V^{*\otimes(n-1)}$ и является $(n-1)$-линейной формой на V. Эта форма называется *внутренним произведением* v и φ и обозначается $v \llcorner \varphi$ или $i_v\varphi$. Поскольку для разложимой формы $\varphi = \varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n$ выполняется равенство

$$i_v\varphi(w_1, \dots, w_{n-1}) = \varphi_1(v)\varphi_2(w_1) \dots \varphi_n(w_{n-1}) = \varphi(v, w_1, \dots, w_{n-1}), \tag{5-7}$$

левая и правая части которого линейны по φ, левая часть равна правой для всех, в том числе и неразложимых, полилинейных форм φ, т. е. внутреннее умножение формы на вектор означает фиксацию этого вектора в качестве первого аргумента формы.

5.2.2. Линейный носитель тензора. Для заданного тензора $t \in V^{\otimes n}$ пересечение всех таких векторных подпространств $U \subset V$, что $t \in U^{\otimes n}$, называется *линейным носителем* тензора t и обозначается $\operatorname{supp}(t) \subset V$. Иначе носитель можно охарактеризовать как такое наименьшее по включению или же по размерности подпространство $U \subset V$, что $t \in U^{\otimes n}$. Эквивалентность всех приведённых описаний вытекает из равенства $U^{\otimes n} \cap W^{\otimes n} = (U \cap W)^{\otimes n}$.

Упражнение 5.2. Докажите это равенство.

Размерность носителя называется *рангом* тензора и обозначается $\operatorname{rk} t \overset{\text{def}}{=} \dim \operatorname{supp}(t)$. Тензор t называется *вырожденным*, если его носитель $\operatorname{supp}(t) \subsetneq V$ имеет положительную коразмерность. Это означает, что некоммутативный многочлен t «эффективно зависит» от меньшего, чем $\dim V$, числа переменных, и при помощи линейной замены базиса можно убрать часть переменных из t. Например, если $\dim \operatorname{supp}(t) = 1$, то $t = c \cdot v^{\otimes n}$ для некоторых $c \in \Bbbk$ и $v \in V$.

Явно указать векторы, линейно порождающие $\operatorname{supp}(t)$ над $\Bbbk$ можно при помощи свёрток. Для любой последовательности $J = j_1, \dots, j_{n-1}$ из $n-1$ неповторяющихся индексов[1] $1 \leqslant j_\nu \leqslant n$ обозначим через

$$t_J : V^{*\otimes(n-1)} \to V, \quad \xi \mapsto c^{1,\dots,(n-1)}_{j_1,\dots,j_{n-1}}(\xi \otimes t), \tag{5-8}$$

[1] Подчеркнём, что индексы в последовательности не обязаны возрастать или убывать.

полную свёртку с тензором t, которая спаривает ν-й сомножитель произведения $V^{*\otimes(n-1)}$ с j_ν-м сомножителем тензора t для всех $1 \leqslant \nu \leqslant (n-1)$. Если записать t в виде суммы разложимых тензоров вида $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$, то результатом такой свёртки будет линейная комбинация векторов v_i с $i \notin J$. Очевидно, что она лежит в $\operatorname{supp}(t)$.

Теорема 5.1
Пространство $\operatorname{supp}(t)$ линейно порождается образами всех свёрток (5-8).

Доказательство. Обозначим $\operatorname{supp}(t)$ через $W \subset V$. Достаточно доказать, каждая линейная форма $\xi \in V^*$, аннулирующая образы всех свёрток (5-8), аннулирует подпространство W. Предположим противное: пусть ковектор $\xi \in V^*$ имеет ненулевое ограничение на W, но аннулирует $t_J\left(V^{*\otimes(n-1)}\right)$ для всех J. Выберем в V^* базис $\xi_1, \ldots, \xi_d$, в котором $\xi_1 = \xi$ и ограничения ковекторов $\xi_1, \ldots, \xi_k$ на W образуют базис в W^*. Обозначим через $w_1, \ldots, w_k$ двойственный базис пространства W и разложим t по этому базису. Значение $\xi\left(t_J(\xi_{i_1} \otimes \ldots \otimes \xi_{i_{n-1}})\right)$ равно полной свёртке тензора t с базисным тензорным мономом $\xi_{i_1} \otimes \ldots \otimes \xi_{i_{n-1}} \otimes \xi_1$ по всем n тензорным сомножителям в том порядке, который предписан последовательностью[1] J. Получающееся в результате этой свёртки число равно коэффициенту, с которым соответствующий двойственный тензорный моном[2] от базисных векторов w_i входит в разложение t. Подбирая надлежащие J, можно получить коэффициент при любом содержащем w_1 мономе, входящем в разложение t. Тем самым, все они нулевые, т. е. $w_1 \notin \operatorname{supp}(t)$ вопреки нашему выбору. □

5.3. Симметрическая алгебра. В некоммутативном кольце R бывают идеалы трёх типов. Подкольцо $I \subset R$ называется *левым идеалом*, если $xa \in I$ для всех $a \in I$, $x \in R$. Симметричным образом, I называется *правым идеалом*, если $ax \in I$ для всех $a \in I$, $x \in R$. Подкольцо $I \subset R$, одновременно являющееся и левым, и правым идеалом, называется просто *идеалом* или *двусторонним идеалом*, если хочется подчеркнуть это обстоятельство. Иначе двусторонние идеалы характеризуются как ядра гомоморфизмов колец. Действительно, если элемент $a \in R$ аннулируется гомоморфизмом $\varphi : R \to S$, то для любых $x, y \in R$ выполняется равенство $\varphi(xay) = \varphi(x)\varphi(a)\varphi(y) = 0$. Наоборот, если аддитивная подгруппа $I \subset R$ является двусторонним идеалом, то на фактор группе R/I можно корректно задать умножение стандартным правилом $[a][b] \stackrel{\text{def}}{=} [ab]$.

Упражнение 5.3. Убедитесь в этом.

При этом аддитивный гомоморфизм факторизации $R \twoheadrightarrow R/I$ становится гомоморфизмом колец с ядром I. Из теоремы о строении гомоморфизма групп[3] вытекает, что каждый гомоморфизм колец $\varphi : R \to S$ является композицией эпиморфизма факторизации $R \twoheadrightarrow R/\ker\varphi \simeq \operatorname{im}\varphi$ и вложения $R/\ker\varphi \simeq \operatorname{im}\varphi \hookrightarrow S$.

Рассмотрим в тензорной алгебре TV произвольного векторного пространства V над любым полем $\Bbbk$ двусторонний идеал $\mathcal{I}_{\text{com}} \subset TV$, порождённый всевозможными разностями

$$u \otimes w - w \otimes u \in V \otimes V . \tag{5-9}$$

[1]Т. е. j_ν-й сомножитель тензора t сворачивается с ξ_{i_ν} при $1 \leqslant \nu \leqslant n-1$, а оставшийся в t сомножитель с номером $\{1, \ldots, n\} \smallsetminus J$ сворачивается с ξ_1.

[2]j_ν-й множитель этого монома равен w_{i_ν} при $1 \leqslant \nu \leqslant n-1$, а оставшийся сомножитель с номером $\{1, \ldots, n\} \smallsetminus J$ равен w_1.

[3]См. сл. 19.2 на стр. 349 части I.

Он состоит из конечных линейных комбинаций тензоров, которые можно получить умножая разности (5-9) с обеих сторон на любые элементы тензорной алгебры. Таким образом, пересечение $\mathcal{I}_{\text{com}} \cap V^{\otimes n}$ линейно порождается разностями вида

$$(\dots \otimes v \otimes w \otimes \dots) - (\dots \otimes w \otimes v \otimes \dots) ,$$

где оба заключённых в скобки тензора разложимы и обозначенные многоточиями фрагменты у них одинаковы. Весь идеал $\mathcal{I}_{\text{com}}$ является прямой сумой таких однородных компонент:

$$\mathcal{I}_{\text{com}} = \bigoplus_{n\geqslant 2} (\mathcal{I}_{\text{com}} \cap V^{\otimes n}) .$$

Фактор алгебра $SV \stackrel{\text{def}}{=} TV / \mathcal{I}_{\text{com}}$ называется *симметрической алгеброй* пространства V. Умножение, индуцированное в ней тензорным произведением векторов, называется *коммутативным умножением* и обозначается точкой, которую, как правило, опускают. Как векторное пространство симметрическая алгебра является прямой суммой своих однородных компонент:

$$SV = \bigoplus_{n\geqslant 0} S^n V , \quad \text{где} \quad S^n V \stackrel{\text{def}}{=} V^{\otimes n} / (\mathcal{I}_{\text{com}} \cap V^{\otimes n}) .$$

Пространство $S^n V$ называется *n-й симметрической степенью* пространства V. Обратите внимание, что $S^0 V = \Bbbk$ и $S^1 V = V$. Включение $\iota : V \hookrightarrow SV$ в качестве прямого слагаемого $S^1 V$ обладает следующим универсальным свойством.

Упражнение 5.4. Убедитесь, что для любого линейного отображения $f : V \to A$ пространства V в произвольную коммутативную $\Bbbk$-алгебру A имеется единственный такой гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр $\tilde{f} : SV \to A$, что $f = \tilde{f} \circ \iota$, причём SV и ι определяются этим свойством однозначно с точностью до единственного перестановочного с ι изоморфизма $\Bbbk$-алгебр.

По этой причине симметрическую алгебру SV иначе называют *свободной* коммутативной $\Bbbk$-алгеброй с единицей, порождённой векторным пространством V.

5.3.1. Симметричные полилинейные отображения. Полилинейное отображение

$$\varphi : V \times \dots \times V \to U \tag{5-10}$$

называется *симметричным*, если $\varphi(v_{g_1}, \dots , v_{g_n}) = \varphi(v_1, \dots , v_n)$ для всех перестановок $g \in S_n$. Симметричные полилинейные отображения образуют векторное подпространство в пространстве всех n-линейных отображений (5-10). Взятие композиции фиксированного симметричного n-линейного отображения (5-10) со всевозможными линейными отображениями $F : U \to W$ представляет собою линейное по F отображение из $\mathrm{Hom}(U, W)$ в пространство симметричных полилинейных отображений $V \times \dots \times V \to W$, переводящее F в $F \circ \varphi$. Если оно является изоморфизмом для всех пространств W, отображение φ называется *универсальным* симметричным n-линейным отображением или *коммутативным произведением* векторов.

Упражнение 5.5. Покажите, что коммутативное произведение единственно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с коммутативным произведением.

Предложение 5.3

Композиция $\sigma_n = \pi_{S^n} \circ \tau$ тензорного произведения $\tau : V \times \dots \times V \to V^{\otimes n}$ с последующей проекцией $\pi_{S^n} : V^{\otimes n} \twoheadrightarrow S^n V$ является универсальным симметричным n-линейным отображением.

Доказательство. В силу универсального свойства тензорного произведения любое n-линейное отображение $\varphi : V\times\ldots\times V \to W$ однозначно раскладывается в композицию $\varphi = \widetilde{F}\circ\tau$ с линейным отображением $\widetilde{F} : V^{\otimes n} \to W$. Если φ симметрично, то $\widetilde{F}$ аннулирует соотношения коммутативности (5-9), ибо

$$\begin{aligned}\widetilde{F}\big((\ldots\otimes v\otimes w\otimes\ldots) - (\ldots\otimes w\otimes v\otimes\ldots)\big) = \\ = \widetilde{F}(\ldots\otimes v\otimes w\otimes\ldots) - \widetilde{F}(\ldots\otimes w\otimes v\otimes\ldots) = \\ = \varphi(\ldots, v, w, \ldots) - \varphi(\ldots, w, v, \ldots) = 0\,,\end{aligned}$$

и значит, корректно факторизуется до линейного отображения

$$F : S^nV \to W\,, \quad v_1\ldots v_n \mapsto \varphi(v_1,\ldots,v_n)\,.$$

Таким образом, $\varphi = \widetilde{F}\circ\tau = F\circ\pi_{S^n}\circ\tau = F\circ\sigma_n$. Из-за универсальности τ любое линейное отображение $F' : S^nV \to W$, для которого $\varphi = F'\circ\sigma_n = F'\circ\pi_{S^n}\circ\tau$, удовлетворяет равенству $F'\circ\pi_{S^n} = F\circ\pi_{S^n}$, влекущему равенство $F' = F$ в силу сюрьективности проекции π_{S^n}. □

Следствие 5.2

Для любого[1] векторного пространства V над произвольным полем $\Bbbk$ пространство симметричных n-линейных форм $V\times\ldots\times V \to \Bbbk$ канонически двойственно n-той симметрической степени S^nV.

Доказательство. Отправляя линейную форму $\xi : S^nV \to \Bbbk$ в её композицию с коммутативным умножением $\sigma_n : V\times\ldots\times V \to S^nV$, мы получаем линейное отображение $(S^nV)^* \to \mathrm{Sym}^n(V,\Bbbk)$, являющееся изоморфизмом в силу универсального свойства σ_n. □

Следствие 5.3

Если зафиксировать в пространстве V базис $E\subset V$, то конечные коммутативные мономы

$$e^{\boldsymbol{m}} \overset{\text{def}}{=} \prod\nolimits_{e\in E} e^{m(e)}\,,$$

занумерованные всевозможными функциями $\boldsymbol{m} : E \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $e\mapsto m(e)$, с конечным носителем и суммой значений $\sum_{e\in E} m(e) = n$, составят базис в S^nV. Иначе говоря, выбор базиса в V задаёт изоморфизм симметрической алгебры SV с алгеброй многочленов от базисных векторов, причём каждое пространство S^nV переводится этим изоморфизмом в пространство однородных многочленов степени n.

Доказательство. Обозначим через U векторное пространство с базисом из мономов $e^{\boldsymbol{m}}$, которые мы будем воспринимать как формальные символы, и рассмотрим симметричное полилинейное отображение $\mu : V\times\ldots\times V \to U$, значение которого на каждом наборе базисных векторов равно моному, в котором каждый базисный вектор представлен в степени, равной числу его вхождений в набор. Это отображение универсально, поскольку для симметричного полилинейного отображения $\varphi : V\times\ldots\times V \to W$ и линейного ображения $F : U \to W$ равенство $\varphi = F\circ\mu$ равносильно выполнению равенств

$$\varphi(\underbrace{e_1,\ldots,e_1}_{m_1},\ldots,\underbrace{e_k,\ldots,e_k}_{m_k}) = F(e_1^{m_1}\ldots e_k^{m_k}) \tag{5-11}$$

[1] В том числе бесконечномерного.

для всех конечных подмножеств $\{e_1, \dots, e_k\} \subset E$ и всех функций $m : \{e_1, \dots, e_k\} \to \mathbb{N}$, $e_i \mapsto m_i$, с суммой значений $\sum_i m_i = n$, и равенства (5-11) однозначно определяют F, если задано φ, и наоборот. По упр. 5.5 существует изоморфизм $U \xrightarrow{\sim} S^n V$, переводящий каждый базисный вектор $e_1^{m_1} \dots e_k^{m_k} \in U$ в коммутативное произведение $e_1^{m_1} \dots e_k^{m_k} \in S^n V$. Стало быть, такие произведения образуют базис в $S^n V$. □

Упражнение 5.6. Найдите $\dim S^n V$ если $\dim V = d$.

5.3.2. Вычисление значения многочлена на векторе. Обозначим через $\mathbb{k}^V$ пространство всех функций $V \to \mathbb{k}$. Сопоставим каждому разложимому симметрическому тензору

$$f = \xi_1 \dots \xi_n \in S^n V^*$$

функцию $f : V \to \mathbb{k}$, $v \mapsto \prod_{i=1}^n \xi_i(v)$. Поскольку эта функция полилинейно и симметрично зависит от ковекторов $\xi_1, \dots, \xi_n$, сопоставление функций разложимым тензорам корректно продолжается до линейного отображения $S^n : \mathbb{k}^V$, и далее до гомоморфизма алгебр

$$\varepsilon : SV^* \to \mathbb{k}^V , \quad (f \in SV^*) \mapsto (f : V \to \mathbb{k}) , \tag{5-12}$$

который канонически сопоставляет каждому многочлену $f \in S^n V^*$ полиномиальную функцию $f : V \to \mathbb{k}$. Образ гомоморфизма (5-12) называется *алгеброй полиномиальных функций* на пространстве V. Обратите внимание, что это определение не зависит от выбора базиса и имеет смысл также и для бесконечномерных пространств V. Для конечномерного пространства V с базисом $e_1, \dots, e_d$ алгебра SV^* изоморфна по сл. 5.3 алгебре многочленов $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_d]$ от элементов двойственного базиса $x_1, \dots, x_d$ пространства V^*. Для однородного полинома $f(x_1, \dots, x_d)$ степени n и вектора $v = \sum \alpha_i e_i \in V$ значение $f(v) = f(a_1, \dots, a_d)$ является результатом подстановки в f значений $x_i = \alpha_i$. В качестве следствия мы заключаем, что результат подстановки в многочлен $f(x_1, \dots, x_d)$ координат вектора v зависит только от $f \in SV$ и $v \in V$, но не от выбора пары двойственных друг другу базисов V и V^*, используемых для записи f в виде многочлена от координат и вычисления значений координат вектора v.

Предложение 5.4
Для конечномерного пространства V гомоморфизм (5-12) инъективен если и только если основное поле $\mathbb{k}$ бесконечно.

Доказательство. Пусть $\dim V = n$. Если поле $\mathbb{k}$ конечно и состоит из q элементов, пространство $\mathbb{k}^V$ тоже конечно и состоит из q^{q^n} элементов. Так как алгебра многочленов бесконечна, гомоморфизм (5-12) имеет ненулевое ядро. Инъективность гомоморфизма (5-12) над бесконечным полем $\mathbb{k}$ доказывается индукцией по n. Так как ненулевой многочлен $f(x)$ от одной переменной имеет не более $\deg f$ корней, он не может тождественно обращаться в нуль на одномерном пространстве $V \simeq \mathbb{k}$, если $\mathbb{k}$ бесконечно. Запишем многочлен от n переменных $x_1, \dots, x_n$ как многочлен от x_n с коэффициентами из $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_{n-1}]$:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\nu=0}^d \varphi_\nu(x_1, \dots, x_{n-1}) \cdot x_n^{d-\nu} .$$

Вычисляя коэффициенты φ_ν в произвольной точке $(p_1, \dots, p_{n-1}) \in \mathbb{k}^{n-1}$, получаем многочлен от x_n с постоянными коэффициентами, задающий тождественно нулевую функцию на прямой $(x_1, \dots, x_{n-1}) = (p_1, \dots, p_{n-1})$. По уже доказанному он нулевой. Тем самым, все многочлены φ_ν

являются тождественно нулевыми функциями на $\Bbbk^{n-1}$. По предположению индукции, они являются нулевыми многочленами. □

Упражнение 5.7. Покажите, что для конечномерного векторного пространства V над конечным полем $\Bbbk$ гомоморфизм (5-12) сюрьективен и приведите пример ненулевого полинома $f \in S^n V^*$, задающего нулевую функцию $V \to \Bbbk$.

5.4. Внешняя алгебра. Для произвольного векторного пространства V над полем $\Bbbk$ обозначим через $\mathcal{I}_{\text{sk}} \subset TV$ двусторонний идеал тензорной алгебры, порождённый квадратами

$$v \otimes v \in V \otimes V \tag{5-13}$$

всевозможных векторов $v \in V$. Элементы идеала AI называются *соотношениями антикоммутирования*. Как векторное пространство, идеал $\mathcal{I}_{\text{sk}} = \bigoplus_{n \geqslant 2} \mathcal{I}_{\text{sk}} \cap V^{\otimes n}$ является прямой суммой своих однородных компонент $\mathcal{I}_{\text{sk}} \cap V^{\otimes n}$, каждая из которых является линейной оболочкой разложимых тензоров вида $\ldots \otimes v \otimes v \otimes \ldots$, где обозначенные многоточиями фрагменты одинаковы. Обратите внимание, что в этой линейной оболочке лежат и все суммы вида

$$(\ldots \otimes v \otimes w \otimes \ldots) + (\ldots \otimes w \otimes v \otimes \ldots)\,,$$

а если $\operatorname{char} \Bbbk \neq 2$, то $\mathcal{I}_{\text{sk}} \cap V^{\otimes n}$ линейно порождается такими суммами. Фактор алгебра

$$\Lambda V \stackrel{\text{def}}{=} TV / \mathcal{I}_{\text{sk}}$$

называется *внешней* или *грассмановой* алгеброй пространства V. Умножение в ΛV, индуцированное тензорным произведением в TV, называется *внешним* или *грассмановым* умножением и обозначается знаком $\wedge$. Как векторное пространство, внешняя алгебра является прямой суммой $\Lambda V = \bigoplus_{n \geqslant 0} \Lambda^n V$ своих однородных компонент $\Lambda^n V \stackrel{\text{def}}{=} V^{\otimes n} / (\mathcal{I}_{\text{sk}} \cap V^{\otimes n})$, которые называются *внешними степенями* пространства V. При этом $\Lambda^0 V = \Bbbk$, $\Lambda^1 V = V$ и $\Lambda^k V \wedge \Lambda^m V \subset \Lambda^{k+m} V$ для всех k, m. Из описания идеала $\mathcal{I}_{\text{sk}}$ вытекает, что $u \wedge w = -w \wedge u$ для всех $u, w \in V$, и $v \wedge v = 0$ для всех $v \in V$. Перестановка сомножителей в составленном из векторов грассмановом мономе равносильна умножению этого монома на знак перестановки:

$$\forall\, g \in S_k \quad v_{g_1} \wedge \ldots \wedge v_{g_k} = \operatorname{sgn}(g) \cdot v_1 \wedge \ldots \wedge v_k\,.$$

Поэтому для однородных элементов $\omega \in \Lambda^k V$, $\eta \in \Lambda^m V$ выполняется равенство

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{km} \eta \wedge \omega\,.$$

Градуированные алгебры с таким свойством называются *s-коммутативными*[1].

5.4.1. Кососимметричные полилинейные отображения. Полилинейное отображение

$$\alpha : V \times \ldots \times V \to U \tag{5-14}$$

называется *кососимметричным*, если оно принимает нулевое значение всякий раз, когда какие-либо два аргумента совпадают. Всякое кососимметричное полилинейное отображение *знакопеременно*, т. е. $\alpha(v_{g(1)}, v_{g(2)}, \ldots, v_{g(m)}) = \operatorname{sgn} g \cdot \alpha(v_1, \ldots, v_n)$ для всех $g \in S_n$.

[1] Префикс «s» можно по желанию воспринимать как аббревиатуру для *super* или для *skew*.

Упражнение 5.8. Убедитесь в этом и покажите, что когда $1 + 1 \neq 0$ в $\Bbbk$, знакопеременность равносильна кососимметричности.

Кососимметричные n-линейные отображения образуют векторное подпространство в пространстве n-линейных отображений. Сопоставляя линейному отображению $F : U \to W$ его композицию $F \circ \alpha$ с фиксированным кососимметричным n-линейным отображением (5-14), мы получаем линейное отображение $F \mapsto F \circ \alpha$ из $\mathrm{Hom}(U, W)$ в пространство кососимметричных полилинейных отображений $V \times \ldots \times V \to W$. Если оно является изоморфизмом для всех векторных пространств W, то полилинейное отображение α называется *универсальным* кососимметричным n-линейным отображением, а также *антикоммутативным* или *грассмановым* произведением векторов.

Упражнение 5.9. Покажите, что пространство, в котором принимает значение грассманово произведение, единственно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с этим произведением.

Предложение 5.5
Композиция $\alpha_n = \pi_{S^n} \circ \tau$ тензорного произведения $\tau : V \times \ldots \times V \to V^{\otimes n}$ с последующей проекцией $\pi_{\Lambda^n} : V^{\otimes n} \twoheadrightarrow \Lambda^n V$ является универсальным кососимметричным n-линейным отображением.

Доказательство. В силу универсальности τ любое n-линейное отображение $\varphi : V \times \ldots \times V \to W$ однозначно представляется в виде композиции $\varphi = \widetilde{F} \circ \tau$, где $\widetilde{F} : V^{\otimes n} \to W$ линейно. Если φ кососимметрично, $\widetilde{F}$ аннулирует линейные порождающие подпространства $\mathcal{I}_{\mathrm{sk}} \cap V^{\otimes n} = \ker \pi_{\Lambda^n}$:

$$\widetilde{F}(\ldots \otimes w \otimes w \otimes \ldots) = \varphi(\ldots, w, w, \ldots) = 0\,,$$

и значит, корректно факторизуется до линейного отображения

$$F : \Lambda^n V \to W\,, \quad v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \mapsto \varphi(v_1, \ldots, v_n)\,.$$

Таким образом, $\varphi = \widetilde{F} \circ \tau = F \circ \pi_{\Lambda^n} \circ \tau = F \circ \alpha_n$. Из-за универсальности τ любое линейное отображение $F' : \Lambda^n V \to W$, для которого $\varphi = F' \circ \alpha_n = F' \circ \pi_{\Lambda^n} \circ \tau$, удовлетворяет равенству $F' \circ \pi_{\Lambda^n} = F \circ \pi_{\Lambda^n}$, откуда $F' = F$ в силу сюрьективности проекции π_{Λ^n}. □

Упражнение 5.10. Убедитесь, что для любого (в том числе бесконечномерного) пространства V пространство кососимметричных n-линейных отображений $V \times \ldots \times V \to \Bbbk$ канонически двойственно n-той внешней степени $\Lambda^n V$.

Следствие 5.4
Если зафиксировать в V базис $E \subset V$, то занумерованные всевозможными m-элементными подмножествами $M = \{e_1, \ldots, e_m\} \subset E$ мономы $e_M = e_1 \wedge \ldots \wedge e_m$ составят базис в $\Lambda^m V$ при всех m. При перестановке элементов множества M, моном e_M умножается на знак перестановки.

Доказательство. Рассмотрим векторное пространство U с базисом из символов e_M, где M пробегает m-элементные подмножества в E. В каждом таком подмножестве M мы произвольным образом занумеруем элементы, так что M запишется как $\{e_1, \ldots, e_m\}$, и рассмотрим кососимметричное полилинейное отображение $\alpha : V \times \ldots \times V \to U$, переводящее каждый упорядоченный набор из m различных базисных векторов, образующих перестановку $e_{g_1}, \ldots, e_{g_m}$ элементов некоторого множества $M = \{e_1, \dots, e_m\} = \{e_{g_1}, \dots, e_{g_m}\} \subset E$, в вектор $\mathrm{sgn}(g) \cdot e_M$. Отображение α универсально, поскольку для любого кососимметричного полилинейного отображения

$$\varphi : V \times \dots \times V \to W$$

и линейного отображения $F : U \to W$ равенство $\varphi = F \circ \alpha$ равносильно тому, что

$$F(e_{\{e_1,\dots,e_m\}}) = \mathrm{sgn}(g) \cdot \varphi(e_{g(1)}, \dots, e_{g(m)})$$

для каждого m-элементного подмножества $\{e_1, \dots, e_m\} \subset E$ и всех перестановок $g \in S_m$, причём эти условия корректно и однозначно определяют F, если задано φ, и наоборот. Тем самым, имеется единственный изоморфизм $U \xrightarrow{\sim} \Lambda^n V$, переводящий базисный вектор $e_{\{e_1,\dots,e_m\}} \in U$ в грассманово произведение $e_1 \wedge \dots \wedge e_m \in \Lambda^n V$. □

Следствие 5.5

Если пространство V конечномерно с базисом $e_1, \dots, e_d$, то $\dim \Lambda^m V = \binom{d}{m}$, и мономы

$$e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m}\,, \quad \text{где} \quad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_m \leqslant d\,.$$

составляют базис пространства $\Lambda^m V$. В частности, $\Lambda^m V = 0$ при $m > d$, и $\dim \Lambda V = 2^d$.

5.5. Симметричные и знакопеременные тензоры. Всюду в этом разделе мы по умолчанию считаем, что основное поле $\Bbbk$ имеет характеристику нуль. Симметрическая группа S_n действует на разложимых тензорах из $V^{\otimes n}$ перестановками сомножителей: для каждого $g \in S_n$ положим[1]

$$g(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = v_{g^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes v_{g^{-1}(n)}\,. \tag{5-15}$$

Так как правая часть полилинейно зависит от $v_1, \dots, v_n$, эта формула корректно определяет линейный оператор $g : V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$. Тензор $t \in V^{\otimes n}$ называется *симметричным*, если $g(t) = t$ для всех $g \in S^n$, и *знакопеременным* — если $g(t) = \mathrm{sgn}(g)\, t$ для всех $g \in S^n$. Симметричные и знакопеременные тензоры образуют в $V^{\otimes n}$ векторные подпространства

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym}^n V &= \{\, t \in V^{\otimes n} \mid \forall\, g \in S_n\ g(t) = t \,\}\,, \\ \mathrm{Alt}^n V &= \{\, t \in V^{\otimes n} \mid \forall\, g \in S_n\ g(t) = \mathrm{sgn}(g) \cdot t \,\}\,. \end{aligned}$$

5.5.1. Стандартные базисы. Зафиксируем в пространстве V базис $E \subset V$ и будем записывать тензоры $t \in V^{\otimes n}$ в виде некоммутативных многочленов от базисных мономов $e_1 \otimes \dots \otimes e_n$, где $e_i \in E$. Два таких монома лежат в одной S_n-орбите если и только если для каждого $e \in E$ количество $m(e)$ равных e сомножителей в этих мономах одинаково. Мы заключаем, что S_n-орбиты базисных мономов в $V^{\otimes n}$ нумеруются функциями $m : E \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ с конечным носителем и суммой значений $|m| \overset{\text{def}}{=} \sum_{e \in E} m(e)$ равной n. При этом тензор t симметричен если и только если вместе с каждым базисным моном в него с тем же самым коэффициентом входят все мономы S_n-орбиты этого базисного монома. Мы заключаем, что симметричные тензоры

$$e_{[m]} \overset{\text{def}}{=} \left(\begin{array}{c} \text{сумма всех базисных тензорных мономов, куда} \\ \text{каждый вектор } e \in E \text{ входит ровно } m(e) \text{ раз,} \end{array} \right) \tag{5-16}$$

[1] Обратите внимание, что набор занумерованных векторов $v_1, \dots, v_n$ есть не что иное, как отображение $v : \{1, \dots, n\} \to V$. Левое действие группы S_n автоморфизмов множества $\{1, \dots, n\}$ на таких отображениях задаётся правилом $gv(i) = v(g^{-1}(i))$. При этом i-й слева элемент набора v оказывается в наборе $g(v)$ на $g(i)$-м слева месте.

занумерованные функциями $m: E \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ с $|m| = n$, образуют базис векторного подпространства $\operatorname{Sym}^n V \subset V^{\otimes n}$. Например, базис в $\operatorname{Sym}^3(\Bbbk^2)$ составляют тензоры

$$\begin{gathered} e_{[3,0]} = e_1 \otimes e_1 \otimes e_1 \,, \quad e_{[0,3]} = e_2 \otimes e_2 \otimes e_2 \,, \\ e_{[2,1]} = e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 + e_1 \otimes e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_1 \otimes e_1 \,, \\ e_{[1,2]} = e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_2 \otimes e_1 \,, \end{gathered}$$

где $E = \{e_1, e_2\} \subset \Bbbk^2$ — стандартный базис, а $[i,j]: E \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $e_1 \mapsto i$, $e_2 \mapsto j$.

Упражнение 5.11. Убедитесь, что в сумме (5-16) ровно $n!/\prod_{e\in E} m(e)!$ слагаемых.

В разложении кососимметричного тензора $t \in \operatorname{Alt}^n V$ участвуют только те базисные мономы $e_1 \otimes \ldots \otimes e_n$, у которых $e_i \neq e_j$ при $i \neq j$. Орбита такого монома состоит из $n!$ мономов

$$e_{g(1)} \otimes \ldots \otimes e_{g(n)} \,, \text{ где } g \in S_n \,,$$

и коэффициент при каждом таком мономе получается из коэффициента при $e_1 \otimes \ldots \otimes e_n$ умножением на $\operatorname{sgn} g$. Мы заключаем, что если зафиксировать на множестве базисных векторов $E \subset V$ какой-нибудь линейный порядок, то кососимметричные тензоры

$$\langle e_1 \otimes \ldots \otimes e_n \rangle \overset{\text{def}}{=} \sum\nolimits_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g)\, e_{g(1)} \otimes \ldots \otimes e_{g(n)} \,, \text{ где } e_1 < \ldots < e_n \,, \tag{5-17}$$

составят базис векторного подпространства $\operatorname{Alt}^n V \subset V^{\otimes n}$.

Теорема 5.2 (поляризация многочленов)
Если $\operatorname{char} \Bbbk = 0$, то ограничения отображения факторизации

$$V^{\otimes n} \twoheadrightarrow S^n V = V^{\otimes n}/(\mathcal{I}_{\text{com}} \cap V^{\otimes n}) \,, \quad v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \mapsto v_1 \ldots v_n \,, \tag{5-18}$$

на подпространство симметричных тензоров $\operatorname{Sym}^n \subset V^{\otimes n}$ и отображения факторизации

$$V^{\otimes n} \twoheadrightarrow \Lambda^n V = V^{\otimes n}/(\mathcal{I}_{\text{sk}} \cap V^{\otimes n}) \,, \quad v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \mapsto v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \,, \tag{5-19}$$

на подпространство знакопеременных тензоров $\operatorname{Alt}^n \subset V^{\otimes n}$ являются линейными изоморфизмами векторных пространств. Они действуют на стандартные базисы (5-16) и (5-17) так:

$$e_{[m]} \mapsto \frac{n!}{\prod_{e\in E} m(e)!} \prod\nolimits_{e \in E} e^{m(e)} \,, \tag{5-20}$$

$$\langle e_1 \otimes \ldots \otimes e_n \rangle \mapsto n!\, e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \,. \tag{5-21}$$

Доказательство. Проекция (5-18) переводит каждое из $n!/\prod_{e\in E} m(e)!$ слагаемых, входящих в сумму (5-16), в стандартный коммутативный базисный моном $\prod_{e\in E} e^{m(e)}$ алгебры многочленов $\Bbbk[E]$, а проекция (5-19) переводит каждое из $n!$ слагаемых суммы (5-17) в стандартный базисный грассманов моном $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$ алгебры грассмановых многочленов $\Bbbk\langle E\rangle$. □

Предостережение 5.1. Не смотря на теор. 5.2, симметричные и знакопеременные тензоры, т. е. подпространства $\operatorname{Sym}^n V \subset V^{\otimes n}$ и $\operatorname{Alt}^n V \subset V^{\otimes n}$, не следует путать с однородными многочленами, т. е. с фактор пространствами $S^n V = V^{\otimes n}/(\mathcal{I}_{\text{com}} \cap V^{\otimes n})$ и $\Lambda^n V = V^{\otimes n}/(\mathcal{I}_{\text{sk}} \cap V^{\otimes n})$. Если

$\operatorname{char} \Bbbk = p > 0$, то ограничения проекций $V^{\otimes n} \twoheadrightarrow S^n V$ и $V^{\otimes n} \twoheadrightarrow \Lambda^n V$ на подпространства симметрических и знакопеременных тензоров могут иметь ненулевые ядра. Даже в характеристике нуль эти проекции переводят стандартные базисные векторы тензорных и полиномиальных пространств не буквально друг в друга, но в некоторые кратности друг друга, и эти поправочные комбинаторные множители приходится учитывать как при попытке поднять на пространства симметричных и знакопеременных тензоров коммутативное и s-коммутативное умножения, имеющиеся в алгебрах SV и ΛV, так и при попытке спустить в симметрическую и грассманову алгебру отображения свёртки, которые имеются между тензорами из двойственных пространств V и V^*.

5.5.2. Двойственность. Напомню, что полная свёртка[1] задаёт невырожденное спаривание между тензорными степенями $V^{\otimes n}$ и $V^{*\otimes n}$ двойственных друг другу конечномерных векторных пространств V и V^*, и тензорные мономы $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_n}$ и $x_{j_1} \otimes \ldots \otimes x_{j_n}$, составленные из векторов двойственных друг другу базисов $e_1, \ldots, e_d \in V$ и $x_1, \ldots, x_d \in V^*$, образуют двойственные другу базисы в $V^{\otimes n}$ и в $V^{*\otimes n}$. Если $\operatorname{char} \Bbbk = 0$, то ограничение этого спаривания на подпространства симметрических тензоров $\operatorname{Sym}^n V$ и $\operatorname{Sym}^n V^*$ тоже невырождено, и стандартные базисные симметрические тензоры (5-16) сворачиваются друг с другом по правилу

$$\langle\, x_{[m]}\,,\, e_{[m]}\,\rangle = n!/\textstyle\prod_{e\in E} m(e)! \quad \text{и} \quad \langle\, x_{[k]}\,,\, e_{[\ell]}\,\rangle = 0 \text{ при } k \neq \ell\,, \tag{5-22}$$

поскольку каждое слагаемое суммы (5-16) сворачивается в единицу ровно с одним слагаемым такой же суммы, составленной из двойственных базисных векторов, и сворачивается в нуль со всеми прочими базисными мономами. Изоморфизм (5-20) превращает это спаривание в невырожденное каноническое спаривание между симметрическими степенями $S^n V$ и $S^n V^*$, при котором базисные мономы, составленные из векторов *любых* двойственных друг базисов в V и в V^* спариваются по правилу

$$\langle\, x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}\,,\, e_1^{m_1}\ldots e_n^{m_n}\,\rangle = \begin{cases} m_1!\ldots m_n!/n! & \text{если } (k_1,\ldots,k_n) = (m_1,\ldots,m_n)\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases} \tag{5-23}$$

Аналогичным образом, ограничение полной свёртки на подпространства $\operatorname{Alt}^n V$ и $\operatorname{Alt}^n V^*$ над полем характеристики нуль задаёт между ними невырожденное спаривание, при котором стандартные базисные знакопеременные тензоры (5-17) сворачиваются по правилу

$$\langle\, \langle x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_n}\rangle\,,\, \langle e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_n}\rangle\,\rangle = \begin{cases} n! & \text{если } (i_1,\ldots,i_n) = (j_1,\ldots,j_n)\\ 0 & \text{в остальных случаях,}\end{cases} \tag{5-24}$$

и посредством изоморфизма (5-21) это спаривание превращается в невырожденное спаривание между внешними степенями $\Lambda^n V$ и $\Lambda^n V^*$, при котором базисные мономы, составленные из векторов *любых* двойственных друг базисов в V и в V^* спариваются по правилу

$$\langle\, x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_n}\,,\, e_{m_1} \wedge \ldots \wedge e_{m_n}\,\rangle = \begin{cases} 1/n! & \text{если } (i_1,\ldots,i_n) = (j_1,\ldots,j_n)\\ 0 & \text{в остальных случаях,}\end{cases} \tag{5-25}$$

где оба набора индексов строго возрастают: $i_1 < \ldots < i_n$ и $j_1 < \ldots < j_n$.

[1] См. n° 5.2 на стр. 68.

5.5.3. Проекторы. Линейные отображения

$$\mathrm{sym}_n \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n!}\sum\nolimits_{g\in S_n} g : V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}, \quad t \mapsto \frac{1}{n!}\sum\nolimits_{g\in S_n} g(t), \tag{5-26}$$

$$\mathrm{alt}_n \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n!}\sum\nolimits_{g\in S_n} \mathrm{sgn}(g)\, g : V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}, \quad t \mapsto \frac{1}{n!}\sum\nolimits_{g\in S_n} \mathrm{sgn}(g)\, g(t), \tag{5-27}$$

называются *симметризацией* и *альтернированием* тензоров.

Упражнение 5.12. Убедитесь, что оба они перестановочны с действием группы S_n, т. е.

$$\mathrm{sym}_n \circ g = g\circ \mathrm{sym}_n \;\text{ и }\; \mathrm{alt}_n \circ g = g\circ \mathrm{alt}_n \;\text{ для всех } g \in S_n.$$

Из упражнения вытекает, что симметризация перестановочна с альтернированием. Очевидно также, что симметризация тождественно действует на симметричные тензоры и аннулирует знакопеременные, а альтернирование тождественно действует на знакопеременные тензоры и аннулирует симметричные. Мы заключаем, что сумма $\mathrm{Sym}^n \oplus \mathrm{Alt}^n \subset V^{\otimes n}$ прямая, и оператор sym_n проектирует[1] $V^{\otimes n}$ на подпространство $\mathrm{Sym}^n V \subset V^{\otimes n}$ вдоль подпространства $\ker \mathrm{sym}_n$, содержащего $\mathrm{Alt}^n V$, а оператор alt_n проектирует $V^{\otimes n}$ на подпространство $\mathrm{Alt}^n V \subset V^{\otimes n}$ вдоль подпространства $\ker \mathrm{alt}_n$, содержащего $\mathrm{Sym}^n V$. В частности,

$$\mathrm{sym}_n^2 = \mathrm{sym}_n, \quad \mathrm{alt}_n^2 = \mathrm{alt}_n \quad \text{и} \quad \mathrm{sym}_n \mathrm{alt}_n = \mathrm{alt}_n \mathrm{sym}_n = 0. \tag{5-28}$$

Пример 5.2 (разложение тензорного квадрата)
Поскольку для d-мерного векторного пространства V

$$\dim \mathrm{Sym}^2 V + \dim \mathrm{Alt}^2 V = \frac{d(d+1)}{2} + \frac{d(d-1)}{2} = d^2 = \dim V^{\otimes 2},$$

мы заключаем, что $V^{\otimes 2} = \mathrm{Sym}^2 V \oplus \dim \mathrm{Alt}^2 V$. Это согласуется с тем, что каждая билинейная форма $\beta : V\times V \to \Bbbk$, представляющая собою по сл. 5.1 на стр. 68 тензор $\beta \in V^{*\otimes 2}$, однозначно раскладывается в сумму $\beta = \beta_+ + \beta_-$ симметричной и кососимметричной форм

$$\beta_+(u,w) = \frac{\beta(u,w)+\beta(w,u)}{2} \in \mathrm{Sym}^2 V^* \quad \text{и} \quad \beta_-(u,w) = \frac{\beta(u,w)-\beta(w,u)}{2} \in \mathrm{Alt}^2 V^*.$$

В частности, $\ker \mathrm{sym}_2 = \mathrm{Alt}^2 V$ и $\ker \mathrm{alt}_2 = \mathrm{Sym}^2 V$.

Пример 5.3 (разложение тензорного куба)
В условиях предыдущего примера при $\dim V = d \geqslant 2$

$$\dim \mathrm{Sym}^3 V + \dim \mathrm{Alt}^3 V = \frac{d(d+1)(d+2)}{6} + \frac{d(d-1)(d-2)}{6} = \frac{d^3+2d}{3} < d^3 = \dim V^{\otimes 3}.$$

Поэтому $\mathrm{Sym}^3 V \oplus \mathrm{Alt}^3 V \neq V^{\otimes 3}$. Из соотношений (5-28) вытекает, что оператор

$$\pi_\Delta \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Id} - \mathrm{sym}_3 - \mathrm{alt}_3 = \mathrm{Id} - \frac{1}{3}(\mathrm{Id} + \tau + \tau^2), \quad \text{где} \quad \tau = |1,2,3\rangle \in S_3 \text{ — 3-цикл},$$

тоже является проектором, ибо $\pi_\Delta^2 = (\mathrm{Id} - \mathrm{sym}_3 - \mathrm{alt}_3)^2 = \mathrm{Id} - \mathrm{sym}_3 - \mathrm{alt}_3 = \pi_\Delta$. Его образ

$$\mathrm{im}\,\pi_\Delta = \{t \in V^{\otimes 3} \mid \pi_\Delta(t) = t\} = \{t \in V^{\otimes 3} \mid t + \tau(t) + \tau^2(t) = 0\}$$

[1] См. прим. 12.7 на стр. 223 части I.

состоит из тензоров, которые аннулируются усреднением по 3-циклу. Если интерпретировать тензоры $t \in V^{\otimes 3}$ как трилинейные формы $t : V^* \times V^* \times V^* \to \Bbbk$, то $\operatorname{im} \pi_\Delta$ состоит из трилинейных форм, удовлетворяющих *тождеству Якоби* $t(\xi, \eta, \zeta) + t(\eta, \zeta, \xi) + t(\zeta, \xi, \eta) = 0$. Если обозначить через $[a, b] \overset{\text{def}}{=} a \otimes b - b \otimes a$ коммутатор в ассоциативной алгебре TV, то для любых трёх векторов $u, v, w \in V$ тензор $[u, [v, w]] \in V^{\otimes 3}$ лежит в $\operatorname{im} \pi_\Delta$, ибо

$$\begin{aligned}
[u,[v,w]] &= u \otimes v \otimes w - u \otimes w \otimes v - v \otimes w \otimes u + w \otimes v \otimes u \\
\tau[u,[v,w]] &= w \otimes u \otimes v - v \otimes u \otimes w - u \otimes v \otimes w + u \otimes w \otimes v \\
\tau^2[u,[v,w]] &= v \otimes w \otimes u - w \otimes v \otimes u - w \otimes u \otimes v + v \otimes u \otimes w \,.
\end{aligned}$$

Упражнение 5.13*. Обозначим через $\operatorname{Lie}^3 V \subset V^{\otimes 3}$ линейную оболочку всевозможных двойных коммутаторов $[u, [v, w]]$, где $u, v, w \in V$. Покажите, что $\operatorname{im} \pi_\Delta = \operatorname{Lie}^3 V \oplus \tau \operatorname{Lie}^3 V$.

Так как каждый из проекторов sym_3, π_Δ, alt_3 аннулирует образы двух других, каждое из подпространств $\operatorname{im}\operatorname{sym}_3$, $\operatorname{im}\pi_\Delta$, $\operatorname{im}\operatorname{alt}_3$ пересекает сумму двух других по нулю. В силу равенства $\mathrm{Id} = \operatorname{sym}_3 + \pi_\Delta + \operatorname{alt}_3$ каждый тензор $t \in V^{\otimes 3}$ раскладывается в сумму $t = \operatorname{sym}_3 t + \pi_\Delta t + \operatorname{alt}_3 t$. Мы заключаем, что $V^{\otimes 3} = \operatorname{im}\operatorname{sym}_3 \oplus \operatorname{im}\pi_\Delta \oplus \operatorname{im}\operatorname{alt}_3 = \operatorname{Sym}^3 V \oplus \operatorname{Lie}^3 V \oplus \tau \operatorname{Lie}^3 V \oplus \operatorname{Alt}^3 V$.

Упражнение 5.14. Докажите тождество Якоби для коммутаторов[1]:

$$[u,[v,w]] + [w,[u,v]] + [v,[w,u]] = 0\,.$$

Задачи для самостоятельного решения к §5

Задача 5.1. Для конечномерного векторного пространства V над полем $\Bbbk$ характеристики нуль постройте канонические изоморфизмы между пространствами а) симметричных n-линейных форм $\varphi : V \times \ldots \times V \to \Bbbk$ б) функций $f : V \to \Bbbk$, задаваемых однородными многочленами степени n от $x_1, \ldots, x_d$ в) $\operatorname{Sym}^n(V^*)$ г) $\operatorname{Sym}^n(V)^*$ д) $(S^n V)^*$ е) $S^n(V^*)$. Куда при этом переходит базис пространства (е) из мономов $x_1^{m_1} \ldots x_d^{m_d}$?

Задача 5.2. В условиях зад. 5.1 постройте канонические изоморфизмы между пространствами а) знакопеременных n-линейных форм $\varphi : V \times \ldots \times V \to \Bbbk$ б) $\operatorname{Alt}^n(V^*)$ в) $\operatorname{Alt}^n(V)^*$ г) $(\Lambda^n V)^*$ д) $\Lambda^n(V^*)$. Куда переходит базис пространства (д) из мономов $x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_m}$?

Задача 5.3. Какие из построенных в двух предыдущих задачах изоморфизмов остаются таковыми а) над полями конечной характеристики б) в бесконечномерии?

Задача 5.4. Предъявите $t \in V^{\otimes 3} \smallsetminus (\operatorname{Sym}^3 V \oplus \operatorname{Alt}^3 V)$.

Задача 5.5. Напишите матрицы Грама билинейных форм а) $(x_1 + x_2) \otimes (x_1 - x_2)$ б) $(x_1 + x_2)^{\otimes 2}$ в) $(x_1 + 2x_2) \otimes (x_1 + x_2) - (x_1 + x_2) \otimes (x_1 + 2x_2)$ г) $(x_1 + 2x_2) \otimes (x_3 + x_4) + (x_1 - 2x_2) \otimes (x_3 - x_4)$.

Задача 5.6. Пусть $d = \dim V = 3$, $\det : V \times V \times V \to \Bbbk$ — определитель матрицы координат тройки векторов в базисе e_1, e_2, e_3, а $\varphi = x_1 \otimes x_2 + x_3^{\otimes 2}$. Вычислите $\psi(e_1, e_2, e_3, e_3, e_3)$ для а) $\psi = \varphi \otimes \det$ б) $\psi = \det \otimes \varphi$.

[1] Обратите внимание, что тензоры $[w, [u, v]]$ и $[v, [w, u]]$ отличаются от $\tau[u, [v, w]]$ и $\tau^2[u, [v, w]]$.

Задача 5.7. Квадролинейная форма det на векторном пространстве с базисом $e_1, \dots, e_4$ сопоставляет четырём векторам определитель матрицы их координат. Напишите матрицу Грама билинейной формы, полученной свёрткой

а) второго и первого тензорного сомножителей формы det соответственно с первым и вторым сомножителями тензора $(-3e_1 - 2e_4) \otimes (2e_2 - 4e_3) + (4e_1 - 2e_3) \otimes (-4e_2 - e_4)$

б) первого и третьего тензорного сомножителей формы det соответственно с первым и вторым сомножителями тензора $(-e_3 - 4e_4) \otimes (5e_1 + 2e_2) + (-e_1 + 3e_4) \otimes (3e_2 - e_3)$.

Задача 5.8. Вычислите

а) $\mathrm{sym}_{|n|+|k|}(x_{[n_1,\dots,n_d]} \otimes x_{[k_1,\dots,k_d]})$ б) $\mathrm{alt}_{n+k}\big(\mathrm{alt}_n(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}) \otimes \mathrm{alt}_k(e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_k})\big)$.

Задача 5.9. Верно ли, что а) $S^2S^2V \simeq S^4V$ б) $\mathrm{sym}_4(\mathrm{Sym}^2 V \otimes \mathrm{Sym}^2 V) = \mathrm{Sym}^4 V$ в) $\Lambda^2\Lambda^2V \simeq \Lambda^4V$ г) $\mathrm{alt}_4(\mathrm{Alt}^2 V \otimes \mathrm{Alt}^2 V) = \mathrm{Alt}^4 V$?

Задача 5.10. Пусть набор векторов $\boldsymbol{w} = (w_1, \dots, w_n)$ произволен, а $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)$ линейно независим. Докажите, что $u_1 \wedge w_1 + \dots + u_n \wedge w_n = 0$ если и только если $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}\,A$ для симметричной матрицы $A \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$.

Задача 5.11. Для линейного оператора $f : V \to V$ выразите через коэффициенты характеристического многочлена $\chi_f(t)$ числа: а) $\mathrm{tr}\, f^{\otimes 2}$ б*) $\mathrm{tr}\, f^{\otimes 3}$ в) $\det f^{\otimes 2}$ г*) $\det f^{\otimes 3}$.

Задача 5.12. Для линейного оператора $f : V \to V$ положим

$$S^kf : S^kV \to S^kV\,, \quad v_1 \dots v_k \mapsto f(v_1)\dots f(v_k)\,,$$
$$\Lambda^kf : \Lambda^kV \to \Lambda^kV\,, \quad v_1 \wedge \dots \wedge v_k \mapsto f(v_1) \wedge \dots \wedge f(v_k)\,.$$

Выразите собственные числа этих операторов через собственные числа[1] f и докажите, что в $\Bbbk[\![t]\!]$ выполняются равенства: а) $\det(\mathrm{Id} - tf)^{-1} = \sum_{k\geqslant 0} \mathrm{tr}(S^kf)\, t^k$ б) $\det(\mathrm{Id} + tf) = \sum_{k\geqslant 0} \mathrm{tr}(\Lambda^kf)\, t^k$. в) Пусть $\mathrm{char}\,\Bbbk = 0$ и $\mathrm{tr}\,\Lambda^kf = 0$ при всех $k \geqslant 1$. Верно ли, что f нильпотентен? г) Пусть $\dim V = d \geqslant 2$. Какие значения может принимать $\mathrm{rk}\,\Lambda^{d-1}f$?

Задача 5.13. Найдите ЖНФ оператора $\Lambda^3f : \Lambda^3V \to \Lambda^3V$, если $f : V \to V$ имеет две жордановых клетки размеров 2×2 и 3×3 соответственно с собственными числами а) -3 и 2 б) 5 и 0 в) 0 и 4 г) 0 и 0.

Задача 5.14. Найдите ЖНФ оператора $S^2f : S^2V \to S^2V$, если $f : V \to V$ имеет две жордановых клетки размеров 2×2 и 3×3 соответственно с собственными числами а) -2 и 3 б) 0 и -2 в) 3 и 0 г) 0 и 0.

Задача 5.15. Докажите, что $e^{F\otimes E + E\otimes F} = e^F \otimes e^F$ в $\mathrm{Mat}_{n^2}(\mathbb{C})$, где F — любая, а E — единичная матрицы размера $n \times n$.

Задача 5.16. Покажите, что в кольце формальных степенных рядов с рациональными коэффициентами от матричных элементов $n \times n$ матрицы A выполняется равенство

$$\ln\det(E - A) = \mathrm{tr}\ln(E - A)\,,$$

причём над полем $\mathbb{C}$ для всех достаточно малых комплексных A оно выполняется также и численно.

Задача 5.17 (принцип Аронгольда). Покажите, что над полем характеристики нуль пространства $\mathrm{Sym}^n V^*$ и $S^n(V^*)$ линейно порождаются, соответственно, тензорами $\varphi^{\otimes n} = \varphi \otimes \dots \otimes \varphi$ и многочленами φ^n, где $\varphi \in V^*$, и явно выразите через $\varphi^{\otimes n}$ тензоры

[1] Подсказка: решите задачу в предположении, что f диагонализуем, и воспользуйтесь принципом расщепления из зад. 12.21 на стр. 232 части I.

а) $x_{[2,1]} = x_1 \otimes x_1 \otimes x_2 + x_1 \otimes x_2 \otimes x_1 + x_2 \otimes x_1 \otimes x_1$

б) $x_{[3,1]} = x_1 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_2 + x_1 \otimes x_1 \otimes x_2 \otimes x_1 + x_1 \otimes x_2 \otimes x_1 \otimes x_1 + x_2 \otimes x_1 \otimes x_1 \otimes x_1$.

Задача 5.18. Фиксируем ненулевой ковектор $\xi \in V^*$. Оператор $i_\xi : V^{\otimes(n+1)} \to V^{\otimes n}$, двойственный[1] оператору $\mu_\xi : V^{*\otimes n} \to V^{*\otimes(n+1)}$, $\tau \mapsto \xi \otimes \tau$, называется *внутренним умножением* на ξ. Явно опишите его действие на заданную n-линейную форму $w : V^* \times \ldots \times V^* \to \Bbbk$. Для каких V, n и ξ оператор i_ξ не эпиморфен?

Задача 5.19. Покажите, что подпространства $\mathcal{I}_{\mathrm{com}} \cap V^{\otimes 2}$ и $\mathcal{I}_{\mathrm{sk}} \cap V^{*\otimes 2}$, которые порождают идеалы соотношений коммутирования[2] и антикоммутирования[3] в тензорных алгебрах TV и TV^* соответственно, являются аннуляторами друг друга относительно канонического спаривания между $V^{\otimes 2}$ и $V^{*\otimes 2}$, задаваемого полной свёрткой.

Задача 5.20 (комплексы Кошуля и Де Рама). Зафиксируем базис $e_1, \ldots, e_n$ векторного пространства V и обозначим через x_i и ξ_i классы вектора e_i в алгебрах SV и ΛV соответственно. Покажите, что

а) линейные операторы $\Lambda^{k+1}V \otimes S^{m-1}V \xleftarrow{d} \Lambda^k V \otimes S^m V \xrightarrow{\partial} \Lambda^{k-1}V \otimes S^{m+1}V$, действующие на разложимые тензоры по правилам

$$\begin{aligned} d &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_\nu \xi_\nu \otimes \frac{\partial}{\partial x_\nu} \;:\; \omega \otimes f \mapsto \sum_\nu \frac{\partial \omega}{\partial \xi_\nu} \otimes x_\nu \cdot f \\ \partial &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_\nu \frac{\partial}{\partial \xi_\nu} \otimes x_\nu \;:\; \omega \otimes f \mapsto \sum_\nu \xi_\nu \wedge \omega \otimes \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \end{aligned} \tag{5-29}$$

не зависят от выбора базиса и имеют нулевые квадраты: $d^2 = 0 = \partial^2$

б) оператор $d\partial + \partial d$ действует на $\Lambda^k V \otimes S^m V$ как гомотетия $(k+m) \cdot \mathrm{Id}$.

в) Вычислите $\ker d / \operatorname{im} d$ и $\ker \partial / \operatorname{im} \partial$.

---

[1] При каноническом отождествлении $V^{\otimes n}$ с $\left(V^{*\otimes n}\right)^*$ из n° 5.2.

[2] См. формулу (5-9) на стр. 70.

[3] См. формулу (5-13) на стр. 74.

§6. Поляризация многочленов

В этом параграфе через V по умолчанию обозначается конечномерное векторное пространство над полем $\Bbbk$ характеристики $\mathrm{char}\,\Bbbk = 0$.

6.1. Поляризация обычных многочленов. Согласно теор. 5.2 на стр. 77 для каждого многочлена $f \in S^nV^*$ существует единственный симметричный тензор $\tilde f \in \mathrm{Sym}^n V^*$, который проектируется в f при факторизации $V^{\otimes n} \twoheadrightarrow S^nV$. По сл. 5.1 на стр. 68 тензор $\tilde f$ задаёт симметричную n-линейную форму $\tilde f : V \times \ldots \times V \to \Bbbk$, значение которой на наборе векторов $(v_1, \ldots, v_n)$ равно полной свёртке тензора $\tilde f$ с тензором $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$. В n° 5.3.2 на стр. 73 мы видели, что каждый многочлен $f \in S^nV^*$ задаёт полиномиальную функцию $f : V \to \Bbbk$, причём для разложимых многочленов $f = \varphi_1 \ldots \varphi_n$ значение $f(v) = \prod_i \varphi_i(v)$. Сравнивая эти две конструкции, мы заключаем, что для любого однородного многочлена f степени n на конечномерном векторном пространстве V над полем характеристики нуль существует единственная такая n-линейная симметричная форма $\tilde f : V \times \ldots \times V \to \Bbbk$, что для всех $v \in V$

$$f(v) = \tilde f(v, \ldots, v)\,. \tag{6-1}$$

Эта форма называется *полной поляризацией* многочлена f. Как мы видели в n° 17.2 на стр. 313 части I, полная поляризация $\tilde q : V \times V \to \Bbbk$ однородной квадратичной формы $q \in S^2V^*$ удовлетворяет равенству $2\tilde q(u, w) = q(u + w) - q(u) - q(w)$.

Упражнение 6.1. Убедитесь, что поляризация однородного кубического многочлена такова, что $6\,\tilde f(u, v, w) = f(u + v + w) - f(u + v) - f(u + w) - f(v + w) + f(u) + f(v) + f(w)$.

Предложение 6.1 (комбинаторная формула для полной поляризации)

$$n!\,\tilde f(v_1, \ldots, v_n) = \sum\nolimits_{I \subsetneq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{\ell(I)} f\Big(\sum\nolimits_{i \notin I} v_i\Big)\,, \tag{6-2}$$

где суммирование идёт по всем собственным подмножествам $I \subsetneq \{1, \ldots, n\}$, включая пустое, а $\ell(I)$ означает число элементов в I.

Доказательство. Пусть заданы векторы $u_1, \ldots, u_k \in V$, а набор векторов $w_1, \ldots, w_n$ состоит из m_i копий каждого из векторов u_i, где $i = 1, \ldots, k$, все $m_i \geqslant 0$ и $m_1 + \ldots + m_k = n$. Поскольку значение $\tilde f(w_1, \ldots, w_n)$ не меняется при перестановках аргументов и зависит только от векторов u_i и кратностей m_i, условимся записывать его как $\tilde f(u_1^{m_1}, \ldots, u_k^{m_k}) = \tilde f(w_1, \ldots, w_n)$. В этих обозначениях, для всех $f \in S^nV^*$ и любых $v_1, \ldots, v_k \in V$ справедлива мультиномиальная формула[1]

$$f(v_1 + \ldots + v_k) = \sum\nolimits_{m_1,\ldots,m_k} \frac{n!}{m_1! \ldots m_k!}\,\tilde f(v_1^{m_1}, \ldots, v_k^{m_k})\,, \tag{6-3}$$

где суммирование идёт по всем наборам целых чисел $m_1, \ldots, m_k$, в которых $0 \leqslant m_i \leqslant n$ при каждом i и $m_1 + \ldots + m_k = n$.

Упражнение 6.2. Убедитесь в этом.

При $k = n$ в правой части (6-3) имеется ровно одно слагаемое, зависящее от всех n аргументов $v_1, \ldots, v_n$, а именно, $n!\,\tilde f(v_1, \ldots, v_n)$. Для каждого собственного подмножества $I \subsetneq \{1, \ldots, n\}$ не зависящие от векторов v_i с $i \in I$ слагаемые из правой части формулы (6-3) входят в неё с

[1] Ср. с прим. 1.2 на стр. 9.

тем же самым коэффициентом, что и в разложение (6-3) для $f\left(\sum_{i\notin I} v_i\right)$, поскольку последнее получается из разложения для $f(v_1+\ldots+v_n)$ подстановкой $v_i = 0$ для всех $i \in I$. Таким образом, все слагаемые, не содержащие хотя бы один из векторов v_i, могут быть удалены из (6-3) при помощи стандартной процедуры включения-исключения, что и даёт заявленную формулу

$$n!\cdot \tilde f(v_1,\ldots,v_n) = f\Big(\sum_{\nu} v_\nu\Big) - \sum_{\{i\}} f\Big(\sum_{\nu\neq i} v_\nu\Big) + \sum_{\{i,j\}} f\Big(\sum_{\nu\neq i,j} v_\nu\Big) - \sum_{\{i,j,k\}} f\Big(\sum_{\nu\neq i,j,k} v_\nu\Big) + \ldots \,. \qquad \square$$

Предложение 6.2 (принцип Аронгольда)
Над полем характеристики нуль пространство симметрических тензоров $\operatorname{Sym}^n V \subset V^{\otimes}$ линейно порождается тензорами $v^{\otimes n} = v\otimes\ldots\otimes n$, где $v\in V$, а пространство однородных многочленов S^nV^* — многочленами φ^n, где $\varphi\in V^*$.

Доказательство. Двойственное к $\operatorname{Sym}^n V$ пространство канонически изоморфно пространству симметричных n-линейных форм $V\times\ldots\times V \to \Bbbk$. Если такая форма $\tilde f$ зануляется на всех наборах $(v,\ldots,v)$, то многочлен $f\in S^nV^*$, поляризацией которого она является, задаёт тождественно нулевую функцию $f: V\to\Bbbk$, откуда $f=0$, а значит и $\tilde f = 0$. Тем самым, линейная оболочка тензоров $v^{\otimes n}$ не лежит ни в какой гиперплоскости пространства $\operatorname{Sym}^n V$, что доказывает первое утверждение. Второе следует из первого, поскольку при изоморфизме $\operatorname{Sym}^n V^* \xrightarrow{\sim} S^nV^*$ тензоры $\varphi^{\otimes n}$ переходят в многочлены φ^n. $\square$

Упражнение 6.3 (усиленный принцип Аронгольда). В условиях предл. 6.2 для любого ненулевого многочлена $f\in S^nV^*$ покажите, что пространство $\operatorname{Sym}^n V\subset V^{\otimes n}$ линейно порождается тензорами $v^{\otimes n}$ с $f(v)\neq 0$.

6.1.1. Производная многочлена в направлении вектора. Свёртка первого тензорного сомножителя в $V^{*\otimes n}$ с фиксированным вектором $v\in V$ задаёт линейное отображение[1]

$$i_v:\ V^{*\otimes n}\to V^{*\otimes(n-1)}\,.$$

Применяя его к полной поляризации $\tilde f$ многочлена $f\in S^nV^*$ и проектируя результат из $V^{*\otimes(n-1)}$ в $S^{n-1}V^*$, получаем линейно зависящее от v линейное отображение $\mathrm{pl}_v: S^nV^*\to S^{n-1}V^*$, которое называется *поляризацией* вдоль v и включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} V^{*\otimes n}\supset \operatorname{Sym}^n V^* \arrow[r, "i_v"] \arrow[d, "\wr"] & V^{*\otimes(n-1)} \arrow[d] \\ S^nV^* \arrow[r, "\mathrm{pl}_v"] & S^{n-1}V^*\,. \end{tikzcd} \tag{6-4}$$

Пусть векторы $e_1,\ldots,e_d\in V$ и ковекторы $x_1,\ldots,x_d\in V^*$ образуют двойственные базисы. Согласно форм. (5-20) на стр. 77 каждый базисный моном $x_1^{m_1}\ldots x_d^{m_d}\in S^nV^*$ поляризуется в симметричный тензор

$$\frac{n!}{m_1!\ldots m_d!}x_{[m_1,\ldots,m_d]}\in \operatorname{Sym}^n V^*\,,$$

где $x_{[m_1,\ldots,m_d]}$ обозначает сумму всех тензорных мономов, содержащих каждый базисный ковектор x_i ровно m_i раз. Свёртка тензора $x_{[m_1,\ldots,m_d]}$ с базисным вектором $e_i\in V$ по первому тензорному сомножителю зануляется при $m_i=0$, а во всех остальных случаях равна

$$x_{[m_1,\ldots,m_{i-1},m_i-1,m_{i+1},m_d]}\in \operatorname{Sym}^{n-1} V^*\,.$$

[1] См. прим. 5.1 на стр. 69.

Мы заключаем, что $\mathrm{pl}_{e_i} x_1^{m_1} \dots x_d^{m_d} = \frac{m_i}{n} x_1^{m_1} \dots x_{i-1}^{m_{i-1}} x_i^{m_i - 1} x_{i+1}^{m_{i+1}} \dots x_d^{m_d} = \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial x_i} x_1^{m_1} \dots x_d^{m_d}$. Напомню, что в анализе *частная производная* многочлена $f \in SV^*$ в направлении вектора

$$v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_d e_d \in V$$

определяется равенством

$$\partial_v f \overset{\text{def}}{=} \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \alpha_d \frac{\partial f}{\partial x_d} .$$

Поскольку многочлен $\mathrm{pl}_v f$ билинейно зависит от v и f, для любых $u, w \in V$ и $f \in S^n V^*$ справедливо равенство

$$\mathrm{pl}_u f(w) = \tilde{f}(u, w^{n-1}) = \frac{1}{n} \partial_v f . \tag{6-5}$$

Отметим, что поскольку левая часть этой формулы определена инвариантно, правая часть тоже не зависит от выбора двойственных координат в V и V^*.

Применяя n раз формулу (6-5), получаем ещё одно явное выражение полной поляризации $\tilde{f}$ многочлена $f \in S^n V^*$ через этот многочлен:

$$\tilde{f}(v_1, \dots, v_n) = \frac{1}{n!} \partial_{v_1} \dots \partial_{v_n} f . \tag{6-6}$$

Упражнение 6.4. Убедитесь, что частные производные коммутируют: $\partial_u \partial_w = \partial_w \partial_u$ для всех $u, w \in V$ и докажите *правило Лейбница*: $\partial_v(fg) = g\partial_v(f) + f\partial_v(g)$.

Из формулы (6-5) также вытекает, что для любых $u, w \in V$ и $f \in S^n V^*$ при всех $0 \leqslant k \leqslant n$

$$\tilde{f}\left(u^k, w^{n-k}\right) = \frac{(n-k)!}{n!} \partial_u^k f(w) = \frac{k!}{n!} \partial_w^{n-k} f(u) , \tag{6-7}$$

где $\partial_v^\ell = \partial_v \dots \partial_v$ означает ℓ-кратную производную в направлении v.

Пример 6.1 (разложение Тейлора)
Для любых двух векторов $u, w \in V$ и многочлена $f \in S^n V^*$ справедлива формула бинома[1]

$$f(u+w) = \tilde{f}\big((u+w), \dots, (u+w)\big) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \tilde{f}(u^k, w^{n-k}) .$$

Соотношения (6-7) позволяют переписать это равенство как *разложение Тейлора*

$$f(u+w) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \partial_w^k f(u) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \partial_u^{n-k} f(w) . \tag{6-8}$$

справедливое для всех $f \in S^n V^*$ и симметричное по u, w в силу соотношений (6-7).

[1] См. формулу (6-3) на стр. 83.

6.1.2. Касательные и поляры проективной гиперповерхности. Рассмотрим проективную гиперповерхность[1] $S = V(f) \subset \mathbb{P}(V)$, заданную однородным многочленом $f \in S^n V^*$. Пересечение гиперповерхности S с произвольной прямой $\ell = (pq)$ состоит из таких точек $x_0 p + x_1 q \in \ell$, что отношение $(x_0 : x_1)$ удовлетворяет уравнению $f_{pq}(x_0, x_1) = 0$, где

$$f_{pq}(x_0, x_1) = f(x_0 p + x_1 q) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tilde{f}(p^k, q^{n-k})\, x_0^k x_1^{n-k} \in \Bbbk[x_0, x_1] \tag{6-9}$$

является однородным многочленом степени n от $x = (x_0, x_1)$. Этот многочлен тождественно нулевой если и только если $\ell \subset S$. Если же прямая ℓ не лежит на S и поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, то многочлен (6-9) полностью раскладывается на линейные множители:

$$f_{pq}(t) = \prod\nolimits_{a \in \ell \cap S} \det{}^{m(a)}(x, a)\,,$$

где суммирование происходит по всем различным точкам пересечения $a = (\alpha_0 : \alpha_1) \in \ell \cap S$ и

$$\det(x, a) = \det \begin{pmatrix} x_0 & \alpha_0 \\ x_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} = \alpha_1 x_0 - \alpha_0 x_1\,.$$

Показатель $m(a)$, с которым линейная форма $\det(x, a)$ входит в разложение многочлена f_{pq} на линейные множители, называется *локальной кратностью пересечения* поверхности S с прямой ℓ в точке a и обозначается $(S, \ell)_a$. Мы заключаем, что над алгебраически замкнутым полем каждая не лежащая на гиперповерхности $S = V(f)$ прямая пересекается с S ровно по $\deg f$ точкам с учётом их кратностей.

Зафиксируем точку $p \in S$. Прямая $\ell = (pq)$ называется *касательной* к S в точке p, если $(S, \ell)_p \geqslant 2$ или $\ell \subset S$. Начальный кусок разложения Тейлора[2] ограничения многочлена (6-9) на прямую (pq) имеет в окрестности точки p вид

$$f(p + tq) = t \binom{n}{1} \tilde{f}(p^{n-1}, q) + t^2 \binom{n}{2} \tilde{f}(p^{n-2}, q^2) + \dots\,, \tag{6-10}$$

где $t = x_1 / x_0$. Поэтому касание прямой (pq) с гиперповерхностью S в точке $p \in S$ означает равенство $\tilde{f}(p^{n-1}, q) = 0$. Если линейная по q форма $\tilde{f}(p^{n-1}, q)$ не является тождественно нулевой, поверхность S называется *гладкой* в точке p, а точка p — *гладкой точкой* поверхности S. В этом случае все прямые (pq), касающиеся S в точке p, заметают в $\mathbb{P}(V)$ гиперплоскость. Она называется проективной *касательной гиперплоскостью* к S в p и обозначается

$$T_p S = \{q \in \mathbb{P}(V) \mid \tilde{f}(p^{n-1}, q) = 0\}\,. \tag{6-11}$$

Если форма $\tilde{f}(p^{n-1}, q)$ тождественно нулевая по q, поверхность S называется *особой* в точке p, а точка p — *особой точкой* поверхности S. В этом случае любая проходящая через p прямая имеет как минимум двукратное пересечение с S в p, и касательное пространство (6-11) совпадает со всем пространством $\mathbb{P}(V)$. По форм. (6-5) на стр. 85, коэффициенты линейной по q формы

$$\tilde{f}(p^{n-1}, q) = \partial_q f(p)/n$$

[1] См. n° 13.6.2 на стр. 249 части I.

[2] См. формулу (6-8) на стр. 85.

пропорциональны значениям частных производных от f в точке p. Таким образом, особость точки p равносильна тому, что в ней зануляются все частные производные уравнения гиперповерхности.

Зафиксируем точку q вне S или в какой-нибудь гладкой точке поверхности S. Замыкание множества таких точек $p \neq q$, что прямая (pq) касается S в точке p называется видимым из точки q *контуром* поверхности S. Он высекается из S гиперповерхностью

$$\mathrm{pl}_q S = \{p \in \mathbb{P}(V) \mid \tilde{f}(p^{n-1}, q) = 0\}\,. \tag{6-12}$$

степени $n-1$, которая называется *полярной* к точке q относительно S. В силу выбора точки q многочлен $g_q(p) = \tilde{f}(p^{n-1}, q)$ не является тождественно нулевым по p, так как в противном случае при каждом p все его производные

$$\partial_r g_q(p) = \widetilde{g}_q(r, p^{n-2})/(n-1) = \tilde{f}(r, q, p^{n-2})/(n-1)$$

были бы нулевыми линейными формами от r, и полагая $p = q$, мы получили бы тождественно нулевую линейную по r форму $\tilde{f}(r, q^{n-1})$, а это означает, что q — особая точка гиперповерхности S. Таким образом, полярная гиперповерхность (6-12) отлична от всего пространства $\mathbb{P}(V)$.

Более общим образом, для каждого k в пределах $0 < k < n$ гиперповерхность

$$\mathrm{pl}_q^{n-k} S = \{p \in \mathbb{P}(V) \mid \tilde{f}(q^{n-r}, p^k) = 0\}\,. \tag{6-13}$$

называется *полярой* степени k точки q относительно S. Если $q \in S$ — гладкая точка, то её линейная поляра — это касательная гиперплоскость $T_q S$, её квадратичная поляра — это проходящая через q квадрика, касательная гиперплоскость которой в точке q совпадает с $T_q S$, её кубическая поляра — это проходящая через q кубика, относительно которой квадратичная поляра точки q такая же, как относительно S и т. д.

Упражнение 6.5. Проверьте, что при любом k у гладкой точки $q \in S$ поляры всех степеней $< k$ относительно S и относительно поляры (6-13) совпадают.

Пример 6.2 (класс плоской кривой)

Максимальное количество касательных, которые можно опустить на кривую $C \subset \mathbb{P}_2$ из точки $q \in \mathbb{P}_2 \smallsetminus C$, называется *классом* кривой C и обозначается $c(C)$. По предыдущему, эти касательные пересекают C в точках пересечения $C \cap \mathrm{pl}_q C$, где $\mathrm{pl}_q C$ — полярная точке q относительно C кривая степени $\deg C - 1$. Например, для гладкой кубической кривой $C = V(f)$ поляра $Q = \mathrm{pl}_q C$ представляет собою конику с матрицей Грама

$$q_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(q)\,.$$

Множество $H_C = \{q \in \mathbb{P}_2 \mid \det(q_{ij}) = 0\}$ является кубической кривой, которая называется *гессианом* исходной кубической кривой C. При $q \notin H_C$ коника $Q = \mathrm{pl}_q C$ гладкая и над алгебраически замкнутым полем пересекает гладкую кубическую кривую C по шести точкам[1], т. е. из не лежащей на гессиане точки q можно опустить на C шесть касательных (некоторые из которых могут совпасть друг с другом). Если $q \in H_C$, коника Q является двойной прямой или парой различных прямых и пересекает C не более, чем по шести точкам. Таким образом, гладкая кубическая кривая имеет класс 6.

[1]См. зад. 17.23 на стр. 328 части I.

Пример 6.3 (гиперповерхность особых квадрик)
Пусть основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто. Квадрики[1] в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ являются точками проективного пространства $\mathbb{P}(S^2V^*)$, которое называется *пространством квадрик*. Особые квадрики образуют в нём алгебраическую гиперповерхность

$$\Sigma = V(\det) = \{q \in S^2V^* \mid \det(q) = 0\}$$

степени $(n+1)$. Зафиксируем в V базис и используем в качестве однородных координат на пространстве квадрик матричные элементы x_{ij} матриц Грамма[2] X квадратичных форм $x \in S^2V^*$ в этом базисе.

Упражнение 6.6. Убедитесь, что частная производная определителя

$$\frac{\partial}{\partial x_{ij}} \det X = (-1)^{i+j} \det X_{\overline{ij}} = x^\vee_{ji}$$

равна алгебраическому дополнению к элементу x_{ij} матрицы X или, в других обозначениях, элементу $x^\vee_{ji}$ присоединённой матрицы[3] $X^\vee$.

Предложение 6.3
Особая квадрика $s \in \Sigma$ является гладкой точкой гиперповерхности Σ если и только если пространство $\operatorname{Sing} V(s)$ особых точек квадрики $V(s) \subset \mathbb{P}(V)$ состоит из единственной точки, и в этом случае касательное пространство $T_s\Sigma \subset \mathbb{P}(S^2V^*)$ образовано всеми проходящими через эту точку квадриками в $\mathbb{P}(V)$.

Доказательство. По упр. 6.6 ограничение многочлена $\det X$ на прямую $(sq) \subset \mathbb{P}(S^2V^*)$ имеет в окрестности особой квадратичной формы $s \in \Sigma$ разложение Тейлора

$$\det(S + tQ) = t \sum\nolimits_{ij} q_{ij}s^\vee_{ij} + \text{члены, делящиеся на } t^2 \,, \tag{6-14}$$

где $s^\vee_{ij} = s^\vee_{ji}$ — алгебраическое дополнение к (ij)-тому элементу симметричной матрицы Грама S формы s. Прямая (sq) касается Σ в точке s тогда и только тогда, когда $t = 0$ является кратным корнем многочлена (6-14), т. е. когда

$$\sum\nolimits_{ij} q_{ij}s^\vee_{ij} = 0 \,. \tag{6-15}$$

Это линейное уравнение на q нетривиально если и только если матрица Грама S имеет хоть один ненулевой минор порядка n, т. е. когда $\operatorname{rk} S = n$, и тем самым $\dim \operatorname{Sing} V(s) = 0$. Обозначим через $a = (\alpha_0 : \alpha_1 : \dots : \alpha_n) \in \mathbb{P}(V)$ единственную особую точку квадрики $V(s)$, т. е. ненулевой вектор, порождающий одномерное ядро $\ker S \subset V$ матрицы S. Из равенств

$$SS^\vee = S^\vee S = \det(S)\,E = 0$$

вытекает, что каждый столбец и каждая строка присоединённой матрицы $S^\vee = (s^\vee_{ij})$ лежит в $\ker S$. Поэтому $\operatorname{rk} S^\vee = 1$, и $s^\vee_{ij} = \alpha_i\alpha_j$ с точностью до умножения на независящую от i, j ненулевую константу[4]. Подставляя это в условие касания (6-15), получаем $\sum_{ij} q_{ij}\alpha_i\alpha_j = q(a) = 0$, т. е. $q \in T_s\Sigma$ если и только если $a \in V(q)$. □

[1] См. n° 17.5 на стр. 321 части I.
[2] См. n° 17.2 на стр. 313 части I.
[3] Напомню, что *присоединённая матрица* $X^\vee$ транспонирована к матрице алгебраических дополнений к элементам матрицы X и замечательна тем, что $X^\vee X = XX^\vee = \det(X)\,E$, см. n° 11.4 на стр. 198 части I.
[4] Ср. с прим. 1.3 на стр. 10 части I.

Следствие 6.1
Прямая $(qs) \subset \mathbb{P}(S^2V^*)$ касается гиперповерхности особых квадрик Σ в точке $s \in \Sigma$ если и только если $V(q) \cap \operatorname{Sing} V(s) \neq \varnothing$. Если $q \in \Sigma$ и $\operatorname{Sing} V(q) \cap \operatorname{Sing} V(s) \neq \varnothing$, то $(qs) \subset \Sigma$.

Доказательство. Если s является гладкой точкой гиперповерхности Σ, первое утверждение является переформулировкой предл. 6.3. Если точка $s \in \Sigma$ особая, то $\dim \operatorname{Sing} V(s) \geqslant 1$, и это подпространство пересекается со всеми квадриками $V(q) \subset \mathbb{P}(V)$, а $T_s\Sigma = \mathbb{P}(S^2V^*)$, т. е. первое утверждение является в этом случае тавтологией. Если $\operatorname{Sing} V(q) \cap \operatorname{Sing} V(s) \neq \varnothing$, то все квадрики пучка (qs) особы в точках пересечения $\operatorname{Sing} V(q) \cap \operatorname{Sing} V(s) \neq \varnothing$, поскольку ненулевой вектор $v \in V$, лежащий в ядре обеих корреляций $\hat{s}, \hat{q} : V \to V^*$, лежит в ядре и любой их линейной комбинации. □

6.2. Линейный носитель многочлена. Линейный носитель[1] $\operatorname{supp} \tilde{f} \subset V^*$ полной поляризации $\tilde{f}$ многочлена $f \in S^nV^*$ называется *линейным носителем многочлена* f. Он равен пересечению всех таких подпространств[2] $U \subset V^*$, что $f \in S^nU$, и является наименьшим из этих подпространств, как по включению, так и по размерности.

Упражнение 6.7. Убедитесь, что многочлен f корректно задаёт полиномиальную функцию

$$V/\operatorname{Ann}\big(\operatorname{supp} f\big) \to \Bbbk, \quad [v] \mapsto f(v).$$

Согласно теор. 5.1 на стр. 70, подпространство $\operatorname{supp} f \subset V^*$ является образом полной свёртки $c_f : V^{\otimes(n-1)} \to V^*$ с тензором $\tilde{f}$ по первым[3] $n-1$ его тензорным сомножителям, т. е. $\binom{n+d-2}{d-1}$ линейными формами

$$\tilde{f}(e_1^{m_1}, \dots, e_d^{m_d}) \in V^*, \quad \text{где} \quad m_1 + \ldots + m_d = n-1. \tag{6-16}$$

Если записать многочлен f в виде

$$f = \sum_{\nu_1 \dots \nu_d} \frac{n!}{\nu_1! \dots \nu_d!}\, a_{\nu_1 \dots \nu_d}\, x_1^{\nu_1} \dots x_d^{\nu_d}, \tag{6-17}$$

то его полная поляризация, согласно форм. (5-20) на стр. 77, будет иметь вид

$$\tilde{f} = \sum\nolimits_{\nu_1 \dots \nu_d} a_{\nu_1 \dots \nu_d} x_{[\nu_1 \dots \nu_d]},$$

где $x_{[\nu_1 \dots \nu_d]} \in \operatorname{Sym}^n V^*$ — сумма всех тензорных мономов, содержащих ν_i сомножителей x_i для всех $i = 1, \dots, d$, а линейные формы (6-16) — вид

$$\tilde{f}(e_1^{m_1}, \dots, e_d^{m_d}) = \sum\nolimits_{i=1}^{d} a_{m_1 \dots m_{i-1}(m_i+1)m_{i+1} \dots m_d} x_i. \tag{6-18}$$

Предложение 6.4 (многочлены с одномерным носителем)
Однородный многочлен (6-17) над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики нуль тогда и только тогда является n-той степенью линейной формы, когда $d \times \binom{n+d-2}{d-1}$-матрица из коэффициентов линейных форм (6-18) имеет ранг 1. В этом случае есть ровно n линейных форм φ, удовлетворяющих уравнению $\varphi^n = f$, все они пропорциональны формам (6-18) и получаются друг из друга умножением на корни n-той степени из единицы в поле $\Bbbk$.

[1] См. n° 5.2.2 на стр. 69.

[2] Обратите внимание, что линейный носитель многочлена на пространстве V является векторным подпространством в V^*, а не в V.

[3] Из-за симметричности тензора $\tilde{f}$ свёртка не зависит от выбора последовательности из $n-1$ индексов, по которым она производится.

Доказательство. Равенство $f = \varphi^n$ означает, что $\operatorname{supp} f$ одномерен и порождён формой φ. В этом случае все формы (6-18) пропорциональны форме φ, и уравнение $t^n = f$ имеет в целостном кольце $\Bbbk[x_1, \dots, x_d]$ ровно n корней вида $\zeta \cdot \varphi$, где ζ пробегает множество корней из единицы в поле $\Bbbk$. Наоборот, если все формы (6-18) пропорциональны, и $\psi \neq 0$ — одна из них, то $\operatorname{supp} f = \Bbbk \cdot \psi$ и $f = \lambda\psi^n$ для некоторого $\lambda \in \Bbbk$, а $\varphi = \sqrt[n]{\lambda} \cdot \psi$. □

Пример 6.4 (бинарные формы ранга 1)
Однородный многочлен степени n от двух переменных $f(x_0, x_1) = \sum_k a_k \cdot \binom{n}{k} \cdot x_0^k x_1^{n-k}$ представляется в виде $(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1)^n$ если и только если $a_{i+1} : a_i = \alpha_0 : \alpha_1$ не зависит от i, что равносильно условию

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix} = 1\,, \tag{6-19}$$

и выражается квадратичными соотношениями $a_i a_{j-1} = a_{i-1} a_j$, где $1 \leqslant i < j \leqslant n$, на коэффициенты многочлена f. Столбцы матрицы (6-19) суть коэффициенты n линейных форм $\tilde{f}(e_0^{i-1}, e_1^{n-i}) = a_i x_0 + a_{i-1} x_1$ из формулы (6-18).

Пример 6.5 (многообразия Веронезе)
Из предл. 6.4 вытекает, что над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ *отображение Веронезе*

$$v_{k,n} : \mathbb{P}_k = \mathbb{P}(V^*) \hookrightarrow \mathbb{P}(S^n V^*)\,, \quad \varphi \mapsto \varphi^n\,, \tag{6-20}$$

инъективно, а его образ состоит из ненулевых многочленов $f \in S^n V^*$ с минимально возможным одномерным линейным носителем и является алгебраическим многообразием, которое задаётся системой однородных уравнений второй степени, констатирующих обращение в нуль всех 2×2 миноров матрицы коэффициентов линейных форм (6-18). Это многообразие называется *многообразием Веронезе* и обозначается $V(k, n)$, где $k = \dim \mathbb{P}(V^*) = \dim V - 1$. По принципу Аронгольда[1] над полем нулевой характеристики многообразие Веронезе не содержится ни в какой гиперплоскости. Кривые Веронезе $V(1, n) \subset \mathbb{P}_n$ иначе называются *рациональными нормальными кривыми* и уже встречались вам в зад. 13.29 на стр. 254 части I.

Упражнение 6.8. Докажите, что над полем нулевой характеристики никакие $n+1$ точек кривой Веронезе $V(1, n)$ не лежат в одной гиперплоскости.

6.3. Поляризация грассмановых многочленов. Согласно теор. 5.2 на стр. 77, над полем нулевой характеристики проекция знакопеременных тензоров на фактор тензорной алгебры по соотношениям антикоммутирования $\operatorname{Alt}^n V \simeq \Lambda^n V$ является изоморфизмом. Обратный к нему изоморфизм $\Lambda^n V \simeq \operatorname{Alt}^n V$ называется *полной поляризацией* грассмановых многочленов. Он сопоставляет однородному грассманову многочлену $\omega \in \Lambda^n V$ единственный знакопеременный тензор $\widetilde{\omega} \in \operatorname{Alt}^n V \subset V^{\otimes n}$, лежащий в классе $\omega \in V^{\otimes n} / (\mathcal{I}_{\mathrm{sk}} \cap V^{\otimes n})$.

6.3.1. Грассмановы частные производные. Как и для обычных многочленов[2], каждый ковектор $\xi \in V^*$ задаёт линейное отображение $\mathrm{pl}_\xi : \Lambda^n V \to \Lambda^{n-1} V$ *поляризации вдоль* ξ, которое переводит грассманов многочлен $\omega \in \Lambda^n V$ в проекцию на $\Lambda^{n-1} V$ результата свёртки полной поляризации $\widetilde{\omega}$ многочлена ω с ковектором ξ по первому тензорному сомножителю и включается

[1] См. предл. 6.2 на стр. 84.
[2] Ср. с n° 6.1.1 на стр. 84

в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} V^{\otimes n} \supset \mathrm{Alt}^n V \arrow[r, "i_\xi"] \arrow[d, "\wr"] & V^{\otimes(n-1)} \arrow[d, two heads] \\ \Lambda^n V \arrow[r, "\mathrm{pl}_\xi"] & \Lambda^{n-1} V . \end{tikzcd}$$

Определим *грассманову производную* от ω в направлении ковектора $\xi \in V^*$ формулой

$$\partial_\xi \omega \overset{\text{def}}{=} n\,\mathrm{pl}_\xi \omega .$$

Так как тензор $\widetilde{\omega}$ кососимметричен, для любых $\xi,\ \eta,\ \psi_1, \dots , \psi_{n-2} \in V^*$

$$i_\xi i_\eta \widetilde{\omega}\left(\psi_1, \dots \psi_{n-2}\right) = \omega\left(\xi, \eta, \psi_1, \dots \psi_{n-2}\right) = -\omega\left(\eta, \xi, \psi_1, \dots \psi_{n-2}\right) = -i_\eta i_\xi \widetilde{\omega}\left(\psi_1, \dots \psi_{n-2}\right) ,$$

т. е. грассмановы поляризации и грассмановы частные производные антикоммутируют:

$$\mathrm{pl}_\xi \mathrm{pl}_\eta = -\mathrm{pl}_\eta \mathrm{pl}_\xi \quad \text{и} \quad \partial_\xi \partial_\eta = -\partial_\eta \partial_\xi ,$$

в частности $\partial_\xi^2 = 0$ для любого $\xi \in V^*$, что согласуется с тем, что грассмановы многочлены линейны по каждой переменной. Как и в коммутативном случае[1], выполняется равенство

$$\widetilde{\omega}(\xi_1, \dots , \xi_n) = \frac{1}{n!}\,\partial_{\xi_1} \dots \partial_{\xi_n} \omega . \tag{6-21}$$

Если ковекторы $x_i \in V^*$ и векторы $e_i \in V$ образуют двойственные друг другу базисы пространств V и V^*, то в силу билинейной зависимости $\mathrm{pl}_\xi \omega$ от ξ и ω, грассманова производная в направлении ковектора $\xi = \sum_i \alpha_i x_i$ может быть записана как $\partial_\xi = \sum_i \alpha_i\, \partial_{x_i}$. При этом ненулевой вклад в $\partial_{x_i} \omega$ будет лишь от входящих в ω мономов $e_J = e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_n}$ с $J \ni i$.

Упражнение 6.9. Убедитесь, что $\partial_{x_{i_1}} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n} = e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$ для любой[2] последовательности попарно разных индексов $i_1, \dots , i_n$.

Таким образом, дифференцирование грассманова монома в направлении базисного ковектора, двойственного к первой слева переменной в мономе, ведёт себя как обычная частная производная $\partial / \partial_{e_{i_1}}$ по этой переменной. В силу анткоммутативности грассмановых переменных, дифференцирование по k-той слева переменной монома ведёт себя как $(-1)^{k-1} \partial / \partial_{e_{i_k}}$:

$$\begin{aligned} \partial_{x_{i_k}} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n} &= \partial_{x_{i_k}} (-1)^{k-1} e_{i_k} \wedge e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{k-1}} \wedge e_{i_{k+1}} \dots e_{i_n} = \\ &= (-1)^{k-1} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{k-1}} \wedge e_{i_{k+1}} \dots e_{i_n} . \end{aligned}$$

Иначе говоря, грассмановы производные удовлетворяют *грассманову правилу Лейбница*: для любых однородных грассмановых многочленов $\omega, \tau \in \Lambda V$ и любого ковектора $\xi \in V^*$

$$\partial_\xi(\omega \wedge \eta) = \partial_\xi(\omega) \wedge \eta + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge \partial_\xi(\eta) . \tag{6-22}$$

[1] Ср. с 6-6 на стр. 85

[2] Не обязательно возрастающей.

6.3.2. Линейный носитель грассманова многочлена. Как и в коммутативном случае, *линейный носитель* $\operatorname{supp}\omega \subset V$ однородного грассманова многочлена $\omega \in \Lambda^n V$ определяется как линейный носитель[1] $\operatorname{supp}(\widetilde{\omega})$ его полной поляризации $\widetilde{\omega} \in \operatorname{Alt}^n V \subset V^{\otimes n}$. Он равен пересечению всех таких подпространств $U \subset V$, что $\omega \in \Lambda^n U$, и является, тем самым, наименьшим из этих подпространств, как по включению, так и по размерности. Полной поляризацией грассманова многочлена

$$\omega = \sum\nolimits_I a_I e_I = \sum\nolimits_{i_1<\ldots<i_n} a_{i_1\ldots i_n} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}, \tag{6-23}$$

где $I = (i_1, \ldots, i_n)$ пробегает возрастающие последовательности из n индексов, является тензор[2]

$$\widetilde{\omega} = \frac{1}{n!} \sum\nolimits_I a_I \langle e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_n} \rangle = \sum\nolimits_{i_1,\ldots,i_n} \tilde{a}_{i_1\ldots i_n} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_n}, \tag{6-24}$$

где справа суммирование идёт уже по всем последовательностям из n не повторяющихся индексов, а коэффициенты $\tilde{a}_{i_1\ldots i_n}$ кососимметричны по $i_1, \ldots, i_n$ и $\tilde{a}_{i_1\ldots i_n} = a_{i_1\ldots i_n}/n!$ когда индексы строго возрастают. По теор. 5.1 на стр. 70, подпространство $\operatorname{supp}(\widetilde{\omega}) \subset V$ является образом полной свёртки $c_{\widetilde{\omega}} : V^{*\otimes(n-1)} \to V$ с тензором $\widetilde{\omega} \in V^{\otimes n}$ по первым $n-1$ тензорным сомножителям[3] и линейно порождается векторами

$$w_J = c_{\widetilde{\omega}}(x_{j_1} \otimes \ldots \otimes x_{j_{n-1}}) = \sum_{i \notin J} \tilde{a}_{j_1\ldots j_{n-1} i}\, e_i, \tag{6-25}$$

где $J = (j_1, \ldots, j_{n-1})$ пробегает возрастающие последовательности из $n-1$ индексов.

Предложение 6.5 (грассмановы многочлены с минимальным ненулевым носителем)
Следующие три условия на грассманов многочлен (6-23) эквивалентны:

1) $\dim \operatorname{supp}\omega \leqslant n$ 2) $\omega = u_1 \wedge \ldots \wedge u_n$, где $u_1, \ldots, u_n \in V$ 3) $\forall\, u \in \operatorname{supp}\omega\ u \wedge \omega = 0$

4) для любых двух наборов I, J возрастающих индексов $i_1 < \ldots < i_{m+1}$ и $j_1 < \ldots < j_{m-1}$, таких, что $I \not\supset J$, выполнены *соотношения Плюккера*

$$\sum\nolimits_{\nu=1}^{m+1} (-1)^{\nu-1} \tilde{a}_{j_1\ldots j_{m-1} i_\nu} a_{i_1\ldots \hat{i}_\nu \ldots i_{m+1}} = 0, \tag{6-26}$$

где «крышка» в $\tilde{a}_{i_1\ldots\hat{i}_\nu\ldots i_{m+1}}$ означает, что индекс i_ν следует пропустить.

Доказательство. Условия (1), (2) и (3) очевидно эквивалентны и означают, что ω лежит в старшей внешней степени $\Lambda^{\dim\operatorname{supp}\omega}$ своей линейной оболочки $\operatorname{supp}\omega$.

Упражнение 6.10. Пусть $\omega \in \Lambda V$ и $\dim V = d$. Убедитесь, что $v \wedge \omega = 0$ для всех $v \in V$ если и только если $\omega \in \Lambda^d V$.

Соотношение (6-26) констатирует обнуление коэффициента при $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_{m+1}}$ в произведении $w_J \wedge \omega$ для линейно порождающих $\operatorname{supp}\omega$ векторов w_J из формулы (6-25). □

[1] См. n° 5.2.2 на стр. 69.

[2] См. формулу (5-21) на стр. 77.

[3] В силу знакопеременности тензора $\widetilde{\omega}$ выбор последовательности из $n-1$ сворачиваемых сомножителей может привести лишь к смене знака у результата.

Пример 6.6 (квадрика Плюккера)

Для четырёхмерного пространства V с базисом $e_1, \dots, e_4$ и $\omega = \sum_{i<j} a_{ij} e_i \wedge e_j$ соотношение Плюккера для наборов индексов $I = (2,3,4)$ и $J = (1)$ имеет вид[1] $-a_{12}a_{34} + a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23} = 0$, и любой другой выбор непересекающихся наборов (i_1, i_2, i_3) и (j) приводит к тому же самому с точностью до общего знака соотношению. Если $j \in \{i_1, i_2, i_3\}$, скажем $I = (1,2,3)$, $J = (1)$, то получается тривиальное соотношение $a_{12}a_{13} - a_{13}a_{12} = 0$.

Пример 6.7 (грассманиан $\mathrm{Gr}(2,5)$)

Если $V = \Bbbk^5$ с базисом $e_1, \dots, e_5$, то по сл. 16.5 на стр. 303 разложимость грассмановой квадратичной формы $\omega = \sum_{i<j} a_{ij} e_i \wedge e_j \in \Lambda^2 V$ равносильна равенству $\omega \wedge \omega = 0$. Поскольку $\omega \wedge \omega$ лежит в пятимерном пространстве $\Lambda^4 \Bbbk^5$, это равенство эквивалентно пяти квадратичным соотношениям на коэффициенты a_{ij} формы ω. Эти пять соотношений совпадают с пятью соотношениями Плюккера, возникающими из пяти пар непересекающихся наборов индексов $I = (i_1, i_2, i_3)$ и $J = (j)$, объединения которых $I \sqcup J$ пробегают пять различных четырёхэлементных подмножеств в $\{1, \dots, 5\}$. При фиксированном $I \sqcup J$ четыре различных разбиения этого множества на непересекающиеся поднаборы из одного и трёх элементов дают, как и в предыдущем прим. 6.6, одинаковые с точностью до общего знака соотношения вида

$$\tilde{a}_{i_1 j} a_{i_2 i_3} - \tilde{a}_{i_2 j} a_{i_1 i_3} + \tilde{a}_{i_3 j} a_{i_1 i_2} = 0\,.$$

При $j = i_1 \in \{i_1, i_2, i_3\}$ получается тривиальное соотношение $a_{i_1 i_2} a_{i_1 i_3} - a_{i_1 i_3} a_{i_1 i_2} = 0$.

6.4. Грассманианы. Множество всех m-мерных векторных подпространств d-мерного векторного пространства V называется *грассманианом* $\mathrm{Gr}(m,d)$ или $\mathrm{Gr}(m,V)$, если важно подчеркнуть природу пространства V. С проективной точки зрения грассманиан $\mathrm{Gr}(m,d)$ есть множество $(m-1)$-мерных проективных подпространств в $\mathbb{P}_{d-1}$. Грассманианы являются естественными обобщениями проективных пространств: двойственные пространства[2]

$$\mathbb{P}_n = \mathrm{Gr}(1, n+1) \quad \text{и} \quad \mathbb{P}_n^\times = \mathrm{Gr}(n, n+1)$$

служат простейшими примерами грассманианов. Двойственность[3] $U \leftrightarrow \mathrm{Ann}\, U$ между m-мерными и $(d-m)$-мерными подпространствами двойственных векторных пространств V и V^* задаёт каноническое отождествление $\mathrm{Gr}(m,V) = \mathrm{Gr}(d-m, V^*)$.

6.4.1. Плюккерово вложение. Грассманиан $\mathrm{Gr}(m,V)$ вкладывается в $\mathbb{P}(\Lambda^m V)$ *отображением Плюккера*

$$p_m :\ \mathrm{Gr}(m,V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^m V)\,, \tag{6-27}$$

которое переводит m-мерное векторное подпространство $U \subset V$ в одномерное векторное подпространство $\Lambda^m U \subset \Lambda^m V$. Если векторы $u_1, \dots, u_m$ образуют базис в U, то $p_m(U) = u_1 \wedge \ldots \wedge u_m$. Выбор другого базиса $w_1, \dots, w_m$ из векторов $w_i = \sum_j a_{ij} u_j$ заменяет $u_1 \wedge \ldots \wedge u_m$ на пропорциональный разложимый грассманов многочлен $w_1 \wedge \ldots \wedge w_m = \det(a_{ij})\, u_1 \wedge \ldots \wedge u_m$.

Предложение 6.6

Отображение Плюккера (6-27) инъективно, а его образ является алгебраическим многообразием, задаваемым квадратичными соотношениями Плюккера из предл. 6.5.

---

[1] Ср. с прим. 11.5 на стр. 196 и сл. 16.5 на стр. 303 части I.

[2] См. n° 13.4.6 на стр. 245 части I.

[3] См. n° 7.4.3 на стр. 125 части I.

Доказательство. Образ отображения (6-27) состоит из всех разложимых грассмановых многочленов степени m и описывается предл. 6.5. Покажем, что отображение Плюккера инъективно. Если $U \neq W$, то в V есть базис из таких векторов $v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_s, w_1, \dots, w_s, v_1, \dots, v_t$, что векторы $v_1, \dots, v_r$ образуют базис в $U \cap W$, а наборы векторов

$$v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_s \quad \text{и} \quad v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s$$

являются базисами в U и в W. Отображение Плюккера сопоставляет им разные базисные мономы $v_1 \wedge \dots \wedge v_r \wedge u_1 \wedge \dots \wedge u_{m-r}$ и $v_1 \wedge \dots \wedge v_r \wedge w_1 \wedge \dots \wedge w_{m-r}$ пространства $\Lambda^n V$. □

6.4.2. Многообразие Сегре как сечение грассманиана. Рассмотрим прямую сумму

$$W = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$$

конечномерных векторных пространств V_i. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ и произвольной последовательности целых чисел $m_1, \dots, m_n$, где $0 \leqslant m_i \leqslant \dim V_i$ и $m_1 + \dots + m_n = k$, обозначим через $W_{m_1 \dots m_n} \subset \Lambda^k W$ линейную оболочку всех разложимых грассмановых многочленов $w_1 \wedge \dots \wedge w_k$, у которых ровно m_i сомножителей w_ν лежит в V_i при всех $i = 1, \dots, n$.

Упражнение 6.11. Покажите, что правило $\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_n \mapsto \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n$ корректно задаёт линейный изоморфизм $\Lambda^{m_1} V_1 \otimes \dots \otimes \Lambda^{m_n} V_n \xrightarrow{\sim} W_{m_1 \dots m_n}$, и что

$$\Lambda^k W = \bigoplus\nolimits_{m_1, \dots, m_n} W_{m_1 \dots m_n} \simeq \bigoplus\nolimits_{m_1, \dots, m_n} \Lambda^{m_1} V_1 \otimes \dots \otimes \Lambda^{m_n} V_n \,. \tag{6-28}$$

Тензорное произведение $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ канонически изоморфно слагаемому $W_{1 \dots 1} \subset \Lambda^n W$ из разложения (6-28). Изоморфизм переводит каждый разложимый тензор $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$ в грассманов моном $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$. Мы заключаем, что многообразие Сегре из n° 1.1.2 на стр. 10 представляет собою пересечение $\mathrm{Gr}(n, W) \cap \mathbb{P}(W_{1 \dots 1})$ и является алгебраическим многообразием в $\mathbb{P}(\Lambda^n W)$, задаваемым квадратичными соотношениями Плюккера из предл. 6.5 и линейными уравнениями, описывающими векторное подпространство $W_{1 \dots 1} \subset \Lambda^n W$.

6.4.3. Однородные координаты на грассманиане обобщают однородные координаты на проективном пространстве. Если зафиксировать в V базис $e_1, \dots, e_d$, то m-мерное подпространство $U \subset V$ можно задавать матрицей $X_{\boldsymbol{u}}$ размера $d \times m$, по строкам которой записаны координаты векторов $u_1, \dots, u_m$ какого-нибудь базиса $\boldsymbol{u}$ в U. Разумеется, такое представление не единственно: другому базису $\boldsymbol{w}$ в U, составленному из векторов $w_1, \dots, w_m$, отвечает другая матрица $X_{\boldsymbol{w}} = C_{wu} X_{\boldsymbol{u}}$, получающаяся из $X_{\boldsymbol{u}}$ умножением слева на невырожденную квадратную $m \times m$-матрицу перехода, которая определяется соотношением

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = C_{wu} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}.$$

Мы заключаем, что грассманиан $\mathrm{Gr}(m, d) = \mathrm{GL}_m(\Bbbk) \setminus \mathrm{Mat}^\circ_{m \times d}(\Bbbk)$ является множеством орбит левого действия группы $\mathrm{GL}_m(\Bbbk)$ на множестве $\mathrm{Mat}^\circ_{m \times d}(\Bbbk)$ матриц размера $m \times d$ и ранга m. При $m = 1$ это описание превращается в описание проективного пространства $\mathbb{P}_{d-1}$ как множества ненулевых координатных строк длины d с точностью до умножения на ненулевые константы. Таким образом, матрица $X_{\boldsymbol{u}}$ с точностью до умножения слева на обратимые матрицы является прямым аналогом однородных координат.

6.4.4. Плюккеровы координаты. Плюккерово вложение $p_m : \mathrm{Gr}(m,V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^m V)$ сопоставляет m-мерному подпространству $U \subset V$ с базисом $u_1, \dots, u_m$ одномерное подпространство $\Lambda^m U \subset \Lambda^m V$ с базисом $u_1 \wedge \dots \wedge u_m$. Если зафиксировать в V базис $e_1, \dots, e_d$, а в $\Lambda^n V$ — базис из грассмановых мономов $e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$, то I-й однородной координатой разложимого грассманова многочлена $u_1 \wedge \dots \wedge u_m$ относительно базиса из мономов e_I будет I-й минор $\det X_I$ порядка m, где $X_I \subset X$ — подматрица, образованная столбцами с номерами $i_1, \dots, i_n$.

Упражнение 6.12. Убедитесь в этом.

При умножении матрицы X слева на обратимую матрицу $C \in \mathrm{GL}_m$ все $(m \times m)$-миноры $\det X_I$ матрицы X умножатся на ненулевую константу $\det C$. Рассматриваемый с точностью до пропорциональности набор миноров $\det X_I$ называется *плюккеровыми координатами* задаваемой матрицей X точки грассманиана $\mathrm{Gr}(m,d)$. Таким образом, плюккеровы координаты суть ограничения однородных координат в $\mathbb{P}(\Lambda^m V)$ на образ грассманиана при плюккеровом вложении $p_m : \mathrm{Gr}(m,V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^m V)$.

6.4.5. Стандартное аффинное покрытие и аффинные координаты. Аналогом i-й стандартной аффинной карты[1] $U_i = U_{x_i}$ проективного пространства $\mathbb{P}_n = \mathrm{Gr}(1,n)$ на произвольном грассманиане $\mathrm{Gr}(m,d)$ является множество U_I всех $m \times d$ матриц X с ненулевым минором $\det X_I$. В $\mathrm{GL}_m(\Bbbk)$-орбите каждой такой матрицы X есть единственный представитель, имеющий в столбцах I единичную матрицу размера $m \times m$. Обозначим его $T^{(I)} \overset{\text{def}}{=} X_I^{-1} X$. Стоящие вне столбцов с номерами из I матричные элементы $t^{(I)}_{\mu\nu}$ матрицы $T^{(I)}$ называются *локальными аффинными координатами* точки $X \in \mathrm{Gr}(m,d)$ в *стандартной* карте U_I, и всего их имеется $m(d-m)$. Плюккерово вложение $p_m : \mathrm{Gr}(m,V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^m V)$ биективно отображает карту $U_I \subset \mathrm{Gr}(m,V)$ на пересечение образа $p_m(\mathrm{Gr}(m,V))$ со стандартной аффинной картой $U_I \subset \mathbb{P}(\Lambda^m V)$ на проективном пространстве.

На геометрическом языке карта $U_I \subset \mathrm{Gr}(m,V)$ состоит из всех подпространств $U \subset V$, которые изоморфно отображаются на I-е координатное подпространство $E_I \subset V$, натянутое на базисные векторы $e_{i_1}, \dots, e_{i_m}$, при проекции $\pi_I : V \twoheadrightarrow E_I$ вдоль дополнительного координатного подпространства $E_J \subset V$, натянутого на базисные векторы e_j с $j \notin I$. Подпространство $U \subset V$ лежит в стандартной карте U_I если и только если $U \cap E_J = 0$, и в каждом таком подпространстве U имеется единственный базис $u_1, \dots, u_m$, который проектируется в стандартный базис $e_{i_1}, \dots, e_{i_m}$ пространства E_I. Матрица $T^{(I)}$ составлена из координат этих векторов u_i.

6.4.6. Аффинная окрестность точки. Более общим образом, для любого $(d-m)$-мерного векторного подпространства $W \subset V$ множество $U_W = \{U \in \mathrm{Gr}(m,V) \mid U \cap W = 0\}$ является аффинным пространством над векторным пространством $\mathrm{Hom}(V/W, W)$. В самом деле, любые два дополнительные к W подпространства U_1, U_2 изоморфно проектируются на V/W при факторизации $\pi_W : V \twoheadrightarrow V/W$. Поэтому у каждого класса $[v] = [v_1] = [v_2] \in V/W$ имеются единственные представители $v_1 \in U_1$ и $v_2 \in U_2$. Обозначая через $\overrightarrow{U_1 U_2} : V/W \to W$ линейное отображение, переводящее класс $[v] \in V/W$ в разность $v_2 - v_1 \in W$ этих представителей, мы сопоставляем каждой паре точек $U_1, U_2 \in U_W$ вектор $\overrightarrow{U_1 U_2} \in \mathrm{Hom}(V/W, W)$. Очевидно, что $\overrightarrow{U_1 U_2} + \overrightarrow{U_2 U_3} = \overrightarrow{U_1 U_3}$ для всех $U_1, U_2, U_3 \in U_W$. Если зафиксировать любое «начальное» подпространство $U \in U_W$ и отождествить его с V/W при помощи изоморфизма $\pi_W|_U : U \xrightarrow{\sim} V/W$, а $\mathrm{Hom}(V/W, W)$ отождествить с $\mathrm{Hom}(U, W)$, то отображение векторизации с центром в U, пе-

[1] Она состоит из всех точек $(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_n$ с $x_i \neq 0$. Каждая такая точка p однозначно представляется вектором, у которого $x_i = 1$, и остальные n координат этого вектора берутся в качестве локальных аффинных координат точки p в карте U_i, см. n° 13.4.2 на стр. 242 части I.

реводящее каждую точку $U_1 \in U_W$ в её радиус вектор $\overrightarrow{UU_1} \in \mathrm{Hom}(U, W)$, будет сопоставлять каждому дополнительному к W подпространству $U_1 \subset U \oplus W$ линейное отображение $U \to W$, графиком которого является подпространство U_1. Очевидно, что такое сопоставление биективно. Поскольку $W \simeq V / U$, можно сказать, что каждая точка $U \in \mathrm{Gr}(m, V)$ обладает аффинной окрестностью, получающейся «откладыванием» от U всевозможных векторов из пространства $\mathrm{Hom}(U, V/U)$. Если зафиксировать какое-нибудь дополнительное к U подпространство W и представлять классы из V / U векторами из W, то результатом «откладывания» от U отображения $\tau : U \to W$ будет график $\Gamma_\tau = \{(u, \tau(u)) \in U \oplus W \mid u \in U\}$ отображения τ, представляющий собою дополнительное к W подпространство в $V = U \oplus W$.

6.4.7. Квадрика Плюккера в $\mathbb{P}_5$ и прямые в $\mathbb{P}_3$. Первым отличным от проективного пространства грассманианом является $\mathrm{Gr}(2, 4)$, точками которого служат двумерные векторные подпространства U в $V = \Bbbk^4$ или, что то же самое, проективные прямые $\ell = \mathbb{P}(U)$ в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$. Грассманиан $\mathrm{Gr}(2, 4)$ вкладывается в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ *отображением Плюккера*

$$p : \mathrm{Gr}(2, 4) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2 V), \quad U \mapsto \Lambda^2 U, \tag{6-29}$$

которое переводит прямую $(ab) \subset \mathbb{P}_3$, являющуюся проективизацией двумерного векторного подпространства $U \subset V$ с базисом a, b, в одномерное подпространство $\Lambda^2 U \subset \Lambda^2 V$, порождённое грассмановым произведением $a \wedge b$. Согласно сл. 16.5 на стр. 303, разложимость грассмановой квадратичной формы $\omega \in \Lambda^2 V$ на два линейных множителя равносильна тому, что $\omega \wedge \omega = 0$. Это соотношение задаёт в пространстве $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ *квадрику Плюккера*

$$P = V(q) = \{\omega \in \Lambda^2 V \mid \omega \wedge \omega = 0\}, \tag{6-30}$$

Симметричная билинейная форма $\tilde{q} : \Lambda^2 V \times \Lambda^2 V \to \Bbbk$, которая является поляризацией уравнения этой квадрики, однозначно с точностью до пропорциональности определяется тем, что для всех $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^2 V$ в одномерном векторном пространстве $\Lambda^4 V$ выполняется равенство

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \tilde{q}(\omega_1, \omega_2) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4, \tag{6-31}$$

где e_1, e_2, e_3, e_4 — произвольный базис в V.

Упражнение 6.13. Убедитесь, что задаваемая равенством (6-31) форма $\tilde{q}$ билинейна, симметрична, невырождена и при выборе другого базиса в V умножается на ненулевую константу. Напишите её матрицу Грама в стандартном базисе из мономов $e_{ij} = e_i \wedge e_j$.

В координатах x_{ij} относительно стандартного базиса $e_{ij} = e_i \wedge e_j$, равенство $\omega \wedge \omega = 0$ для формы $\omega = \sum_{ij} x_{ij} e_{ij}$ имеет вид[1] $x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23} = 0$, а отображение (6-29) переводит прямую (ab), порождённую векторами a, b, строки координат которых в базисе $e_1, \dots, e_4$ составляют 2×4 матрицу $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$, в грассманову квадратичную форму $a \wedge b$ с координатами $x_{ij} = \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix}$.

Лемма 6.1

Две прямые $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_3$ пересекаются если и только если их плюккеровы образы ортогональны относительно квадратичной формы (6-31).

[1]См. прим. 6.6 на стр. 93.

Доказательство. Если $\ell_1 \cap \ell_2 = \varnothing$, то в V существует такой базис e_1, e_2, e_3, e_4, что $\ell_1 = (e_1 e_2)$, а $\ell_2 = (e_3 e_4)$. Тогда $p(\ell_1) \wedge p(\ell_2) = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \neq 0$. Если ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в точке a, то $\ell_1 = (ab)$, а $\ell_2 = (ac)$ для некоторых $b, c \in V$, и $p(\ell_1) \wedge p(\ell_2) = a \wedge b \wedge a \wedge c = 0$. □

Следствие 6.2
$P \cap T_p P = \{p(\ell') \mid \ell' \cap \ell \neq \varnothing\}$ для любой точки $p = p(\ell) \in P$.

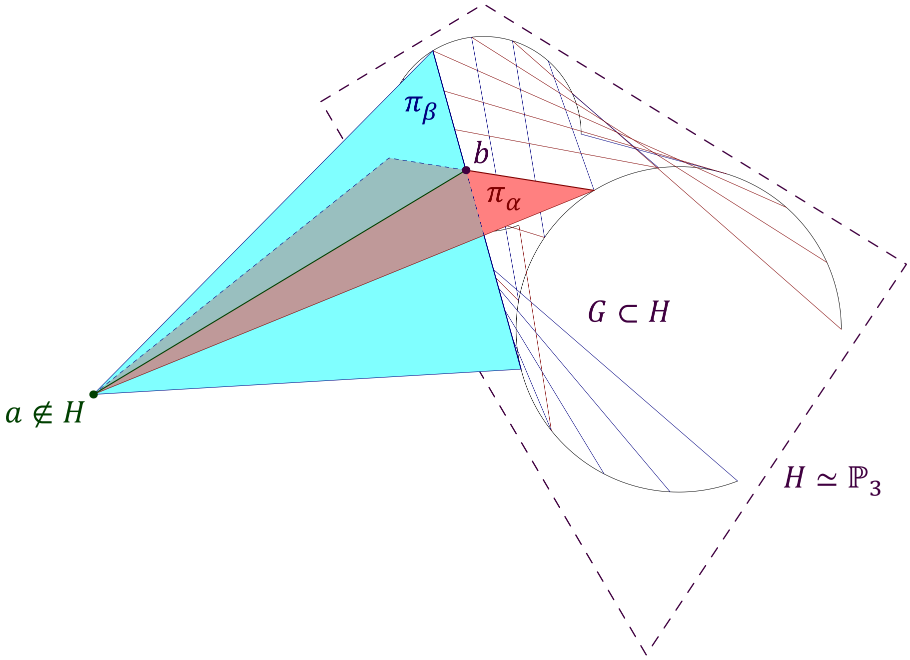


Рис. 6◇1. Конус $C = P \cap T_p P$.

Пример 6.8 (связки и пучки прямых в $\mathbb{P}_3$)
Множество прямых в $\mathbb{P}_3$ называется *связкой*, если его плюккеров образ является двумерной плоскостью. Каждая такая плоскость $\pi \subset P$ линейно порождается тройкой неколлинеарных точек $a_i = p(\ell_i)$, $i = 1, 2, 3$. При этом $\pi = T_{a_1} P \cap T_{a_2} P \cap T_{a_3} P \subset P$. По лем. 6.1 и сл. 6.2 соответствующая связка прямых состоит из всех прямых, пересекающих каждую из трёх попарно пересекающихся прямых ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 в $\mathbb{P}_3$. Три прямые в $\mathbb{P}_3$ попарно пересекаются ровно в двух случаях: когда они лежат в одной плоскости или когда они проходят через одну точку. Таким образом, есть два геометрически разных типа связок прямых на $\mathbb{P}_3$:

α-плоскость $\pi_\alpha(c) \subset P$, состоящая из всех прямых, проходящих через данную точку $c \in \mathbb{P}_3$

β-плоскость $\pi_\beta(\Pi) \subset P$, состоящая из всех прямых, лежащих в данной плоскости $\Pi \in \mathbb{P}_3$.

Эти два семейства плоскостей на квадрике P таковы, что любые две плоскости одного типа пересекаются по точке: $\pi_\beta(\Pi_1) \cap \pi_\beta(\Pi_2) = p\left(\Pi_1 \cap \Pi_2\right)$, $\pi_\alpha(c_1) \cap \pi_\alpha(c_2) = p\big((c_1 c_2)\big)$, а две плоскости $\pi_\beta(\Pi)$, $\pi_\alpha(c)$ разных типов не пересекаются при $c \notin \Pi$, а при $c \in \Pi$ пересекаются по прямой

$$\lambda(c, \Pi) = \{p(\ell) \in P \mid c \in \ell \subset \Pi\}, \tag{6-32}$$

которая является плюккеровым образом пучка прямых, лежащих в плоскости Π и проходящих через точку $c \in \Pi$. Покажем, что все лежащие на квадрике P прямые имеют вид (6-32). Для этого рассмотрим конус $C = P \cap T_a P$ с вершиной в точке $a \in P$, образованный всеми проходящими через a прямыми, лежащими на P, и зафиксируем любое не проходящее через a трёхмерное проективное подпространство $H \subset T_a P$, см. рис. 6⋄1. Пересечение $G = C \cap H$ является гладкой 1-планарной квадрикой в H, и любая проходящая через a прямая на P имеет вид $(ab) = \pi_\alpha \cap \pi_\beta$ для некоторой точки $b \in G$ и плоскостей π_α, π_β натянутых на точку p и пару проходящих через b прямолинейных образующих квадрики G.

Задачи для самостоятельного решения к §5

Задача 6.1. Найдите размерности линейных носителей многочленов

а) $-108x_1^2x_2 + 72x_1^2x_3 - 72x_1x_2x_3 + 48x_1x_3^2 - 108x_2^3 + 216x_2^2x_3 - 156x_2x_3^2 + 40x_3^3$

б) $6x_1^3 - 9x_1^2x_2 + 6x_1^2x_3 - 9x_1x_2^2 + 12x_1x_2x_3 - 4x_1x_3^2 + 12x_2^3 - 18x_2^2x_3 + 10x_2x_3^2 - 2x_3^3$

в) $20x_1^3 + 50x_1^2x_2 + 38x_1^2x_3 + 40x_1x_2^2 + 64x_1x_2x_3 + 24x_1x_3^2 + 15x_2^3 + 23x_2^2x_3 + 21x_2x_3^2 + 5x_3^3$.

Задача 6.2. Существует ли линейная обратимая замена координат, превращающая многочлен

$$9x^3 - 15x^2y - 6x^2z + 9xy^2 + 18xz^2 - 2y^3 + 3y^2z - 15yz^2 + 7z^3$$

в многочлен от $\leqslant 2$ переменных? Если да, предъявите такую замену явно.

Задача 6.3. Векторы $e_1, \dots, e_4$ линейно независимы. Выясните, разложима ли грассманова кубическая форма $-e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 + 2\, e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 + 4\, e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 + 3\, e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$ в произведение трёх линейных форм от $e_1, \dots, e_4$. Если да, выпишите такое разложение явно.

Задача 6.4. Векторы $e_1, \dots, e_5$ линейно независимы. Выясните, разложимы ли грассмановы квадратичные формы (если да — предъявите разложение явно, если нет — объясните, почему):

а) $-5e_1\wedge e_2+5e_1\wedge e_3-6e_1\wedge e_4+2e_1\wedge e_5-10e_2\wedge e_3-e_2\wedge e_4-8e_2\wedge e_5+13e_3\wedge e_4+4e_3\wedge e_5-10e_4\wedge e_5$

б) $-9e_1\wedge e_2+6e_1\wedge e_3+5e_1\wedge e_4+6e_1\wedge e_5-9e_2\wedge e_3-2e_2\wedge e_4+4e_2\wedge e_5+8e_3\wedge e_4+8e_3\wedge e_5+3e_4\wedge e_5$

в) $-2e_1\wedge e_2-e_1\wedge e_3-9e_1\wedge e_4+2e_1\wedge e_5-9e_2\wedge e_3-2e_2\wedge e_4+6e_2\wedge e_5-9e_3\wedge e_4-5e_3\wedge e_5+e_4\wedge e_5$

г) $-e_1\wedge e_2+3e_1\wedge e_3-e_1\wedge e_4-4e_1\wedge e_5+10e_2\wedge e_3-9e_2\wedge e_5-10e_3\wedge e_4-13e_3\wedge e_5-9e_4\wedge e_5$.

Задача 6.5. Пусть $e_1, \dots, e_n$ и $x_1, \dots, x_n$ образуют двойственные базисы в V и V^*, а

$$f = \sum_{m_1+\ldots+m_n=m} a_{m_1\ldots m_n} \frac{m!}{m_1!\ldots m_n!} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n} \in S^m V^* .$$

Убедитесь, что $\tilde f(e_1^{m_1}, \dots, e_n^{m_n}) = a_{m_1\ldots m_n}$.

Задача 6.6 (дискриминант). Рассмотрим на пространстве V бинарных квадратичных форм

$$f = a_0x_0^2 + 2a_1x_0x_1 + a_2x_1^2$$

многочлен $\Gamma \in S^2V^*$, сопоставляющий форме f определитель Грама[1] $\Gamma(f) = a_0a_2 - a_1^2$. Покажите, что $\widetilde{\Gamma}\big((\alpha_0x_0 + \alpha_1x_1)^2, (\beta_0x_0 + \beta_1x_1)^2\big) = \det^2(\alpha, \beta) = (\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0)^2$.

Задача 6.7 (определитель Ганкеля). Рассмотрим на пространстве V бинарных форм четвёртой степени

$$f = a_0x_0^4 + 4a_1x_0^3x_1 + 6a_2x_0^2x_1^2 + 4a_3x_0x_1^3 + a_4x_1^2$$

[1] Т. е. $-D/4$, где $D = 4a_1 - 4a_0a_2$ — *дискриминант* квадратного трёхчлена f.

многочлен $H \in S^3V^*$, сопоставляющий форме f *определитель Ганкеля*

$$H(f) = \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}.$$

Покажите, что $\widetilde{H}\big((\alpha_0x_0+\alpha_1x_1)^4, (\beta_0x_0+\beta_1x_1)^4, (\gamma_0x_0+\gamma_1x_1)^4\big) = \det^2(\alpha,\beta)\det^2(\alpha,\gamma)\det^2(\beta,\gamma)$.

Задача 6.8 (аполярность). Пусть $\operatorname{char}\Bbbk = 0$, и $m \geqslant n$. Для $\varphi \in S^nV$ и $f \in S^mV^*$ обозначим через $A_f(\varphi) \in S^{m-n}V^*$ проекцию лежащей в $V^{*\otimes(m-n)}$ свёртки полных поляризаций

$$\tilde{f} \in \operatorname{Sym}^m V^* \subset V^{*\otimes m} \quad \text{и} \quad \widetilde{\varphi} \in \operatorname{Sym}^n V \subset V^{\otimes n}$$

по всем n тензорным сомножителям[1] в $V^{\otimes n}$. Если $A_f(\varphi) = 0$, то форма φ называется *аполярной* к f. Покажите, что при произвольно зафиксированном $f \in S^mV^*$ отображение

$$A_f : S^nV \to S^{m-n}V^*, \quad \varphi \mapsto A_f(\varphi), \tag{6-33}$$

линейно и мультипликативно: $A_f(\varphi\psi) = A_f(\varphi)A_f(\psi)$, и если $e_1, \dots, e_d$ и $x_1, \dots, x_d$ образуют двойственные базисы в V и V^*, то при $n = m$ форма $(\alpha_1e_1 + \ldots + \alpha_de_d)^m$ тогда и только тогда аполярна к $f(x_1, \dots, x_d)$, когда $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$, а при $n = m-1$ форма $(\alpha_1e_1+\ldots+\alpha_de_d)^{m-1}$ аполярна к f если и только если $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$ при всех $1 \leqslant i \leqslant d$.

Задача 6.9 (каталектикант). В условиях зад. 6.8 при $m = 2n$ определитель матрицы отображения (6-33), написанной в базисах из мономов $e_1^{n_1}\dots e_d^{n_d}$ и $x_1^{n_1}\dots x_d^{n_d}$, где $n_1 + \ldots + n_d = n$, называется *каталектикантом* многочлена $f \in S^{2n}V^*$ и обозначается C_f. Найдите степень полиномиальной функции $f \mapsto C_f$ на векторном пространстве $S^{2n}V^*$, покажите, что она инвариантна относительно естественного действия группы $\mathrm{SL}(V)$ на $S^{2n}V^*$ заменами переменных $F : f(x_1, \dots, x_n) \mapsto f((x_1, \dots, x_n)F)$, опишите её полную поляризацию, и убедитесь, что при $n = d = 1$ каталектикант совпадает с определителем Грама из зад. 6.7, а при $n = d = 2$ — с определителем Ганкеля из зад. 6.7.

Задача 6.10. Фиксируем в одномерном пространстве $\Lambda^{\dim V}V$ базисный вектор ε и зададим между пространствами Λ^pV и Λ^qV с $p + q = \dim V$ спаривание[2] $\langle *, * \rangle : \Lambda^pV \times \Lambda^qV \to \Bbbk$ так, чтобы

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle \cdot \varepsilon$$

для всех $\omega_1 \in \Lambda^pV$, $\omega_2 \in \Lambda^qV$. Покажите, что это спаривание невырождено[3], и опишите оператор, двойственный относительно этого спаривания оператору левого внешнего умножения $\xi \mapsto v \wedge \xi$ на фиксированный вектор $v \in V$.

Задача 6.11. Покажите, что разложение Тейлора многочлена $\det(A)$ на пространстве линейных операторов $A : V \to V$ имеет вид

$$\det(\lambda A + \mu B) = \sum_{p+q=n} \lambda^p\mu^q \cdot \operatorname{tr}\left(\Lambda^pA \cdot \Lambda^qB^*\right),$$

[1] Поскольку тензоры симметричны, свёртка не зависит ни от выбора n сомножителей в $V^{*\otimes m}$, которые будут свёрнуты с $\widetilde{\varphi}$, ни от выбора биекции между ними и 1-м, 2-м и т. д. сомножителями $\widetilde{\varphi}$.

[2] См. n° 7.4.2 на стр. 123 части I.

[3] См. лем. 7.2 на стр. 123 части I.

где $\Lambda^p A: \Lambda^p V \to \Lambda^p V$, $v_1 \wedge \ldots \wedge v_p \mapsto Av_1 \wedge \ldots \wedge Av_p$, а оператор $\Lambda^q B^*: \Lambda^p V \to \Lambda^p V$ двойствен оператору $\Lambda^q B: \Lambda^q V \to \Lambda^q V$, $v_1 \wedge \ldots \wedge v_q \mapsto Bv_1 \wedge \ldots \wedge Bv_q$, относительно спаривания $\Lambda^p V \times \Lambda^q V \to \Bbbk$ из зад. 6.10.

Задача 6.12. Явно опишите полную поляризацию $\widetilde{\det}(X_1, \ldots, X_n)$ однородного многочлена $\det X$ на пространстве $\mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$.

Задача 6.13 (спинорное разложение). Пусть $U = \Bbbk^2$, $V = \mathrm{End}(U)$, и $\mathrm{char}\,\Bbbk \neq 2$. В разложении $V^{\otimes 2} \simeq \mathrm{Sym}^2 V \oplus \mathrm{Alt}^2 V$ из прим. 5.2 на стр. 79 постройте канонические изоморфизмы

$$\mathrm{Sym}^2 V \simeq \left(S^2 U \otimes S^2 U^*\right) \oplus \left(\Lambda^2 U \otimes \Lambda^2 U^*\right)$$
$$\mathrm{Alt}^2 V \simeq \left(S^2 U \otimes \Lambda^2 U^*\right) \oplus \left(\Lambda^2 U \otimes S^2 U^*\right).$$

Задача 6.14. Рассмотрим на четырёхмерном векторном пространстве V невырожденную квадратичную форму g с поляризацией $\widetilde{g}$ и обозначим через $G \subset \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ квадрику, задаваемую уравнением $g(x) = 0$, а через $\Lambda^2\widetilde{g}: \Lambda^2 V \times \Lambda^2 V \to \Bbbk$ — билинейную форму, значение которой на разложимых тензорах равно

$$\Lambda^2\widetilde{g}(v_1 \wedge v_2, w_1 \wedge w_2) \overset{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} \widetilde{g}(v_1, w_1) & \widetilde{g}(v_1, w_2) \\ \widetilde{g}(v_2, w_1) & \widetilde{g}(v_2, w_2) \end{pmatrix}.$$

Отождествим грассманиан $\mathrm{Gr}(2, V)$ прямых в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ с *квадрикой Плюккера*[1]

$$P = \{\omega \in \Lambda^2 V \mid \omega \wedge \omega = 0\} \subset \mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V).$$

Покажите, что: а) форма $\Lambda^2\widetilde{g}$ симметрична и невырождена б) множество всех касательных прямых к квадрике $G \subset \mathbb{P}_3$ изображается на квадрике $P \subset \mathbb{P}_5$ пересечением $P \cap \Lambda^2 G$, где

$$\Lambda^2 G = \{\omega \in \Lambda^2 V \mid \Lambda^2\widetilde{g}(\omega, \omega) = 0\}$$

в) для любой грассмановой квадратичной формы $\omega \in \Lambda^2 V$ существует единственная такая грассманова квадратичная форма $\omega^* \in \Lambda^2 V$, что

$$\omega' \wedge \omega^* = \Lambda^2\widetilde{g}(\omega', \omega) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$$

для всех $\omega' \in \Lambda^2 V$, где e_1, e_2, e_3, e_4 — произвольно зафиксированный базис в V г) *звёздочка Ходжа* $*: \mathbb{P}(\Lambda^2 V) \to \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$, $\omega \mapsto \omega^*$, является инволютивным проективным преобразованием, не зависящим от выбора базиса в V. д) Напишите матрицу Грама формы $\Lambda^2\widetilde{g}$ и матрицу инволюции Ходжа в базисе $e_i \wedge e_j$, составленном из ортонормальных векторов e_i формы g в V. е) Опишите множество неподвижных точек инволюции Ходжа в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$.

Задача 6.15. Рассмотрим предыдущую задачу для пространства $V = \mathrm{End}(U)$ из зад. 6.13 и возьмём в качестве g квадратичную форму det, задающую квадрику Сегре[2]

$$G = \{f \in \mathrm{End}(U) \mid \mathrm{rk}\, f = 1\} \subset \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V).$$

Покажите, что: а) два семейства прямолинейных образующих квадрики Сегре изображаются на квадрике Плюккера $P \subset \mathbb{P}_5$ двумя гладкими кониками $C_\pm = P \cap \Lambda_\pm$, которые высекаются из P парой дополнительных двумерных проективных плоскостей

$$\Lambda_+ = \mathbb{P}\left(S^2 U \otimes \Lambda^2 U^*\right) \quad \text{и} \quad \Lambda_- = \mathbb{P}\left(\Lambda^2 U \otimes S^2 U^*\right),$$

[1] См. прим. 6.6 на стр. 93.

[2] См. прим. 1.4 на стр. 11 части I.

канонически вложенных в $\mathbb{P}\left(\Lambda^2\operatorname{End}(U)\right)$ по зад. 6.13 б) плоскости $\Lambda_\pm$ состоят из неподвижных точек инволюции Ходжа из зад. 6.14 (г) в) коники $C_\pm$ являются образами прямых[1] $\mathbb{P}_1^+ = \mathbb{P}(U)$ и $\mathbb{P}_1^- = \mathbb{P}(U^*)$ при вложениях Веронезе

$$\mathbb{P}(U) \hookrightarrow \mathbb{P}(S^2U) \simeq \Lambda_+\,,\ u \mapsto u^2 \quad \text{и} \quad \mathbb{P}(U^*) \hookrightarrow \mathbb{P}(S^2U^*) \simeq \Lambda_-\,,\ \xi \mapsto \xi^2\,.$$

Иными словами, имеется коммутативная диаграмма[2]:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}_1^+ = \mathbb{P}(U) \arrow[rr, hook, "\text{Веронезе}"'] & & \mathbb{P}(S^2U) \simeq \Lambda_+ \arrow[d, hook] \\
\mathbb{P}_1^+ \times \mathbb{P}_1^- \arrow[u, "\pi_+"] \arrow[d, "\pi_-"'] \arrow[r, "\text{Сегре}", "\sim"'] & G \subset \mathbb{P}\operatorname{End}(U) \arrow[r, dashed, "\text{Плюккер}"] & \mathbb{P}\begin{pmatrix} \Lambda^2U^* \otimes S^2U \\ \oplus \\ S^2U^* \otimes \Lambda^2U \end{pmatrix} \\
\mathbb{P}_1^- = \mathbb{P}(U^*) \arrow[rr, hook, "\text{Веронезе}"] & & \mathbb{P}(S^2U^*) \simeq \Lambda_- \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Задача 6.16 (грассманова экспонента). Над полем *любой* характеристики положим $e^\omega \overset{\text{def}}{=} 1+\omega$ для *разложимых* $\omega \in \Lambda^{2m}$ и продолжим это определение на всё пространство $\Lambda^{2m}V$ полагая для $f = \sum \omega_i$, где все ω_i разложимы, $e^f \overset{\text{def}}{=} \prod e^{\omega_i}$. Покажите, что определение e^f корректно, т. е. не зависит ни от способа представления f в виде суммы разложимых мономов, ни от порядка расположения сомножителей в стоящем в правой части грассмановом произведении, и что экспоненциальное отображение $\Lambda^{\text{even}}V \hookrightarrow \Lambda^{\text{even}}V$ является инъективным гомоморфизмом из аддитивной группы всех чётных грассмановых многочленов в мультипликативную группу чётных грассмановых многочленов со свободным членом 1.

Задача 6.17. В условиях предыдущей задачи докажите над полем характеристики нуль равенства а) $\partial_v e^f = e^f \wedge \partial_v f$ б) $e^f = \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!} f^{\wedge k}$.

[1] Прямые $\mathbb{P}_1^\pm$ естественно параметризуют прямолинейные образующие квадрики Сегре $G \simeq \mathbb{P}_1^+ \times \mathbb{P}_1^-$.

[2] Отображение Плюккера показано пунктиром, поскольку переводит прямые в точки.

§7. Симметрические функции

7.1. Симметрические и знакопеременные многочлены. Симметрическая группа S_n действует на кольце многочленов $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ переставляя переменные[1]:

$$g: f(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_{g^{-1}(1)}, \dots, x_{g^{-1}(n)}), \text{ где } g \in S_n. \tag{7-1}$$

Многочлен $f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ называется *симметрическим*, если $gf = f$ для всех $g \in S^n$, и *знакопеременным* — если $gf = \mathrm{sgn}(g) \cdot f$ для всех $g \in S^n$. Симметрические многочлены образуют в $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ подкольцо, а знакопеременные — модуль над этим кольцом[2]. При отождествлении кольца многочленов от n переменных с n-й тензорной степенью кольца многочленов от одной переменной при помощи канонического изоморфизма из прим. 1.2 на стр. 9:

$$\varkappa: \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[t]^{\otimes n}, \quad x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} \mapsto t^{m_1} \otimes \dots \otimes t^{m_n}, \tag{7-2}$$

(косо)симметрические многочлены превращаются в точности в (косо)симметричные тензоры, а умножение многочленов — в покомпонентное умножение

$$\left(f_1 \otimes \dots \otimes f_n\right) \cdot \left(g_1 \otimes \dots \otimes g_n\right) \stackrel{\text{def}}{=} (f_1 g_1) \otimes \dots \otimes (f_n g_n).$$

Упражнение 7.1. Проверьте, что такое умножение наделяет $\mathbb{Z}$-модуль $\mathbb{Z}[t]^{\otimes n}$ структурой коммутативного кольца с единицей $1 \otimes \dots \otimes 1$.

Описанные в форм. (5-16) на стр. 76 и форм. (5-17) на стр. 77 стандартные базисы в $\mathbb{Z}$-модулях симметричных тензоров $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{Z}[t])$ и знакопеременных тензоров $\mathrm{Alt}^n(\mathbb{Z}[t])$ переносятся изоморфизмом (7-2) в базисы $\mathbb{Z}$-модулей симметрических и знакопеременных многочленов, которые принято называть соответственно *мономиальным* и *детерминантным* базисами.

7.1.1. Мономиальный базис модуля симметрических многочленов. Поскольку симметрический многочлен вместе с каждым своим мономом содержит с тем же самым коэффициентом и все мономы из его S_n-орбиты, а S_n-орбита любого монома однозначно определяется своим лексикографически старшим мономом, показатели которого нестрого возрастают слева направо, всякий симметрический многочлен единственным способом представляется в виде целочисленной линейной комбинации многочленов

$$m_\lambda = (\text{сумма всех мономов из } S_n\text{-орбиты монома } x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}), \tag{7-3}$$

где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ пробегает диаграммы Юнга из n строк (часть из которых может быть нулевой длины). Многочлен (7-3) называется *мономиальным симметрическим многочленом* и уже встречался нам в прим. 8.7 на стр. 140 части I. Изоморфизм (7-2) переводит его в стандартный базисный симметрический тензор[3], равный сумме всех различных тензорных произведений, содержащих $m_0(\lambda)$ сомножителей $1 = t^0$, $m_1(\lambda)$ сомножителей t^1, $m_2(\lambda)$ сомножителей t^2 и т. д., где через $m_i(\lambda)$ здесь и далее всегда обозначается количество строк длины i в диаграмме Юнга λ.

[1] Обратите внимание, что действие (7-1) переставляет именно переменные, а не их номера, т. е. цикл $\tau: 1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1$ переводит многочлен $f(x_1, x_2, x_3)$ в многочлен $\tau f(x_1, x_2, x_3) = f(x_3, x_1, x_2)$. Ровно поэтому оно и является действием, т. е. $g_1 g_2(f) = g_1(g_2(f))$, ср. с форм. (5-16) на стр. 76.

[2] Ибо при умножении знакопеременного многочлена на симметрический получается знакопеременный многочлен.

[3] См. формулу (5-16) на стр. 76.

7.1.2. Детерминантные базисы. Так как при транспозиции любых двух переменных знакопеременный многочлен меняет свой знак, в каждом мономе такого многочлена степени всех переменных попарно различны. Поэтому базис $\mathbb{Z}$-модуля знакопеременных многочленов образуют альтернированные S_n-орбиты вида

$$\Delta_\nu = \sum_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g)\, x_{g(1)}^{\nu_1} \dots x_{g(n)}^{\nu_n}\,, \tag{7-4}$$

занумерованные диаграммами Юнга ν из n строк строго убывающей длины

$$\nu_1 > \nu_2 > \ldots > \nu_n \geqslant 0\,.$$

Все такие диаграммы ν содержат в себе минимальную треугольную диаграмму

$$\delta = \big((n-1),\, (n-2),\, \ldots\,,\, 1,\, 0\big)$$

из n строк разной длины, и разности

$$\lambda = \nu - \delta \overset{\text{def}}{=} \big((\nu_1 - n + 1),\, (\nu_2 - n + 2),\, \ldots\,,\, (\nu_{n-1} - 1),\, \nu_n\big)$$

имеют $\lambda_i = \nu_i - n + i$ и пробегают множество всех диаграмм Юнга из n строк безо всяких ограничений на их длины (которые могут быть и нулевыми). Часто бывает удобно нумеровать базис (7-4) именно такими диаграммами λ, и тогда мы будем писать $\Delta_{\lambda+\delta}$ вместо Δ_ν.

Легко усмотреть, что многочлен (7-4) представляет собою определитель[1]

$$\Delta_\nu = \det(x_j^{\nu_i}) = \det \begin{pmatrix} x_1^{\nu_1} & x_2^{\nu_1} & \dots & x_n^{\nu_1} \\ x_1^{\nu_2} & x_2^{\nu_2} & \dots & x_n^{\nu_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{\nu_n} & x_2^{\nu_n} & \dots & x_n^{\nu_n} \end{pmatrix} \tag{7-5}$$

Упражнение 7.2. Убедитесь в этом прямым раскрытием правой части (7-5).

В частности, при $\nu = \delta$ получаем *определитель Вандермонда*

$$\Delta_\delta = \det(x_j^{n-i}) = \det \begin{pmatrix} x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \prod_{i<j} (x_i - x_j)\,.$$

Упражнение 7.3. Убедитесь в справедливости равенства $\Delta_\delta = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$.

[1]Здесь и далее запись $(f(i,j))$, где $f(i,j)$ — какая-либо функция от i, j, означает матрицу, в i-й строке и j-м столбце которой стоит результат применения функции f к данным i и j.

7.1.3. Базис Шура. Поскольку любой знакопеременный многочлен f обращается в нуль при подстановке $x_i = x_j$, он делится в кольце $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ на $(x_i - x_j)$, а так как каждая из разностей $(x_i - x_j)$ неприводима, f делится на их произведение $\Delta_\delta = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$, и частное от деления $f/\Delta_\delta \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ является симметрическим многочленом. Мы получаем

Предложение 7.1
Умножение на определитель Вандермонда Δ_δ задаёт биекцию между симметричными и знакопеременными многочленами. Эта биекция является изоморфизмом модулей над кольцом симметрических многочленов (и в частности — $\mathbb{Z}$-модулей). □

Следствие 7.1
Многочлены[1] $s_\lambda = \Delta_{\delta+\lambda}/\Delta_\delta$, где λ пробегает все диаграммы Юнга из не более n строк, образуют базис $\mathbb{Z}$-модуля симметрических многочленов.

7.2. Элементарные симметрические многочлены. Коэффициенты многочлена от t

$$E(t) = \prod_i (1 + x_i t) = \sum_{k=0}^{n} e_k(x) \cdot t^k \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n][t] \tag{7-6}$$

называются *элементарными симметрическими многочленами*. Раскрыв скобки в (7-6), заключаем, что $e_0 = 1$ и

$$e_k(x) = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \tag{7-7}$$

(сумма всех произведений из k различных переменных, где $k \geqslant 1$). Эти же многочлены e_k возникают и в *формуле Виета*: если $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ являются корнями приведённого многочлена

$$t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_n = \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i),$$

то $a_i = (-1)^i e_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Для каждой диаграммы Юнга $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ положим[2] $e_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} e_{\lambda_1} \dots e_{\lambda_k} = \prod_{i=1}^{k} e_{\lambda_i}$. Это всего лишь другое обозначение для монома $e_1^{m_1} \dots e_n^{m_n}$, показатель m_i которого равен количеству строк длины i в диаграмме λ, причём диаграмма Юнга λ и набор неотрицательных показателей $m = (m_1, \dots, m_n)$ взаимно однозначно определяются друг другом из равенства

$$e_{\lambda_1} \dots e_{\lambda_k} = e_1^{m_1} \dots e_n^{m_n}.$$

В прим. 8.7 на стр. 140 части I мы видели, что при надлежащем упорядочении диаграмм Юнга матрица перехода от многочленов e_λ к мономиальному базису m_μ становится верхней унитреугольной[3], откуда вытекает, что многочлены e_λ также составляют базис модуля симметрических многочленов над $\mathbb{Z}$. В частности, $e_1, \dots, e_n$ алгебраически независимы в $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ и любой симметрический многочлен однозначно записывается в виде многочлена от $e_1, \dots, e_n$.

[1]Многочлены $s_\lambda = \Delta_{\delta+\lambda}/\Delta_\delta$ называются (*детерминантными*) *многочленами Шура*.
[2]Ср. с прим. 8.7 на стр. 140.
[3]См. формулу (8-17) на стр. 141 части I.

7.3. Полные симметрические многочлены. Сумма всех мономов степени k обозначается h_k и называется *полным симметрическим многочленом* степени k. Многочлен $h_k \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ равен коэффициенту при t^k формального степенного ряда $H(t) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n][\![t]\!]$, возникающего при перемножении n бесконечных геометрических прогрессий[1]

$$H(t) = \prod_i \frac{1}{1 - x_i t} = \prod_i \left(1 + x_i t + x_i^2 t^2 + x_i^3 t^3 + \ \dots\right) = \sum_{k \geqslant 0} h_k(x) \cdot t^k \,. \tag{7-8}$$

Поэтому $H(t)E(-t) = 1$. Вычисляя в этом равенстве коэффициент при t^k получаем рекурсивные формулы, выражающие e_i и h_i друг через друга:

$$h_k = e_1 h_{k-1} - e_2 h_{k-2} + \dots + (-1)^{k-2} e_{k-1} h_1 + (-1)^{k-1} e_k \tag{7-9}$$
$$e_k = h_1 e_{k-1} - h_2 e_{k-2} + \dots + (-1)^{k-2} h_{k-1} e_1 + (-1)^{k-1} h_k \,. \tag{7-10}$$

Предложение 7.2

Отображение ω, переводящее многочлен e_k в многочлен h_k при $k = 1, \dots, n$ является инволютивным[2] автоморфизмом кольца симметрических многочленов.

Доказательство. Так как кольцо симметрических функций изоморфно кольцу многочленов от $e_1, \dots, e_n$, отображение $e_k \mapsto h_k$ однозначно продолжается до гомоморфизма ω из кольца симметрических функций в себя. Из рекурсивных формул (7-9) и (7-10) вытекает, что этот гомоморфизм переводит h_k обратно в e_k, т. е. является инволютивной биекцией. □

Следствие 7.2

Многочлены $h_1, \dots, h_n$ алгебраически независимы в $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ и любой симметрический многочлен (в том числе h_m с $m > n$) однозначно записывается в виде многочлена от $h_1, \dots, h_n$.

7.4. Степенные суммы Ньютона. Сумма k-тых степеней всех переменных

$$p_k(x) = \sum_i x_i^k \tag{7-11}$$

называется k-тым *симметрическим многочленом Ньютона*. Многочлены $p_k(x)$ с $k \geqslant 1$ удобно воспринимать как коэффициенты ряда

$$\begin{aligned} P(t) = \sum_{k \geqslant 1} p_k(x)\, t^{k-1} &= \sum_i \sum_{k \geqslant 1} x_i^k\, t^{k-1} = \sum_i \frac{d}{dt} \sum_{k \geqslant 1} x_i^k \frac{t^k}{k} = \\ &= -\frac{d}{dt} \sum_i \ln(1 - x_i\, t) = \frac{d}{dt} \ln \prod_i \frac{1}{1 - x_i\, t} = \frac{d}{dt} \ln H(t) \end{aligned} \tag{7-12}$$

который является логарифмической производной от ряда $H(t) = 1/E(-t)$. Таким образом,

$$P(t) = H'(t)/H(t) = E'(-t)/E(-t) \,.$$

[1] Выбирая в i-й скобке m_i-е слагаемое, получаем после их перемножения моном $x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$.

[2] Т. е. обратным самому себе.

Сравнивая коэффициенты при t^{k-1} в равенствах $H(t)P(t) = H'(t)$ и $E(-t)P(t) = E'(-t)$, получаем *формулу Ньютона*, рекурсивно выражающие p_k через h_k или через e_k:

$$p_k = kh_k - h_{k-1}p_1 - h_{k-2}p_2 - \dots - h_1 p_{k-1} \tag{7-13}$$
$$(-1)^{k-1}p_k = ke_k - e_{k-1}p_1 + e_{k-2}p_2 - \dots + (-1)^{k-1}e_1 p_{k-1}\,. \tag{7-14}$$

Индукция по k показывает, что многочлен p_k является собственным вектором инволюции ω из предл. 7.2 с собственным значением $(-1)^{k-1}$:

$$\omega(p_k) = (-1)^{k-1}p_k\,. \tag{7-15}$$

Следствие 7.3
Многочлены $p_1, \dots, p_n$ алгебраически независимы в $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ и любой симметрический многочлен с рациональными коэффициентами (в том числе p_m с $m > n$) однозначно записывается в виде многочлена с рациональными коэффициентами от $p_1, \dots, p_n$.

Доказательство. Из формулы (7-14) вытекает, что при любом $N \in \mathbb{N}$ в пространстве многочленов степени не выше N от $x_1, \dots, x_n$ с рациональными коэффициентами $\mathbb{Q}$-линейная оболочка всевозможных мономов от $p_1, \dots, p_n$ совпадает с $\mathbb{Q}$-линейной оболочкой всевозможных мономов от $e_1, \dots, e_n$. Поскольку при фиксированном N количества этих мономов одинаковы и мономы от $e_1, \dots, e_n$ образуют базис, то и мономы от $p_1, \dots, p_n$ тоже образуют базис. В частности, они линейно независимы над $\mathbb{Q}$. □

7.4.1. Явное выражение e_k и h_k через p_k. Условимся не различать между собою диаграммы Юнга, получающиеся друг из друга добавлением или удалением строк нулевой длины, т. е. приписыванием к $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots$ или удалением оттуда любого количества нулей справа, и для каждой диаграммы $\lambda = (\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots)$, состоящей из m_1 единиц, m_2 двоек, m_3 троек[1] и т. д., положим

$$\begin{aligned} e_\lambda &\overset{\text{def}}{=} e_{\lambda_1}e_{\lambda_2}e_{\lambda_3}\dots = e_1^{m_1}e_2^{m_2}e_3^{m_3}\dots \\ h_\lambda &\overset{\text{def}}{=} h_{\lambda_1}h_{\lambda_2}h_{\lambda_3}\dots = h_1^{m_1}h_2^{m_2}h_3^{m_3}\dots \\ p_\lambda &\overset{\text{def}}{=} p_{\lambda_1}p_{\lambda_2}p_{\lambda_3}\dots = p_1^{m_1}p_2^{m_2}p_3^{m_3}\dots \end{aligned} \tag{7-16}$$

Таким образом, множество многочленов вида p_λ — это в точности множество всевозможных мономов[2] от формальных переменных p_i, и то же самое справедливо для многочленов e_λ и h_λ. Согласно (7-15) многочлены p_λ являются собственными векторами инволюции ω из предл. 7.2 на стр. 105:

$$\omega(p_\lambda) = \varepsilon_\lambda \cdot p_\lambda\,, \quad \text{где} \quad \varepsilon_\lambda = (-1)^{\sum(k-1)m_k} = (-1)^{|\lambda|}(-1)^{\sum m_k} = (-1)^{\sum(\lambda_i - 1)}\,. \tag{7-17}$$

Для каждой диаграммы Юнга λ обозначим через

$$z_\lambda \overset{\text{def}}{=} \prod_k \left(m_k! \cdot k^{m_k}\right) \tag{7-18}$$

порядок централизатора[3] перестановки циклового типа λ в симметрической группе $S_{|\lambda|}$.

[1] Отметим, что $\sum_k k \cdot m_k = |\lambda|$.

[2] Переход от нумерации мономов диаграммами Юнга к их обычной нумерации показателями степеней — это переход от неубывающей последовательности $\lambda = (\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots)$ неотрицательных целых чисел к вектору $m(\lambda) = (m_1, \dots, m_n)$ с неотрицательными целочисленными координатами m_i, равными количеству строк длины i в диаграмме λ.

[3] См. прим. 18.18 на стр. 343 части I.

Предложение 7.3
Многочлены e_k и h_k выражаются через $\mathbb{Q}$-базис p_λ по формулам:

$$h_k = \sum_{|\lambda|=k} z_\lambda^{-1} p_\lambda\,, \quad e_k = \sum_{|\lambda|=k} \varepsilon_\lambda z_\lambda^{-1} p_\lambda\,, \tag{7-19}$$

где суммирование ведётся по всем k-клеточным диаграммам Юнга.

Доказательство. Докажем левую формулу, правая получается из неё применением инволюции ω из предл. 7.2. Согласно форм. (7-12) на стр. 105,

$$H(t) = e^{\int P(t)\,dt} = e^{\sum p_i t^i/i} = \prod e^{p_i t^i/i} = \prod_{i\geqslant 1} \sum_{m\geqslant 0} \frac{p_i^m}{i^m m!}\, t^{im}\,.$$

Если выбрать в i-м сомножителе m_i-е слагаемое, то их произведение даст вклад в коэффициент при t^k если и только если $\sum_i i\cdot m_i = k$. Такие выборы биективно соответствуют k-клеточным диаграммам Юнга λ с m_1 строками длины 1, m_2 строками длины 2 и т. д., а вклад произведения, отвечающего такой диаграмме, равен p_λ/z_λ. □

7.5. Формула Джамбелли выражает детерминантные многочленами Шура s_λ через полные симметрические многочлены h_k в кольце $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$. Для её получения обозначим через

$$e_k^{(p)} = e_k^{(p)}(x_1,\dots,\hat{x}_p,\dots,x_n)\,,$$

симметрическую функцию от $(n-1)$ переменных[1], которая получается из элементарного симметрического многочлена $e_k = e_k(x_1,\dots,x_n)$ подстановкой $x_p = 0$. При фиксированном p производящая функция для многочленов $e_k^{(p)}$ имеет вид $E^{(p)}(t) = \sum_k e_k^{(p)}(x)\cdot t^k = \prod_{i\neq p}(1+x_i t)$. Поэтому $H(t)E^{(p)}(-t) = (1-x_p t)^{-1}$. Сравнивая коэффициенты при t^k в обеих частях, получаем для каждого целого неотрицательного k соотношение

$$\begin{aligned} x_p^k &= h_{k-n+1}\cdot(-1)^{n-1}e_{n-1}^{(p)} + h_{k-n+2}\cdot(-1)^{n-2}e_{n-2}^{(p)} + \dots + h_k\cdot e_0^{(p)} = \\ &= \sum_{j=1}^{n} h_{k-n+j}\cdot(-1)^{n-j}e_j^{(p)}\,, \end{aligned} \tag{7-20}$$

в правой части которого стоит произведение n-мерных строки $(h_{k-n+1},\dots,h_k)$ и столбца

$$\begin{pmatrix} (-1)^{n-1}e_{n-1}^{(p)} \\ \vdots \\ e_2^{(p)} \\ -e_1^{(p)} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Для данных $\nu_1 > \nu_2 > \dots > \nu_n$ организуем h-строки, отвечающие $k = \nu_1,\dots,\nu_n$, в матрицу[2]

$$H_\nu = \left(h_{\nu_i-n+j}\right) = \begin{pmatrix} h_{\nu_1-n+1} & h_{\nu_1-n+2} & \dots & h_{\nu_1} \\ h_{\nu_2-n+1} & h_{\nu_2-n+2} & \dots & h_{\nu_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{\nu_n-n+1} & h_{\nu_n-n+2} & \dots & h_{\nu_n} \end{pmatrix},$$

[1] Как обычно, крышка над x_p означает пропуск этой переменной.
[2] В которой мы для унификации записи полагаем $h_j = 0$ при $j < 0$.

а $e^{(p)}$-столбцы, отвечающие $p = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ n,$ — в матрицу

$$M = \left((-1)^{n-i}e^{(j)}_{n-i}\right) = \begin{pmatrix} (-1)^{n-1}e^{(1)}_{n-1} & (-1)^{n-1}e^{(2)}_{n-i} & \dots & (-1)^{n-1}e^{(n)}_{n-1} \\ (-1)^{n-2}e^{(1)}_{n-2} & (-1)^{n-2}e^{(2)}_{n-i} & \dots & (-1)^{n-2}e^{(n)}_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда формула (7-20) превратится в матричное равенство $D_\nu = H_\nu \cdot M$, где

$$D_\nu = (x_j^{\nu_i}) = \begin{pmatrix} x_1^{\nu_1} & x_2^{\nu_1} & \dots & x_n^{\nu_1} \\ x_1^{\nu_2} & x_2^{\nu_2} & \dots & x_n^{\nu_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{\nu_n} & x_2^{\nu_n} & \dots & x_n^{\nu_n} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для любой диаграммы Юнга ν со строго убывающими длинами строк

$$\Delta_\nu = \det D_\nu = \det H_\nu \cdot \det M\,.$$

Так как при $\nu = \delta$ матрица H_δ верхняя унитреугольная, $\det H_\delta = 1$ и $\Delta_\delta = \det M$. Мы получаем искомое выражение полиномов Шура через полные симметрические функции:

$$s_\lambda = \Delta_{\delta+\lambda}/\Delta_\delta = (\det H_{\delta+\lambda} \cdot \det M)/\det M = \det H_{\delta+\lambda} = \det\left(h_{\lambda_i+j-i}\right). \tag{7-21}$$

Предложение 7.4 (формула Джамбелли)

$$s_\lambda = \det\begin{pmatrix} h_{\lambda_1} & h_{\lambda_1+1} & \cdots & h_{\lambda_1+n-1} \\ h_{\lambda_2-1} & h_{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & h_{\lambda_{n-1}+1} \\ h_{\lambda_n-n+1} & \dots & h_{\lambda_n-1} & h_{\lambda_n} \end{pmatrix} \tag{7-22}$$

где по главной диагонали стоят $h_{\lambda_1}, \dots, h_{\lambda_n}$, и в каждой строке индексы у h увеличиваются слева направо на единицу от клетки к клетке. □

7.5.1. Примеры. При $n = 2$ в $\mathbb{Z}[x_1, x_2]$ получаем соотношение

$$s_{(2,1)} = \det\begin{pmatrix} h_2 & h_3 \\ 1 & h_1 \end{pmatrix} = h_1h_2 - h_3 = e_1e_2 - e_3\,.$$

При $n = 3$ в $\mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$ получаем соотношение

$$s_{(2,1)} = s_{(2,1,0)} = \det\begin{pmatrix} h_2 & h_3 & h_4 \\ 1 & h_1 & h_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} h_2 & h_3 \\ 1 & h_1 \end{pmatrix},$$

дающее то же самое выражение $s_{(2,1)}$ через h_i, что и при $n = 2$.

Упражнение 7.4. Убедитесь, что выражение s_λ через h_k, полученное при числе переменных n, равном высоте диаграммы λ, сохраняется и при любом большем числе переменных.

Беря $\lambda = (k)$, т. е. одну строку длины k, получаем равенство $s_{(k)} = h_k$, очевидное при $n = 1$ и по упр. 7.4 справедливое для всех n. Отметим, что при непосредственном вычислении определителей $\Delta_{\delta+(k)}$ и Δ_δ произвольного размера $n \times n$ равенство $\Delta_{\delta+(k)} = h_k \cdot \Delta_\delta$ не вполне очевидно.

7.6. Формула Пьери выражает произведение $s_\lambda h_k = s_\lambda s_{(k)}$ через многочлены s_μ. Для её вывода потребуется небольшое обобщение сказанного в n° 7.1 на стр. 102. Рассмотрим кольцо формальных степенных рядов $\mathbb{Z}[\![x_1, \dots, x_n]\!]$, а в нём — симметрические и знакопеременные ряды[1]. То же рассуждение, что и в n° 7.1.2 показывает, что каждый знакопеременный ряд A однозначно записывается в виде бесконечной целочисленной линейной комбинации альтернированных S_n-орбит мономов:

$$A = \sum_{\nu_1 > \ldots > \nu_n} c_\nu \cdot \Delta_\nu\,, \quad \text{где} \quad \Delta_\nu = \sum_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g)\, x_{g(1)}^{\nu_1} \ldots x_{g(n)}^{\nu_n}\,, \tag{7-23}$$

суммирование происходит по всем диаграммам Юнга $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ из n строк строго убывающей длины, и коэффициенты $c_\nu \in \mathbb{Z}$.

Лемма 7.1
Разложение (7-23) для произведения базисного знакопеременного многочлена Δ_ν на симметрический ряд $H(x) = \prod_{i=1}^n (1 - x_i)^{-1} = \prod_{i=1}^n (1 + x_i + x_i^2 + x_i^3 + \ldots) = \sum_{k \geqslant 0} h_k(x)$ имеет вид $\Delta_\nu \cdot H = \sum\limits_\eta \Delta_\eta$, где суммирование идёт по всем таким $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, что

$$\eta_1 \geqslant \nu_1 > \eta_2 \geqslant \nu_2 > \ \ldots\ \eta_n \geqslant \nu_n\,.$$

Доказательство. Для любых n рядов $f_1(t), \dots, f_n(t) \in \mathbb{Z}[\![t]\!]$ положим

$$f_1 \wedge \ldots \wedge f_n = \sum_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g) f_1(x_{g(1)}) \ldots f_n(x_{g(n)})\,.$$

Ряд $f_1 \wedge \ldots \wedge f_n \in \mathbb{Z}[\![x_1, \dots, x_n]\!]$ знакопеременен и полилинейно и знакопеременно зависит от $f_1, \dots, f_n$. В частности, $f_1 \wedge \ldots \wedge f_n$ не изменяется при добавлении к любому из рядов любой линейной комбинации остальных.

Упражнение 7.5. Убедитесь, что $t^{\nu_1} \wedge \ldots \wedge t^{\nu_n} = \Delta_\nu$.

В этих обозначениях

$$\Delta_\nu \cdot H = \sum_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g) \prod_{i=1}^n x_{g(i)}^{\nu_i} \left(1 - x_{g(i)}\right)^{-1} = f_1 \wedge \ldots \wedge f_n$$

для $f_i(t) = t^{\nu_i} / (1 - t) = t^{\nu_i} + t^{\nu_i + 1} + t^{\nu_i + 2} + \ldots$. Вычитая f_1 из всех остальных рядов, мы обрезаем их до многочленов степени $< \nu_1$. Вычитая второй из полученных многочленов из всех последующих, мы обрезаем последние до многочленов степени $< \nu_2$. Действуя в таком духе, приходим к равенству $f_1 \wedge \ldots \wedge f_n = \overline{f}_1 \wedge \ldots \wedge \overline{f}_n$, в котором $\overline{f}_1 = f_1 = \sum_{j \geqslant \nu_1} t^j$, а

$$\overline{f}_i = t^{\nu_i} + t^{\nu_i + 1} + \ \ldots\ + t^{\nu_{i-1} - 1} \text{ при } 2 \leqslant i \leqslant n\,.$$

В силу полилинейности $\overline{f}_1 \wedge \ldots \wedge \overline{f}_n = \sum_\eta t^{\eta_1} \wedge t^{\eta_2} \wedge \ \ldots\ \wedge t^{\eta_n} = \sum_\eta \Delta_\eta$, где суммирование идёт по всем $\eta_1 \geqslant \nu_1 > \eta_2 \geqslant \nu_2 > \eta_3 \geqslant \nu_3 > \ \ldots\ \eta_n \geqslant \nu_n$. □

Следствие 7.4 (формула Пьери)
$s_\lambda \cdot h_k = \sum_\mu s_\mu$, где суммирование происходит по всем диаграммам μ из $\leqslant n$ строк, которые можно получить, добавляя к диаграмме λ ровно k клеток так, чтобы никакие две из них не попали в один столбец.

[1] Первые образуют подкольцо, вторые — модуль над этим подкольцом.

Доказательство. По лем. 7.1 имеем равенство $\Delta_{\delta+\lambda}\sum_{k\geqslant 0} h_k = \sum_\tau \Delta_{\delta+\mu}$, где суммирование происходит по всем таким диаграммам μ, что[1] $\mu_1 \geqslant \lambda_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots$. Деля обе части на Δ_δ и беря в полученном равенстве однородную компоненту степени $|\lambda| + k$ по x, получаем требуемую формулу. □

Замечание 7.1. Если диаграмма λ состоит из $k < n$ строк, т. е. $\lambda_i = 0$ при $i > k$, диаграммы μ в формуле Пьери могут содержать на одну ненулевую строку больше, чем λ. Например, при $n = 2$ получаем $s_{(2)} \cdot h_1 = s_{(2,1)} + s_{(3)}$, что вновь приводит к выражению $s_{(2,1)} = h_2 h_1 - h_3$ из n° 7.5.1 на стр. 108.

7.7. Кольцо симметрических функций. Удобно думать про симметрические многочлены не привязываясь к конкретному числу переменных, но считая, что их достаточно много для того, чтобы все нужные функции были определены. Формализуется это так. Условимся не различать между собою две диаграммы λ', λ'', а также два набора показателей m', m'', если они получаются друг из друга дописыванием справа любого числа нулей. Для каждого набора занумерованных натуральными числами $i \in \mathbb{N}$ букв q_i положим

$$q_\lambda = q_{\lambda_1} q_{\lambda_2} q_{\lambda_3} \dots \quad \text{и} \quad q^m = q_1^{m_1} q_2^{m_2} q_3^{m_3} \dots .$$

Мы пишем $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots) = (1^{m_1}, 2^{m_2}, 3^{m_3}, \dots)$ если диаграмма Юнга λ содержит m_i строк длины i при каждом $i \in \mathbb{N}$, что равносильно равенству $q_\lambda = q^m$. Для симметрических многочленов m_λ и s_λ мы полагаем $m_\lambda = s_\lambda = 0$ всякий раз, когда число переменных меньше количества строк в диаграмме λ, а для элементарных симметрических многочленов e_λ мы полагаем $e_\lambda = 0$, когда число переменных меньше количества столбцов в диаграмме λ. При таких соглашениях каждый из симметрических многочленов $m_\lambda(x)$, $s_\lambda(x)$, $e_\lambda(x)$, $h_\lambda(x)$ и $p_\lambda(x)$ становится определён для переменной $x = (x_1, \dots, x_r)$ любой размерности r, причём при $r > s$ подстановка

$$x_{s+1} = x_{s+2} = \dots = x_r = 0 \tag{7-24}$$

превращает каждый из этих многочленов в одноимённый многочлен от меньшего набора переменных $x = (x_1, \dots, x_s)$. Подстановка (7-24) задаёт сюрьективный гомоморфизм колец

$$\zeta_{sr} : \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_r] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_s] . \tag{7-25}$$

Будем называть последовательность симметрических многочленов $f^{(n)} \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ *симметрической функцией степени* d, если выполняются следующие два условия:

$$1)\ \forall\, n \text{ многочлен } f^{(n)} \text{ однороден степени } d \qquad 2)\ \zeta_{rs}\left(f^{(r)}\right) = f^{(s)} \text{ при } r > s.$$

Поскольку в выражении $f^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ верхний индекс у f равен числу подставляемых переменных, писать его не имеет смысла, и мы всегда будем сокращать предыдущую запись до

$$f(x_1, \dots, x_n) \overset{\text{def}}{=} f^{(n)}(x_1, \dots, x_n) .$$

Так, для фиксированной диаграммы λ веса $|\lambda| = d$ последовательность мономиальных многочленов $m_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ образует симметрическую функцию степени d, которая обозначается m_λ.

[1] Напомним (см. n° 7.1.2), что $\lambda_i = \nu_i - n + i$, $\mu_i = \eta_i - n + i$, поэтому неравенства $\eta_i \geqslant \nu_i > \eta_{i+1}$ равносильны неравенствам $\mu_i \geqslant \lambda_i \geqslant \mu_{i+1}$.

Например, кубическая симметрическая функция $m_{(2,1)}$ на наборах из одной, двух и трёх переменных имеет вид

$$\begin{aligned} m_{(2,1)}(x_1) &= 0 \\ m_{(2,1)}(x_1,x_2) &= x_1^2x_2 + x_1x_2^2 \\ m_{(2,1)}(x_1,x_2,x_3) &= x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2\,. \end{aligned}$$

Аналогичным образом определяются и симметрические функции s_λ, e_λ, h_λ и p_λ степени $|\lambda|$.

Симметрические функции степени d образуют $\mathbb{Z}$-модуль. Его принято обозначать Λ_d. Из сказанного в предыдущих разделах вытекает, что симметрические функции m_λ, s_λ, e_λ и h_λ, занумерованные всевозможными диаграммами Юнга веса $|\lambda| = d$, являются базисами в Λ_d, а симметрические функции p_λ составляют базис векторного пространства $\mathbb{Q}\otimes\Lambda_d$ симметрических функций с рациональными коэффициентами. Таким образом, Λ_d является свободным модулем *конечного* ранга, равного количеству диаграмм Юнга веса d. Это количество принято обозначать $p(d)$ и называть *числом разбиений* натурального числа d. Произведение симметрических функций степеней d_1 и d_2 является симметрической функцией степени d_1d_2, так что прямая сумма $\Lambda = \bigoplus_{d\geqslant 0}\Lambda_d$ является градуированным кольцом. Оно называется *кольцом симметрических функций*. Все доказанные выше соотношения между функциями m_λ, s_λ, e_λ, h_λ и рекурсивные выражения p_i через e_j и h_j являются тождествами в кольце Λ, а выражения h_i и e_i через p_λ — тождествами в кольце $\mathbb{Q}\otimes\Lambda$ симметрических функций с рациональными коэффициентами.

Задачи для самостоятельного решения к §7

Задача 7.1. Выясните, являются ли симметрическими многочлены
а) $\sum_{i\neq j} x_i^2x_j$ б) $\sum_{j<k}\sum_{i\notin\{j,k\}} x_i(x_j-x_k)^2$
в) $(x_1+x_2-x_3-x_4)(x_1-x_2+x_3-x_4)(x_1-x_2-x_3+x_4)$
г) $(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_4)(x_1+x_3)(x_2+x_4)(x_1+x_4)$,
и если да, выразите их через элементарные симметрические многочлены e_k.

Задача 7.2. Выразите дискриминант[1] кубического трёхчлена $f = x^3+px+q$ через p и q и покажите, что $f\in\mathbb{R}[x]$ имеет три различных вещественных корня если и только если его дискриминант $D_f > 0$, и в этом случае существует такое $\lambda\in\mathbb{R}$, что подстановка $x = \lambda t$ приводит уравнение $f(x)=0$ к виду $4\,t^3 - t\,x = a$, где $a\in\mathbb{R}$ и $|a|\leqslant 1$. Пользуясь формулой для косинуса тройного угла[2] выразите корни последнего уравнения через тригонометрические функции от a.

Задача 7.3. Сколько вещественных корней у многочлена x^3+4x^2-5x+2?

Задача 7.4. Решите в тригонометрических функциях уравнения:
а) $x^3-3\,x+1=0$ б) $x^3+x^2-2\,x-1=0$.

Задача 7.5. Вычислите в радикалах: а) $\cos(\pi/9)$ б) $\cos(\pi/12)$ в*) $\cos(\pi/7)$.

[1]Напомню, что *дискриминантом* приведённого многочлена $f(x) = \prod_i(x-\alpha_i)$ называется произведение $D_f = \prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2$, см. прим. 8.8 на стр. 141 части I.

[2]См. прим. 3.8 на стр. 53 части I.

Задача 7.6. Сумма двух из корней многочлена $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda$ в поле $\mathbb{C}$ равна 1. Найдите λ.

Задача 7.7. Многочлен $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ имеет корни $x_1, \ldots, x_n$. Всякий ли симметрический многочлен от $x_2, \ldots, x_n$ переписывается в виде многочлена от x_1?

Задача 7.8. Вычислите сумму а) шестых степеней б) обратных кубов комплексных корней многочлена $x^4 + 2x^2 + x - 1$.

Задача 7.9. Для линейного оператора g на десятимерном векторном пространстве над полем характеристики нуль выразите $\operatorname{tr} S^4 g$ и $\operatorname{tr} \Lambda^4 g$ через $\operatorname{tr} g$, $\operatorname{tr} g^2$, $\operatorname{tr} g^3$ и $\operatorname{tr} g^4$.

Задача 7.10. Пусть $\zeta \in \mathbb{C}$ порождает мультипликативную группу корней m-той степени из 1.

а) Для каждого $a \in \mathbb{C}$ раскройте скобки и приведите подобные в $\prod_{\nu=1}^{m}(a - \zeta^{\nu-1}x)$.

б) Покажите, что $\forall\, f \in \mathbb{C}[x]\ \exists\, h \in \mathbb{C}[x]$: $\prod_{\nu=1}^{m} f(\zeta^{\nu-1}x) = h(x^m)$.

в) Выразите корни многочлена h через корни многочлена f.

Задача 7.11. Найдите в $\mathbb{C}[x]$ многочлен 4-й степени, корнями которого являются

а) квадраты всех комплексных корней многочлена $x^4 + 2x^3 - x + 3$

б) кубы всех комплексных корней многочлена $x^4 - x - 1$.

Задача 7.12*. Вычислите дискриминант n-того кругового многочлена[1] $\Phi_n(x)$. Если общий случай вызывает затруднения, решите задачу для $n = 3, 4, 5, 6, 7$.

Задача 7.13. Выразите а) $s_{(1^n)}$ через e_ν б) $s_{(n)}$ через h_ν.

Задача 7.14. Представьте а) $s_{(1)}^2$ б) $s_{(1,1)} \cdot s_{(2)}$ в виде целочисленных линейных комбинаций многочленов s_λ.

Задача 7.15. Пусть $x_i = 1/n$ при $1 \leqslant i \leqslant n$ и $x_j = 0$ при $j > n$. Для каждой диаграммы Юнга λ вычислите а) $\lim_{n\to\infty} e_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ б) $\lim_{n\to\infty} h_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ в) $\lim_{n\to\infty} p_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ г) $\lim_{n\to\infty} m_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ и покажите, что $\lim_{n\to\infty} E(t) = \lim_{n\to\infty} H(t) = e^t$.

Задача 7.16. Пусть $x_i = q^{i-1}$, где q — независимая переменная. Положим $\varphi_k(q) = \prod_{i=1}^{k}(1 - q^i)$. Докажите в $\mathbb{Q}[\![t]\!]$ равенства а) $e_k(x_1, x_2, \ldots) = q^{r(r-1)/2} / \varphi_k(q)$ б) $h_k(x_1, x_2, \ldots) = 1/\varphi_k(q)$ в) $p_k(x_1, x_2, \ldots) = (1 - q^r)^{-1}$.

Задача 7.17. Положим $h_0 = e_0 = 1$ и $h_k = e_k = 0$ при $k < 0$. Покажите, что матрицы $\left(h_{i-j}\right)$ и $\left((-1)^{i-j} e_{i-j}\right)$ обратны друг другу и получите отсюда соотношение

$$\det\left(h_{\lambda_i + j - i}\right) = \det\left(e_{\lambda_i^t + j - i}\right)$$

на дополнительные миноры этих матриц.

Задача 7.18. Докажите в кольце симметрических функций Λ равенства

а) (вторая формула Джамбелли) $s_{\lambda^t} = \det \begin{pmatrix} e_{\lambda_1} & e_{\lambda_1+1} & \ddots & e_{\lambda_1+n-1} \\ e_{\lambda_2-1} & e_{\lambda_2} & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & e_{\lambda_{n-1}+1} \\ e_{\lambda_n-n+1} & \ddots & e_{\lambda_n-1} & e_{\lambda_n} \end{pmatrix}$

б) $h_n = \det \begin{pmatrix} e_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ e_2 & e_1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ e_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ e_n & e_{n-1} & \cdots & e_2 & e_1 \end{pmatrix}$ в) $e_n = \det \begin{pmatrix} h_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ h_2 & h_1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ h_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ h_n & h_{n-1} & \cdots & h_2 & h_1 \end{pmatrix}$

[1] Т. е. приведённого многочлена степени $\varphi(n)$, корнями которого являются все примитивные комплексные корни степени n из единицы.

г) $p_n = \det\begin{pmatrix} e_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2e_2 & e_1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & e_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ (n-1)e_{n-1} & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ ne_n & e_{n-1} & \cdots & e_2 & e_1 \end{pmatrix}$ д) $n!e_n = \det\begin{pmatrix} p_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ p_2 & p_1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ p_{n-1} & \vdots & \ddots & \ddots & n-1 \\ p_n & p_{n-1} & \cdots & p_2 & p_1 \end{pmatrix}$

е) $(-1)^{n-1}p_n = \det\begin{pmatrix} h_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ h_2 & h_1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & h_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ (n-1)h_{n-1} & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ nh_n & h_{n-1} & \cdots & h_2 & h_1 \end{pmatrix}$

ж) $n!h_n = \det\begin{pmatrix} p_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ p_2 & p_1 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ p_{n-1} & \vdots & \ddots & \ddots & -n+1 \\ p_n & p_{n-1} & \cdots & p_2 & p_1 \end{pmatrix}$

Задача 7.19. Для подгруппы $G \subset S_n$ обозначим через $n_G(\lambda)$ количество перестановок циклового типа λ в G и положим $\zeta_G = |G|^{-1}\sum_\lambda n_G(\lambda)p_\lambda \in \Lambda$. Покажите, что а) $\zeta_{S_n} = h_n$ б) $\zeta_{A_n} = h_n + e_n$
в) $n_{S_n}(\lambda)$ равно коэффициенту при p_λ в разложении определителя из зад. 7.18 (ж)
г) $\zeta_{G\times H} = \zeta_G\zeta_H$, где $G \times H \subset S_n \times S_m$ рассматривается как подгруппа в S_{n+m}, куда S_n и S_m вложены как стабилизаторы последних m и первых n элементов соответственно.

§8. Исчисление массивов, таблиц и диаграмм

8.1. Массивы и элементарные операции над ними. Зафиксируем два конечных упорядоченных множества $I = \{1, \dots, n\}$ и $J = \{1, \dots, m\}$ из n и m элементов и будем рассматривать прямоугольные таблицы из n столбцов и m строк, занумерованных элементами I и J соответственно. Такую таблицу a мы будем называть *массивом* и размещать в *первом* квадранте декартовой системы координат так, чтобы элементы из I росли слева направо по горизонтальной оси, а элементы из J росли снизу вверх по вертикальной оси. Содержимое $a(i,j)$ клетки с координатами (i,j) у нас всегда будет целым неотрицательным числом, которое стоит воспринимать как «количество» или «массу». Весь массив удобно представлять себе как набор шариков одинаковой массы, наделённых двумя группами признаков и в соответствии с этим разложенных по ячейкам массива. Мы никогда не будем проделывать с величинами $a(i,j)$ вычисления, но будем перекладывать шарики из ячейки в ячейку, меняя тем самым их принадлежность к тому или иному признаку каждой из двух групп и соответственно меняя значения $a(i,j)$.

С массивом a связан *столбцовый вес* (или *I-вес*)

$$w^I = \Big(\sum_j a(1,j)\,,\ \sum_j a(2,j)\,,\ \dots\ ,\ \sum_j a(n,j) \Big) \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}\,. \tag{8-1}$$

Это n-мерный целочисленный вектор, i-тая координата которого равна общему количеству шариков в i-том столбце. Аналогично определяется *строчный вес* (или *J-вес*)

$$w^J = \Big(\sum_i a(i,1)\,,\ \sum_i a(i,2)\,,\ \dots\ ,\ \sum_i a(i,m) \Big) \in \mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}\,. \tag{8-2}$$

Массивы можно транспонировать относительно диагонали $i = j$:

$$a \mapsto a^t \ :\ a^t(i,j) = a(j,i)\,. \tag{8-3}$$

На множестве $\mathcal{M}$ всех массивов действуют четыре набора *уплотняющих операций*

$$D_j\,,\quad U_j\,,\quad L_i\,,\quad R_i\,,\quad \text{где } 1 \leqslant i \leqslant n-1,\ 1 \leqslant j \leqslant m-1.$$

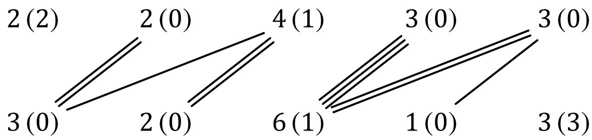
При применении любой из этих операций к данному массиву $a \in \mathcal{M}$ массив a либо никак не меняется, либо ровно один его шарик перемещается ровно на одну клетку вниз (Down), вверх (Up), влево (Left) или вправо (Right) в соответствии с обозначением для операции.

8.1.1. Вертикальные операции D_j и U_j перемещают один шар по вертикали в пределах соседних j-й и $(j+1)$-й строк или ничего не делают. Чтобы узнать, какой именно шар следует передвинуть или убедиться в том, что такого шара нет, следует вначале установить между этими строками *устойчивое паросочетание*[1]. Делается это следующим образом.

Будем последовательно перебирать шары в $(j+1)$-й строке двигаясь слева направо и либо назначать им партнёров в j-й строке, либо объявлять *свободными*. Пусть очередной шар $\boldsymbol{ш}$ лежит в клетке $(i, j+1)$. Его партнёром называем *самый правый* шар из тех, что лежат в j-й строке *строго левее* i-го столбца и ещё не назначены никому партнёрами. Если таких шаров нет, шар $\boldsymbol{ш}$ объявляется свободным. После того, как все шары $(j+1)$-й строки будут разделены на свободные

[1] По-английски: *stable matching*.

и имеющие партнёров, все шары j-й строки, не являющиеся ничьими партнёрами, также объявляются свободными. Вот пример такого паросочетания (в скобках указано число свободных шаров):



(8-4)

Операция D_j опускает на одну клетку вниз самый правый свободный шар $(j+1)$-й строки или ничего не делает, если свободных шаров в $(j+1)$-й строчке нет. Операция U_j поднимает на одну клетку вверх самый левый свободный шар j-й строки или ничего не делает, если в j-й строке нет свободных шаров. Так, в примере (8-4) операция D_j (соотв. U_j) опускает вниз (соотв. поднимает вверх) верхний (соотв. нижний) свободный шар в третьей колонке.

Если операция изменяет массив, мы будем говорить, что она действует на этот массив *эффективно*. Из конструкции устойчивого паросочетания видно, что все свободные шары j-й строки лежат нестрого правее свободных шаров $(j+1)$-й строки, и когда операция D_j действует на массив a эффективно, опущенный ею шар становится самым левым свободным шаром j-й строки в устойчивом паросочетании между преобразованными строками. Поэтому операция U_j, применённая к массиву $D_j a$ поднимет этот опущенный шар назад, т. е. $U_j D_j a = a$ всякий раз, когда D_j действует на a эффективно. Аналогично, если U_j действует эффективно, то $D_j U_j a = a$. Говоря неформально, набор вертикальных операций D, U образует структуру, близкую к групповой — исходный массив a однозначно восстанавливается из результата применения к нему слова $D = D_{j_1} \dots D_{j_k}$ по формуле $a = U_{j_k} \dots U_{j_1} D_{j_1} \dots D_{j_k} a$ при условии, что каждая буква D_j действует эффективно. Мы будем называть такие D-слова *a-эффективными* или просто *эффективными*, если понятно, о каком a идёт речь.

8.1.2. Горизонтальные операции L_i и R_i определяются симметричным образом: они действуют в i-м и $(i+1)$-м столбцах и превращаются в операции D и U при транспонировании массива, т. е. $L_i(a) = \left(D_i(a^t)\right)^t$ и $R_i(a) = \left(U_i(a^t)\right)^t$.

Упражнение 8.1. Проговорите это определение явно: объясните, как установить устойчивое паросочетание между i-м и $(i+1)$-м столбцом, и укажите какой именно шар перемещают горизонтальные операции R_i и L_i.

Отметим, что операции D, L сохраняют столбцовый вес, а операции R, L — строчный.

Лемма 8.1 (лемма о коммутировании)
Каждая из горизонтальных операций L_i, R_i перестановочна с каждой из вертикальных операций D_j, U_j.

Доказательство. Мы покажем, что D_j и U_j перестановочны с L_i — остальные случаи разбираются аналогично. Пусть действие операции L_i заключается в перемещении шара $\boldsymbol{ш}$ на одну клетку влево. Достаточно убедиться, что устойчивое паросочетание между $(j+1)$-й и j-й строками можно организовать так, что после перемещения шара $\boldsymbol{ш}$ связанными в пары будут ровно те же самые шары, что и до его перемещения. Это очевидно, когда $\boldsymbol{ш}$ лежит вне $(j+1)$-й и j-й строк. Рассмотрим оставшиеся два случая.

Пусть $\boldsymbol{ш}$ лежит в $(j+1)$-й строчке, т. е. в клетке $(i+1, j+1)$, как на левом из рис. 8◇1. Тогда все шары из клетки (i, j) имеют партнёров в клетке $(i+1, j+1)$, иначе шар $\boldsymbol{ш}$ получил бы себе партнёра в клетке (i, j) в паросочетании между i-м и $(i+1)$-м столбцом. Поэтому, если в строчном паросочетании у шара *ш* был партнёр, то он был строго левее клетки (i, j), а значит, останется партнёром после перемещения *ш* на клетку влево. А если партнёра у *ш* не было, то он и не появится. Таким образом, при перемещении *ш* строчное паросочетание не изменяется.

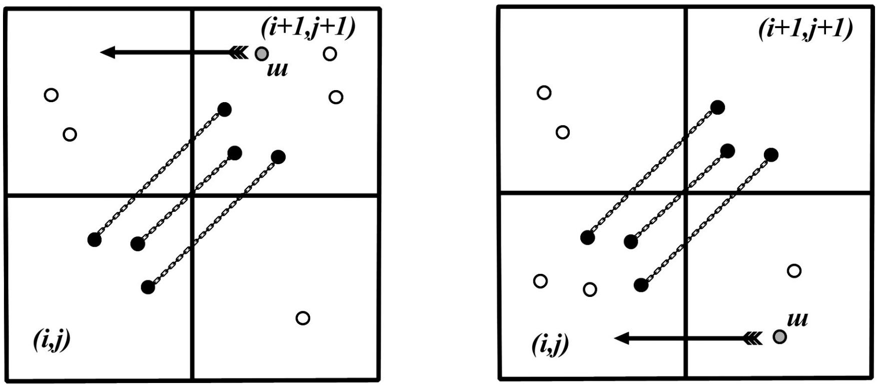


Рис. 8◇1. Действие L_i не меняет устойчивого вертикального паросочетания.

Пусть теперь *ш* лежит в j-й строчке, как на правом из рис. 8◇1. Поскольку он является самым верхним свободным шаром в столбцовом паросочетании, все шары из клетки $(i+1, j+1)$ имеют партнёров в клетке (i, j). Но тогда и в строчном паросочетании все шары из $(i+1, j+1)$-й клетки имеют партнёров в клетке (i, j). Поэтому если после перемещения на клетку влево у шара *ш* имеется партнёр в строчном паросочетании, то он находится строго правее клетки $(i + 1, j + 1)$, а значит, является партнёром шара *ш* и до его перемещения. А если у перемещённого шара *ш* нет партнёра в строчном паросочетании, то его не было и до перемещения. □

Следствие 8.1
Слово H, составленное из горизонтальных операций, тогда и только тогда эффективно действует на массив a, когда оно эффективно действует на любой массив, получающийся из a вертикальными операциями. Симметричным образом, слово V, составленное из вертикальных операций, эффективно действует на a если и только если оно эффективно действует на любой массив, получающийся из a горизонтальными операциями.

Доказательство. Мы докажем первое утверждение, второе получается из него транспонированием. Достаточно проверить, что для любых i, j операция L_i эффективно действует на a тогда и только тогда, когда она эффективно действует на $D_j a$, и только тогда, когда она эффективно действует на $U_j a$. Если $L_i a = a$, то $L_i D_j a = D_j L_i a = D_j a$, и $L_i U_j a = U_j L_i a = U_j a$. Наоборот, если $L_i a \neq a$, то i-тая компонента столбцового веса $w^I(L_i a)$ будет строго больше i-й компоненты $w^I(a)$, а так как D_j и U_j не меняют столбцовый вес, то $L_i D_j a = D_j L_i a \neq D_j a$, и $L_i U_j a = U_j L_i a \neq U_j a$. □

8.2. Уплотнение массивов. Будем называть массив D-, L-, R- или U-*плотным* (т. е. плотным вниз, влево, вправо или вверх), если все элементарные операции соответствующего типа действуют на него тождественно. Применение к произвольному массиву достаточно большого числа операций одного из типов приводит к плотному в соответствующую сторону массиву. Такое уплотнение, как правило, можно производить многими разными способами. На рис. 8◇2 на стр. 117 показаны два пути уплотнения достаточно произвольного массива 3×2. Обратите внимание, что результат уплотнения оказался не зависящим от способа уплотнения. Мы докажем это фундаментальное свойство уплотнений в предл. 8.1, но прежде сделаем одно важное замечание о связи массивов с диаграммами Юнга.

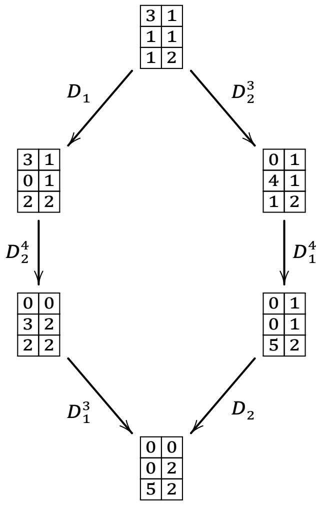


Рис. 8◇2. Два пути уплотнения вниз.

8.2.1. Биплотные массивы и диаграммы Юнга. Из сл. 8.1 вытекает, что при действии вертикальных операций на плотный влево или вправо массив этот массив будет оставаться плотным в ту же сторону. То же самое справедливо для действия горизонтальных операций на массив, который плотен вниз или вверх. Поэтому любой массив можно сделать плотным одновременно в каком-нибудь вертикальном и в каком-нибудь горизонтальном направлении. Мы будем называть такие массивы DL-плотными, DR-плотными, и т. п. Поскольку далее мы будем заниматься в основном DL-уплотнениями, условимся называть просто *биплотными* массивы, плотные одновременно *вниз* и *влево*. Все шары в биплотном массиве лежат лишь в клетках главной диагонали $i = j$, причём их количества нестрого убывают с ростом i. Поэтому столбцовый вес биплотного массива равен строчному и представляет собой диаграмму Юнга $\lambda = w^I(b) = w^J(b)$, т. е. биплотные массивы b взаимно однозначно соответствуют диаграммам Юнга[1]. Диаграмма Юнга, отвечающая биплотному массиву, который получается DU-уплотнением данного массива a, называется *формой* массива a и обозначается $\Phi(a)$. Докажем теперь, что это понятие корректно.

Предложение 8.1
Результат D-, L-, R- или U- уплотнения не зависит от выбора последовательности уплотняющих операций.

Доказательство. Мы рассмотрим только случай D-уплотнения. Если массив a плотен влево, то результат его D-уплотнения — это биплотный массив, отвечающий диаграмме Юнга $w^I(a)$. Поскольку $w^I(a)$ не меняется при вертикальных уплотняющих операциях, результат D-уплотнения

[1]Здесь и далее в этом параграфе мы отождествляем между собою две конечных последовательности неотрицательных целых чисел, получающиеся одна из другой приписыванием справа любого числа нулей. Например, мы считаем равными диаграммы $(2, 1, 1)$ и $(2, 1, 1, 0, 0, 0)$.

L-плотного массива не зависит от способа уплотнения. Пусть теперь a произволен. Зафиксируем какое-нибудь слово $L = L_{i_k} \dots L_{i_1}$, эффективно уплотняющее a влево до L-плотного массива $a' = La$. Тогда для любого такого слова $D = D_{j_m} \dots D_{j_1}$, что Da плотен вниз, действие L на Da тоже будет эффективным, а массив $LDa = DLa$ будет биплотен[1]. Таким образом, мы можем записать Da как $L^{-1}DLa$. Поскольку массив DLa является D-уплотнением L-плотного массива La, он по уже доказанному не зависит от выбора уплотняющего слова D, а значит и массив $Da = L^{-1}DLa$ тоже не зависит от выбора D. □

8.2.2. Плотные массивы и таблицы Юнга. Из любого массива высоты m и ширины n можно изготовить m слов (по одному слову из каждой строки массива), записанных алфавитом $\{1, \dots, n\}$. Делается это при помощи процедуры, которая называется *строчной развёрткой* массива и состоит в следующем. Интерпретируем все шарики массива как буквы, равные номеру того столбца, где стоит шарик. После этого пройдём по каждой строке слева направо, выписывая подряд все встречающиеся буквы. В результате j-тая строка массива развернётся в слово

$$\underbrace{1 \dots 1}_{a(1,j)}\, \underbrace{2 \dots 2}_{a(2,j)} \dots \dots \dots \underbrace{n \dots n}_{a(n,j)} .$$

Получающиеся m слов запишем друг под другом в столбик, *сверху вниз*[2], выровняв их по левому краю. Например:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&0&1\\\hline 0&0&1&1&0\\\hline 0&4&0&0&0\\\hline 3&1&0&0&1\\\hline\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{lllll} 1&1&1&2&5\\ 2&2&2&2&\\ 3&4&&&\\ 5&&&& \end{array}, \qquad \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 2&0&3&0&1\\\hline 0&2&1&1&0\\\hline 0&1&0&2&3\\\hline 1&1&2&0&1\\\hline\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{llllll} 1&1&3&3&3&5\\ 2&2&3&4&&\\ 2&4&4&5&5&5\\ 1&2&3&3&5& \end{array} .$$

Очевидно, что буквы в каждом слове строчной развёртки нестрого возрастают. Условие плотности массива вниз (как в левом примере выше) означает, что под каждой буквой «i» в j-том слове, т. е. под шариком, пришедшим из клетки $a(i, j)$, стоит строго большая, чем «i», буква из $(j+1)$-го слова — партнёр этого шарика при устойчивом паросочетании между j-й и $(j + 1)$-й строками. Следовательно, длины слов строчной развёртки плотного вниз массива нестрого убывают сверху вниз, т. е. образуют диаграмму Юнга, а буквы $\{1, \dots, n\}$ заполняют эту диаграмму нестрого возрастая по строкам и *строго* возрастая по столбцам. Такие заполнения данной диаграммы λ называются *таблицами Юнга* формы λ на алфавите $I = \{1, \dots, n\}$. Мы доказали следующий комбинаторный факт:

Лемма 8.2

Строчная развёртка задаёт биекцию между плотными вниз массивами размера $m \times n$ и таблицами Юнга из не более m строк на алфавите $\{1, \dots, n\}$. □

8.2.3. Плотные массивы и тексты Яманучи. L-плотность массива a можно воспринимать как D-плотность транспонированного массива a^t и формулировать в терминах столбцовой развёртки: плотные влево массивы размера $m \times n$ биективно соответствуют таблицам Юнга из не более n строк в алфавите J. Полезно, однако, охарактеризовать L-плотность в терминах *строчной* развёртки. Для этого будем читать слова строчной развёртки L-плотного массива a *справа налево* одно за другим, сверху вниз. Условие плотности влево означает тогда, что в любом начальном куске получающейся последовательности букв единиц будет не меньше, чем двоек,

[1] Ибо применение L сохраняет свойство массива Da быть плотным вниз, а применение D сохраняет свойство массива La быть плотным влево.

[2] Таким образом, из нижней строки массива получается верхнее слово и т. д.

двоек — не меньше, чем троек, и т. д. для всех пар последовательных букв «i» и «$(i+1)$» из I. В комбинаторике такой текст называют *текстом Ямանучи*. Например, левая из двух строчных развёрток

$$\begin{array}{lll} 1 & & \\ 1 & 2 & \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & \end{array}\;, \qquad \begin{array}{llll} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \\ 2 & 3 & 3 & \\ 1 & 2 & & \end{array}$$

является текстом Ямануучи, а правая — нет. Итак, нами установлена

Лемма 8.3

Строчная развёртка задаёт биекцию между плотными влево массивами размера $m \times n$ и текстами Ямануучи из не более m слов в алфавите $\{1, \dots, n\}$. □

8.2.4. Послойное произведение. Если заданы два отображения множеств $\varphi : X \to Z$ и $\psi : Y \to Z$, то дизъюнктное объединение прямых произведений их слоёв над всеми точками $z \in Z$ обозначается

$$X \underset{Z}{\times} Y \overset{\text{def}}{=} \bigsqcup_{z \in Z} \varphi^{-1}(z) \times \psi^{-1}(z)$$

и называется *послойным* (или *расслоенным*) произведением множеств X и Y над Z по отображениям φ и ψ. Послойные проекции $\pi_X : (x, y) \mapsto x$ и $\pi_Y : (x, y) \mapsto y$ включаются в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & X \underset{Z}{\times} Y \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[dr, "\pi_Y"] & \\ X \arrow[dr, "\varphi"'] & & Y \arrow[dl, "\psi"] \\ & Z & \end{tikzcd} \tag{8-5}$$

которая называется *декартовым квадратом*. Она универсальна в том смысле, что для любого другого коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\xi"'] \arrow[dr, "\eta"] & \\ X \arrow[dr, "\varphi"'] & & Y \arrow[dl, "\psi"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

имеется единственное такое отображение $\alpha : M \to X \underset{Z}{\times} Y$, что $\xi = \pi_X \circ \alpha$ и $\eta = \pi_Y \circ \alpha$.

Упражнение 8.2. Убедитесь в этом и покажите, что универсальное свойство определяет верхний угол квадрата (8-5) однозначно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного со всеми стрелками квадрата.

Теорема 8.1

Множество всех массивов $\mathcal{M}$ является послойным произведением множеств плотных влево массивов $\mathcal{L}$ и плотных вниз массивов $\mathcal{D}$ над множеством биплотных массивов $\mathcal{B}$ по отображениям уплотнения влево и уплотнения вниз, т. е. коммутативный квадрат

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{M} \arrow[dl, "L"'] \arrow[dr, "D"] & \\
\mathcal{L} \arrow[dr, "D"'] & & \mathcal{D} \arrow[dl, "L"] \\
 & \mathcal{B} &
\end{tikzcd}
$$

в котором стрелки L и D переводят массив в его уплотнения влево и вниз, является декартовым.

Доказательство. По предл. 8.1 стрелки L и D корректно определены и перестановочны друг с другом. Надо показать, что отображение $\mathcal{M} \to \mathcal{L} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{D}$, сопоставляющее массиву a пару (La, Da) со свойством $DLa = LDa \in \mathcal{B}$, взаимно однозначно. Докажем его инъективность. Пусть массивы a и a' таковы, что $La = La'$ и $Da = Da'$, а слово Λ эффективно уплотняет массив $Da = Da'$ влево. Тогда Λ эффективно действует на a и a' так, что $\Lambda a = La = La' = \Lambda a'$, откуда $a = \Lambda^{-1}La = \Lambda^{-1}La' = a'$. Теперь докажем сюрьективность. Для любой пары массивов (a_ℓ, a_d), в которой a_ℓ плотен влево, a_d плотен вниз, и $Da_\ell = La_d$, рассмотрим слово Λ, эффективно уплотняющее a_d влево до La_d. Обратное слово Λ^{-1} эффективно действует на $La_d = Da_\ell$, а значит, и на a_ℓ. Массив $a = \Lambda^{-1}a_\ell$ таков, что $La = a_\ell$ и $Da = D\Lambda^{-1}a_\ell = \Lambda^{-1}Da_\ell = \Lambda^{-1}La_d = a_d$. □

Пример 8.1 (графики отображений и стандартные таблицы)
График отображения множеств $a : I \to J$ — это массив, в каждом столбце которого имеется ровно один шарик. По теор. 8.1 такие массивы взаимно однозначно параметризуются парами (a_ℓ, a_d) в которой a_ℓ плотен влево, a_d плотен вниз, причём оба этих массива имеют одинаковую форму $Da_\ell = La_d$, и $w^I(a_d) = (1, \dots, 1)$. Согласно n° 8.2.2, каждая такая пара однозначно описывается следующим набором данных:

- форма $\Phi(a)$ массива a, т. е. диаграмма Юнга $\lambda = DLa$ веса $|\lambda| = n$
- строчная развёртка D-уплотнения a_d массива a, т. е. таблица Юнга формы λ на алфавите I, в которой каждая буква встречается ровно один раз
- столбцовая развёртка L-уплотнения[1] a_ℓ массива a, т. е. таблица Юнга формы λ на алфавите J.

Число всех таблиц Юнга формы λ на m-буквенном алфавите принято обозначать через $d_\lambda(m)$. Таблицы формы λ заполненные без повторений числами от 1 до $|\lambda|$ называются *стандартными таблицами* формы λ, и их число обозначается просто через d_λ. Так как всего имеется m^n отображений $I \to J$, мы получаем соотношение

$$\sum_\lambda d_\lambda \cdot d_\lambda(m) = m^n\,, \tag{8-6}$$

где суммирование идёт по всем n-клеточным диаграммам Юнга и числа $d_\lambda(m)$ отличны от нуля только для диаграмм из $\leqslant m$ строк. В ситуации, когда $\#J = \#I = n$ и рассматриваются только взаимно однозначные отображения $I \xrightarrow{\sim} J$, предыдущая конструкция устанавливает биекцию

[1] Т. е. строчная развёртка транспонированного массива a_ℓ^t.

между $n!$ элементами симметрической группы S_n и парами стандартных таблиц одинаковой формы веса n, откуда

$$\sum_{\lambda} d_{\lambda}^2 = n!\,, \tag{8-7}$$

где сумма идёт о всем n-клеточным диаграммам. Эта биекция индуцирует взаимно однозначное соответствие между инволютивными перестановки[1] $\sigma \in S_n$ и самосопряжёнными массивами $a = a^t$, которым в по теор. 8.1 отвечают пары одинаковых стандартных таблиц. Поэтому

$$\sum_{\lambda} d_{\lambda} = \#\{\sigma \in S_n \mid \sigma^2 = 1\}\,. \tag{8-8}$$

8.3. Действие симметрической группы на DU-множествах. Всякое множество массивов, которое переводится в себя вертикальными операциями D и U, называется *DU-множеством*. Гомоморфизмы DU-множеств — это отображения, перестановочные с действием операций D и U на этих множествах. DU-множество, на котором операции D и U действуют транзитивно, называется *DU-орбитой*. DU-орбиты взаимно однозначно соответствуют плотным вниз массивам. Орбита O такого массива a_d состоит из всевозможных массивов, которые можно получить из a_d эффективными U-словами. Мы будем называть a_d *нижним концом* орбиты O.

Лемма 8.4
Объединения, пересечения и разности DU-множеств также являются DU-множествами. Всякое DU-множество является дизъюнктным объединением DU-орбит.

Доказательство. Не вполне очевидно, разве что, утверждение про разности. Пусть A' и A'' DU-инвариантны и $a' \in A' \smallsetminus A''$. Если $D_j a' \in A''$, то D_j действует эффективно, и тогда $a' = U_j D_j a'$ тоже лежит в A''. □

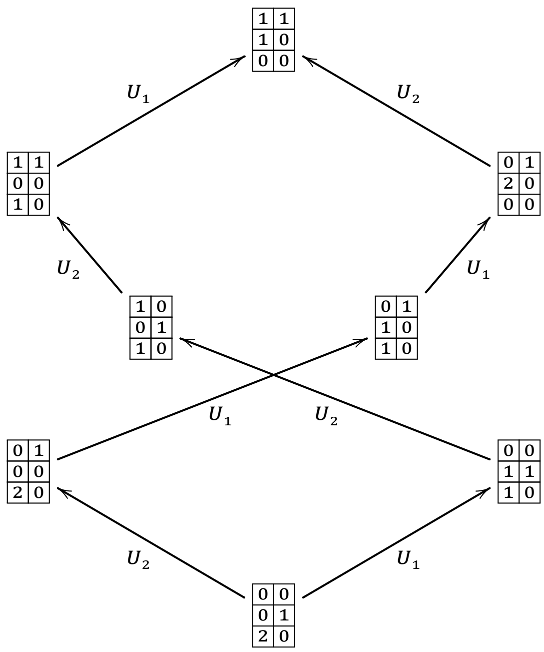


Рис. 8◇3. Стандартная DU-орбита $O_{(2,1)}$.

[1] Т. е. такие, что $\sigma^2 = 1$.

8.3.1. Стандартные орбиты. DU-орбиты O_λ биплотных массивов λ называются *стандартными*. Например, при $m = 3$ стандартная орбита $O_{(2,1)}$, отвечающая диаграмме – таблице – массиву

$$\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \quad - \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \quad - \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 \\ \hline\end{array}$$

состоит из восьми массивов, представленных на рис. 8◇3.

Из теоремы о биекции вытекает, что уплотнение влево задаёт изоморфизм любой DU-орбиты O со стандартной орбитой O_λ, нижний конец которой является биуплотнением нижнего конца орбиты O. Мы будем называть диаграмму λ *типом* орбиты O. Количество орбит типа λ в данном DU-множестве M равно количеству плотных вниз массивов строчного веса λ, имеющихся в M.

8.3.2. Действие симметрической группы $S_m = \mathrm{Aut}(J)$. На каждом DU-множестве массивов M имеется действие элементарных транспозиций $\sigma_j = (j, j+1)$, порождающих симметрическую группу S_m перестановок вертикального множества индексов J. Оно определяется следующим образом. Пусть после установления устойчивого паросочетания между j-й и $(j+1)$-й строками в них оказалось s_j и s_{j+1} свободных шаров соответственно. Положим

$$\sigma_j = D_j^{s_{j+1}-s_j} = U_j^{s_j-s_{j+1}}. \tag{8-9}$$

Подробнее эту процедуру можно описать так. Свернём массив в вертикальный цилиндр, приклеив правую границу n-го столбца к левой границе первого, и продолжим устойчивое паросочетание по кругу, т. е. назначим в пару самому правому нижнему свободному шару самый левый свободный верхний и т. д. В результате останется ровно $|s_{j+1} - s_j|$ свободных шаров и все они будут располагаться или только в верхней или только в нижней строке — там где их вначале было больше. Операция σ_j просто передвигает их по вертикали в другую строку или ничего не делает, если $s_j = s_{j+1}$. В частности, действие σ_j на строчный вес w^J состоит в перестановке j-й и $(j+1)$-й координаты.

Из предыдущего описания видно, что $\sigma_j^2 = \mathrm{Id}$, а также, что σ_j коммутирует с циклическими перестановками столбцов. Очевидно также, что σ_j перестановочна с горизонтальными операциями R, L и со всеми σ_k с $|k - j| \geqslant 2$. Чтобы действие σ_j непротиворечиво продолжалось на всю симметрическую группу S_m достаточно проверить *соотношения треугольника* $\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j = \sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}$. При этом можно считать массив трёхстрочным. Левое уплотнение L и циклическая перестановка столбцов C превращает любой трёхстрочный массив в одностолбцовый:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline * & * & * & * & * & * \\ \hline * & * & * & * & * & * \\ \hline * & * & * & * & * & * \\ \hline\end{array} \xrightarrow{L} \begin{array}{|c|c|c|}\hline * & * & * \\ \hline * & * & 0 \\ \hline * & 0 & 0 \\ \hline\end{array} \xrightarrow{C} \begin{array}{|c|c|c|}\hline * & * & * \\ \hline * & 0 & * \\ \hline 0 & 0 & * \\ \hline\end{array} \xrightarrow{L} \begin{array}{|c|c|c|}\hline * & * & 0 \\ \hline * & 0 & 0 \\ \hline * & 0 & 0 \\ \hline\end{array} \xrightarrow{C} \begin{array}{|c|c|}\hline * & * \\ \hline 0 & * \\ \hline 0 & * \\ \hline\end{array} \xrightarrow{L} \begin{array}{|c|c|}\hline * & 0 \\ \hline * & 0 \\ \hline * & 0 \\ \hline\end{array}$$

на который σ_j и σ_{j+1} действуют перестановками строк, и соотношение треугольника, таким образом, выполняется.

8.4. Полиномы Шура. Интерпретируем все шары в j-й строке как переменные x_j и сопоставим каждому массиву a моном $x^a \stackrel{\text{def}}{=} x_1^{w_1^J(a)} x_2^{w_2^J(a)} \dots x_m^{w_m^J(a)}$, равный произведению всех его шаров. Сумма этих мономов по всем массивам данного DU-множества M обозначается

$$s_M(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{a \in M} x^a \in \Bbbk[x_1, \dots, x_m]$$

и называется (*комбинаторным*) *многочленом Шура* DU-множества M. Симметрическая группа S_m переставляет координаты весового вектора и действует на мономы x^a перестановками переменных. Таким образом, все многочлены Шура являются симметрическими.

Поскольку каждое DU-множество M является объединением непересекающихся орбит, а всякая орбита изоморфна стандартной орбите O_λ, произвольный полином Шура является линейной комбинацией с неотрицательными целыми коэффициентами *стандартных* многочленов Шура $s_\lambda(x)$, отвечающих биплотным массивам (диаграммам Юнга) λ:

$$s_M(x) = \sum_{\lambda\in\Phi(M)} c_M^\lambda \cdot s_\lambda(x)\,, \tag{8-10}$$

где суммирование происходит по всем формам λ массивов из M, и коэффициент c_M^λ равен числу DU-орбит, изоморфных O_λ, т. е. количеству всех плотных вниз массивов J-веса λ в M. Согласно n° 8.2.2, элементы стандартной орбиты O_λ суть всевозможные L-плотные массивы формы λ, и столбцовая развёртка устанавливает биекцию между такими массивами и таблицами Юнга формы λ в алфавите $\{x_1, \dots, x_m\}$. Таким образом, стандартный полином Шура имеет вид

$$s_\lambda(x) = \sum_\eta K_{\lambda,\eta} \cdot x^\eta = \sum_\eta K_{\lambda,\eta} \cdot x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} \,\dots\, x_m^{\eta_m}\,, \tag{8-11}$$

где $\eta \in \mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}$ пробегает m-мерные целочисленные векторы с неотрицательными координатами, а коэффициент $K_{\lambda,\eta}$ равен числу таблиц формы λ, заполненных η_1 единицами, η_2 двойками и т. д. Мы будем говорить, что такая таблица имеет *состав* η.

Например, при $m = 3$ из представленной на рис. 8◇3 на стр. 121 схемы получаем

$$s_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + 2\,x_1x_2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2\,.$$

Число $K_{\lambda,\eta}$ таблиц формы λ и состава η называется *числом Костки*. Отметим, что $K_{\lambda,(1^{|\lambda|})} = d_\lambda$ равно числу стандартных таблиц формы λ, все $K_{\lambda,\lambda} = 1$, и $K_{\lambda,\eta} \neq 0$ только когда при каждом $j = 1, 2, 3, \dots$ выполняется неравенство $\lambda_1 + \dots + \lambda_j \geqslant \eta_1 + \dots + \eta_j$. В этой ситуации говорят, что диаграмма λ *доминирует* вектор η и пишут $\lambda \trianglerighteq \eta$.

Упражнение 8.3. Покажите, что отношение доминирования задаёт на множестве диаграмм Юнга заданного веса n частичный порядок, полный при $n \leqslant 5$, и приведите пример двух несравнимых между собою диаграмм Юнга веса 6.

Из (8-11) видно, что стандартные полиномы Шура $s_\lambda(x_1, \dots, x_m)$, где λ пробегает все диаграммы Юнга из не более m строк, выражаются через базисные мономиальные симметрические многочлены m_μ при помощи унитреугольной матрицы

$$s_\lambda = \sum_{\mu\trianglelefteq\lambda} K_{\lambda,\mu} \cdot m_\mu\,. \tag{8-12}$$

Поскольку такая матрица обратима над $\mathbb{Z}$, многочлены s_λ тоже образуют базис $\mathbb{Z}$-модуля симметрических функций.

Пример 8.2 (полные и элементарные симметрические многочлены)
Многочлен $s_{(k)}(x)$, отвечающий DU-орбите одностолбцового массива формы

$$\lambda = (k) = (k, 0, \dots, 0) = \underbrace{\square\square \dots \square\square}_{k}\,,$$

представляет собой *полный симметрический многочлен* $h_k(x)$ — сумму всех мономов общей степени k от $x_1, \dots, x_n$. В самом деле, столбцовая развёртка плотного влево массива из орбиты $O_{(k)}$ — это однострочная таблица Юнга, и для любого содержания η веса $|\eta| = k$ имеется ровно одна такая таблица[1]. Эквивалентно: DU-орбита одностолбцового массива веса k образована всеми возможными расположениями k шариков по m ящикам столбца.

Симметричным образом, многочлен $s_{(1^k)}$ DU-орбиты k-столбцового массива формы

$$\lambda = 1^k = (\underbrace{1, \dots, 1}_{k}) = \left.\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \vdots \\ \hline \\ \hline\end{array}\right\} k$$

это *элементарный симметрический многочлен* $e_k(x)$, т. е. сумма всех линейных по каждой переменной мономов общей степени k от $x_1, \dots, x_n$. Причина та же, только теперь столбцовая развёртка каждого плотного влево массива из орбиты O_{1^k} представляет собою одностолбцовую таблицу Юнга, в которой все номера переменных строго возрастают сверху вниз.

Пример 8.3 (тождества Коши и Шура.)
Интерпретируем каждый шарик в клетке (i, j) массива a как билинейный моном $x_i y_j$ от двух наборов переменных $x = x^I = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = y^J = (y_1, \dots, y_m)$. Перемножая вместе все шарики массива a, мы получим (в обозначениях n° 8.4) моном $x^{a^t} y^a$. По теореме о биекции[2] сумма таких мономов по всем массивам a фиксированной формы $\lambda = \Phi(a)$ равна произведению многочленов Шура $s_\lambda(x) \cdot s_\lambda(y)$, и значит сумма мономов $x^{a^t} y^a$ по вообще всем массивам a формата $I \times J$ равна сумме таких произведений по всем диаграммам Юнга λ. С другой стороны, сумма всех мономов $x^{a^t} y^a$ по всем массивам a получается при раскрытии скобок в произведении геометрических прогрессий $\prod_{I \times J} \left(1 + x_i y_j + (x_i y_j)^2 + (x_i y_j)^3 + \dots\right)$, поскольку выбирая из (i, j)-го сомножителя слагаемое $(x_i y_j)^{a(i,j)}$, мы получаем моном $x^{a^t} y^a$, отвечающий массиву a. Мы получили *тождество Коши*:

$$\sum\nolimits_\lambda s_\lambda(x) \cdot s_\lambda(y) = \prod\nolimits_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j} . \tag{8-13}$$

Если взять $I = J$, ограничиться только симметричными массивами $a = a^t$, положить $x = y = \xi$, извлечь из каждого полученного a-монома корень $\xi^a = \sqrt{\xi^{a^t} \xi^a}$ и просуммировать по всем симметричным массивам a заданной формы λ, мы получим многочлен $s_\lambda(\xi)$, а суммируя по вообще всем симметричным массивам a — сумму $\sum_\lambda s_\lambda(\xi)$. Тот же ответ даст раскрытие скобок в произведении $\prod_k (1 + \xi_k + (\xi_k)^2 + (\xi_k)^3 + \dots) \cdot \prod_{i<j} (1 + \xi_i \xi_j + (\xi_i \xi_j)^2 + (\xi_i \xi_j)^3 + \dots)$. Записывая геометрические прогрессии рациональными дробями, получаем *тождество Шура*:

$$\sum\nolimits_\lambda s_\lambda(\xi) = \prod\nolimits_i \frac{1}{1 - \xi_i} \cdot \prod\nolimits_{i<j} \frac{1}{1 - \xi_i \xi_j} . \tag{8-14}$$

8.5. Правило Литтлвуда – Ричардсона. Произведение $s_M(x) \cdot s_N(x)$ полиномов Шура DU-множеств M и N является полиномом Шура для DU-множества, состоящего из всевозможных массивов вида ab размера $(2n) \times m$, получающихся приписыванием какого-нибудь массива $b \in N$

[1] В которой все переменные упорядочены по нестрогому возрастанию номеров.
[2] См. теор. 8.1 на стр. 119.

справа к какому-нибудь массиву[1] $a \in M$. Множество таких массивов естественно обозначить через $M \otimes N$ и называть *тензорным произведением* DU-множеств M и N. Итак,

$$s_M(x) \cdot s_N(x) = \left(\sum\nolimits_{a \in M} x^a\right) \cdot \left(\sum\nolimits_{b \in N} x^b\right) = \sum\nolimits_{a \in M, b \in N} x^{ab} = \sum\nolimits_{c \in M \otimes N} x^c \,.$$

Поскольку стандартные полиномы s_λ образуют базис модуля симметрических функций, произведение $s_\lambda s_\mu$ можно записать как

$$s_\lambda \cdot s_\mu = \sum\nolimits_\nu c^\nu_{\lambda\mu} \cdot s_\nu \,. \tag{8-15}$$

Теорема 8.2 (правило Литтлвуда – Ричардсона)
Суммирование в формуле (8-15) происходит по всем диаграммам ν, получающимся добавлением $|\mu|$ клеток к диаграмме λ, а коэффициент $c^\nu_{\lambda\mu}$ равен количеству таких заполнений этих дописанных клеток μ_1 единицами, μ_2 двойками, μ_3 тройками и т. д., что вдоль строк «косой диаграммы» $\nu \smallsetminus \lambda$ числа возрастают нестрого, а вдоль столбцов — строго (как в таблице Юнга), и одновременно текст, получающееся при прочтении этой «косой диаграммы» строку за строкой справа налево сверху вниз, содержит в каждом своём начальном куске единиц не меньше, чем двоек, двоек не меньше, чем троек и т. д. (т. е. является текстом Ямануччи[2]).

Упражнение 8.4. Пользуясь правилом Литтлвуда – Ричардсона, вычислите[3] $s_{(1)} \cdot s_{(1,1)}$ и $s^2_{2,1}$.

Доказательство. Мы должны подсчитать в DU-множестве $O_\lambda \otimes O_\mu$ количество DU-орбит, которые уплотняются влево до стандартной орбиты O_ν. Пусть массив ab лежит в такой орбите. Поскольку массивы a, b получены из биплотных массивов λ, μ вертикальными операторами, оба они плотны влево и имеют I-веса λ и μ соответственно. Заметим, что действие вертикальной уплотняющей операции D_j на «толстый» массив ab состоит либо в её действии отдельно на[4] b , либо в её действии отдельно на[5] a. Поэтому при уплотнении вниз «толстого» массива ab мы получим массив вида $a'b'$, в котором a' плотен вниз, и оба массива a', b' по прежнему плотны влево и имеют I-веса λ, μ. Таким образом, a' биплотен формы λ. Если форма массива $a'b' = \lambda b'$ равна ν, то строки горизонтальной развёртки массива b' — это выровненные по левому краю строки «косой таблицы» $\nu \smallsetminus \lambda$, заполненные именно так, как требует правило Литтлвуда – Ричардсона: первое, «табличное», ограничение выражает плотность вниз «толстого» массива ab, а второе, «текстовое», ограничение выражает, согласно n° 8.2.3, плотность влево массива b'. □

Упражнение 8.5 (формулы Пьери). Выведите из теор. 8.2 *формулы Пьери*

$$s_\lambda \cdot e_k = s_\lambda \cdot s_{(1^k)} = \sum\nolimits_\mu s_\mu \tag{8-16}$$

$$s_\lambda \cdot h_k = s_\lambda \cdot s_{(k)} = \sum\nolimits_\nu s_\nu \tag{8-17}$$

[1] При этом вертикальный J-алфавит не меняется, а горизонтальный I-алфавит заменяется дизъюнктным объединением I-алфавитов массивов a и b.

[2] См. n° 8.2.3 на стр. 118.

[3] При этом поучительно убедиться в том, что применение теор. 8.2 к $s_{(1)} \cdot s_{(1,1)}$ и к $s_{(1,1)} \cdot s_{(1)}$ (что не всё равно) приводит к одному и тому же результату.

[4] Если самый правый свободный шар при паросочетании внутри «толстого» массива ab лежит в b, то он подавно будет самым правым свободным шаром и для паросочетания, установленного отдельно внутри b.

[5] Если в b нет свободных шаров при паросочетании внутри «толстого» массива ab.

где μ и ν пробегают все диаграммы, которые можно получить приписыванием k новых клеток к диаграмме λ так, чтобы никакие две новые клетки не попали в одну строку μ и в один столбец ν.

8.5.1. Тождество Якоби – Труди. Из формулы Пьери (8-17) и формулы Пьери из сл. 7.4 на стр. 109 вытекает, что детерминантные полиномы Шура $s_\lambda = \Delta_{\delta+\lambda}/\Delta_\delta$ из сл. 7.1 на стр. 104 и комбинаторные полиномы Шура s_λ стандартных DU-орбит O_λ — это одни и те же полиномы. В самом деле, формулы Пьери позволяют однозначно выразить все многочлены Шура через многочлены h_k. Например, согласно (8-17)

$$\begin{aligned}
s_{(2,2,1)} &= s_{(2,2)}h_1 - s_{(3,2)}\\
s_{(3,2)} &= s_{(3)}h_2 - s_{(5)} - s_{(4,1)} = h_3h_2 - h_5 - s_{(4,1)}\\
s_{(2,2)} &= s_{(2)}h_2 - s_{(3,1)} - s_{(4)} = h_2^2 - h_4 - s_{(3,1)}\\
s_{(4,1)} &= s_{(4)}h_1 - s_{(5)} = h_4h_1 - h_5\\
s_{(3,1)} &= s_{(3)}h_1 - s_{(4)} = h_3h_1 - h_4
\end{aligned}$$

откуда[1] $s_{(2,2,1)} = -h_3h_2 + h_4h_1 + h_1(h_2^2 - h_1h_3)$. В общем случае, оставляя в правой части формулы (8-17) диаграмму с самой длинной нижней строкой среди всех диаграмм с наибольшим количеством строк, мы выражаем её через h_k (где k равно длине этой нижней строки) и диаграммы, имеющие то же число строк, но более короткую нижнюю строчку, или строго меньшее число строк. Далее используем убывающую индукцию по количеству строк диаграммы Юнга и длине её нижней строки. Совпадение детерминантного и комбинаторного полиномов Шура известно как *тождество Якоби – Труди*.

8.5.2. Выражение e_λ и h_λ через s_λ. Напомним, что для диаграммы Юнга μ мы обозначаем через m_i количество строк длины i в этой диаграмме и полагаем

$$\begin{aligned}
e_\mu &= e_{\mu_1}e_{\mu_2}\dots e_{\mu_r} = e_1^{m_1}e_2^{m_2}\dots e_n^{m_n}\\
h_\mu &= h_{\mu_1}h_{\mu_2}\dots h_{\mu_r} = h_1^{m_1}h_2^{m_2}\dots h_n^{m_n}\,,
\end{aligned}$$

где для $k \in \mathbb{N}$ многочлены $e_k(x) = s_{(1^k)}(x_1,\dots,x_m)$ и $h_k(x) = s_{(k)}(x_1,\dots,x_m)$ суть элементарный[2] и полный[3] симметрические многочлены. Для произвольной диаграммы η многочлен $h_\eta = s_{(\eta_1)}\dots s_{(\eta_r)}$ является полиномом Шура DU-множества $O_{(\eta_1)}\otimes\dots\otimes O_{(\eta_r)}$. Орбиты формы ν в этом множестве биективно соответствуют своим нижним концам, которые в свою очередь, взаимно однозначно описываются таблицами формы ν и содержания η. Тем самым,

$$h_\eta = \sum\nolimits_\nu K_{\nu,\eta}\cdot s_\nu\,. \tag{8-18}$$

Многочлен $e_\eta = s_{(1^{\eta_1})}\dots s_{(1^{\eta_r})}$ — это многочлен Шура DU-множества $O_{(1^{\eta_1})}\otimes\dots\otimes O_{(1^{\eta_r})}$, каждый массив в котором имеет $|\eta|$ столбцов, разбитых на вертикальные подмассивы $a_1,\dots,a_r$ ширины $\eta_1,\dots,\eta_r$, причём в каждом столбце находится ровно один шар, и j-номера этих шаров строго возрастают внутри каждого вертикального подмассива a_i. При уплотнении вниз последнее свойство сохранится, и в результате такого уплотнения мы получим массив $a_1'\dots a_r'$, в котором

[1] Читателю рекомендуется проверить этот результат по формуле Джамбелли (7-22).

[2] См. n° 7.2 на стр. 104.

[3] См. n° 7.3 на стр. 105.

шары каждого подмассива a_i' располагаются в разных строках, номера которых строго возрастают слева направо. Тем самым, каждый подмассив a_i' внесёт не более одного шара в каждую компоненту J-веса. Если суммарный J-вес при этом получится ν, то записывая в каждую строку диаграммы ν последовательно номера i тех подмассивов a_i', которые дают вклад в эту компоненту J-веса, мы получим таблицу содержания η и формы ν^t, *сопряжённой*[1] к форме ν: в силу вышесказанного номера будут строго возрастать по строкам диаграммы ν, а поскольку массив плотен вниз, они также должны не строго возрастать по столбцам; кроме того, по построению, каждый номер i будет представлен ровно в η_i различных строчках. Итак,

$$e_\eta = \sum\nolimits_\nu K_{\nu^t,\eta} \cdot s_\nu \,. \tag{8-19}$$

Следствие 8.2
Инволюция ω из предл. 7.2, переводящая e_k и h_k друг в друга, действует на полиномы Шура по правилу $\omega(s_\lambda) = s_{\lambda^t}$, т. е. переводит друг в друга многочлены, отвечающие транспонированным диаграмм Юнга.

Доказательство. Так как многочлены s_λ образуют базис $\mathbb{Z}$-модуля симметрических функций, отображение $s_\lambda \mapsto s_{\lambda^t}$ однозначно задаёт на модуле симметрических функций $\mathbb{Z}$-линейную инволюцию. Из формул (8-18) и (8-19) следует, что эта инволюция переводит e_k в h_k и наоборот, т. е. совпадает с ω. □

Следствие 8.3 (вторая формула Джамбелли)

$$s_{\lambda^t} = \det\begin{pmatrix} e_{\lambda_1} & e_{\lambda_1+1} & \ddots & e_{\lambda_1+n-1} \\ e_{\lambda_2-1} & e_{\lambda_2} & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & e_{\lambda_{n-1}+1} \\ e_{\lambda_n-n+1} & \ddots & e_{\lambda_n-1} & e_{\lambda_n} \end{pmatrix}, \tag{8-20}$$

где по главной диагонали стоят $e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_n}$, и при движении вдоль строк слева направо индексы у e с каждым шагом увеличиваются на единицу. □

Доказательство. Применяем инволюцию ω к форм. (7-22) на стр. 108. □

8.6. Скалярное произведение на модуле симметрических функций. Введём на $\mathbb{Z}$-модуле симметрических функций[2] Λ евклидово скалярное произведение $\langle *, * \rangle$, для которого базис из полиномов Шура s_λ является ортонормальным. Из формул (8-18) и (8-12)

$$h_\lambda = \sum\nolimits_{\mu \trianglerighteq \lambda} K_{\mu,\lambda} \cdot s_\mu \,, \quad s_\mu = \sum\nolimits_{\lambda \trianglerighteq \mu} K_{\mu,\lambda} \cdot m_\lambda$$

вытекает, что $\langle h_\lambda, s_\mu \rangle = K_{\mu,\lambda} = \langle m_\lambda^*, s_\mu \rangle$, где m_λ^* — базис, евклидово двойственный к m_λ. Таким образом, $m_\lambda^* = h_\lambda$, т. е. базисы h_λ и m_λ двойственны друг другу:

$$\langle h_\lambda, m_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu} \,. \tag{8-21}$$

Из сл. 8.2 вытекает, что инволюция ω является ортогональным оператором.

[1] Или *транспонированной*, т. е. симметрично отражённой относительно главной диагонали.
[2] См. n° 7.7 на стр. 110.

Предложение 8.2
Многочлены Ньютона p_λ составляют ортогональный базис пространства $\mathbb{Q}\otimes\Lambda$ симметрических функций с рациональными коэффициентами и имеют скалярные квадраты $\langle\, p_\lambda\,,\, p_\lambda\,\rangle = z_\lambda$, где[1] $z_\lambda = \prod_k \left(m_k!\cdot k^{m_k}\right)$.

Доказательство. Выразим произведение геометрических прогрессий в правой части тождества Коши (8-13) через функции Ньютона от наборов переменных x и y:

$$\sum_\lambda s_\lambda(x)s_\lambda(y) = \prod_{i,j}\frac{1}{1-x_iy_j} = \prod_j H(y_j) = \prod_j \exp\left(\int_0^{y_j} P(t)\,dt\right) =$$
$$= \exp\left(\sum_j\sum_k \frac{1}{k}\,p_k(x)y_j^k\right) = \exp\left(\sum_k \frac{p_k(x)p_k(y)}{k}\right) = \prod_k \exp\left(\frac{p_k(x)p_k(y)}{k}\right) =$$
$$= \prod_k\sum_{\ell\geqslant 0}\frac{1}{\ell!\cdot k^\ell}\,\left(p_k(x)p_k(y)\right)^\ell = \sum_\lambda \frac{1}{z_\lambda}\,p_\lambda(x)p_\lambda(y)$$

(последнее равенство объясняется точно также, как в доказательстве предл. 7.3 на стр. 107). Если обозначить через $C_{\lambda\mu} = \langle\, s_\lambda\,,\, p_\mu\,\rangle$ коэффициенты разложений Ньютоновских полиномов по базису из полиномов Шура, так что $p_\mu = \sum_\lambda C_{\lambda\mu}s_\lambda$, то подставляя эти разложения в правую часть полученного выше равенства и приравнивая коэффициенты при $s_\lambda(x)s_\eta(y)$ в левой и правой части, получаем соотношения

$$\sum_\nu C_{\nu\lambda}C_{\nu\eta} = \begin{cases} z_\lambda & \text{при } \eta=\lambda\\ 0 & \text{при } \eta\neq\lambda,\end{cases}$$

т. е. матрица Грама $\left(\langle\, p_\lambda\,,\, p_\mu\,\rangle\right) = C^t\cdot C$ диагональна с диагональными элементами z_λ. □

Задачи для самостоятельного решения к §8

Задача 8.1. Покажите, что следующие три условия на массив a попарно эквивалентны:

а) a плотен вниз

б) строчная развёртка массива a является таблицей Юнга

в) $\forall\ i\in I,\ j\in J\quad a(1,j+1)+a(2,j+1)+\dots+a(i,j+1)\leqslant a(1,j)+a(2,j)+\dots+a(i-1,j)$.

Задача 8.2. Нарисуйте плотный вниз массив со строчной развёрткой $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&4&6\\\hline 2&5&7\\\hline 3&8&9\\\hline\end{array}$ и плотный влево массив со столбцовой развёрткой $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4&5&8\\\hline 6&7&9\\\hline\end{array}$. Какой перестановке из симметрической группы S_9 отвечает по теореме о биекции[2] эта пара массивов?

Задача 8.3. Каким перестановкам $g\in S_9$ соответствует по теореме о биекции пара таблиц[3]

а) $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&6&7&8&9\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{4}\\\cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{5}\\\cline{1-1}\end{array}$ и $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&4&5&6&7&8&9\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{2}\\\cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{3}\\\cline{1-1}\end{array}$ б) $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&3&5&6\\\hline 2&4&\multicolumn{1}{c|}{9}\\\cline{1-3} 7&\multicolumn{1}{c|}{8}\\\cline{1-2}\end{array}$ и $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&3&5&7\\\hline 2&4&\multicolumn{1}{c|}{8}\\\cline{1-3} 6&\multicolumn{1}{c|}{9}\\\cline{1-2}\end{array}$?

[1] Ср. с форм. (7-18) на стр. 106.

[2] См. теор. 8.1 на стр. 119.

[3] Напомню, что перестановка $g\in S_9$ задаёт биективное отображение $I\to J$ горизонтальных индексов в вертикальные, а массив является графиком этого отображения, и первая из таблиц служит строчной развёрткой его уплотнения вниз, а вторая — столбцовой развёрткой его уплотнения влево, см. прим. 8.1 на стр. 120.

Задача 8.4. Покажите, что всякий гомоморфизм[1] между двумя DU-орбитами биективен, если вторая орбита не состоит из одной точки.

Задача 8.5. Выпишите явно многочлены Шура

а) $s_{2,1}(x_1, x_2, x_3)$ б) $s_{3,1}(x_1, x_2, x_3)$ в) $s_{2,1,1}(x_1, x_2, x_3)$.

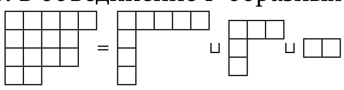
Задача 8.6. Из скольких мономов состоит $s_{(2,1,1)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$?

Задача 8.7. Выразите $\det\begin{pmatrix} x_1^6 & x_2^6 & x_3^6 & x_4^6 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ через элементарные симметрические многочлены и произведение $\prod_{i<j}(x_i - x_j)$.

Задача 8.8 (доминирование). Для двух диаграмм Юнга λ и μ одинакового веса $|\lambda| = |\mu| = n$ мы пишем[2] $\lambda \trianglerighteq \mu$, если $\lambda_1 + \dots + \lambda_j \geqslant \mu_1 + \dots + \mu_j$ для каждого $j = 1, 2, \dots$.

а) Покажите, что доминирование является частичным порядком и приведите пример двух несравнимых диаграмм.

б) Пусть λ — минимальная по отношению доминирования диаграмма, строго доминирующая диаграмму μ. Покажите, что μ получается из λ переносом ровно одной клетки в юго-западном направлении на ближайшее возможное расстояние, и в этом случае $\mu^t \triangleright \lambda^t$. Выведите отсюда, что для произвольных двух диаграмм $\lambda \trianglerighteq \mu \iff \lambda^t \trianglelefteq \mu^t$.

Задача 8.9. Разрежем диаграмму λ в объединение Г-образных диаграмм $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ с углами на главной диагонали. Например: , а в общем случае k равно числу клеток на главной диагонали диаграммы λ и $\gamma_i = (\lambda_i - i + 1, 1^{\lambda_i^t - i})$. Выясните, с каким коэффициентом входит s_λ в разложение произведения $s_{\gamma_1} \dots s_{\gamma_k}$ по базису Шура.

Задача 8.10* (инволюция Шютценберже). Покажите, что центральная симметрия не меняет форму[3] массивов: $\Phi(a^*) = \Phi(a)$, где $a^*(i, j) = a(n + 1 - i, m + 1 - j)$ для $m \times n$ массива a.

Задача 8.11* (выравнивание чумов). Будем называть *цепью* произвольного чума M любое его линейно упорядоченное подмножество, а *антицепью* — любое подмножество состоящее из попарно несравнимых элементов. Подмножество $N \subset M$, называется k-антицепью, если его можно покрыть k антицепями. Обозначим через $\alpha_k(M)$ максимум длин k-антицепей чума M. Набор разностей $\delta_k(M) = \alpha_k(M) - \alpha_{k-1}(M)$ называется *формой* чума M. Свяжем с каждым массивом a частичный порядок на множестве $M = M(a)$ всех его шаров, полагая что один шар строго больше другого, если обе его координаты строго больше. Докажите, что

а) вертикальные операции D_j, U_j не уменьшают элементов последовательности[4] δ_k

б) форма чума $M(a)$ совпадает с формой массива[5] a.

[1] Т. е. отображение, перестановочное с действием всех операций D_j и U_j.

[2] Напомню, что это отношение называется *доминированием*, см. упр. 8.3 на стр. 123 и предшествующее ей обсуждение.

[3] Напомню, что *форма* массива это диаграмма Юнга, описывающая его биуплотнение, см. n° 8.2.1 на стр. 117.

[4] Сначала проверьте это для первого члена последовательности δ_1, равного длине максимальной 1-антицепи, а потом «распутайте» произвольную k-антицепь в объединение k непересекающихся 1-антицепей.

[5] В частности, является диаграммой Юнга, что вовсе не очевидно *a priori* и составляет содержание непростой комбинаторной теоремы, доказанной в 70-х годах Грином и Фоминым.

§9. Основные понятия теории представлений.

9.1. Представления множества операторов. Для произвольного множества R условимся обозначать через $R \otimes \Bbbk$ векторное пространство с базисом R над полем $\Bbbk$, состоящее из всевозможных конечных формальных линейных комбинаций элементов из R с коэффициентами в $\Bbbk$, а через $A_R \overset{\text{def}}{=} T(R \otimes \Bbbk)$ — тензорную алгебру этого векторного пространства, т. е. свободную ассоциативную $\Bbbk$-алгебру, порождённую множеством R.

Например, если множество $R = \{t\}$ состоит из одного элемента t, то векторное пространство $t \otimes \Bbbk = \Bbbk\, t$ одномерно с базисом t, а ассоциативная алгебра $A_t = T(\Bbbk\, t) \simeq \Bbbk[t]$ изоморфна алгебре многочленов от одной переменной: изоморфизм сопоставляет базисному тензору $t \otimes \ldots \otimes t \in (\Bbbk\, t)^{\otimes n}$ моном t^n.

Отображение $\varrho : R \to \mathrm{End}(W)$ множества R в алгебру линейных эндоморфизмов какого-нибудь векторного пространства W над полем $\Bbbk$ называется *линейным представлением* множества R эндоморфизмами пространства W. По универсальному свойству свободной алгебры A_R, линейные представления $\varrho : R \to \mathrm{End}(W)$ биективно соответствуют гомоморфизмам ассоциативных алгебр $\tilde{\varrho} : A_R \to \mathrm{End}(W)$. Последние называются *линейными представлениями* алгебры A_R в пространстве W. Пространство W с фиксированным на нём представлением множества R или алгебры A_R называется, соответственно, R-модулем или A_R-модулем. И то, и другое равносильно сопоставлению каждому элементу $f \in R$ линейного оператора $\varrho(f) : W \to W$. Произвольные тензоры $f = \sum_{f_1,\ldots f_m \in R} x_{f_1\ldots f_m} f_1 \otimes \ldots \otimes f_m \in A_R$ с $f_\nu \in R$, $x_{f_1\ldots f_m} \in \Bbbk$ при этом представляются линейными операторами $\tilde{\varrho}(f) = \sum x_{f_1\ldots f_m} \varrho(f_1) \circ \varrho(f_2) \circ \ldots \circ \varrho(f_m) : W \to W$, а образ гомоморфизма алгебр $\tilde{\varrho} : A_R \to \mathrm{End}(W)$ состоит из всех операторов $W \to W$, которые можно получить из представляющих элементы множества R операторов $\varrho(f)$ при помощи композиций, сложения и умножения на числа. Он называется *ассоциативной оболочкой* множества операторов $\varrho(R) \subset \mathrm{End}(W)$ и обозначается $\mathrm{Ass}\big(\varrho(R)\big) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{im}\, \tilde{\varrho}$.

Когда понятно, о каком представлении ϱ идёт речь, мы обозначаем результат применения оператора $\tilde{\varrho}(f)$, где $f \in A_R$, к вектору $w \in W$ просто через fw. Для подпространства $U \subset W$ и набора операторов $F \subset A_R$ мы полагаем $FU \overset{\text{def}}{=} \{fu \mid f \in F,\, u \in U\}$.

9.1.1. Разложимость, приводимость и полупростота. Векторное подпространство U в R-модуле W называется *R-подмодулем* или *R-инвариантным подпространством*, если $RU \subset U$.

Упражнение 9.1 (фактор модули). Убедитесь, что для всякого R-подмодуля $U \subsetneq W$ на фактор пространстве $V = W/U$ имеется структура R-модуля, на котором элементы $f \in R$ действуют по правилу $f[w] \overset{\text{def}}{=} [fw]$, где $[w] = w + U$ означает класс вектора $w \in W$ по модулю U.

Отличные от W подмодули $U \subsetneq W$ называются *собственными*.

Ненулевой R-модуль W называется *простым*, если у него нет ненулевых собственных подмодулей. Задающее такой модуль представление $\varrho : R \to \mathrm{End}(W)$ называется *неприводимым*.

Ненулевой R-модуль W и соответствующее ему представление называются *разложимыми*, если W является прямой суммой своих ненулевых собственных R-подмодулей. Всякий конечномерный R-модуль является прямой суммой неразложимых, однако бывают неразложимые непростые модули. Если R-модуль W является прямой суммой простых R-подмодулей, то он называется *полупростым*, а соответствующее представление $\varrho : R \to \mathrm{End}(W)$ — *вполне приводимым*. Обратите внимание, что каждый неприводимый R-модуль по определению полупрост и неразложим, и что прямая сумма любого множества полупростых модулей полупроста.

Упражнение 9.2. Убедитесь, что для заданных подпространств $U_1, U_2 \subset W$ условия $RU_1 \subset U_2$ и $A_R U_1 \subset U_2$ равносильны, и выведите отсюда, что простота, полупростота и разложимость пространства W относительно произвольного множества операторов $S \subset \operatorname{End}(W)$ и относительно ассоциативной оболочки $\operatorname{Ass}(S)$ этих операторов означают одно и то же.

Пример 9.1 (пространство с одним оператором[1])
Если множество R состоит из одного элемента t, то $A_R \simeq \Bbbk[t]$ является кольцом многочленов от этого элемента. Представление $\varrho : R \to \operatorname{End} W$ заключается в выборе на пространстве W линейного оператора $f = \varrho(t) : W \to W$ и наделяет пространство W структурой модуля над кольцом многочленов, которая задаётся гомоморфизмом

$$\tilde{\varrho} = \mathrm{ev}_f : \Bbbk[t] \to \operatorname{End}(W), \ t \mapsto f, \tag{9-1}$$

переводящим многочлен $F \in \Bbbk[t]$ в результат подстановки в него оператора f вместо переменной t. Если пространство W конечномерно, гомоморфизм (9-1) имеет ненулевое ядро — главный идеал (μ_f), порождённый приведённым многочленом наименьшей степени, аннулирующим оператор[2] f. Ассоциативная оболочка оператора f, т. е. образ гомоморфизма (9-1), представляет собою множество всех многочленов от оператора f и изоморфна фактор алгебре $\Bbbk[t]/(\mu_f)$. По теореме о строении конечно порождённых модулей над кольцом главных идеалов[3] конечномерный $\Bbbk[t]$-модуль W, будучи модулем кручения, изоморфен прямой сумме фактор модулей

$$\frac{\Bbbk[t]}{(p_1^{m_1})} \oplus \ldots \oplus \frac{\Bbbk[t]}{(p_s^{m_s})}, \tag{9-2}$$

где все многочлены $p_i \in \Bbbk[t]$ неприводимы и приведены, а действие оператора состоит в умножении на t, и два таких модуля изоморфны если и только если они отличаются друг от друга перестановкой прямых слагаемых. Таким образом, неразложимые пространства с оператором исчерпываются пространствами $\Bbbk[t]\,/\,(p^m)$, не изоморфными друг другу при разных p, m, а неприводимые пространства с оператором — пространствами $\Bbbk[t]\,/\,(p)$, где в обоих случаях $p \in \Bbbk[t]$ приведён и неприводим, а оператор действует умножением на t. Полупростые пространства с оператором суть прямые суммы нескольких пространств $\Bbbk[t]/(p)$.

Лемма 9.1
Пусть R-модуль[4] W линейно порождается над $\Bbbk$ некоторым множеством $\mathcal{S}$ своих неприводимых R-подмодулей. Тогда для любого собственного R-подмодуля $U \subsetneq W$ найдётся такой R-подмодуль $V \subset W$, что[5] $W = U \oplus V$, причём в качестве V можно взять прямую сумму подходящих подмодулей из множества $\mathcal{S}$. Для нулевого подмодуля $U = 0$ это утверждение означает, что весь модуль W является прямой суммой подходящих подмодулей из множества $\mathcal{S}$. В частности, такой модуль W автоматически полупрост.

Доказательство. Так как $U \neq W$ и W линейно порождается подмодулями $S \in \mathcal{S}$, в множестве $\mathcal{S}$ найдётся подмодуль $S \not\subset U$. Сумма $U + S$ является прямой, поскольку пересечение $S \cap U \subsetneq S$, будучи собственным подмодулем неприводимого модуля S, равно нулю. Обозначим через $\mathcal{S}'$ множество всех полупростых подмодулей $M \subset W$, разложимых в прямую сумму модулей из $\mathcal{S}$

[1] Ср. с n° 12.1 на стр. 206 части I.
[2] Напомню, что он называется *минимальным многочленом* оператора f, см. n° 12.1.5 на стр. 210 части I.
[3] См. теор. 10.3 на стр. 174 части I.
[4] Не обязательно конечномерный как векторное пространство над $\Bbbk$.
[5] Всякий подмодуль V с таким свойством называется *дополнительным* к U.

и таких, что сумма $U + M$ прямая. По предыдущему, множество $\mathcal{S}'$ непусто. Введём на нём частичный порядок, полагая $M_1 < M_2$, когда $M_2 = M_1 \oplus M$ для некоторого $M \in \mathcal{S}'$.

Упражнение 9.3. Убедитесь, что $\mathcal{S}'$ является полным чумом[1].

По лемме Цорна[2] в множестве $\mathcal{S}'$ имеется максимальный элемент V. Покажем, что $U \oplus V = W$. Если $U \oplus V \neq W$, то повторяя проведённое в начале доказательства рассуждение для подмодуля $U \oplus V$ в роли подмодуля U, мы найдём в $\mathcal{S}$ такой подмодуль $S \subset W$, что сумма $(U \oplus V) + S$ прямая. Это означает, что $V \oplus S \in \mathcal{S}'$ строго больше, чем V. Всё сказанное работает и для $U = 0$. □

Теорема 9.1

Модуль W полупрост если и только если каждый ненулевой подмодуль в W содержит простой ненулевой подмодуль и для каждого ненулевого собственного R-подмодуля $U \subset W$ найдётся такой R-подмодуль $V \subset W$, что $W = U \oplus V$.

Доказательство. Если модуль W полупрост, т. е. является прямой суммой простых подмодулей, подмодуль $V \subset W$, дополнительный к произвольно заданному подмодулю $U \subset W$, существует по лем. 9.1, применённой к множеству $\mathcal{S}$ всех простых подмодулей в W.

Упражнение 9.4. Убедитесь, что проекция $\pi : W = U \oplus V \twoheadrightarrow U$, $u + v \mapsto u$, перестановочна с действием операторов из R, т. е. $\pi(fw) = f\pi(w)$ для всех $f \in R$ и $w \in W$.

Так как W линейно порождается простыми подмодулями, проекция π переводит хотя бы один из них в ненулевое векторное подпространство в U.

Упражнение 9.5. Убедитесь, что это подпространство является простым R-подмодулем в U.

Это доказывает прямую импликацию «только если». Чтобы доказать обратную импликацию, обозначим через $\mathcal{S}$ множество всех полупростых ненулевых подмодулей $S \subseteq W$. Это множество непусто, поскольку содержит ненулевой простой подмодуль, имеющийся в W по условию. Зададим на $\mathcal{S}$ частичный порядок, полагая $S_1 < S_2$ когда $S_2 = S_1 \oplus S$ для некоторого $S \in \mathcal{S}$.

Упражнение 9.6. Убедитесь, что чум $\mathcal{S}$ полон.

По лемме Цорна, в $\mathcal{S}$ есть максимальный элемент M. Если он не совпадает с W, то найдётся такой ненулевой подмодуль $V \subset W$, что $W = M \oplus V$. Поскольку в V есть ненулевой простой подмодуль $S \subset V$, сумма $M \oplus S \in \mathcal{S}$ будет строго больше, чем M. Тем самым, $M = W$. □

Следствие 9.1 (критерии полупростоты)

Пусть каждый ненулевой R-подмодуль в R-модуле[3] W содержит в себе конечномерный ненулевой R-подмодуль. Тогда следующие свойства модуля W эквивалентны:

1) W полупрост

2) W линейно порождается над $\Bbbk$ простыми R-подмодулями

3) для любого ненулевого собственного R-подмодуля $U \subset W$ существует такой R-подмодуль $V \subset W$, что $W = U \oplus V$.

[1] См. опр. 1.3 на стр. 20 части I.

[2] См. раздел 1.9 на стр. 17 той же лекции.

[3] Который не предполагается конечномерным.

Доказательство. Если R-подмодуль конечномерен как векторное пространство над $\Bbbk$, то каждый его R-подмодуль минимальной положительной размерности автоматически прост. Поэтому каждый ненулевой подмодуль в W обладает простым ненулевым подмодулем, и условия (1) и (3) эквивалентны по теор. 9.1. Импликация (1) ⇒ (2) очевидна. Импликация (2) ⇒ (3) была установлена в лем. 9.1. □

9.1.2. Гомоморфизмы представлений. Линейное отображение $\varphi : W_1 \to W_2$ между R-модулями, отвечающими линейным представлениям $\varrho_1 : R \to \mathrm{End}(W_1)$ и $\varrho_2 : R \to \mathrm{End}(W_2)$, называется гомоморфизмом R-модулей[1], если оно перестановочно с действием всех операторов из R, т. е. для всех $f \in R$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} W_1 \arrow[r, "\varphi"] & W_2 \\ W_1 \arrow[u, "\varrho_1(f)"] \arrow[r, "\varphi"] & W_2 \arrow[u, "\varrho_2(f)"'] \end{tikzcd}.$$

Примером R-линейного отображения является проекция разложимого R-модуля $U \oplus V$ на подмодуль U вдоль подмодуля V из упр. 9.4 на стр. 132. Множество всех R-линейных гомоморфизмов обозначается через $\mathrm{Hom}_R(W_1, W_2) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi : W_1 \to W_2 \mid \forall\, w \in W_1,\ \forall\, f \in R\ \varphi(fw) = f\varphi(w)\}$.

Упражнение 9.7. Убедитесь, что а) $\mathrm{Hom}_R(W_1, W_2) = \mathrm{Hom}_{A_R}(W_1, W_2)$ является векторным подпространством в $\mathrm{Hom}(W_1, W_2)$ б) композиция R-линейных отображений R-линейна в) ядро и образ гомоморфизма R-модулей являются R-подмодулями г) образ и полный прообраз любого R-модуля относительно гомоморфизма R-модулей являются R-модулями.

Лемма 9.2 (лемма Шура)
Всякий ненулевой гомоморфизм неприводимых R-модулей является изоморфизмом. Если основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, то все R-линейные эндоморфизмы неприводимого R-модуля скалярны, т. е. имеют вид $\lambda\,\mathrm{Id}$, где $\lambda \in \Bbbk$.

Доказательство. Пусть представления $\varrho_1 : R \to \mathrm{End}(W_1)$, $\varrho_2 : R \to \mathrm{End}(W_2)$ неприводимы, а линейное отображение $\varphi : W_1 \to W_2$ перестановочно со всеми операторами из R. Поскольку $\ker\varphi \subset W_1$ и $\mathrm{im}\,\varphi \subset W_2$ являются подмодулями простых модулей, либо $\ker\varphi = W_1$ и $\varphi = 0$, либо $\ker\varphi = 0$. Во втором случае, если $\varphi \neq 0$, то подмодуль $\mathrm{im}\,\varphi \subset W_2$ отличен от нуля, и значит, совпадает с W_2, т. е. φ одновременно инъективно и сюрьективно.

Рассмотрим теперь R-линейный эндоморфизм $\varphi : W \to W$. Для каждого $\lambda \in \Bbbk$ эндоморфизм $\lambda\,\mathrm{Id} - \varphi$ тоже R-линеен. Если поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, существует такое $\lambda_0 \in \Bbbk$, что R-подмодуль $\ker(\lambda_0\mathrm{Id} - \varphi) \neq 0$. Если W прост, то $\ker(\lambda_0\mathrm{Id} - \varphi) = W$ и $\varphi = \lambda_0\mathrm{Id}$. □

Следствие 9.2
Если основное поле алгебраически замкнуто, а R-модули U и W неприводимы, то

$$\dim \mathrm{Hom}_R(U, W) = \begin{cases} 0 & \text{если } U \text{ и } W \text{ не изоморфны} \\ 1 & \text{если } U \text{ и } W \text{ изоморфны.} \end{cases}$$

Доказательство. Любые два ненулевых изоморфизма $\varphi, \psi : U \xrightarrow{\sim} W$ пропорциональны, поскольку $\psi^{-1}\varphi = \lambda \cdot \mathrm{Id}_U$ для некоторого $\lambda \in \Bbbk^*$. □

[1] А также *сплетающим оператором*, *гомоморфизмом представлений* или *R-линейным отображением*.

Следствие 9.3

Каждый фактор модуль любого полупростого R-модуля W полупрост.

Доказательство. По лемме Шура образ любого простого R-подмодуля $S \subset W$ при любой R-линейной сюрьекции $\pi : W \twoheadrightarrow U$ либо нулевой, либо изоморфен S и, стало быть, прост. Поскольку W линейно порождается простыми подмодулями $S \subset W$, модуль U линейно порождается ненулевыми подмодулями $\pi(S)$. □

Предложение 9.1

В условиях сл. 9.1 на стр. 132 полупростота R-модуля W равносильна тому, что для любого подмодуля $U \subset W$ существует такой R-линейный эндоморфизм[1] $\pi_U \in \mathrm{End}_R(W)$, что $\pi_U^2 = \pi_U$ и $\mathrm{im}\,\pi_U = U$.

Доказательство. Если $W = U \oplus V$ для некоторого R-подмодуля $V \subset W$, то проектор

$$\pi_U : U \oplus V \to U \oplus V\,, \quad (u, v) \mapsto (u, 0)\,,$$

обладает требуемыми свойствами. Наоборот, если эндоморфизм π_U имеет $\pi_U^2 = \pi_U$, то он тождественно действует на своём образе: $\pi_U \pi_U w = \pi_U w$. Поэтому $\ker \pi_U \cap \mathrm{im}\,\pi_U = 0$. Так как каждый вектор $w \in W$ имеет разложение $w = \pi_U w + (w - \pi_U w)$, в котором $\pi_U w \in \mathrm{im}\,\pi_U$, а $w - \pi_U w \in \ker \pi_U$, мы заключаем, что $W = \mathrm{im}\,\pi_U \oplus \ker \pi_U$. В силу R-линейности π_U его ядро $\ker \pi_U$ является R-подмодулем в W. □

Следствие 9.4

Каждый подмодуль любого полупростого R-модуля полупрост.

Доказательство. Пусть R-модуль L является ненулевым собственным подмодулем полупростого R-модуля W. Каждый R-подмодуль $U \subset L$, будучи подмодулем и в W, является образом R-линейного проектора $W \twoheadrightarrow U$. Ограничение этого проектора на подмодуль L является R-линейным проектором $L \twoheadrightarrow U$. □

9.2. Представления ассоциативной алгебры. Пусть A — ассоциативная алгебра над произвольным полем $\Bbbk$, а V — любое векторное пространство над $\Bbbk$. Гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр

$$\varrho : A \to \mathrm{End}\, V$$

называется *линейным представлением* алгебры A в векторном пространстве V. Пространство V называется в этой ситуации A-модулем. Представления ассоциативных алгебр являются специальными примерами представлений множеств операторов, и к ним в полной мере приложима вся терминология из n° 9.1.1 на стр. 130. Для двух A-модулей U, W мы полагаем

$$\mathrm{Hom}_A(U, V) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi : U \to W \mid \forall f \in A, \forall u \in U\ \varphi(fu) = f\varphi(u)\}$$

и называем такие отображения $\varphi : U \to W$ *A-линейными*. Когда $U = W$ все A-линейные эндоморфизмы A-модуля W образуют ассоциативную $\Bbbk$-подалгебру $\mathrm{End}_A(W) \subset \mathrm{End}_{\Bbbk}(W)$ в $\Bbbk$-алгебре всех $\Bbbk$-линейных эндоморфизмов векторного пространства W. Подалгебру $\mathrm{End}_A(W)$ обычно называют *централизатором* A в $\mathrm{End}_{\Bbbk}(W)$.

[1] Он называется *инвариантным проектором* на U.

Пусть $W = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$ является прямой суммой своих A-подмодулей V_ν. Обозначим через $\iota_\nu : V_\nu \hookrightarrow W$ вложение каждого из них в W, а через $\pi_\mu : W \twoheadrightarrow V_\mu$ — проекцию прямой суммы $V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$ на μ-е слагаемое.

Упражнение 9.8. Убедитесь, что $\sum_\nu \iota_\nu \pi_\nu = \mathrm{Id}_W$, $\pi_\nu \iota_\nu = \mathrm{Id}_{V_\nu}$ для всех ν, $\pi_\nu \iota_\mu = 0$ и $\iota_\mu \pi_\nu = 0$ для всех $\mu \neq \nu$.

Для каждого $\varphi \in \mathrm{End}(W)$ положим $\varphi_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \pi_\mu \circ \varphi \circ \iota_\nu$ и организуем эндоморфизмы $\varphi_{\mu\nu} : V_\nu \to V_\mu$ в квадратную матрицу $(\varphi_{\mu\nu})$. Исходный эндоморфизм φ восстанавливается из этой матрицы как

$$\varphi = \mathrm{Id}_W \circ \varphi \circ \mathrm{Id}_W = \left(\sum\nolimits_\mu \iota_\mu \pi_\mu\right) \circ \varphi \circ \left(\sum\nolimits_\nu \iota_\nu \pi_\nu\right) = \sum\nolimits_{\mu,\nu} \iota_\mu \varphi_{\mu\nu} \pi_\nu \,.$$

При этом $\varphi \in \mathrm{End}_A(W)$ если и только если все $\varphi_{\mu\nu} \in \mathrm{Hom}_A(V_\nu, V_\mu)$. Таким образом, имеет место изоморфизм векторных пространств

$$\mathrm{End}_A(W) \xrightarrow{\sim} \bigoplus\nolimits_{\mu,\nu} \mathrm{Hom}_A(V_\nu, V_\mu)\,, \quad \varphi \mapsto (\varphi_{\mu\nu}) \,. \tag{9-3}$$

Упражнение 9.9. Убедитесь, что изоморфизм (9-3) переводит композицию эндоморфизмов в произведение матриц.

В ситуации, когда все слагаемые $V_\nu = V$ являются копиями одного и того же A-модуля V, изоморфизм (9-3) превращается в изоморфизм $\Bbbk$-алгебр

$$\mathrm{End}_A\left(V^{\oplus n}\right) \simeq \mathrm{Mat}_n\left(\mathrm{End}_A(V)\right) \,. \tag{9-4}$$

Теорема 9.2 (теорема о двойном централизаторе)
Пусть конечномерное векторное пространство V полупросто над ассоциативной подалгеброй $A \subset \mathrm{End}(V)$, и $B = \mathrm{End}_A(V)$. Тогда $\mathrm{End}_B(V) = A$.

Доказательство. Включение $A \subset \mathrm{End}_B(V)$ очевидно из определений. Чтобы установить обратное включение, зафиксируем в V базис $e_1, \ldots, e_n$ и покажем, что для каждого B-линейного оператора $\varphi \in \mathrm{End}_B(V)$ найдётся такой оператор $a \in A$, что $\varphi e_i = a e_i$ при всех i — это обеспечит равенство $\varphi = a$. Рассмотрим n-кратную прямую сумму $W = V^{\oplus n}$ и введём на ней структуру модуля над алгебрами A, B и $\mathrm{End}_B(V)$, полагая $f(v_1, \ldots, v_n) = (f v_1, \ldots, f v_n)$ для каждого оператора f из A, из B или из $\mathrm{End}_B(V)$. Обозначим вектор $(e_1, \ldots, e_n) \in W$ через e. Достаточно убедиться, что $\varphi e \in Ae$. Поскольку W полупрост как A-модуль, его A-подмодуль $Ae \subset W$ является образом некоторого A-линейного проектора $\pi : W \twoheadrightarrow Ae$, тождественно действующего на Ae. Если π коммутирует с φ, то $\varphi(e) = \varphi(\pi e) = \pi(\varphi e) \in Ae$, что и требуется. Покажем, что π действительно коммутирует с φ. Для этого запишем эндоморфизм $\pi : V^{\oplus n} \to V^{\oplus n}$ матрицей (π_{ij}) с элементами $\pi_{ij} \in \mathrm{End}(V)$, как это объяснялось выше. Так как π перестановочен с действием A на W, каждая компонента π_{ij} перестановочна с действием A на V, т. е. лежит в $\mathrm{End}_A(V) = B$. Поэтому диагональная матрица, по диагонали которой стоят одинаковые элементы $\varphi \in \mathrm{End}_B(V)$, коммутирует с π. $\square$

Следствие 9.5 (теорема Бернсайда)
Если основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, а конечномерное векторное пространство V неприводимо как модуль над множеством операторов $R \subset \mathrm{End}(V)$, то ассоциативная оболочка $\mathrm{Ass}(R) \subset \mathrm{End}_\Bbbk(V)$ этих операторов совпадает со всей алгеброй эндоморфизмов $\mathrm{End}_\Bbbk(V)$. В частности, все конечномерные неприводимые представления $A \to \mathrm{End}(V)$ любой ассоциативной алгебры A эпиморфны.

Доказательство. По лемме Шура[1] $\mathrm{End}_{\mathrm{Ass}(R)}(V) = \Bbbk$, откуда $\mathrm{End}_{\Bbbk}(V) = \mathrm{Ass}(R)$. □

Упражнение 9.10. Докажите, что обратная импликация — если $\mathrm{Ass}(R) = \mathrm{End}(V)$, то R-модуль V неприводим — имеет место над любым полем $\Bbbk$.

9.3. Изотипные компоненты. Зафиксируем ассоциативную алгебру A. Для произвольных A-модулей U, W на тензорном произведении $\mathrm{Hom}_A(U,W) \otimes U$ имеется естественная структура A-модуля, на котором элементы $a \in A$ действуют по правилу $a(\varphi \otimes u) \overset{\text{def}}{=} \varphi \otimes (au)$. При этом каноническая свёртка

$$c_{WU} : \ \mathrm{Hom}_A(U,W) \otimes U \to W\,, \ \ \varphi \otimes u \mapsto \varphi(u)\,, \tag{9-5}$$

является A-линейным гомоморфизмом.

Упражнение 9.11. Убедитесь в этом.

Для простого A-модуля U образ канонической свёртки (9-5) обозначается $W_U = \mathrm{im}\, c_{WU} \subset W$ и называется U-*изотипной компонентой* модуля W. Он равен сумме всех имеющихся в W неприводимых подмодулей, изоморфных модулю U. Действительно, всякий ненулевой гомоморфизм $\psi : \ U \to W$ инъективен, и любой вектор вида $\sum \psi_i(u_i) \in W$ с $u_i \in U$ и $\psi_i \in \mathrm{Hom}_A(U,W)$ лежит в сумме подмодулей $\psi_i(U) \subset W$, каждый из которых изоморфен U, и наоборот, если векторы $v_i = \psi_i(u_i)$ лежат в образах A-линейных вложений $\psi_i : \ U \hookrightarrow W$, то $\sum v_i = c(\sum \psi_i \otimes u_i)$.

Предложение 9.2
Всякий гомоморфизм A-модулей $\varphi : \ V \to W$ переводит U-изотипную компоненту $V_U \subset V$ в U-изотипную компоненту $W_U \subset W$. В частности, для любого подмодуля $V \subset W$ выполнено равенство $V_U = V \cap W_U$.

Доказательство. Гомоморфизм φ переводит любой лежащий в $\mathrm{im}\, c_{VU}$ вектор $\sum \psi_i(u_i)$, у которого $\psi_i \in \mathrm{Hom}_A(U,V)$, а $u_i \in U$, в вектор $\sum \varphi\psi_i(u_i) \in \mathrm{im}\, c_{WU}$, ибо $\varphi\psi_i \in \mathrm{Hom}_A(U,W)$. □

Предложение 9.3
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ для любого неприводимого A-модуля U и произвольного A-модуля W каноническая свёртка (9-5) инъективна и, тем самым, задаёт изоморфизм

$$c_{WU} : \ \mathrm{Hom}_A(U,W) \otimes U \xrightarrow{\sim} W_U\,.$$

Доказательство. Будучи линейно порождённым простыми подмодулями, изоморфными U, модуль W_U полупрост и раскладывается в прямую сумму $W_U = \bigoplus_i V_i$ простых подмодулей V_i, каждый из которых изоморфен U. Зафиксируем для каждого i вложение $\psi_i : \ U \hookrightarrow W$, изоморфно отображающее U на подмодуль $V_i \subset W$. По сл. 9.2 пространство

$$\mathrm{Hom}_A(U,W) = \mathrm{Hom}_A(U,W_U) = \bigoplus_i \mathrm{Hom}_A(U,V_i)$$

является прямой суммой одномерных пространств, порождённых вложениями ψ_i. Поэтому каждый элемент модуля $\mathrm{Hom}_A(U,W) \otimes U$ однозначно записывается в виде $\sum \psi_i \otimes u_i$, где $u_i \in U$. Если $c_{WU}(\sum \psi_i \otimes u_i) = \sum \psi_i(u_i) = 0$, то каждое слагаемое $\psi_i(u_i) \in V_i$ равно нулю в отдельности, ибо сумма $W_U = \bigoplus_i V_i$ прямая. Так как все ψ_i инъективны, все $u_i = 0$. □

[1] См. лем. 9.2 на стр. 133.

Предложение 9.4 (изотипное разложение)
Если A-модуль W полупрост, то в любом его разложении в прямую сумму простых подмодулей сумма тех слагаемых, что изоморфны U, совпадает с U-изотипной компонентой $W_U \subset W$. В частности, она не зависит от выбора разложения W в прямую сумму простых подмодулей, и если зафиксировать в каждом классе изоморфных простых модулей какой-нибудь представитель U, то всякий полупростой модуль будет иметь каноническое *изотипное разложение*

$$W = \bigoplus_U W_U\,, \tag{9-6}$$

где суммирование происходит по всем неизоморфным друг другу неприводимым A-модулям U, для которых $\mathrm{Hom}_A(U,W) \neq 0$.

Доказательство. Пусть $W = \bigoplus_i W_i$, где все W_i просты. Так как $\mathrm{Hom}_A(U,W) = \bigoplus_i \mathrm{Hom}_A(U,W_i)$ и $\mathrm{Hom}_A(U,W_j) = 0$ для всех $W_j \not\simeq U$, образ канонической свёртки (9-5) лежит в сумме тех подмодулей W_i, что изоморфны U. □

Определение 9.1
Для простого модуля U и полупростого модуля W количество изоморфных U слагаемых в любом разложении модуля W в прямую сумму неприводимых подмодулей, обозначается

$$m_U(W) \overset{\text{def}}{=} \dim W_U / \dim U\,, \tag{9-7}$$

и называется *кратностью* простого модуля U в полупростом модуле W.

Следствие 9.6
Над алгебраически замкнутым полем для всех конечномерных полупростых A-модулей V, W выполняются равенства $\dim \mathrm{Hom}_A(V,W) = \sum_U m_U(V)\, m_U(W) = \dim \mathrm{Hom}_A(W,V)$, где суммирование происходит по всем представителям U различных классов изоморфных простых модулей.

Доказательство. Пусть $V = \bigoplus_i V_i$ и $W = \bigoplus_j W_j$, где все V_i и W_j неприводимы. По лемме Шура пространства $\mathrm{Hom}_A(V_i,W_j)$ нулевые при $V_i \not\simeq W_j$ и одномерные при $V_i \simeq W_j$. Поэтому размерность пространства $\mathrm{Hom}_A(V,W) = \bigoplus_{ij} \mathrm{Hom}_A(V_i,W_j)$ равна $\sum_U m_U(U)\, m_U(W)$, и то же самое верно для $\mathrm{Hom}_A(W,V)$. □

Следствие 9.7
Над алгебраически замкнутым полем для любого конечномерного A-модуля W и каждого простого A-модуля W выполняется равенство $m_U(W) = \dim \mathrm{Hom}_A(U,W) = \dim \mathrm{Hom}_A(W,U)$.

9.4. Представления групп. Действие группы G линейными преобразованиями на векторном пространстве V над полем $\Bbbk$ или, что то же самое, гомоморфизм групп $\varrho : G \to \mathrm{GL}(V)$, называется *линейным представлением* группы G в векторном пространстве V. Пространство V называется в этом случае G-модулем. Прямая сумма, тензорное произведение, а также внешние и симметрические степени G-модулей U, W канонически наделяются такими структурами G-модулей, что операторы $g \in G$ действуют по правилам

$$\begin{aligned} g(u \dotplus w) &\overset{\text{def}}{=} (gu) \dotplus (gw) & \qquad g(u \otimes w) &\overset{\text{def}}{=} (fu) \otimes (gw)\\ g(u_1 \wedge u_2) &\overset{\text{def}}{=} (gu_1) \wedge (gu_2) & \qquad g(u_1 \cdot u_2) &\overset{\text{def}}{=} (gu_1) \cdot (gu_2)\,. \end{aligned}$$

Для любого G-подмодуля $V \subset W$ фактор пространство W/V также является G-модулем с действием $g[v] \overset{\text{def}}{=} [gv]$.

Упражнение 9.12. Убедитесь, что все эти формулы корректно задают гомоморфизмы группы G в $\mathrm{GL}(U \oplus W)$, $\mathrm{GL}(U \otimes W)$, $\mathrm{GL}\big(\Lambda(U)\big)$, $\mathrm{GL}\big(S(U)\big)$ и $\mathrm{GL}(W/V)$ соответственно.

Для каждого представления $\varrho : G \to \mathrm{GL}(V)$ *двойственное представление* $\varrho^* : G \to \mathrm{GL}(V^*)$ определяется таким образом, чтобы свёртка векторов с ковекторами была G-инвариантна, т. е.

$$\forall\, g \in G,\ \forall\, \xi \in V^*,\ \forall\, w \in V \quad \langle\, \varrho^*(g)\,\xi\,,\, \varrho(g)\,w\,\rangle = \langle\, \xi\,,\, w\,\rangle\,. \tag{9-8}$$

Так как каждый оператор $\varrho(g)$ обратим, равенство (9-8) равносильно равенству

$$\langle\, \varrho^*(g)\xi\,,\, v\,\rangle = \langle\, \xi\,,\, \varrho(g^{-1})v\,\rangle\,,$$

которое означает, что оператор $\varrho^*(g) = \varrho(g^{-1})^*$ двойствен оператору $\varrho(g)^{-1}$ и переводит ковектор $\xi \in V^*$ в композицию $\xi \circ g^{-1} : v \mapsto \xi(g^{-1}v)$. В частности, матрица оператора $\varrho^*(g)$ в двойственном базисе получается из матрицы $\varrho(g)$ обращением и транспонированием.

Упражнение 9.13. Убедитесь, что $\varrho^* : G \to \mathrm{GL}(V^*)$ является гомоморфизмом групп.

Для любых двух представлений $\varrho : G \to \mathrm{GL}(U)$ и $\lambda : G \to \mathrm{GL}(W)$ представление $\varrho^* \otimes \lambda$ задаёт действие группы G на пространстве $U^* \otimes V \simeq \mathrm{Hom}(U, V)$ всех линейных операторов $\varphi : U \to V$ по правилу

$$g : \varphi \mapsto g\varphi g^{-1}\,. \tag{9-9}$$

Упражнение 9.14. Убедитесь в этом.

Подпространство неподвижных векторов представления (9-9) обозначается

$$\mathrm{Hom}_G(U, V) \overset{\text{def}}{=} \{\varphi : U \to V \mid \forall\, g \in G\ \ g\varphi = \varphi g\}$$

и называется пространством G-*инвариантных* операторов[1].

Пример 9.2 (проектор на инварианты)

Пусть имеется линейное представление группы G в векторном пространстве V. Векторы, неподвижные относительно всех преобразований из G, образуют в V подмодуль G-*инвариантов*

$$V^G \overset{\text{def}}{=} \{v \in V \mid gv = v\ \ \forall\, g \in G\,\}\,,$$

на котором группа G действует тривиально. Если группа G конечна и $\operatorname{char} \Bbbk \nmid |G|$, любое линейное представление V группы G допускает G-линейную проекцию на подмодуль G-инвариантов, которая сопоставляет вектору $v \in V$ центр тяжести[2]

$$v^\natural \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|} \sum\nolimits_{g \in G} gv \tag{9-10}$$

его G-орбиты[3] в аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$.

[1] А также *сплетающих* операторов, G-*линейных* операторов или G-*гомоморфизмов*.

[2] Т. е. равновесный барицентр, см. зад. 13.4 (в) на стр. 251 части I.

[3] Обратите внимание, что если $|G| \mathrel{\vdots} \operatorname{char}(\Bbbk)$, сумма весов элементов орбиты нулевая, и центр тяжести не определён.

Упражнение 9.15. Убедитесь прямым вычислением, что при $\mathrm{char}(\Bbbk) \nmid |G|$ оператор $v \mapsto v^\natural$ перестановочен с действием G и линейно проектирует V на V^G.

Теорема 9.3
Каждое линейное представление V конечной группы G над полем, характеристика которого не делит $|G|$, вполне приводимо[1].

Доказательство. Покажем, что любой G-подмодуль $U \subset V$ является образом G-линейного проектора[2]. Группа G действует на пространстве всех $\Bbbk$-линейных отображений $\mathrm{Hom}(V, U)$ по правилу $g : \varphi \mapsto g\varphi g^{-1}$. Достаточно убедиться в том, что проекция на инварианты этого действия

$$\mathrm{Hom}(V,U) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_G(V,U), \quad \varphi \mapsto \varphi^\natural = |G|^{-1} \sum\nolimits_{g\in G} g\varphi g^{-1}$$

переводит проекторы V на U в проекторы V на U. Пусть $\pi : V \twoheadrightarrow U$ — любой $\Bbbk$-линейный проектор. Тогда $\mathrm{im}\,\pi^\natural \subset U$, так как $g\pi g^{-1}U \subset U$ для всех $g \in G$, а любой вектор $u \in U$ неподвижен относительно $\pi^\natural$, ибо $g^{-1}U \subset U$ и $\pi|_U = \mathrm{Id}_U$ влекут $g\pi g^{-1}u = gg^{-1}u = u$. □

Лемма 9.3
Пусть $|G| = n$ и основное поле $\Bbbk$ имеет $\mathrm{char}\,\Bbbk \nmid n$ и содержит все[3] n корней n-й степени из единицы. Тогда все элементы группы G действуют в любом её конечномерном линейном представлении диагонализуемыми операторами.

Доказательство. Каждый оператор из группы G аннулируются многочленом $t^n - 1$, который в силу сделанных предположений не имеет кратных корней[4] и полностью раскладывается в $\Bbbk[t]$ на линейные множители. Согласно предл. 12.4 на стр. 221 части I такой оператор диагонализуем. □

Следствие 9.8
Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем $\Bbbk$ характеристики $\mathrm{char}\,\Bbbk \nmid n$, содержащем все n корней n-й степени из единицы, и $G \subset \mathrm{GL}(V)$ — конечная группа. Все операторы из G одновременно диагонализуются в одном базисе если и только если группа G абелева.

Доказательство. Так как все диагональные матрицы коммутируют друг с другом, любая группа одновременно диагонализованных операторов абелева. Наоборот, в силу предл. 12.6 на стр. 229 части I любое множество коммутирующих диагонализуемых операторов можно диагонализовать одновременно. □

[1] Т. е. является прямой суммой неприводимых представлений или, что то же самое, полупростым G-модулем.
[2] См. предл. 9.1 на стр. 134.
[3] Если $\mathrm{char}\,\Bbbk \nmid n$, то у многочлена $t^n - 1$ нет кратных корней, так как он взаимно прост со своей производной $nt^{n-1} \neq 0$.
[4] См. предыдущую сноску.

9.5. Пример: представления конечных абелевых групп. Из сл. 9.8 вытекает, что каждое конечномерное линейное представление конечной абелевой группы G над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики $\mathrm{char}(\Bbbk) \nmid |G|$ является прямой суммой одномерных представлений. Поскольку на одномерном пространстве V все линейные операторы действуют скалярно, каждый оператор $g \in G$ действуют на векторы $v \in V$ по правилу

$$gv = \chi(g)\,v\,,\ \text{где } \chi : G \to \Bbbk^* \text{ — мультипликативный гомоморфизм,} \tag{9-11}$$

сопоставляющий элементу $g \in G$ ту константу, на которую оператор g умножает все векторы из V. Гомоморфизмы абелевой группы G в мультипликативную группу поля $\Bbbk$ называются *мультипликативными характерами* группы G. Одномерный G-модуль, на котором G действует по формуле (9-11) обозначается через V_χ.

Упражнение 9.16. Убедитесь, что $V_\chi \simeq V_\psi$ как G-модули если и только если $\chi = \psi$ как гомоморфизмы из G в $\Bbbk^*$.

Поскольку $\chi(g)^{|G|} = \chi\left(g^{|G|}\right) = \chi(e) = 1$ для всех $g \in G$, множество значений любого мультипликативного характера $\chi : G \to \Bbbk^\times$ лежит в группе $\boldsymbol{\mu}_{|G|}(\Bbbk) \subset \Bbbk^*$ корней $|G|$-той степени из 1 в поле $\Bbbk$. Множество всех мультипликативных характеров $\chi : G \to \Bbbk^\times$ является мультипликативной абелевой подгруппой в алгебре $\Bbbk^G$ всех функций на группе G со значениями в поле $\Bbbk$. Эта подгруппа обозначается $G^\wedge$ и называется *двойственной по Понтрягину* к группе G. Единицей в $G^\wedge$ служит *тривиальный характер* $\chi_{\mathbb{1}} \equiv 1$, отвечающий тривиальному представлению. Обратный к $\chi \in G^\wedge$ характер χ^{-1} действует по правилу $\chi^{-1}(g) \overset{\text{def}}{=} \chi(g)^{-1} = \chi(g^{-1})$.

Упражнение 9.17. Проверьте, что характер тензорного произведения одномерных представлений абелевой группы равен произведению их характеров, а характер двойственного представления обратен характеру исходного.

9.5.1. Представление в пространстве функций на группе. Любая группа G действует на пространстве $\Bbbk^G$ функций $G \to \Bbbk$ по правилу $g : f(x) \mapsto f(g^{-1}x)$.

Упражнение 9.18. Убедитесь, что это правило задаёт гомоморфизм любой[1] группы G в группу линейных автоморфизмов пространства $\Bbbk^G$.

Если группа G абелева, то для каждого характера $\chi \in G^\wedge$ изотипная компонента $\Bbbk^G_\chi$ представления группы G в пространстве $\Bbbk^G$ состоит из всех таких функций $f : G \to \Bbbk$, что

$$f(g^{-1}x) = \chi(g)f(x) \text{ для всех } x, g \in G. \tag{9-12}$$

Полагая в этом равенстве $x = e$, получаем $f(g^{-1}) = \chi(g)\,f(e)$ для всех $g \in G$ и, переобозначая g^{-1} через h, заключаем, что $f(h) = f(e)\chi(h^{-1}) = f(e)\chi^{-1}(h)$ для всех $h \in G$. Иными словами, каждая функция (9-12) пропорциональна характеру χ^{-1}, обратному к χ в группе $G^\wedge$. Мы заключаем, что изотипное разложение пространства функций на группе G имеет вид

$$\Bbbk^G = \bigoplus\nolimits_{\chi \in G^\wedge} \Bbbk\,\chi\,,$$

т. е. каждое из неприводимых представлений группы G содержится в представлении группы G на пространстве функций $G \to \Bbbk$ с кратностью один. В частности, $|G^\wedge| = |G|$ и характеры образуют базис пространства функций на группе G со значениями в поле $\Bbbk$.

[1] В том числе неабелевой.

Упражнение 9.19. Для произвольной[1] группы G покажите, что любое множество различных гомоморфизмов $G \to \Bbbk^*$ линейно независимо в пространстве $\Bbbk^G$.

Теорема 9.4 (двойственность Понтрягина)
Для каждого $g \in G$ функция вычисления $\mathrm{ev}_g : G^\wedge \to \Bbbk$, $\chi \mapsto \chi(g)$, является характером группы $G^\wedge$, а отображение $G \to G^{\wedge\wedge}$, $g \mapsto \mathrm{ev}_g$ является изоморфизмом групп.

Доказательство. Первое утверждение проверяется выкладкой

$$\mathrm{ev}_g(\chi_1\chi_2) = \chi_1(g)\,\chi_2(g) = \mathrm{ev}_g(\chi_1)\cdot\mathrm{ev}_g(\chi_2)\,.$$

Равенства $\mathrm{ev}_{g_1g_2}(\chi) = \chi(g_1g_2) = \chi(g_1)\cdot\chi(g_2) = \mathrm{ev}_{g_1}(\chi)\ \mathrm{ev}_{g_2}(\chi)$ показывают, что отображение $g \mapsto \mathrm{ev}_g$ является гомоморфизмом групп. Если элемент $g \in G$ лежит в его ядре, то $\chi(g) = 1$ для всех $\chi \in G^\wedge$ и g тривиально действует в любом конечномерном представлении группы G. Поэтому $f(g^{-1}x) = f(x)$ для любой функции $f : G \to \Bbbk$, что возможно только при $g = e$. Поскольку $|G^{\wedge\wedge}| = |G|$, инъективность гомоморфизма $g \mapsto \mathrm{ev}_g$ влечёт его биективность. □

9.5.2. Преобразование Фурье. На самом деле двойственность Понтрягина имеет место для всех локально компактных топологических абелевых групп, и конечные абелевы группы являются лишь первыми, простейшими примерами таких групп. В качестве двойственной к произвольной локально компактной топологической абелевой группе G берётся группа G *непрерывных* гомоморфизмов $G \to \mathbb{C}^*$. Например, мультипликативная группа $\mathrm{U}(1)$ комплексных чисел единичной длины двойственна по Понтрягину аддитивной группе целых чисел $\mathbb{Z}$: каждому $n \in \mathbb{Z}$ отвечает характер $\mathrm{U}(1) \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^n$, а каждому $e^{2\pi i t} \in \mathrm{U}(1)$ — характер $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$, $m \mapsto e^{2\pi i m t}$. Аддитивная группа $\mathbb{R}$ вещественных чисел двойственна сама себе: каждому $\alpha \in \mathbb{R}$ отвечает характер $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$, $x \mapsto e^{2\pi i \alpha x}$.

Каждая достаточно регулярная функция $f : G \to \mathbb{C}$ на локально компактной топологической абелевой группе G имеет единственное «линейное выражение» через характеры. Для группы $\mathrm{U}(1)$ это выражение представляет собою разложение функции $f : \mathrm{U}(1) \to \mathbb{C}$ в бесконечный ряд Фурье

$$f(z) = \sum\nolimits_{m\in\mathbb{Z}} f^\wedge(m)\,z^m$$

с коэффициентами $f^\wedge(m) \in \mathbb{C}$, которые можно воспринимать как функцию $f^\wedge : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ на двойственной по Понтрягину группе. Для аддитивной группы $\mathbb{R}$ «линейное выражение» через характеры означает представление функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ в виде интеграла Фурье

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^\wedge(\alpha)\,e^{2\pi i \alpha x}\,d\alpha\,,$$

в котором «семейство коэффициентов» $f^\wedge(\alpha)$ представляет собою функцию $f^\wedge : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ на двойственной по Понтрягину группе. Функции $f : G \to \mathbb{C}$ и $f^\wedge : G^\wedge \to \mathbb{C}$ однозначно восстанавливаются друг по другу по простым явным формулам, и с учётом двойственности Понтрягина $f^{\wedge\wedge} = f$. Инволюция $f \leftrightarrow f^\wedge$ называется *преобразованием Фурье*.

[1] Не обязательно абелевой.

9.6. Пример: соответствие Шура – Вейля. Зафиксируем векторное пространство V конечной размерности $d \geqslant 2$ над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики нуль. Симметрическая группа S_n действует на $V^{\otimes n}$ перестановками сомножителей в разложимых тензорах. Рассмотрим изотипное разложение этого представления

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Ir}(S_n)} W_\lambda\,, \tag{9-13}$$

где $\mathrm{Ir}(S_n)$ обозначает множество попарно не изоморфных представителей всех классов неприводимых представлений группы S_n с точностью до изоморфизма. Про тензоры, лежащие в изотипной компоненте W_λ, говорят, что они имеют *тип симметрии* λ, а само разложение (9-13) называется разложением тензоров по типам симметрии.

При $n = 2$ группа $S_2 \simeq \{\pm 1\}$ имеет ровно два неприводимых представления — одномерное тривиальное и одномерное знаковое, в котором транспозиция действует умножением на -1, и разложение (9-13) имеет вид

$$V^{\otimes 2} = \mathrm{Sym}^2 V \oplus \dim \mathrm{Alt}^2 V$$

из прим. 5.2 на стр. 79. Пространства $\mathrm{Sym}^2 V$ и $\mathrm{Alt}^2 V$ симметричных и знакопеременных тензоров являются линейными оболочками всех тривиальных одномерных и всех знаковых одномерных S_2-подмодулей в $V^{\otimes 2}$.

В прим. 5.3 на стр. 79 мы видели, что при $n = 3$

$$V^{\otimes 3} = \mathrm{Sym}^3 V \oplus (\mathrm{Lie}^3 V \oplus \tau\,\mathrm{Lie}^3 V) \oplus \mathrm{Alt}^3 V\,, \tag{9-14}$$

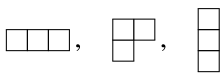
где заключённое в скобки среднее слагаемое является ядром оператора $1 + \tau + \tau^2$, а $\tau \in S_3$ — 3-цикл. Такой тип симметрии имеют, в частности, *лиевские тензоры* $t = [u, [v, w]] \in V^{\otimes 3}$, линейная оболочка которых обозначена через $\mathrm{Lie}^3 V$. S_3-орбита каждого лиевского тензора t состоит из трёх тензоров t, τt, $\tau^2 t$, связанных соотношением $t + \tau t + \tau^2 t = 0$, и её линейная оболочка является двумерным S_3-инвариантным векторным пространством, на котором S_3 действует как группа правильного треугольника с вершинами t, τt, $\tau^2 t$. Таким образом, компонента $\mathrm{Lie}^3 V \oplus \tau\,\mathrm{Lie}^3 V$ разложения (9-14) линейно порождается S_3-подмодулями, изоморфными двумерному неприводимому представлению V_Δ группы S_3 группой треугольника D_3, и тензоры с типом симметрии V_Δ образуют в $V^{\otimes 3}$ изотипную компоненту

$$W_\Delta = \mathrm{Lie}^3 V \oplus \tau\,\mathrm{Lie}^3 V \simeq \mathrm{Lie}^3 V \otimes V_\Delta\,,$$

а изотипное разложение (9-13) при $n = 3$ имеет вид $V^{\otimes 3} = \mathrm{Sym}^3 V \oplus (\mathrm{Lie}^3 V \otimes V_\Delta) \oplus \mathrm{Alt}^3 V$.

Упражнение 9.20. Убедитесь, что все три слагаемых инвариантны относительно естественного действия группы $\mathrm{GL}(V)$ на $V^{\otimes 3}$, причём действие $\mathrm{GL}(V)$ на $\mathrm{Sym}^3 V, \mathrm{Lie}^3 V, \mathrm{Alt}^3 V \subset V^{\otimes 3}$ неприводимо.

В §10 мы увидим, что неприводимые представления группы S_n с точностью до изоморфизма находятся в биекции с n-клеточными диаграммами Юнга λ, а в §11 явно построим по каждой диаграмме λ неприводимый S_n-модуль V_λ и изучим его свойства. При $n = 3$ трём диаграммам



отвечают тривиальное одномерное представление, двумерное представление группой треугольника и одномерное знаковое представление соответственно. Замечательно, что как и для $n = 3$ при всех n разложение (9-13) по типам симметрии тензоров имеет вид

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_\lambda S^\lambda V \otimes V_\lambda\,, \tag{9-15}$$

в котором каждая λ-изотипная компонента $W_\lambda = S^\lambda V \otimes V_\lambda$ группы S_n является тензорным произведением неприводимого S_n-модуля V_λ, отвечающего диаграмме λ, и неприводимого представления $S^\lambda V$ полной линейной группы $\mathrm{GL}(V)$, аналогичного представлениям $\mathrm{GL}(V)$ в пространствах $\mathrm{Sym}^3 V$, $\mathrm{Lie}^3 V$, $\mathrm{Alt}^3 V$ симметричных, лиевских и знакопеременных тензоров. Возникающее таким образом соответствие между неприводимыми представлениями полной линейной группы $\mathrm{GL}(V)$ и неприводимыми представлениями сразу всех симметрических групп S_n называется *соответствием Шура – Вейля*. Остаток этого раздела посвящён его объяснению.

Гомоморфизм групп $\mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(V^{\otimes n})$, $f \mapsto f^{\otimes n}$, задаёт представление полной линейной группы $\mathrm{GL}(V)$ в пространстве $V^{\otimes n}$. Оператор $f \in \mathrm{GL}(V)$ в этом представлении действует на разложимые тензоры как $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \mapsto fv_1 \otimes \ldots \otimes fv_n$. Поскольку это действие коммутирует с действием S_n перестановками тензорных сомножителей, пространство $V^{\otimes n}$ является представлением группы $\mathrm{GL}(V) \times S_n$, в котором элементы $(f, g) \in \mathrm{GL}(V) \times S_n$ действуют операторами

$$v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \mapsto f(v_{g^{-1}(1)}) \otimes \ldots \otimes f(v_{g^{-1}(n)})\,.$$

Будучи перестановочными с операторами из S_n, операторы из $\mathrm{GL}(V)$ переводят в себя каждую изотипную компоненту W_λ разложения (9-13). Тем самым, каждое S_n-изотипное подпространство $W_\lambda \subset V^{\otimes n}$ тоже является представлением группы $\mathrm{GL}(V) \times S_n$. Для каждого неприводимого представления V_λ группы S_n на тензорном произведении $\mathrm{Hom}_{S_n}(V_\lambda, V^{\otimes n}) \otimes V_\lambda$ имеется естественная структура $\mathrm{GL}(V) \times S_n$-модуля, в которой $(f, g) \in \mathrm{GL}(V) \times S_n$ действует на разложимые тензоры по правилу $(f, g) : \varphi \otimes u \mapsto (f^{\otimes n} \circ \varphi) \otimes (gu)$. Свёртка из форм. (9-5) на стр. 136

$$c : \ \mathrm{Hom}_{S_n}(V_\lambda, V^{\otimes n}) \otimes V_\lambda \xrightarrow{\sim} W_\lambda\,, \quad \varphi \otimes u \mapsto \varphi(u)\,,$$

перестановочна с действием $\mathrm{GL}(V) \times S_n$ и биективна по предл. 9.3 на стр. 136. Пространство

$$S^\lambda V \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{S_n}(V_\lambda, V^{\otimes n}) \tag{9-16}$$

с действием $\mathrm{GL}(V)$ по правилу $f : \varphi \mapsto f^{\otimes n} \circ \varphi$ называется *представлением Шура* полной линейной группы $\mathrm{GL}(V)$.

Лемма 9.4

Линейная оболочка операторов $f^{\otimes n}$, где $f \in \mathrm{GL}(V)$, совпадает с $\mathrm{End}_{S_n}(V^{\otimes n})$.

Доказательство. Цепочка канонических изоморфизмов

$$\mathrm{End}(V^{\otimes n}) \simeq V^{\otimes n*} \otimes V^{\otimes n} \simeq V^{*\otimes n} \otimes V^{\otimes n} \simeq \left(V^* \otimes V\right)^{\otimes n} \simeq \mathrm{End}(V)^{\otimes n}$$

отождествляет подалгебру $\mathrm{End}_{S_n}(V^{\otimes n}) \subset \mathrm{End}(V^{\otimes n})$ с подпространством симметрических тензоров $\mathrm{Sym}^n\big(\mathrm{End}(V)\big) \subset \mathrm{End}(V)^{\otimes n}$, которое по усиленному принципу Аронгольда[1] применённому к пространству $\mathrm{End}(V)$ и многочлену det линейно порождается тензорами $f^{\otimes n}$, где $f \in \mathrm{GL}(V)$. □

[1] См. упр. 6.3 на стр. 84.

Предложение 9.5
Все $\mathrm{GL}(V)$-модули (9-16) неприводимы.

Доказательство. Каждый линейный оператор $F \in \mathrm{End}(S^\lambda V)$ задаёт линейное преобразование $F \otimes \mathrm{Id} : \varphi \otimes u \mapsto F(\varphi) \otimes u$ пространства $W_\lambda \simeq S^\lambda V \otimes V_\lambda$, перестановочное с действием S_n на этом пространстве. По лем. 9.4 это преобразование является линейной комбинацией лежащих в образе представления Шура операторов вида $\varphi \otimes u \mapsto \left(f^{\otimes n} \circ \varphi\right) \otimes u$, где $f \in \mathrm{End}(V)$. Тем самым, образ представления Шура линейно порождает алгебру эндоморфизмов $\mathrm{End}(S^\lambda V)$, и значит, оно неприводимо по упр. 9.10. □

Замечание 9.1. Обратите внимание, что в соответствии Шура–Вейля количество клеток n в диаграмме Юнга λ никак не связано с размерностью d пространства V и может быть любым. При этом некоторые пространства $S^\lambda V$ могут оказаться нулевыми, как это происходит, к примеру, при $n > \dim V$ с отвечающими одномерным знаковым представлениям[1] V_{1^n} групп S_n пространствами $\mathrm{Hom}_{S_n}(V_{1^n}, V^{\otimes n}) \simeq \mathrm{Alt}^n V$ знакопеременных тензоров. Можно показать, что ненулевые $\mathrm{GL}(V)$-модули $S^\lambda V$ не изоморфны друг другу при разных λ и с точностью до тензорных умножений на одномерные представления $\det^m : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}_1(\Bbbk)$, в которых $f \in \mathrm{GL}(V)$ действует умножением на $\det^m(f)$, ими исчерпываются все конечномерные неприводимые представления $\varrho : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(W)$, в которых элементы матрицы $\varrho(f)$ являются рациональными функциями элементов матрицы f.

Задачи для самостоятельного решения к §9

Задача 9.1. Покажите, что каждая конечномерная ассоциативная алгебра с единицей и без делителей нуля является алгеброй с делением[2].

Задача 9.2. Найдите в $\mathrm{Mat}_6(\mathbb{R})$ все ассоциативные $\mathbb{R}$-подалгебры с единицей размерности не менее 32.

Задача 9.3. Ассоциативная алгебра называется *полупростой*, если она является полупростым левым модулем над собою. Покажите, что конечномерная как векторное пространство коммутативная алгебра полупроста если и только если в ней нет нильпотентных элементов.

Задача 9.4. Приведите пример неразложимого приводимого представления аддитивной группы $\mathbb{Z}$.

Задача 9.5. Приведите пример нетривиального неразложимого представления конечной группы с ненулевым подмодулем инвариантов.

Задача 9.6 (характеры линейных представлений). Для линейного представления

$$\varrho : G \to \mathrm{End}(V)$$

группы G в конечномерном векторном пространстве V функция $\chi_V : G \to \Bbbk$, $f \mapsto \mathrm{tr}\,\varrho(f)$, называется *характером* G-модуля V. Выразите через характеры χ_U и χ_W G-модулей U и W характеры G-модулей а) $U \oplus W$ б) $U \otimes W$ в) U^* г) $\mathrm{Hom}(U, W)$ д) $\chi_{\Lambda^n_U}$ е) $\chi_{S^n_U}$.

[1] В котором каждая перестановка $g \in S_n$ действует умножением на $\mathrm{sgn}\, g$.
[2] Т. е. у каждого ненулевого элемента a есть двусторонний обратный a^{-1}: $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$.

Задача 9.7. В условиях предыдущей задачи покажите, что
а) $\chi_{S^2U}(g) = \left(\chi_U^2(g) + \chi_U(g^2)\right)/2$ б) $\chi_{\Lambda^2U}(g) = \left(\chi_U^2(g) - \chi_U(g^2)\right)/2$.

Задача 9.8. Пусть конечная группа G действует на $\mathbb{C}^n$ перестановками стандартных базисных векторов. Покажите, что значение характера этого представления на элементе $g \in G$ равно числу неподвижных точек перестановки g.

Задача 9.9 (представления группы $D_3 \simeq S_3$). Используя соотношения

$$\sigma^2 = \tau^3 = \mathrm{Id} \quad \text{и} \quad \sigma\tau = \tau^{-1}\sigma$$

между образующими[1] σ и τ группы треугольника $D_3 \simeq S_3$ выясните, какими могут быть собственные числа операторов $\varrho(\sigma)$ и $\varrho(\tau)$ в произвольном комплексном линейном представлении $\varrho : D_3 \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, и покажите, что оператор $\varrho(\sigma)$ переводит каждый собственный вектор оператора $\varrho(\tau)$ в собственный вектор оператора $\varrho(\tau)$ с сопряжённым собственным числом. Выведите из этого, что комплексные и вещественные неприводимые представления группы $D_3 \simeq S_3$ исчерпываются тривиальным и знаковым[2] одномерными представлениями и тавтологическим двумерным представлением полной группы правильного треугольника на плоскости.

Задача 9.10. Пусть образ d-мерного линейного представления ϱ лежит в $\mathrm{SL}(V)$. Докажите, что представления $\Lambda^k\varrho$ и $\Lambda^{d-k}\varrho$ изоморфны для всех $0 \leqslant k \leqslant d$.

Задача 9.11 (формула Молина). Для любого представления $\varrho : G \to \mathrm{GL}(V)$ конечной группы G над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль обозначим через

$$S^m_G \overset{\text{def}}{=} \{\, f \in S^m V^* \mid \forall g \in G \, \forall v \in V \ f(gv) = f(v) \,\}$$

пространство G-инвариантных однородных полиномов степени m на пространстве V. Докажите, что производящая функция для размерностей $d_m = \dim S^m_G(V)$ имеет вид

$$\sum\nolimits_{m\geqslant 0} d_m t^m = \frac{1}{|G|} \sum\nolimits_{g\in G} \frac{1}{\det(1 - t\,\varrho(g))} \,.$$

Задача 9.12. Покажите, что в каждом конечномерном представлении конечной группы G над полем $\mathbb{R}$ (соотв. над полем $\mathbb{C}$) можно ввести G-инвариантную евклидово[3] (соотв. эрмитово[4]) скалярное произведение, и получите отсюда альтернативное теор. 9.3 на стр. 139 доказательство полной приводимости вещественных и комплексных линейных представлений конечной группы.

Задача 9.13. В соответствии с предыдущей задачей зафиксируем в каждом комплексном неприводимом представлении группы G какую-нибудь G-инвариантную эрмитову структуру и ортонормальный базис. Операторы $g \in G$ запишутся в этих базисах унитарными матрицами. Рассмотрим матричные элементы всех этих матриц как векторы из пространства $\mathbb{C}^G$ функций $f : G \to \mathbb{C}$. Вычислите матрицу Грама этой системы векторов относительно стандартного эрмитова скалярного произведения $(f_1, f_2) = |G|^{-1} \sum_{g\in G} f_1(g)\overline{f_2(g)}$ на $\mathbb{C}^G$.

[1] Напомню, что σ — это симметрия, а τ — поворот.
[2] В котором каждая перестановка $\sigma \in S_3$ действует умножением на свой знак.
[3] См. n° 14.1 на стр. 255 части I.
[4] См. n° 2.5 на стр. 29.

§10. Представления конечных групп.

Всюду в этом параграфе мы по умолчанию считаем, что G — конечная группа, $\Bbbk$ — алгебраически замкнутое поле, и $\mathrm{char}(\Bbbk) \nmid |G|$.

10.1. Групповая алгебра. Обозначим через $\Bbbk[G] = \Bbbk \otimes G$ векторное пространство с базисом G, состоящее из формальных линейных комбинаций $\sum_{g\in G} c_g g$ с коэффициентами $c_g \in \Bbbk$. Групповая операция в G задаёт на $\Bbbk[G]$ структуру ассоциативной $\Bbbk$-алгебры с умножением

$$\Big(\sum\nolimits_g a_g g\Big)\Big(\sum\nolimits_h b_h h\Big) \overset{\text{def}}{=} \sum\nolimits_{gh} a_g b_h gh = \sum\nolimits_f c_f f\,, \quad \text{где} \quad c_f = \sum\nolimits_{gh=f} a_g b_h\,. \tag{10-1}$$

Эта алгебра называется *групповой алгеброй* группы G над полем $\Bbbk$. Группа G вложена в алгебру $\Bbbk[G]$ в качестве мультипликативной подгруппы. Всякое линейное представление $G \to \mathrm{GL}(V)$ однозначно продолжается по линейности до представления групповой алгебры $\Bbbk[G] \to \mathrm{End}(V)$, образ которого является одновременно и линейной, и ассоциативной оболочкой всех операторов из группы G.

Упражнение 10.1. Убедитесь, что правило $m \mapsto t^m$ задаёт изоморфизмы

$$\Bbbk[\mathbb{Z}] \xrightarrow{\sim} \Bbbk[t, t^{-1}] \quad \text{и} \quad \Bbbk[\mathbb{Z}/(n)] \xrightarrow{\sim} \Bbbk[t]/(t^n - 1)\,.$$

Если $\mathrm{char}(\Bbbk) \nmid |G|$, то в групповой алгебре $\Bbbk[G]$ имеется *оператор усреднения*

$$e_{\mathbb{1}} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|} \sum\nolimits_{g\in G} g \in \Bbbk[G]\,. \tag{10-2}$$

Каждое линейное представление $\varrho : \Bbbk[G] \to \mathrm{End}(V)$ переводит элемент (10-2) в проектор на подмодуль G-инвариантов[1] $V^G \subset V$ представления ϱ.

Упражнение 10.2. Покажите, что элемент (10-2) лежит в центре[2]

$$Z(\Bbbk[G]) \overset{\text{def}}{=} \{z \in \Bbbk[G] \mid \forall\, x \in \Bbbk[G]\ zx = xz\} = \{z \in \Bbbk[G] \mid \forall\, g \in G\ gzg^{-1} = z\}$$

групповой алгебры $\Bbbk[G]$.

Коммутативная подалгебра $Z(\Bbbk[G]) \subset \Bbbk[G]$ состоит из всех линейных комбинаций

$$z = \sum\nolimits_h z_h h \in \Bbbk[G]\,,$$

коэффициенты z_h которых постоянны на классах сопряжённости. Поэтому элементы

$$z_C = \sum\nolimits_{h\in C} h\,, \tag{10-3}$$

где C пробегает множество $\mathrm{Cl}(G)$ классов сопряжённости группы G, образуют базис векторного пространства $Z(\Bbbk[G])$ над $\Bbbk$. В частности, $\dim_{\Bbbk} Z(\Bbbk[G]) = |\mathrm{Cl}(G)|$. Мы будем называть это число *числом классов*. Каждое линейное представление $\Bbbk[G] \to \mathrm{End}(V)$ переводит все центральные элементы групповой алгебры в эндоморфизмы пространства V, перестановочные со всеми операторами из группы G. Из теоремы Бернсайда[3] вытекает, что в любом неприводимом представлении над алгебраически замкнутым полем все центральные элементы действуют умножениями на скаляры.

[1] См. формулу (9-10) на стр. 138.

[2] Напомню, что *центром* кольца K называется множество всех элементов, коммутирующих со всеми элементами K.

[3] См. сл. 9.5 на стр. 135.

10.1.1. Изотипное разложение. Зафиксируем в каждом классе изоморфных неприводимых представлений группы G какого-нибудь представителя $\lambda\colon\, G \to \mathrm{GL}(U_\lambda)$ и обозначим множество всех таких представителей через $\mathrm{Ir}(G)$. По теор. 9.3 на стр. 139 и предл. 9.4 на стр. 137 всякий конечномерный G-модуль V обладает *изотипным разложением*

$$V = \bigoplus\nolimits_{\lambda\in\mathrm{Ir}(G)} V_\lambda\,, \tag{10-4}$$

каждая компонента V_λ которого является суммой всех простых подмодулей в V, изоморфных данному $U_\lambda \in \mathrm{Ir}(G)$, и совпадает с образом канонической свёртки

$$c\colon\ \mathrm{Hom}_G(U_\lambda, W)\otimes U_\lambda \to V\,,\ \ \varphi\otimes u \mapsto \varphi(u)\,. \tag{10-5}$$

Для каждого $\lambda\in\mathrm{Ir}(G)$ обозначим через $I_\lambda \subset \Bbbk[G]$ λ-изотипную компоненту *левого регулярного представления* группы G в $\Bbbk[G]$ по правилу $g\colon\, x\mapsto gx$. Таким образом,

$$\Bbbk[G] = \bigoplus\nolimits_{\lambda\in\mathrm{Ir}(G)} I_\lambda\,. \tag{10-6}$$

Будучи G-подмодулем левого регулярного представления, изотипная компонента I_λ является левым идеалом алгебры $\Bbbk[G]$. Так как правое умножение $h\colon\, \Bbbk[G] \xrightarrow{\sim} \Bbbk[G]$, $x\to xh$, на любой элемент $h\in G$ перестановочно с левым действием G на $\Bbbk[G]$, каждая изотипная компонента левого регулярного представления переводится в себя правым умножением на любой элемент группы. Таким образом, каждая изотипная компонента I_λ является двусторонним идеалом алгебры $\Bbbk[G]$. Так как $I_\lambda\cap I_\varrho = 0$ при $\lambda\neq\varrho$, и $I_\lambda I_\varrho \subset I_\lambda\cap I_\varrho$, мы заключаем, что

$$I_\lambda I_\varrho = 0 \quad \text{при} \quad \lambda\neq\varrho\,. \tag{10-7}$$

Обозначим через $e_\lambda \in I_\lambda$ компоненту единичного элемента $e\in G$ в разложении (10-6), так что

$$e = \sum\nolimits_{\lambda\in\mathrm{Ir}(G)} e_\lambda\,, \quad \text{где} \quad e_\lambda\in I_\lambda\,. \tag{10-8}$$

Из (10-7) вытекает, что $e_\lambda e_\varrho = 0$ при $\varrho\neq\lambda$, а так как $e^2 = e$ и $x_\lambda e_\lambda = e_\lambda x_\lambda = x_\lambda$ для всех $x_\lambda\in I_\lambda$, мы заключаем, что $e_\lambda^2 = e_\lambda$. Элементы e_λ называются *изотипными проекторами* или *неприводимыми идемпотентами* групповой алгебры $\Bbbk[G]$. Записывая произвольный элемент $x\in\Bbbk[G]$ в виде суммы $x = \sum_{\lambda\in\mathrm{Ir}(G)} x_\lambda$, где $x_\lambda\in I_\lambda$, мы видим, что $xe_\lambda = e_\lambda x = x_\lambda$, т. е. все изотипные проекторы e_λ лежат в центре групповой алгебры, а каждая изотипная компонента $I_\lambda = (e_\lambda)$ является главным двусторонним идеалом, порождённым e_λ.

Лемма 10.1

Любое линейное представление $\varrho\colon\, \Bbbk[G]\to\mathrm{End}(V)$ с нулевой λ-изотипной компонентой переводит изотипный идеал $I_\lambda\subset\Bbbk[G]$ в нуль.

Доказательство. Поскольку I_λ является левым идеалом в $\Bbbk[G]$, для любого вектора $v\in V$ подпространство $I_\lambda v = \{fv \mid f\in I_\lambda\}$ является G-подмодулем в V, и правило $f\mapsto fv$ задаёт сюрьективный гомоморфизм G-модулей $I_\lambda \twoheadrightarrow I_\lambda v$. Поскольку такой гомоморфизм переводит λ-изотипный подмодуль в λ-изотипный, подмодуль $I_\lambda v$ содержится в изотипной компоненте V_λ представления V. Если она нулевая, то $I_\lambda v = 0$ для всех $v\in V$. □

Теорема 10.1 (теорема Машке)
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ гомоморфизм алгебр

$$\mathfrak{rep}: \Bbbk[G] \to \prod\nolimits_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} \mathrm{End}(U_\lambda), \tag{10-9}$$

переводящий элемент $f \in \Bbbk[G]$ в набор операторов $\lambda(f): U_\lambda \to U_\lambda$, которыми он действует во всех неприводимых представлениях группы G, является изоморфизмом алгебр. Ограничение гомоморфизма (10-9) на изотипный идеал $I_\lambda \subset \Bbbk[G]$ задаёт изоморфизм алгебр $I_\lambda \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(U_\lambda)$.

Доказательство. Сначала установим инъективность гомоморфизма $\mathfrak{rep}$. Если элемент $h \in \Bbbk[G]$ действует нулевым оператором во всех неприводимых представлениях, то он действует нулевым оператором вообще на любом конечномерном G-модуле, в частности — в левом регулярном представлении. Но $f \cdot 1 = 0$ влечёт $f = 0$. Для доказательства последнего утверждения заметим, что по лем. 10.1 на стр. 147 каждое неприводимое представление $\lambda: \Bbbk[G] \to \mathrm{End}(U_\lambda)$ отображает в нуль все прямые слагаемые разложения (10-6) за исключением I_λ. Однако по теореме Бернсайда[1] оно эпиморфно. Поэтому ограничение $\mathfrak{rep}|_{I_\lambda} = \lambda|_{I_\lambda}: I_\lambda \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(U_\lambda)$ является изоморфизмом. В частности, неприводимых представлений U_λ имеется лишь конечное число, и каждое из них присутствует в изотипном разложении левого регулярного представления с кратностью $m_\lambda(\Bbbk[G]) = \dim(I_\lambda)/\dim(U_\lambda) = \dim \mathrm{End}(U_\lambda)/\dim U_\lambda = \dim U_\lambda$. Для доказательства сюрьективности гомоморфизма $\mathfrak{rep}$ остаётся заметить, что по уже доказанному для любого набора операторов $\varphi_\lambda \in \mathrm{End}(U_\lambda)$ найдутся такие элементы $f_\lambda \in I_\lambda$, что $\lambda(f_\lambda) = \varphi_\lambda$. Поскольку $\varrho(f_\lambda) = 0$ для всех неприводимых $\varrho \neq \lambda$, мы заключаем, что $\mathfrak{rep}(\sum_\lambda f_\lambda) = \prod_\lambda \varphi_\lambda$. □

Следствие 10.1
Число неприводимых представлений конечной группы G над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики $\mathrm{char}\,\Bbbk \nmid |G|$ конечно и равно числу классов сопряжённости $|\mathrm{Cl}(G)|$ группы G, а сумма квадратов их размерностей равна $|G|$. При этом $m_\lambda(\Bbbk[G]) = \dim U_\lambda$.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из того, что размерность центра прямой суммы матричных алгебр равна количеству слагаемых, второе — из равенства размерностей правого и левого пространств в (10-9). □

Следствие 10.2
Неприводимые идемпотенты $e_\lambda \in I_\lambda$ из форм. (10-8) на стр. 147 образуют базис в центре групповой алгебры и действуют тождественным оператором в неприводимом представлении λ и нулевым оператором во всех остальных неприводимых представлениях. Произвольное линейное представление $\Bbbk[G] \to \mathrm{End}(V)$ переводит e_λ в G-инвариантный проектор на λ-изотипную компоненту $V_\lambda \subset V$.

Доказательство. Так как $x_\lambda e_\lambda = e_\lambda x_\lambda = x_\lambda$ для всех $x_\lambda \in I_\lambda$, изоморфизм

$$\mathfrak{rep}|_{I_\lambda} = \lambda|_{I_\lambda}: I_\lambda \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(U_\lambda)$$

переводит e_λ в единицу Id_{U_λ} алгебры $\mathrm{End}(U_\lambda)$. Все остальные неприводиные представления переводят $e_\lambda \in I_\lambda$ в нуль по лем. 10.1 на стр. 147. Это доказывает второе и третье утверждения. Первое утверждение вытекает из второго по теор. 10.1, ибо центр прямой суммы $\bigoplus \mathrm{End}(U_\lambda)$ состоит из наборов скалярных операторов $c_\lambda \mathrm{Id}_{U_\lambda}$, где $c_\lambda \in \Bbbk$, и операторы $\mathfrak{rep}(e_\lambda)$ образуют базис этого пространства. □

[1] См. сл. 9.5 на стр. 135.

Пример 10.1 (простенькие представления симметрических групп)
Поскольку сопоставление перестановке $g \in S_n$ её циклового типа устанавливает биекцию между классами сопряжённых элементов в S_n и n-клеточными диаграммами Юнга[1], неприводимые представления симметрической группы S_n биективно соответствуют диаграммам Юнга из n клеток. Каждая симметрическая группа S_n имеет два одномерных представления: тривиальное и *знаковое*, в котором каждая перестановка g действует умножением на знак $\mathrm{sgn}(g)$. Если $\mathrm{char}\,\Bbbk > n$, операторы симметризации и альтернирования

$$\mathrm{sym}_n = \frac{1}{n!}\sum\nolimits_{g\in S_n} g \quad \text{и} \quad \mathrm{alt}_n = \frac{1}{n!}\sum\nolimits_{g\in S_n} \mathrm{sgn}(g)\, g$$

являются S_n-инвариантными проекторами на тривиальную и знаковую изотипные компоненты любого S_n-модуля.

Упражнение 10.3. Убедитесь в этом.

Тавтологическое n-мерное представление группы S_n перестановками стандартных базисных векторов e_i пространства $\Bbbk^n$ имеет тривиальный одномерный подмодуль, порождённый суммой $e = e_1 + \ldots + e_n$ всех базисных векторов. Индуцированное $(n-1)$-мерное представление в фактор пространстве $\Bbbk^n/\Bbbk\, e$ называется *симплициальным*[2], поскольку над полем $\mathbb{R}$ его образ представляет собою полную группу правильного $(n-1)$-мерного симплекса в $\mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{R}^n/\mathbb{R}\cdot e$ с центром в нуле и вершинами в классах векторов e_i по модулю e.

Упражнение 10.4. Покажите, что симплициальное представление неприводимо.

Неприводимые представления группы S_3, имеющей ровно три класса сопряжённости, исчерпываются тривиальным и знаковым одномерными представлениями и двумерным представлением U_Δ группой треугольника в силу равенства $1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$. Инвариантный проектор на U_Δ-изотипную компоненту любого представления задаётся оператором

$$\pi_\Delta \overset{\text{def}}{=} 1 - \mathrm{sym}_3 - \mathrm{alt}_3 = 1 - \frac{1}{6}\sum\nolimits_{g\in S_3}(1+\mathrm{sgn}(g))g = 1 - \frac{1}{3}\left(1+\tau+\tau^2\right)\,,$$

где $\tau = |123\rangle \in S_3$ это цикл длины 3.

Упражнение 10.5. Проверьте прямым вычислением в групповой алгебре, что π_Δ идемпотентен и лежит в центре, аннулирует тривиальный и знаковый модули, и тождественно действует в представлении группой треугольника.

У группы S_4, имеющей 5 классов сопряжённости, кроме одномерного тривиального, одномерного знакового и трёхмерного представления несобственной группой тетраэдра[3] имеется ещё одно трёхмерное представление собственной группой куба[4], а также двумерное представление группой треугольника, возникающее из факторизации[5] $S_4 \twoheadrightarrow S_3$ по подгруппе Клейна $V_4 \subset S_4$. Равенство $2\cdot 1^2 + 2\cdot 3^2 + 2^2 = 24$ указывает на то, что это хорошие кандидаты на полный список всех неприводимых представлений.

Упражнение 10.6. Покажите, что два трёхмерных представления неприводимы, не изоморфны и получаются друг из друга тензорным умножением на знаковое представление.

[1]См. прим. 18.18 на стр. 343 части I.
[2]При $n = 2$ оно совпадает со знаковым.
[3]См. прим. 18.7 на стр. 334 части I.
[4]См. прим. 18.13 на стр. 338 части I.
[5]См. прим. 18.12 на стр. 337 части I.

10.1.2. Скалярное произведение. Левое регулярное представление $L: \Bbbk[G] \hookrightarrow \mathrm{End}(\Bbbk[G])$, в котором каждый элемент $f \in \Bbbk[G]$ действует левым умножением $x \mapsto fx$, инъективно вкладывает алгебру $\Bbbk[G]$ в алгебру линейных эндоморфизмов векторного пространства $\Bbbk[G]$. На последней имеется каноническая симметричная билинейная форма — след композиции.

Упражнение 10.7. Убедитесь, что для конечномерного векторного пространства V билинейная форма $\mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(V) \to \Bbbk$, $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}(AB)$, принимает на паре разложимых операторов $A = \alpha \otimes a$ и $B = \beta \otimes b$ значение $\alpha(b) \cdot \beta(a)$, и выведите отсюда, что эта форма симметрична и невырождена.

Ограничение следа композиции на образ $L(\Bbbk[G]) \subset \mathrm{End}(\Bbbk[G])$ левого регулярного представления задаёт на $\Bbbk[G]$ симметричное скалярное произведение

$$(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{tr}(L_f L_g) = \mathrm{tr}(L_{fg})\,. \tag{10-10}$$

Упражнение 10.8. Покажите, что левое и правое умножение на заданный элемент сопряжены друг другу относительно скалярного произведения: $(fg, h) = (f, gh)$ и выведите отсюда, что ортогональное дополнение к любому левому идеалу в $\Bbbk[G]$ является правым идеалом, а ортогональное дополнение к правому — левым[1].

Так как след левого умножения на единицу группы равен $|G|$, а умножение на любой другой элемент группы бесследно, скалярные произведения элементов группы задаются формулой

$$(g, h) = \begin{cases} |G| & \text{при } h = g^{-1} \\ 0 & \text{при } h \neq g^{-1}. \end{cases} \tag{10-11}$$

Таким образом, скалярное произведение невырождено[2], и двойственным базисом к базису из групповых элементов g является базис из элементов $g^\times = g^{-1}/|G|$. В частности, каждый элемент $z \in \Bbbk[G]$ разлагается по базису из групповых элементов в виде

$$z = \frac{1}{|G|} \sum\nolimits_{g \in G} (g^{-1}, z) \cdot g \tag{10-12}$$

Изоморфизм $\mathfrak{rep}: \Bbbk[G] \xrightarrow{\sim} \prod_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} \mathrm{End}(U_\lambda)$ из теоремы Машке[3] позволяет выразить скалярное произведение (10-10) через следы действий в неприводимых представлениях.

Предложение 10.1 (формула Планшереля)
Для всех $f, g \in \Bbbk[G]$ $\quad (f, g) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} \dim(U_\lambda) \cdot \mathrm{tr}\big(\lambda(fg)\big)$.

Доказательство. Вычислим $\mathrm{tr}(L_{fg})$ в алгебре $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} \mathrm{End}(U_\lambda)$. Он равен сумме следов левого умножения на $\lambda(fg)$ в $\mathrm{End}(U_\lambda)$ по всем неприводимым представлениям λ. След левого умножения на матрицу M в матричной алгебре $\mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$ равен $n \cdot \mathrm{tr}(M)$, поскольку каждая матричная единица E_{ij} входит в ME_{ij} с коэффициентом m_{ii}. □

Следствие 10.3
Базисные идемпотенты составляют ортогональный базис центра групповой алгебры и имеют скалярные квадраты $(e_\lambda, e_\lambda) = \dim^2 U_\lambda$. □

[1] Тем самым, ортогональное дополнение к любому двустороннему идеалу тоже двусторонний идеал.
[2] Отметим, что если характеристика поля делит порядок группы, то это не так.
[3] См. теор. 10.1 на стр. 148.

Следствие 10.4
Разложение $\Bbbk[G] = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} I_\lambda$ левого регулярного представления в прямую сумму изотипных подмодулей является *ортогональным* разложением, и неприводимые идемпотенты являются *ортогональными проекциями* единицы $e \in \Bbbk[G]$ на изотипные подпространства I_λ.

Следствие 10.5
Базисный идемпотент e_λ выражается через элементы группы по формуле

$$e_\lambda = \frac{\dim U_\lambda}{|G|} \sum\nolimits_{g \in G} \mathrm{tr}\left(\lambda(g^{-1})\right) \cdot g\,, \tag{10-13}$$

и каждое представление $\Bbbk[G] \to \mathrm{End}(V)$ переводит правую часть этого равенства в G-инвариантный проектор на λ-изотипный подмодуль $V_\lambda \subset V$.

Доказательство. Комбинируя форм. (10-12) на стр. 150 с формулой Планшереля, получаем

$$e_\lambda = |G|^{-1} \sum_{g \in G} (g^{-1}, e_\lambda) \cdot g = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \sum_{\mu \in \mathrm{Ir}(G)} \dim(U_\mu) \cdot \mathrm{tr}\big(\mu(g^{-1} e_\lambda)\big) =$$
$$= |G|^{-1} \sum_{g \in G} \sum_{\mu \in \mathrm{Ir}(G)} \dim(U_\mu) \cdot \mathrm{tr}\big(\mu(g^{-1})\mu(e_\lambda)\big) = \frac{\dim(U_\lambda)}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{tr}\big(\lambda(g^{-1})\big)$$

(в последнем равенстве мы воспользовались тем, что $\mu(e_\lambda) = 0$ при $\mu \neq \lambda$, а $\lambda(e_\lambda) = \mathrm{Id}_{U_\lambda}$ по сл. 10.2 на стр. 148). □

10.2. Характеры. Линейная форма на $\Bbbk[G]$, сопоставляющая элементу групповой алгебры след его действия на пространстве V линейного представления $\varrho : G \to \mathrm{GL}(V)$ называется *характером*[1] представления ϱ и обозначается

$$\chi_\varrho : \Bbbk[G] \to \Bbbk\,, \quad \chi_\varrho(f) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{tr}\,\varrho(f)\,. \tag{10-14}$$

Так как след оператора не меняется при сопряжении, характер любого представления постоянен на классах сопряжённых элементов, и изоморфные представления имеют равные характеры. Формула (10-13) для проектора на λ-изотипную компоненту переписывается в терминах характеров как

$$e_\lambda = \frac{\dim U_\lambda}{|G|} \sum\nolimits_{g \in G} \chi_\lambda\left(g^{-1}\right) \cdot g\,, \tag{10-15}$$

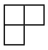
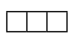
Пример 10.2 (характеры перестановочных представлений)
Если группа G действует на векторном пространстве перестановками базисных векторов, то значение характера такого представления на элементе $g \in G$ равно числу неподвижных элементов перестановки g. В частности, характер регулярного представления имеет вид

$$\chi_L(g) = \begin{cases} |G| & \text{если} \quad g = e \\ 0 & \text{если} \quad g \neq e\,. \end{cases}$$

[1] Не следует путать эти *аддитивные* характеры с мультипликативными характерами абелевых групп, обсуждавшимися в n° 9.5 на стр. 140. Только характеры одномерных представлений являются мультипликативными гомоморфизмами.

Значение характера тавтологического представления симметрической группы S_n перестановками базисных векторов координатного пространства $\Bbbk^n$ на перестановке циклового типа λ равно $m_1(\lambda)$, т. е. числу строк длины 1 в диаграмме λ. Поскольку это представление является прямой суммой тривиального одномерного, с тождественно единичным характером, и симплициального, мы заключаем, что значение симплициального характера группы S_n на классе сопряжённости C_λ, состоящем из перестановок циклового типа λ, равно $\chi_\Delta(C_\lambda) = m_1(\lambda) - 1$.

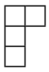
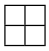
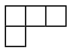
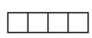
Упражнение 10.9. Убедитесь, что характеры неприводимых представлений симметрической группы S_3 задаются таблицей

классы			
число элементов	1	3	2
значения характеров:			
тривиального	1	1	1
знакового	1	−1	1
треугольного	2	0	−1

(10-16)

и что проекторы на изотипные компоненты, вычисленные при помощи этой таблицы по формуле (10-15), совпадают с описанными ранее в прим. 10.1 на стр. 149.

Пример 10.3 (неприводимые характеры S_4)
В геометрически заданных представлениях следы можно вычислять складывая собственные значения соответствующих поворотов и отражений. Например, значения характеров пяти представлений симметрической группы S_4 из прим. 10.1 задаются таблицей:

классы					
число элементов	1	6	3	8	6
значения характеров:					
тривиального	1	1	1	1	1
знакового	1	−1	1	1	−1
тетраэдрального	3	1	−1	0	−1
кубического	3	−1	−1	0	1
треугольного	2	0	2	−1	0

(10-17)

четвёртая строка которой объясняется так: след единицы равен размерности представления; одна транспозиция и пара независимых транспозиций действуют поворотами на 180° вокруг прямой, и собственные числа такого вращения суть 1, −1 и −1; цикл длины 3 и цикл длины 4 действуют поворотами на 120° и 90° соответственно, и их собственные числа суть 1, ω, ω^2 и 1, i, $-i$.

Лемма 10.2
Для любых двух представлений V, W группы G с характерами χ_U и χ_V

$$\chi_{V\oplus W}(g) = \chi_V(g) + \chi_W(g) \tag{10-18}$$
$$\chi_{V\otimes W}(g) = \chi_V(g)\chi_W(g) \tag{10-19}$$
$$\chi_{V^*}(g) = \chi_V(g^{-1}) \tag{10-20}$$
$$\chi_{\mathrm{Hom}(V,W)}(g) = \chi_V(g^{-1})\chi_W(g) \tag{10-21}$$

Доказательство. Поскольку любой оператор g из конечной группы полупрост, в пространствах V и W имеются базисы $\{v_i\}$ и $\{w_j\}$ из собственных векторов g. Пусть α_i и β_j — соответствующие наборы собственных чисел. Набор собственных чисел g в представлении $V \oplus W$ получается объединением этих наборов, откуда следует (10-18). Собственными числами g в представлении $V \otimes W$ являются всевозможные попарные произведения $\alpha_i\beta_j$, что даёт (10-19). Формула (10-20) следует из того, что матрица g в двойственном представлении транспонирована к матрице g^{-1} в исходном (см. n° 9.4). Последняя формула следует из двух предыдущих. □

Упражнение 10.10. Докажите, что производящие функции для характеров симметрических и внешних степеней представления $\varrho :\ G \to \mathrm{GL}(V)$ имеют вид:

$$\sum\nolimits_{\nu\geqslant 0} \chi_{\Lambda^\nu V}(g)\, t^\nu = \det(1 + t\,\varrho(g)) \quad \text{и} \quad \sum\nolimits_{\nu\geqslant 0} \chi_{S^\nu V}(g)\, t^\nu = \det(1 - t\,\varrho(g))^{-1}.$$

Следствие 10.6
Характер любого представления V выражается через неприводимые характеры χ_λ как

$$\chi_V = \sum\nolimits_{\lambda\in\mathrm{Ir}(G)} m_\lambda(V)\cdot\chi_\lambda \tag{10-22}$$

где $m_\lambda(V) = \dim V_\lambda / \dim U_\lambda$ обозначает кратность простого G-модуля U_λ в V. □

10.2.1. Преобразование Фурье и функции на группе. Так как любая линейная форма на векторном пространстве однозначно задаётся своими значениями на базисных векторах, пространство $\Bbbk^G$ функций $G \to \Bbbk$ двойственно пространству $\Bbbk[G]$: каждая функция $\varphi :\ G \to \Bbbk$ задаёт линейную форму $\varphi(\sum x_g \cdot g) = \sum x_g\varphi(g)$, $\Bbbk$-линейно продолжающую φ с G на $\Bbbk[G]$. С другой стороны, скалярное произведение[1] на $\Bbbk[G]$ задаёт невырожденную корреляцию[2]

$$\Bbbk[G] \xrightarrow{\sim} \Bbbk[G]^*, \quad f \mapsto (f, *), \tag{10-23}$$

которая сопоставляет каждому вектору $f \in \Bbbk[G]$ линейную форму $\Bbbk[G] \to \Bbbk$, задаваемую скалярным умножением на этот вектор. Согласно формулам (10-11) и (10-12) на стр. 150 изоморфизм (10-23) переводит элементы $g^\times = g^{-1}/|G| \in \Bbbk[G]$ в базис векторного пространства $\Bbbk[G]^*$, двойственный к состоящему из элементов группы базису в $\Bbbk[G]$. Комбинируя обратный к (10-23) изоморфизм $\Bbbk[G]^* \xrightarrow{\sim} \Bbbk[G]$ с описанным выше отождествлением $\Bbbk^G \simeq \Bbbk[G]^*$, получаем изоморфизм векторных пространств

$$\Phi :\ \Bbbk^G \xrightarrow{\sim} \Bbbk[G], \quad \varphi \mapsto \widehat{\varphi} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|}\sum\nolimits_{g\in G} \varphi\left(g^{-1}\right)\cdot g, \tag{10-24}$$

[1] См. формулу (10-10) на стр. 150.
[2] См. n° 15.1.1 на стр. 272.

который называется *преобразованием Фурье*. По форм. (10-15) на стр. 151 преобразование Фурье переводит неприводимые характеры в кратности неприводимых идемпотентов:

$$\widehat{\chi}_\lambda = e_\lambda / \dim U_\lambda \,. \tag{10-25}$$

Перенесём с помощью изоморфизма (10-24) скалярное произведение из $\Bbbk[G]$ в пространство функций на группе, т. е. положим

$$(\varphi, \psi) \overset{\text{def}}{=} (\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}) = \frac{1}{|G|^2} \sum\nolimits_{g,h \in G} \varphi(g^{-1})\psi(h^{-1})(g,h) = \frac{1}{|G|} \sum\nolimits_{g \in G} \varphi(g^{-1})\psi(g)\,. \tag{10-26}$$

Из формулы (10-25) и сл. 10.3 на стр. 150 немедленно вытекают следующие результаты, полностью сводящие анализ представлений к формальным линейным вычислениям с характерами.

Следствие 10.7
Неприводимые характеры образуют ортонормальный базис в пространстве функций, постоянных на классах сопряжённых элементов. □

Следствие 10.8
$\dim \operatorname{Hom}_G(V, W) = (\chi_V, \chi_W)$ для всех G-модулей V и W.

Доказательство. Обе части равны $\sum_{\lambda \in \operatorname{Ir}(G)} m_\lambda(V) m_\lambda(W)$: левая — по сл. 9.6 на стр. 137, правая — в силу сл. 10.6 и ортонормальности характеров. □

Следствие 10.9
Кратность вхождения неприводимого представления U_λ в произвольное представление V равна скалярному произведению их характеров: $m_\lambda(V) = (\chi_\lambda, \chi_V)$.

Доказательство. Скалярно умножаем обе части (10-22) на χ_λ и пользуемся ортонормальностью характеров. □

Следствие 10.10
Представление V неприводимо тогда и только тогда, когда $(\chi_V, \chi_V) = 1$.

Доказательство. В силу ортонормальности неприводимых характеров из сл. 10.6 вытекает, что $(\chi_V, \chi_V) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Ir}(G)} m_\lambda^2(V)$, где все $m_\lambda(V)$ целые неотрицательные. Такая сумма равна единице только если она состоит из одного слагаемого, равного единице. □

Упражнение 10.11. Опишите все неприводимые представления групп A_5 и S_5 и вычислите их характеры.

Замечание 10.1. (скалярное произведение комплексных характеров) Так как собственные числа всех операторов из конечной группы G являются корнями $|G|$-й степени из единицы, в любом представлении группы G над полем $\mathbb{C}$ следы обратных друг другу элементов g и g^{-1} комплексно сопряжены. Поэтому $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ для любого характера χ. Это позволяет переписать скалярное произведение комплексных характеров в виде стандартной эрмитовой структуры:

$$(\chi_1, \chi_2) = \frac{1}{|G|} \sum\nolimits_{g \in G} \overline{\chi_1(g)} \cdot \chi_2(g)\,.$$

Замечание 10.2. (скалярное произведение характеров группы S_n) Обратные друг другу перестановки $g, g^{-1} \in S_n$ имеют одинаковый цикловой тип и, стало быть, сопряжены в S_n. Поэтому $\chi(g^{-1}) = \chi(g)$ для любого характера χ. Это позволяет переписать скалярное произведение характеров симметрической группы виде стандартной евклидовой структуры:

$$(\chi_1, \chi_2) = \frac{1}{|G|} \sum\nolimits_{g\in G} \chi_1(g) \cdot \chi_2(g) .$$

В частности, над полями $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ оно *положительно определено*.

Пример 10.4 (внешние степени симплициального представления S_n)
Покажем, что все внешние степени симплициального представления Δ симметрической группы S_n неприводимы. Разложение тавтологического представления τ группы S_n перестановками базисных векторов в $\mathbb{Q}^n$ на неприводимые имеет вид $\tau = \Delta \oplus \mathbb{1}$. Поэтому его m-тая внешняя степень $\Lambda^m\tau \simeq \Lambda^m\Delta \oplus \Lambda^{m-1}\Delta$.

Упражнение 10.12. Покажите, что $\Lambda^m(U \oplus W) \simeq \bigoplus_{\alpha+\beta=m} \Lambda^\alpha U \otimes \Lambda^\beta W$.

Достаточно убедиться, что скалярный квадрат $\left(\chi_{\Lambda^m\tau}, \chi_{\Lambda^m\tau}\right) = 2$. В стандартном базисе

$$e_I = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_m}$$

пространства $\Lambda^m(\Bbbk^n)$ след перестановки σ равен сумме знаков $\operatorname{sgn} \sigma|_I$ ограничений перестановки σ на все такие подмножества I, что $\sigma(I) \subset I$. Поэтому

$$\left(\chi_{\Lambda^k\tau}, \chi_{\Lambda^k\tau}\right) = \frac{1}{n!} \sum\nolimits_{\sigma\in S_n} \left(\sum\nolimits_{I\,:\,\sigma(I)\subset I} \operatorname{sgn}(\sigma|_I)\right) \cdot \left(\sum\nolimits_{J\,:\,\sigma(J)\subset J} \operatorname{sgn}(\sigma|_J)\right) =$$
$$= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in S_n} \sum_{\substack{I,J\,:\,\sigma(I)\subset I\\ \sigma(J)\subset J}} \operatorname{sgn}(\sigma|_I) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma|_J) = \frac{1}{n!} \sum_{I,J} \sum_{\substack{\sigma\,:\,\sigma(I)\subset I\\ \sigma(J)\subset J}} \operatorname{sgn}(\sigma|_I) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma|_J) .$$

Совокупность всех таких перестановок σ, что $\sigma(I) \subset I$ и $\sigma(J) \subset J$, представляет собою прямое произведение симметрических групп, независимо переставляющих элементы в подмножествах $I \cap J$, $I \smallsetminus (I \cap J)$, $J \smallsetminus (I \cap J)$, $\{1, 2, \ldots, n\} \smallsetminus (I \cup J)$ и изоморфное $S_k \times S_{m-k} \times S_{m-k} \times S_{n-2m+k}$, где $k = k(I,J) = |I \cap J|$. Поскольку $\operatorname{sgn}(\sigma|_I) \cdot \operatorname{sgn}(s|_J) = \operatorname{sgn}(\sigma|_{I\cap J})^2 \cdot \operatorname{sgn}(\sigma|_{I\smallsetminus(I\cap J)}) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma|_{J\smallsetminus(I\cap J)}) = \operatorname{sgn}(\sigma|_{I\smallsetminus(I\cap J)}) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma|_{J\smallsetminus(I\cap J)})$, предыдущую сумму можно переписать как

$$\frac{1}{n!} \sum\nolimits_{I,J} k! \cdot (n - 2m + k)! \cdot \left(\sum\nolimits_{g\in S_{m-k}} \operatorname{sgn}(g)\right) \cdot \left(\sum\nolimits_{h\in S_{m-k}} \operatorname{sgn}(h)\right) . \tag{10-27}$$

Последние два множителя отличны от нуля только при $k = m$ и $k = m - 1$. Проверим, что вклад всех слагаемых с такими значениями $k = |I \cap J|$ в сумму (10-27) равен по единице в каждом из двух случаев. В первом случае $I = J$ и соответствующий кусок суммы (10-27) имеет вид

$$\frac{1}{n!} \sum\nolimits_I m! \cdot (n - m)! .$$

Он состоит из $\binom{n}{m}$ одинаковых слагаемых $\binom{m}{n}^{-1}$, сумма которых равна 1. Во втором случае $|I \cap J| = (m - 1)$ и соответствующий кусок суммы (10-27) равен

$$\frac{1}{n!} \sum\nolimits_{I\cap J} \sum\nolimits_{i\neq j,\, i,j\notin I\cap J} (m - 1)! \cdot (n - m - 1)! .$$

Он состоит из $(n - m + 1)(n - m)\binom{n}{m-1}$ одинаковых слагаемых вида

$$\frac{(m - 1)! \cdot (n - m - 1)!}{n!} = \binom{n}{m - 1}^{-1} \cdot \frac{1}{(n - m + 1)(n - m)} ,$$

сумма которых тоже равна 1.

10.2.2. Кольцо представлений. Целочисленные линейные комбинации неприводимых характеров конечной группы G образуют коммутативное подкольцо с единицей в алгебре $\Bbbk[G]$ всех функций $G \to \Bbbk$ с операциями поточечного сложения и умножения значений. Это подкольцо называется *кольцом представлений* группы G и обозначается $RG \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} \mathbb{Z} \cdot \chi_\lambda \subset \Bbbk^G$. Название связано с тем, что в силу предыдущего линейные комбинации неприводимых характеров с неотрицательными коэффициентами взаимно однозначно соответствуют представлениям группы G. При этом сложению и умножению в RG отвечают прямая сумма и тензорное произведение соответствующих представлений. Элементы кольца RG, содержащие отрицательные кратности неприводимых характеров, называются *виртуальными представлениями*.

10.3. (Ко)индуцирование. Пусть ассоциативная $\Bbbk$-алгебра A с единицей является подалгеброй ассоциативной $\Bbbk$-алгебры B с той же единицей, что и в A. Любое представление W алгебры B одновременно является и представлением алгебры A. Пространство W, рассматриваемое как модуль над A, называется *ограничением* B-модуля W на A и обозначается $\mathrm{res}\, W$ или $\mathrm{res}_A^B\, W$, если важно указать, о каких B и A идёт речь. Простейшим примером этой ситуации является овеществление комплексного векторного пространства[1]: если $A = \Bbbk = \mathbb{R}$, а $B = \mathbb{C}$, то n-мерное векторное пространство W над полем $\mathbb{C}$ может рассматриваться как вещественное векторное пространство $W_\mathbb{R} = \mathrm{res}_\mathbb{R}^\mathbb{C}\, W$ размерности $2n$.

Наоборот, по любому A-модулю V можно построить B-модуль $\mathrm{ind}\, V = B \otimes_A V$, который называется *индуцированным* с A-модуля V и определяется как фактор тензорного произведения векторных пространств $B \otimes V$ по подпространству, порождённому всевозможными разностями

$$ba \otimes v - b \otimes av\,, \text{ где } b \in B\,,\ a \in A\,,\ v \in V\,.$$

По построению, в пространстве $B \otimes_A V$ выполняются равенства $ba \otimes_A v = b \otimes_A av$, т. е. элементы алгебры A «проносятся» через знак тензорного произведения. Поэтому такое произведение называется *тензорным произведением над* A. Структура модуля над B задаётся правилом[2]

$$b\,(b' \otimes v) \overset{\text{def}}{=} (bb') \otimes v\,.$$

Простейшим примером этой ситуации является комплексификация вещественного векторного пространства: если $\Bbbk = A = \mathbb{R}$, а $B = \mathbb{C}$, то из n-мерного вещественного векторного пространства V можно изготовить комплексное векторное пространство $\mathbb{C} \otimes V$ той же размерности n, но уже над полем $\mathbb{C}$. Если важно указать алгебры B и A явно, мы пишем $\mathrm{ind}_A^B\, V$.

Предложение 10.2

Отображение $\tau_A : V \to B \otimes_A V\,,\, v \mapsto 1 \otimes_A v$, является A-гомоморфизмом, и для любого A-гомоморфизма $\varphi : V \to W$ в любой B-модуль W существует единственный такой B-гомоморфизм $\psi : B \otimes_A V \to W$, что $\psi \circ \tau_A = \varphi$. Иначе говоря, для всех A-модулей V и B-модулей W имеется канонический изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_B\,(\mathrm{ind}\, V, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A\,(V, \mathrm{res}\, W)\,, \quad \psi \mapsto \psi \circ \tau_A\,. \tag{10-28}$$

Доказательство. Для каждого B-гомоморфизма $\psi : B \otimes_A U \to V$ композиция

$$\varphi = \psi \circ \tau_A : V \to W\,, \quad v \mapsto \psi(1 \otimes_A u)\,,$$

[1]См. n° 2.1 на стр. 21.

[2]Ср. с n° 1.5 на стр. 16.

является A-гомоморфизмом, поскольку $\varphi(av) = \psi(1 \otimes_A av) = \psi(a \otimes_A v) = a\psi(1 \otimes_A v) = a\varphi(v)$. Тем самым, отображение (10-28) определено корректно. Для данного A-гомоморфизма $\varphi : V \to W$ такой B-гомоморфизм $\psi : B \otimes_A V \to W$, что $\varphi = \psi \circ \tau_A$, обязан действовать на разложимые тензоры по правилу $b \otimes v \mapsto b\varphi(v)$. Тем самым, он единствен. Будучи билинейным по b и v, это правило корректно задаёт линейный оператор $B \otimes V \to W$, который переводит соотношения $ba \otimes v - b \otimes av$ в нуль: $ba\psi(v) - b\psi(av) = 0$ в силу A-линейности ψ. Поэтому он корректно спускается до линейного отображения $B \otimes_A V \to W$, перестановочность которого с левым умножением на элементы $b \in B$ очевидна. □

Упражнение 10.13. Убедитесь, что универсальное свойство из предл. 10.2 определяет B-модуль $B \otimes_A V$ вместе с A-линейным отображением τ_A однозначно с точностью до единственного B-линейного изоморфизма, перестановочного с τ_A, и проверьте, что ограничение и индуцирование представлений перестановочны с прямыми суммами и с тензорными произведениями представлений.

10.3.1. Индуцированные представления групп. В ситуации, когда $B = \Bbbk[G]$ и $A = \Bbbk[H]$ являются групповыми алгебрами конечной группы G и произвольной её подгруппы $H \subset G$, ограничение и индуцирование сопоставляют каждому линейному представлению $\varrho : G \to \mathrm{GL}(W)$ его *ограничение* $\operatorname{res}\varrho \overset{\text{def}}{=} \varrho|_H : H \to \mathrm{GL}(W)$ на подгруппу H, а каждому линейному представлению $\lambda : H \to \mathrm{GL}(V)$ — *индуцированное* им представление $\operatorname{ind}\lambda : G \to \mathrm{GL}(\Bbbk[G] \otimes_{k[H]} V)$ группы G, так что имеет место канонический изоморфизм $\mathrm{Hom}_G(\operatorname{ind} V, W) \simeq \mathrm{Hom}_H(V, \operatorname{res} W)$. Если нужно подчеркнуть, о каких G и $H \subset G$ идёт речь, мы пишем res^G_H и ind^G_H. На языке характеров сопряжение и индуцирование являются встречными гомоморфизмами колец представлений[1]

$$RH \underset{\text{res}}{\overset{\text{ind}}{\rightleftarrows}} RG$$

сопряжёнными относительно канонического скалярного произведения на пространстве функций на группе[2]: $(\chi_{\operatorname{ind} V}, \chi_W) = (\chi_V, \chi_{\operatorname{res} W})$. В частности, кратность неприводимого G-модуля $\lambda : G \to \mathrm{GL}(U)$ в разложении представления, индуцированного с неприводимого H-модуля $\mu : H \to \mathrm{GL}(S)$, равна кратности S в разложении ограничения V на подгруппу H:

$$m_\lambda(\operatorname{res}\mu) = m_\mu(\operatorname{ind}\lambda)\ . \qquad (10\text{-}29)$$

Это равенство называется *законом взаимности Фробениуса*[3].

Предложение 10.3

Если группа G имеет абелеву подгруппу $H \subset G$, то размерность любого неприводимого представления группы G не превышает[4] индекса $[G : H]$.

Доказательство. Пусть представление U группы G неприводимо, и L — одномерный H-подмодуль в $\operatorname{res} U$. В силу взаимности Фробениуса $\operatorname{ind} L$ содержит U с ненулевой кратностью, откуда $\dim U \leqslant \dim \operatorname{ind} L = [G : H]$. □

---

[1] См. n° 10.2.2 на стр. 156.

[2] См. формулу (10-26) на стр. 154.

[3] Или *двойственностью Фробениуса*.

[4] Ниже, в теор. 15.1 на стр. 233 мы увидим, что если абелева подгруппа H нормальна в G, то размерности всех неприводимых группы G делят индекс $[G : H]$.

Предложение 10.4 (транзитивность индуцирования)
Для пары вложенных подгрупп $K \subset H \subset G$ и любого представления $\varrho : K \to \mathrm{GL}(U)$ имеется канонический изоморфзм G-модулей $\mathrm{ind}_H^G \mathrm{ind}_K^H U \xrightarrow{\sim} \mathrm{ind}_H^G U$.

Доказательство. Поскольку для любого G-модуля W имеется канонический изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_K(U,W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_H(\mathrm{ind}_K^H U, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}_H^G \mathrm{ind}_K^H U, W)\,, \quad \psi \mapsto \psi \circ \tau_K \circ \tau_H\,,$$

отображение $\tau_K \circ \tau_H : U \to \mathrm{ind}_H^G \mathrm{ind}_K^H U$ универсально в смысле предл. 10.2. По упр. 10.13 оно отождествляется с отображением $U \to \mathrm{ind}_K^G U$ единственным изоморфизмом. □

10.3.2. Строение индуцированного представления. Тензорное произведение

$$\Bbbk[G] \otimes U = \bigoplus\nolimits_{g\in G} (\Bbbk \cdot g) \otimes V$$

представляет собою прямую сумму $|G|$ копий пространства V, занумерованных элементами $g \in G$. Факторизация по соотношениям $(gh) \otimes v = g \otimes (vu)$ склеивает между собою все прямые слагаемые, занумерованные элементами из одного смежного класса gH так, что $gh \otimes v$ отождествляется с $g \otimes hv$. В результате тензорное произведение над $\Bbbk[H]$ оказывается изоморфно прямой сумме $r = [G : H]$ копий пространства V занумерованных какой-либо фиксированной системой $\{g_1, \dots , g_r\}$ представителей классов смежности

$$\Bbbk[G] \times_{\Bbbk[H]} V \simeq g_1 V \oplus \ldots \oplus g_r V\,. \tag{10-30}$$

В этом разложении каждое $g_\nu V$ представляет собой копию пространства V, а стоящий слева значок g_ν указывает, что данная копия соответствует смежному классу $g_\nu H$. Если писать $g_\nu v$ для обозначения вектора $v \in V$, лежащего в g_ν-й копии $g_\nu V$ пространства V, то каждый вектор $w \in \Bbbk[G] \otimes_{k[H]} V$ однозначно запишется в виде суммы $\sum_{\nu=1}^r g_\nu v_\nu$, где $v_\nu \in V$. Левое умножение на элемент $g \in G$ в группе G осуществляет перестановку смежных классов: для каждых $g \in G$ и $\nu \in \{1, \dots , r\}$ найдутся единственные такие $h = h(g,\nu) \in H$ и $\mu = \mu(g,\nu) \in \{1, \dots , r\}$, что $gg_\nu = g_\mu h$. В этих обозначениях действие элемента $g \in G$ на вектор $g_\nu v \in g_\nu V$ происходит по правилу $gg_\nu v = g_\mu hv \in g_\mu V$, где $hv \in V$ есть результат действия оператора $h \in H$ на вектор $v \in V$ согласно представлению подгруппы H в $\mathrm{GL}(V)$.

Пример 10.5
Пусть $G = S_3$ и $H \simeq S_2$ — подгруппа, порождённая транспозицией $\sigma = |12\rangle$. В качестве представителей смежных классов G/H выберем e, τ и τ^2, где $\tau = |123\rangle$. Представление $W = \mathrm{ind}\,\mathbb{1}$, индуцированное тривиальным одномерным представлением, трёхмерно с базисом e, τ, τ^2 и образующие $\sigma, \tau \in S_3$ действуют на этот базис матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

соответственно. Тем самым, W изоморфно тавтологическому представлению S_3 и является суммой тривиального одномерного представления и двумерного представления группой треугольника. Представление $W' = \mathrm{ind}\,\mathrm{sgn}$, индуцированное одномерным знаковым представлением, также трёхмерно с тем же базисом, но σ и τ теперь действуют на него матрицами

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Это представление является прямой суммой знакового представления в одномерном пространстве, натянутом на $e+\tau+\tau^2$ и треугольного представления в ортогональной плоскости. Представление, индуцированное с двумерного левого регулярного представления $\Bbbk[S_2]$, это 6-мерное левое регулярное представление группы S_3 в $\Bbbk[S_3] = e\cdot\Bbbk[S_2]\oplus\tau\cdot\Bbbk[S_2]\oplus\tau^2\cdot\Bbbk[S_2]$.

Упражнение 10.14. Убедитесь, что регулярное представление любой подгруппы всегда индуцирует регулярное представление объемлющей группы.

Предложение 10.5
Пусть пересечение класса сопряжённых элементов $C\subset G$ с подгруппой $H\subset G$ раскладывается в объединение $C\cap H = D_1\sqcup\ldots\sqcup D_m$ различных классов H-сопряжённости. Тогда для любого представления V подгруппы H характер индуцированного им представления принимает на классе C значение $\chi_{\mathrm{ind}\,V}(C) = [G:H]\cdot\sum_{i=1}^m \chi_V(D_i)\cdot|D_i|/|C|$. В частности, для тривиального одномерного представления $V=\mathbb{1}$ имеем

$$\chi_{\mathrm{ind}\,\mathbb{1}}(C) = [G:H]\cdot|C\cap H|/|C|\,. \tag{10-31}$$

Доказательство. Поскольку элемент $g\in C$ переставляет слагаемые $g_\nu V$ разложения (10-30), след его действия равен сумме следов действий на тех слагаемых $g_\nu V$, которые остаются при этой перестановке на месте, что означает равенство $gg_\nu = g_\nu h$ для некоторого $h = g_\nu^{-1}gg_\nu\in H$. При этом действие элемента g на таком слагаемом $g_\nu V$ совпадает с действием элемента h на пространстве V, и его след равен $\chi_V(h) = \chi_V(g_\nu^{-1}gg_\nu)$. Поэтому

$$\chi_{\mathrm{ind}\,V}(g) = \sum_{\substack{\nu:\\ g_\nu^{-1}gg_\nu\in H}} \chi_V(g_\nu^{-1}gg_\nu) = \frac{1}{|H|}\sum_{\substack{s\in G:\\ s^{-1}gs\in H}}\chi_V(s^{-1}gs) = \frac{1}{|H|}\sum_{i=1}^m\sum_{\substack{s\in G:\\ s^{-1}gs\in D_i}}\chi_V(D_i)\,,$$

где во втором равенстве мы заменили каждое слагаемое левой суммы на $|H|$ равных друг другу слагаемых, получающихся заменой элемента g_ν на всевозможные $s\in g_\nu H$, а в третьем — собрали вместе все слагаемые, у которых $s^{-1}gs$ лежит в одном классе H-сопряжённости D_i. Поскольку различных произведений $s^{-1}gs\in D_i$ имеется $|D_i|$ штук, и по формуле для длины орбиты каждое из них получается из $|G|/|C|$ различных $s\in G$, мы заключаем, что $\chi_{\mathrm{ind}\,V}(g) = |H|^{-1}\sum_{i=1}^m\chi_V(D_i)\cdot|D_i|\cdot|G|/|C|$. □

Упражнение 10.15 (формула проекции). Убедитесь, что для любых G-модуля W и H-модуля V имеется канонический изоморфизм G-модулей[1] $\mathrm{ind}\big((\mathrm{res}\,W)\otimes V\big)\simeq W\otimes\mathrm{ind}\,V$.

10.3.3. Коиндуцированные представления. В теории представлений ассоциативных алгебр имеется ещё один способ сопоставить A-модулю V модуль над алгеброй B, содержащей A в качестве подалгебры, а именно — *коиндуцированный модуль* $\mathrm{coind}\,V \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}_A(B,V)$, на котором имеется *левое* действие алгебры B *правым* умножением аргументов:

$$b:\ \psi\mapsto b\psi\,,\ \text{где } b\psi(b') = \psi(b'b)\,.$$

Упражнение 10.16. Проверьте равенство $(b_1b_2)\psi = b_1(b_2\psi)$.

[1]Тензорные произведения в левой и правой частях суть описанные в n° 9.4 на стр. 137 тензорные произведения представлений групп H и G соответственно.

Коиндуцированный модуль обладает двойственным к описанному в предл. 10.2 универсальным свойством: каноническое отображение $\tau^A : \operatorname{Hom}_A(B, V) \to V$, $\varphi \mapsto \varphi(1)$, A-линейно, и для любых B-модуля W и A-гомоморфизма $\varphi : W \to V$ существует единственный такой B-гомоморфизм $\psi : W \to \operatorname{Hom}_A(B, V)$, что $\tau^A \circ \psi = \varphi$, т. е. для всех A-модулей V и B-модулей W имеется канонический изоморфизм

$$\operatorname{Hom}_B(W, \operatorname{coind} V) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(\operatorname{res} W, V)\,, \quad \psi \mapsto \tau^A \circ \psi\,, \tag{10-32}$$

сопоставляющий B-гомоморфизму $\psi : W \to \operatorname{Hom}_A(B, V)$, $w \mapsto \psi_w$, A-гомоморфизм

$$\tau^A \circ \psi : W \to V\,, \quad w \mapsto \psi_w(1)\,.$$

Обратное отображение переводит A-гомоморфизм $\varphi : W \to V$ в B-гомоморфизм

$$\psi : W \to \operatorname{Hom}_A(B, V)\,, \quad w \mapsto \psi_w\,, \quad \text{где} \quad \psi_w : B \to V\,, \quad b \mapsto \varphi(bw)\,.$$

Упражнение 10.17. Убедитесь, что оба отображения корректно определены и взаимно обратны.

В ситуации, когда $A = \Bbbk[H]$, $B = \Bbbk[G]$ суть групповые алгебры конечной группы G и её подгруппы $H \subset G$, преобразование Фурье[1] индуцирует изоморфизм векторных пространств

$$\Phi \otimes \operatorname{Id}_V : \operatorname{Hom}(\Bbbk[G], V) \simeq \Bbbk[G]^* \otimes V \xrightarrow{\sim} \Bbbk[G] \otimes V\,,$$

который переводит разложимый оператор $\varphi = \xi \otimes v : g \mapsto \xi(g)\, v$ ранга 1 в оператор

$$\hat{\xi} \otimes v = \frac{1}{|G|} \sum\nolimits_{g \in G} \xi(g^{-1})\, g \otimes v = \frac{1}{|G|} \sum\nolimits_{g \in G} g \otimes (\xi(g^{-1})\, v) = \frac{1}{|G|} \sum\nolimits_{g \in G} g \otimes \varphi(g^{-1})$$

и, стало быть, действует на произвольный линейный оператор $\varphi : \Bbbk[G] \to V$ по правилу

$$\varphi \mapsto \widehat{\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|} \sum\nolimits_{g \in G} g^{-1} \otimes \varphi(g)\,.$$

Оператор $\widehat{\varphi}$ называется *преобразованием Фурье* оператора φ. Преобразование Фурье перестановочно с левым действием G, ибо для всех $s \in G$

$$\widehat{s\varphi} = \frac{1}{|G|} \sum\nolimits_{g \in G} g^{-1} \otimes s\varphi(g) = \frac{1}{|G|} \sum\nolimits_{g \in G} g^{-1} \otimes \varphi(gs) = \frac{1}{|G|} \sum\nolimits_{g \in G} sg^{-1} \otimes \varphi(g) = s\widehat{\varphi}\,,$$

а его композиция с проекцией $\Bbbk[G] \otimes V \twoheadrightarrow \Bbbk[G] \otimes_{\Bbbk[H]} V$ устанавливает изоморфизм подпространства H-инвариантных операторов $\operatorname{Hom}_H(\Bbbk[G], V) \subset \operatorname{Hom}(\Bbbk[G], V)$ с индуцированным G-модулем $\operatorname{ind} V = \Bbbk[G] \otimes_{\Bbbk[H]} V$.

Упражнение 10.18. Докажите последнее утверждение.

Таким образом, индуцированное и коиндуцированное представления конечной группы канонически изоморфны друг другу посредством преобразования Фурье.

[1]См. формулу (10-24) на стр. 153.

Задачи для самостоятельного решения к §10

Задача 10.1. Пусть V — двумерное неприводимое представление группы S_3.

а) Покажите, что $S^{n+6}(V) = S^n(V) \oplus R$, где $R \simeq \Bbbk[S_3]$ — левое регулярное представление.

б) Разложите $S^n(V)$ в сумму неприводимых представлений.

в) Опишите подалгебру S_3-инвариантов в алгебре SV.

г) (взаимность Шура) Покажите, что $S^k S^m V \simeq S^m S^k V$ как S_3-модули при всех k, m.

д) Вычислите характеры представлений $V^{\otimes n}$ и разложите их на неприводимые.

Задача 10.2. Выясните как раскладываются в сумму неприводимых представлений группы S_3 ограничения неприводимых представлений группы S_4 на стабилизатор элемента «4».

Задача 10.3. Существует ли инъективный гомоморфизм групп $S_4 \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$?

Задача 10.4. Разложите на неприводимые представление симметрической группы S_4, индуцированное

а) одномерным представлением 4-цикла умножением на $i \in \mathbb{C}$

б) одномерным представлением 3-цикла умножением на $e^{2\pi i/3} \in \mathbb{C}$.

Задача 10.5. Опишите все неприводимые представления знакопеременной группы A_4, вычислите их характеры и выясните, как неприводимые представления группы S_4 раскладываются на неприводимые при ограничении на $A_4 \triangleleft S_4$, и как раскладываются на неприводимые представления группы S_4, индуцированные неприводимыми представлениями подгруппы A_4.

Задача 10.6. Найдите размерности, вычислите характеры и разложите на приводимые следующие представления симметрической группы S_5: а) тривиальное $\mathbb{1}$ б) одномерное знаковое sgn в) симплициальное V г) $V' = V \otimes \mathrm{sgn}$ д) $\Lambda^2 V$ е) $S^2 V$ ж*) представление W в функциях на $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_5)$ с нулевой суммой значений, заданное посредством изоморфизма $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5) \xrightarrow{\sim} S_5$ из зад. 20.4 на стр. 384 части I з*) $W' = W \otimes \mathrm{sgn}$ и) $S^2 W$ к) $\Lambda^2 W$ л) $V \otimes W$.

Задача 10.7. Разложите на неприводимые представление симметрической группы S_5, индуцированное одномерным представлением цикла длины 5 умножением на $e^{2\pi i/5}$.

Задача 10.8. Решите аналог зад. 10.5 для групп A_5 и S_5.

Задача 10.9. Разложите в сумму неприводимых представления несобственной группы каждого из пяти платоновых тел в пространствах комплекснозначных функций на множествах вершин, рёбер и граней этого тела. Из каких функций состоят изотипные компоненты этих разложений?

Задача 10.10. Линейный оператор s из пространства комплекснозначных функций на рёбрах а) куба б) додекаэдра в пространство комплекснозначных функций на его гранях сопоставляет функции f функцию sf, значение которой на грани равно сумме значений f на ограничивающих эту грань рёбрах. Найдите размерности ядра и образа оператора s и явно укажите в них какие-нибудь базисы.

Задача 10.11. На гранях куба написали числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, как на игральной кости. За один ход каждое из них заменяют на среднее арифметическое чисел, стоящих на четырёх соседних гранях. Вычислите с точностью до второго знака после запятой, что будет написано на гранях после 2023 ходов. Зависит ли ответ от первоначальной расстановки чисел на гранях?

Задача 10.12. Составьте таблицы неприводимых характеров группы а) D_n б) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ в) верхних унитреугольных матриц[1] $H(\mathbb{F}_3) \subset \mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_3)$ г) кватернионных единиц $Q_8 = \{\pm\mathbf{1}, \pm\boldsymbol{i}, \pm\boldsymbol{j}, \pm\boldsymbol{k}\}$.

Задача 10.13 (аффинная группа прямой). Обозначим через $A_p = \mathrm{Aff}(\mathbb{F}_p)$ группу аффинных преобразований $x \mapsto ax + b$ прямой $\mathbb{A}^1(\mathbb{F}_p)$.

а) Покажите, что представление группы A_p в пространстве функций $\mathbb{A}^1(\mathbb{F}_p) \to \mathbb{C}$ с нулевой суммой значений неприводимо и индуцировано одномерным представлением абелевой подгруппы сдвигов $\mathbb{F}_p \lhd A_p$ с характером $\mathbb{F}_p \mapsto \mathbb{C}$, $[z]_p \mapsto e^{2\pi i z/p} \in \mathrm{U}(1)$.

б) Вычислите характер представления из предыдущего пункта.

в) Покажите, что все остальные неприводимые представления группы A_p одномерны.

Задача 10.14 (группа Гейзенберга над $\mathbb{F}_p$, где $p > 2$). Свяжем с n-мерным векторным пространством L над полем $\mathbb{F}_p$ с $p > 2$ *группу Гейзенберга* H_p^n троек $(x, u, u^*) \in \mathbb{F}_p \times L \times L^*$ с операцией

$$(x_1, u_1, u_1^*) \circ (x_2, u_2, u_2^*) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + x_2 + (u_2^*(u_1) - u_1^*(u_2))/2,\ u_1 + u_2,\ u_1^* + u_2^*)\,,$$

и обозначим через $H' \simeq \mathbb{F}_p \times L \subset H_p^n$ абелеву подгруппу троек вида $(x, u, 0)$. Покажите, что

а) H_p^n является группой и перечислите её классы сопряжённости

б) H_p^1 изоморфна группе верхних унитреугольных 3×3 матриц[2] над $\mathbb{F}_p$

в) для каждого $a \in \mathbb{F}_p^\times$ комплексное представление W_a группы H_p^n, индуцированное одномерным представлением подгруппы H' с характером $\psi_a(x, u, 0) = e^{2\pi i a x/p}$, неприводимо

г) все представления W_a различны, а все остальные неприводимые представления группы H_p^n одномерны.

Задача 10.15. Опишите неприводимые представления 2-группы Гейзенберга H_2^n из зад. 20.3 на стр. 384.

Задача 10.16. Постройте изоморфизм $R(G_1 \times G_2) \simeq RG_1 \otimes_{\mathbb{Z}} RG_2$, где RG — кольцо комплексных представлений[3] конечной группы G.

Задача 10.17. Изоморфны ли кольца комплексных представлений группы кватернионных единиц Q_8 и группы квадрата D_4?

Задача 10.18. Пусть значение характера комплексного неприводимого представления V конечной группы на её классе сопряжённости K отлично от нуля, и нод$(\dim V, |K|) = 1$. Покажите, что все элементы из K действуют на V гомотетиями.

Задача 10.19. Пусть $\varrho : G \hookrightarrow \mathrm{GL}(V)$ — инъективное линейное представление конечной группы G в пространстве V размерности $\dim V \geqslant 2$ над полем $\mathbb{C}$. Покажите, что:

а) $\chi_\varrho : G \to \mathbb{C}$ принимает значение $\dim V$ не более, чем на одном классе сопряжённости

б) все неприводимые G-модули встречаются в разложениях представлений $V^{\otimes n}$.

Задача 10.20. Пусть конечная группа G имеет подгруппу H индекса 2. Обозначим через sgn одномерное знаковое представление группы G, являющееся композицией эпиморфизма $G \twoheadrightarrow G/H$ и нетривиального одномерного представления группы $G/H \simeq \{\pm 1\}$. Покажите, что

а) для каждого представления $\varrho : H \to \mathrm{GL}(V)$ *сопряжённое представление* $\varrho' = \varrho \circ \mathrm{Ad}_g$, где $\mathrm{Ad}_g : H \xrightarrow{\sim} H$, $h \mapsto ghg^{-1}$, — автоморфизм сопряжения элементом $g \in G \smallsetminus H$, с точностью до изоморфизма не зависит от выбора $g \in G \smallsetminus H$

[1] Она называется *группой Гейзенберга*, ср. с зад. 10.14 ниже.
[2] Ср. с зад. 10.12 (в) на стр. 162.
[3] См. n° 10.2.2 на стр. 156.

б) для каждого неприводимого представления W группы G имеется следующая альтернатива: либо $W \simeq W \otimes \mathrm{sgn}$, а его ограничение $\mathrm{res}_H^G W \simeq V \oplus V'$ является суммой двух сопряжённых друг другу неприводимых представлений V, V' подгруппы H и $\mathrm{ind}_H^G V \simeq \mathrm{ind}_H^G V' \simeq W$, либо $W \not\simeq W \otimes \mathrm{sgn}$ и его ограничение $V = \mathrm{res}_H^G W$ неприводимо и изоморфно своему сопряжённому, а $\mathrm{ind}_H^G V \simeq W \oplus (W \otimes \mathrm{sgn})$

в) каждое неприводимое представление подгруппы H является либо ограничением, либо одним из двух сопряжённых друг другу неприводимых прямых слагаемых в ограничении некоторого неприводимого представления группы G на H, а каждое неприводимое представление группы G либо индуцировано, либо является одним из двух отличающихся друг от друга тензорным умножением на знаковое представление неприводимых прямых слагаемых представления, индуцированного неприводимым представлением подгруппы H

г) число тех классов сопряжённости группы H, которые остаются таковыми и в группе G, равно числу классов сопряжённости группы G, не содержащихся в H.

§11. Представления симметрических групп

11.1. Действие S_n на заполненных диаграммах Юнга. Будем называть диаграмму Юнга λ, в каждой клетке которой стоит какая-нибудь буква[1] алфавита $\{1, \dots, m\}$ *заполнением* формы λ. Заполнение T называется *стандартным*, если $m = |\lambda|$, т. е. число букв совпадает с числом клеток диаграммы, и каждая буква используется ровно один раз. Заполнение T называется *таблицей*, если стоящие в клетках диаграммы буквы нестрого возрастают слева направо в каждой строке и строго возрастают сверху вниз в каждом столбце. Число всех таблиц формы λ в алфавите $\{1, \dots, m\}$ обозначается через $d_\lambda(m)$, а число всех стандартных таблиц формы λ — через d_λ. Числа $d_\lambda(m) \neq 0$ только для диаграмм из $\leqslant m$ строк. Как мы видели в прим. 8.1 на стр. 120

$$\sum_\lambda d_\lambda d_\lambda(m) = m^n \quad \text{и} \quad \sum_\lambda d_\lambda^2 = n!\,, \tag{11-1}$$

где суммирование в обоих случаях идёт по всем диаграммам Юнга веса $|\lambda| \overset{\text{def}}{=} \sum \lambda_i = n$. С каждым стандартным заполнением T формы $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ и веса n связаны *строчная подгруппа* $R_T \subset S_n$, состоящая из всех перестановок, переводящих элементы каждой строки заполнения T в элементы из той же самой строки, и *столбцовая подгруппа* $C_T \subset S_n$, состоящая из всех перестановок, переводящих элементы каждого столбца заполнения T в элементы из того же самого столбца. Таким образом, $R_T \simeq S_{\lambda_1} \times \ldots \times S_{\lambda_k}$ и $C_T \simeq S_{\lambda_1^t} \times \ldots \times S_{\lambda_m^t}$, где $\lambda^t = (\lambda_1^t, \dots, \lambda_m^t)$ здесь и далее означает транспонированную к λ диаграмму.

Упражнение 11.1. Убедитесь, что S_n транзитивно действует на стандартных заполнениях фиксированной формы λ и что $R_{gT} = gR_Tg^{-1}$ и $C_{gT} = gC_Tg^{-1}$ для всех $g \in S_n$.

Мы пишем $\lambda \trianglerighteq \mu$ и говорим, что диаграмма λ *доминирует* диаграмму μ, если[2]

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_k \geqslant \mu_1 + \ldots + \mu_k \text{ при всех } k \in \mathbb{N}\,.$$

Мы пишем $\lambda > \mu$, если $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ лексикографически больше, чем $\mu = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$. Отметим, что диаграмма μ не может доминировать никакую диаграмму $\lambda > \mu$, и что в отличие от доминирования лексикографический порядок является линейным.

Лемма 11.1 (ключевая комбинаторная лемма)
Пусть стандартное заполнение T формы λ и стандартное заполнение U формы μ имеют одинаковый вес $|\lambda| = |\mu|$, и диаграмма μ не является строго доминирующей диаграмму λ. Тогда имеет место ровно одна из двух взаимоисключающих возможностей:

- либо найдутся два числа, стоящие в одной строке заполнения T и в одном столбце заполнения U
- либо $\lambda = \mu$ и $pT = qU$ для некоторых $p \in R_T$ и $q \in C_U$.

Доказательство. Пусть все элементы каждой из строк заполнения T находятся в разных столбцах заполнения U. Из того, что все элементы первой строки T лежат в разных столбцах U, вытекает неравенство $\lambda_1 \leqslant \mu_1$ и существование перестановки $q_1 \in C_U$, переводящей все элементы из первой строки заполнения T в первую строку заполнения q_1U. Из того, что все элементы

[1] При этом могут использоваться не все буквы, а используемые буквы могут повторяться.

[2] См. обсуждение перед упр. 8.3 на стр. 123 и само это упражнение.

второй строки T тоже лежат в разных столбцах U, вытекает существование такой не затрагивающей элементов из первой строки заполнения T перестановки $q_2 \in C_{q_1 U} = C_U$, что в заполнении $q_2 q_1 U$ каждый элемент второй строки заполнения T стоит либо во второй строке, либо в первой[1], что влечёт неравенство $\lambda_1 + \lambda_2 \leqslant \mu_1 + \mu_2$. Продолжая в том же духе, мы получим последовательность перестановок $q_1, \dots, q_k \in C_U$, где k — количество строк в диаграмме μ и каждая перестановка $q_i \in C_{q_{i-1} \dots q_1 U} = C_U$ оставляет на месте все элементы из первых $i-1$ строк заполнения T, а также все те элементы из i-той строки T, которые в заполнении $q_{i-1} \dots q_1 U$ лежат в столбцах меньшей, чем i высоты, а все остальные элементы из i-той строки T переводит в i-тую строку заполнения $q_i q_{i-1} \dots q_1 U$. В частности, при каждом i выполняется неравенство $\lambda_1 + \ldots + \lambda_i \leqslant \mu_1 + \ldots + \mu_i$, что по условию леммы возможно только при $\lambda = \mu$. Но тогда каждая перестановка q_i переводит элементы i-той строки заполнения T в точности в i-тую строку заполнения $q_i \dots q_1 U$. Поэтому $q_k \dots q_1 U = pT$ для некоторого $p \in R_T$. □

Следствие 11.1
Перестановка $g \in S_n$ тогда и только тогда имеет вид $g = pq$ для некоторых $p \in R_T$, $q \in C_T$, когда никакие два элемента из одной строки T не лежат в одном столбце gT, и в этом случае представление перестановки $g \in S_n$ в виде $g = pq$ с $p \in R_T$ и $q \in C_T$ единственно.

Доказательство. Для любых $p \in R_T$ и $q \in C_T$ элементы из одной строки заполнения T лежат в разных столбцах заполнения qT, и p переставляет эти элементы между собою, оставляя их лежать в разных столбцах заполнения pqT. Наоборот, если никакие два элемента из одной строки заполнения T не лежат в одном столбце заполнения $U = gT$, то по лем. 11.1 найдутся такие $p \in R_T$ и $q' \in C_U$, что $pT = q'U = q'gT$. Поэтому $p = q'g$. Записывая перестановку $q' \in C_{gT} = gC_T g^{-1}$ в виде gqg^{-1}, где $q \in C_T$, получаем $g = pq^{-1}$, как и требовалось. Единственность разложения $g = pq$ вытекает из того, что $R_T \cap C_T = \{e\}$. □

Упражнение 11.2. Покажите, что перестановка $g \in S_n$ имеет вид $g = q'p'$ для некоторых $q' \in C_T$, $p' \in R_T$ если и только если никакие два элемента из одной строки gT не лежат в одном столбце T, и в этом случае представление $g = q'p'$ тоже единственно.

11.2. Симметризаторы Юнга. Лежащие в групповой алгебре $\mathbb{C}[S_n]$ элементы

$$r_T = \sum\nolimits_{\sigma \in R_T} \sigma\,, \quad c_T = \sum\nolimits_{\sigma \in C_T} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\,, \tag{11-2}$$

$$s_T = r_T c_T = \sum\nolimits_{p \in R_T} \sum\nolimits_{q \in C_T} \operatorname{sgn}(q) pq \tag{11-3}$$

называются, соответственно, *строчным*, *столбцовым* и *полным симметризаторами Юнга*. Они обладают следующими очевидными свойствами:

$$\forall g \in S_n \quad r_{gT} = g r_T g^{-1}\,, \quad c_{gT} = g c_T g^{-1} \quad \text{и} \quad s_{gT} = g s_T g^{-1} \tag{11-4}$$

$$\forall p \in R_T \; pr_T = r_T p = r_T \quad \text{и} \quad \forall q \in C_T \; \operatorname{sgn}(q) q c_T = \operatorname{sgn}(q) c_T q = c_T \tag{11-5}$$

$$\forall p \in R_T \quad \text{и} \quad \forall q \in C_T \quad \operatorname{sgn}(q) p s_T q = s_T\,. \tag{11-6}$$

Замечательно, что полный симметризатор $s_T \in \mathbb{C}[S_n]$ однозначно с точностью до пропорциональности *определяется* свойством (11-6).

[1]Последнее происходит, когда этот элемент изначально находится в столбце высоты 1.

Лемма 11.2

Векторное подпространство $E_T = \{f \in \mathbb{C}[S_n] \mid \forall p \in R_T \ \forall q \in C_T \ \ \mathrm{sgn}(q)\,pfq = f\}$ одномерно и линейно порождается симметризатором s_T .

Доказательство. Пусть $f = \sum_{g\in S_n} x_g g \in E_T$. Покажем, что $f = x_e s_T$. Условие $\mathrm{sgn}(q)\,pfq = f$ означает, что $x_{pgq} = \mathrm{sgn}(q)x_g$ для всех $g \in S_n$, $p \in R_T$ и $q \in C_T$. Полагая $g = e$, заключаем, что $x_{pq} = \mathrm{sgn}(q)x_e$ и $f = x_e s_T + \sum_{g\notin R_T C_T} x_g g$. Остаётся убедиться, что в последней сумме все $x_g = 0$. Если $g \notin R_T C_T$, то по сл. 11.1 найдутся два элемента, лежащие в одной строке заполнения T и в одном столбце заполнения gT. Транспозиция $\tau \in S_n$ этих двух элементов лежит и в R_T, и в $C_{gT} = gC_T g^{-1}$. Из второго вытекает, что $g^{-1}\tau g \in C_T$. Полагая $p = \tau$, $q = g^{-1}\tau g$ в равенстве $x_{pgq} = \mathrm{sgn}(q)x_g$, получаем $x_g = -x_g$, откуда $x_g = 0$. □

Лемма 11.3

Имеют место равенства $s_T\mathbb{C}[S_n]\,s_T = \mathbb{C}\,s_T$ и $s_T^2 = n_\lambda s_T$, где число $n_\lambda = n!/\dim\left(\mathbb{C}[S_n]\,s_T\right)$ рационально, положительно и зависит только от формы $\lambda = \lambda(T)$ заполнения T.

Доказательство. Из равенств (11-5) – (11-6) вытекает, что при любом $f \in \mathbb{C}[S_n]$ элемент $s_T f s_T$ обладает свойством (11-6) и, тем самым, лежит в одномерном пространстве $E_T = \mathbb{C}\,s_T$. В частности, $s_T^2 = n_T s_T$ для некоторого $n_T \in \mathbb{C}$. Чтобы найти n_T, вычислим двумя способами след оператора $\mathbb{C}[S_n] \to \mathbb{C}[S_n]$ правого умножения на элемент $s_T : f \mapsto fs_T$. С одной стороны, из формулы (11-3) вытекает[1], что для любого $g \in S_n$ коэффициент при g у произведения gs_T равен единице, откуда $\mathrm{tr}(s_T) = |S_n| = n!$. С другой стороны, левый идеал $\mathbb{C}[S_n]\,s_T$ является S_n-подмодулем левого регулярного представления S_n. Так как последнее вполне приводимо, существует такой S_n-подмодуль $W \subset \mathbb{C}[S_n]$, что $\mathbb{C}[S_n] = W \oplus \mathbb{C}[S_n]\,s_T$. Правое умножение на s_T переводит $W \subset \mathbb{C}[S_n]$ внутрь $\mathbb{C}[S_n]\,s_T$, а на идеале $\mathbb{C}[S_n]\,s_T$ действует как умножение на n_T. Поэтому $\mathrm{tr}(s_T) = n_T \dim(\mathbb{C}[S_n]\,s_T)$. Следовательно, число $n_T = n!/\dim(\mathbb{C}[S_n]\,s_T)$ рационально и положительно. Наконец, из равенства $s_{gT} = gs_T g^{-1}$ вытекает, что $s_{gT}^2 = gs_T^2 g^{-1} = n_T g s_T g^{-1} = n_T s_{gT}$. Поэтому число $n_T = n_{\lambda(T)}$ зависит только от формы $\lambda = \lambda(T)$ заполнения T. □

Лемма 11.4

Если форма стандартного заполнения T лексикографически больше, чем форма стандартного заполнения U, то $r_T\mathbb{C}[S_n]\,c_U = c_U\mathbb{C}[S_n]\,r_T = s_T\mathbb{C}[S_n]\,s_U = 0$.

Доказательство. Достаточно убедиться, что $r_T g c_U = c_U g r_T = 0$ для всех $g \in S_n$. Пусть для начала $g = e$. По лем. 11.1 какие-то два элемента из одной строки заполнения T лежат в одном столбце заполнения U. Транспозиция $\tau \in S_n$ этих двух элементов лежит как в R_T, так и в C_U. Поэтому $r_T c_U = (r_T\tau)c_U = r_T(\tau c_U) = -r_T c_U$ и $c_U r_T = -(c_U\tau)r_T = -c_U(\tau r_T) = -c_U r_T$, откуда $r_T c_U = c_U r_T = 0$. Теперь и для любого $g \in S_n$ получаем $r_T g c_U = r_T g c_U g^{-1} g = \left(r_T c_{gU}\right) g = 0$ и $c_U g r_T = c_U g r_T g^{-1} g = \left(c_U r_{gT}\right) g = 0$. □

Теорема 11.1

Представление S_n левыми умножениями в идеале $V_T = \mathbb{C}[S_n]\,s_T$ неприводимо. Два таких представления V_T и V_U изоморфны тогда и только тогда, когда заполнения T и U имеют одинаковую

[1]Так как $R_T \cap C_T = \{e\}$, все слагаемые в сумме (11-3) являются *различными* элементами группы S_n, взятыми со знаком ± 1, причём элемент $e = ee$ берётся с плюсом.

форму $\lambda = \lambda(T) = \lambda(U)$. Если для каждой n-клеточной диаграммы Юнга λ произвольным образом зафиксировать некоторое стандартное заполнение T_λ, то неприводимые представления $V_\lambda = V_{T_\lambda}$ составят полный список попарно неизоморфных неприводимых представлений S_n.

Доказательство. Пусть $W \subset V_T$ является S_n-инвариантным подмодулем. Перестановочный с левым умножением на S_n проектор $\pi_W : \mathbb{C}[S_n] \twoheadrightarrow W$ представляет собою оператор правого умножения на элемент $w = \pi_W(1) \in W$, поскольку $\pi_W(x) = x\pi_W(1) = xw$ для всех $x \in \mathbb{C}[S_n]$. Так как $s_T W \subset s_T V_T = s_T \mathbb{C}[S_n]\, s_T = \mathbb{C}\, s_T$, для левого действия элемента s_T на подмодуле W имеются ровно две возможности: либо $s_T W = 0$, либо $s_T W = \mathbb{C}\, s_T$. В первом случае $WW \subset V_T W = \mathbb{C}[S_n]\, s_T W = 0$, откуда $w^2 = 0$, а значит, и $W = 0$, поскольку правое умножение на w тождественно действует на $W = \mathbb{C}[S_n]\, w$. Во втором случае $s_T \in s_T W \subset W$, откуда $V_T = \mathbb{C}[S_n]\, s_T \subset W$, т. е. $W = V_T$. Таким образом, модуль V_T неприводим. Если заполнения T и U имеют разные формы — скажем, форма заполнения T лексикографически больше формы заполнения U, то по лем. 11.4 левое умножение на s_T аннулирует модуль V_U, тогда как на модуле V_T оно, согласно лем. 11.3, действует нетривиально: элемент $s_T \in V_T$ является собственным вектором левого умножения на s_T с ненулевым собственным значением $n_{\lambda(T)}$. Поэтому представления V_T и V_U не изоморфны. Отсюда следует последнее утверждение теоремы: число попарно неизоморфных неприводимых представлений V_{T_λ} равно числу классов сопряжённости в S_n. Если заполнение U имеет ту же форму λ, что и T_λ, то неприводимое представление V_U, будучи неизоморфным ни одному из представлений V_{T_μ} с $\mu \neq \lambda$, изоморфно именно представлению V_{T_λ}. □

11.2.1. Симметризаторы $s'_T = c_T r_T$. Множества $R_T C_T$ и $C_T R_T$, вообще говоря, различны. Например, для стандартного заполнения $T = \begin{smallmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} \\ \boxed{3} & \end{smallmatrix}$ цикл $|132\rangle = |12\rangle \circ |13\rangle$ входит в $R_T C_T$ и не входит в $C_T R_T$, а цикл $|123\rangle = |13\rangle \circ |12\rangle$, наоборот, входит в $C_T R_T$ и не входит в $R_T C_T$. Поэтому перестановка сомножителей в симметризаторе $s_T = r_T c_T$ даёт *другой* симметризатор

$$s'_T = c_T r_T = \sum\nolimits_{p \in R_T} \sum\nolimits_{q \in C_T} \operatorname{sgn}(q)\, qp\,, \tag{11-7}$$

получающийся применением к $s_T \in \mathbb{C}[S_n]$ *антиподального антиавтоморфизма*

$$\alpha : \mathbb{C}[S_n] \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[S_n]\,, \quad \sum\nolimits_{g \in G} x_g g \mapsto \sum\nolimits_{g \in G} x_g g^{-1}\,, \tag{11-8}$$

который оборачивает порядок сомножителей в произведениях, но переводит в себя строчный и столбцовый симметризаторы r_T и c_T.

Упражнение 11.3. Сформулируйте и докажите для s'_T аналог форм. (11-6) на стр. 165, а также аналоги лем. 11.2 – лем. 11.4 и теор. 11.1 на стр. 166.

Предложение 11.1

Представления S_n левыми умножениями в идеалах $V_T = \mathbb{C}[S_n]\, s_T$ и $V'_T = \mathbb{C}[S_n]\, s'_T$ изоморфны.

Доказательство. Правые умножения на c_T и r_T задают гомоморфизмы левых S_n-модулей

$$V'_T = \mathbb{C}[S_n]\, c_T r_T \underset{x r_T \leftarrow x}{\overset{x \mapsto x c_T}{\rightleftarrows}} \mathbb{C}[S_n]\, r_T c_T = V_T$$

Композиция $x \mapsto x r_T c_T = x s_T$ действует на $V_T = \mathbb{C}[S_n]\, s_T$ умножением на ненулевую константу $n_{\lambda(T)}$. Таким образом, операторы правого умножения на $n_\lambda^{-1/2} c_T$ и $n_\lambda^{-1/2} r_T$ являются взаимно обратными изоморфизмами представлений. □

Следствие 11.2
Неприводимые представления V_λ и V_{λ^t}, отвечающие транспонированным диаграммам λ и λ^t, получаются друг из друга тензорным умножением на одномерное знаковое представление.

Доказательство. Фиксируем какое-либо стандартное заполнение T формы λ и транспонированное заполнение T^t транспонированной диаграммы λ^t. Тогда $R_{T^t} = C_T$, $C_{T^t} = R_T$ и

$$s_{T^t} = \sum\nolimits_{p\in R_T} \sum\nolimits_{q\in C_T} \operatorname{sgn}(p)qp = \sum\nolimits_{p\in R_T} \sum\nolimits_{q\in C_T} \operatorname{sgn}(q)\operatorname{sgn}(pq)qp = \sigma\left(s_T'\right) ,$$

где $\sigma : \mathbb{C}[S_n] \to \mathbb{C}[S_n]$ обозначает *знаковый автоморфизм* групповой алгебры, действующий на базис из групповых элементов по правилу $g \mapsto \operatorname{sgn}(g)g$. Тензорное произведение представления V_λ на одномерное знаковое представление изоморфно представлению в левом идеале $V_T' = \mathbb{C}[S_n]\, s_T'$ по правилу $g : xs_T' \mapsto \operatorname{sgn}(g)gxs_T'$. Знаковый автоморфизм σ изоморфно отображает пространство этого представления на $V_{\lambda^t} = \mathbb{C}[S_n]\, s_{T^t}$, превращая действие в левое умножение на $g : \sigma(x)s_{T^t} \mapsto g\sigma(x)s_{T^t}$. □

11.3. Модуль таблоидов. Орбита стандартного заполнения T под действием строчной подгруппы R_T называется *таблоидом* формы λ и обозначается через $\{T\}$. Действие симметрической группы на заполнениях $g : T \mapsto gT$ корректно спускается до действия $g : \{T\} \mapsto \{gT\}$ на таблоидах, так как $gR_TT = gR_Tg^{-1}gT = R_{gT}gT$. Возникающее таким образом перестановочное представление группы S_n на пространстве формальных комплексных линейных комбинаций таблоидов формы λ называется *модулем таблоидов* и обозначается M_λ. Так как таблоиды формы λ биективно соответствуют левым смежным классам $gR_T \in S_n/R_T$ и действие S_n на таблоидах совпадает с действием на смежные классы, модуль таблоидов $M_\lambda = \operatorname{ind}_{R_T}^{S_n} \mathbb{1}$ индуцирован тривиальным одномерным представлением подгруппы $R_T \subset S_n$.

Упражнение 11.4. Покажите, что представление S_n в пространстве M_λ изоморфно представлению S_n левыми умножениями в идеале $\mathbb{C}[S_n]\, r_T$.

Характер модуля M_λ обозначается через ψ_λ.

Предложение 11.2
Значение $\psi_\lambda(C_\mu)$ на классе сопряжённости $C_\mu \in \operatorname{Cl}(S_n)$, состоящем из всех перестановок циклового типа μ, равно коэффициенту при m_λ в разложении симметрического многочлена Ньютона[1] $p_\mu(x_1, \dots , x_n)$ по стандартному мономиальному базису[2] $m_\lambda(x_1, \dots , x_n)$.

Доказательство. Как обычно, обозначим через m_i количество строк длины i в диаграмме μ. Тогда $p_\mu = p_{\mu_1} \cdots p_{\mu_n} = p_1(x)^{m_1} \dots p_n(x)^{m_n}$, где

$$p_i(x)^{m_i} = (x_1^i + \dots + x_n^i)^{m_i} = \sum \frac{m_i!}{\varrho_{i1}! \dots \varrho_{in}!} x_1^{i\varrho_{i1}} \dots x_n^{i\varrho_{in}}$$

и суммирование идёт по всевозможным наборам неотрицательных целых чисел $\varrho_{i1}, \dots , \varrho_{in}$ с суммой $\sum_j \varrho_{ij} = m_i$. Таким образом, коэффициент при $x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$ у многочлена $p_\mu = p_1^{m_1} \dots p_n^{m_n}$ равен

$$\sum_{\varrho_{ij}} m_1! \dots m_n! / \prod\nolimits_{ij} \varrho_{ij}! , \tag{11-9}$$

[1] См. формулу (7-11) на стр. 105.
[2] См. формулу (8-15) на стр. 140.

где суммирование идёт по всем таким наборам целых чисел $\varrho_{ij} \geqslant 0$, где $1 \leqslant i, j \leqslant n$, что

$$\sum\nolimits_j \varrho_{ij} = m_i \quad \text{и} \quad \sum\nolimits_i i\varrho_{ij} = \lambda_j \,. \tag{11-10}$$

С другой стороны, согласно установленной в предл. 10.5 на стр. 159 формуле (10-31) для характера индуцированного представления,

$$\psi_\lambda(C_\mu) = [S_n : R_T]\,|C_\mu \cap R_T| / |C_\mu| \,, \tag{11-11}$$

где $[S_n : R_T] = n!/\prod_j \lambda_j!$, $|C_\mu| = n!/\prod_i i^{m_i} m_i!$, а пересечение $C_\mu \cap R_T$ распадается в объединение непересекающихся классов R_T-сопряжёности D_ϱ, каждый из которых состоит из перестановок циклового типа μ, в которых ϱ_{ij} из m_i циклов длины i заполнены элементами j-той строки из T. Эти классы также нумеруются удовлетворяющими условиям (11-10) наборами неотрицательных целых чисел $\varrho = \{\varrho_{ij}\}$ с $1 \leqslant i, j \leqslant n$. При сопряжении подгруппой R_T стабилизатор перестановки $g \in D_\varrho$ является прямым произведением $\prod \varrho_{ij}!$ перестановок циклов одинаковой длины между собою как единого целого и $\prod i^{m_i}$ циклических сдвигов внутри этих циклов. Тем самым, $|C_\mu \cap R_T| = \sum_\varrho |D_\varrho| = \sum_\varrho \prod_j \lambda_j!/\prod_{ij} i^{m_i} \varrho_{ij}!$. Подставляя всё это в (11-11) и сокращая общие множители числителя и знаменателя, получаем (11-9). □

11.4. Модуль Шпехта. Для каждого заполнения T формы λ рассмотрим в модуле таблоидов M_λ вектор

$$v_T = c_T\{T\} = \sum\nolimits_{q \in C_T} \operatorname{sgn}(q)\{qT\} \,. \tag{11-12}$$

Поскольку ни при каком $q \in C_T$ никакие два элемента из одного столбца T не могут оказаться в одной строке qT, равенство $q_1T = pq_2T$ невозможно ни при каких $q_1, q_2 \in C_T$ и $p \in R_{q_2T}$, т. е. все слагаемые в правой сумме (11-12) суть *различные* базисные векторы пространства таблоидов M_λ, взятые с коэффициентами ± 1. В частности, каждый из векторов v_T отличен от нуля. Линейная оболочка векторов (11-12), полученных из всех возможных заполнений T формы λ, является S_n-подмодулем в M_λ, так как $gv_T = gc_T\{T\} = gc_Tg^{-1}\{gT\} = c_{gT}\{gT\} = v_{gT}$ для всех $g \in S_n$. Этот подмодуль обозначается S_λ и называется *модулем Шпехта*.

Лемма 11.5

Если форма λ заполнения T не является строго доминирующей диаграмму μ, то

$$c_T M_\mu = \begin{cases} 0 & \text{при } \mu \neq \lambda \\ \mathbb{C} v_T & \text{при } \mu = \lambda \,. \end{cases}$$

Доказательство. Если в пересечении $R_U \cap C_T$ имеется хоть одна транспозиция τ, то

$$c_T\{U\} = c_T\{\tau U\} = c_T\tau\{U\} = -c_T\{U\} \,, \tag{11-13}$$

откуда $c_T\{U\} = 0$. Если в условиях нашей леммы такой транспозиции нет, то по лем. 11.1 на стр. 164 заполнения U и T имеют одинаковую форму λ и $pU = qT$ для некоторых $p \in R_U$ и $q \in C_T$. В этом случае $c_T\{U\} = c_T\{pU\} = c_T\{qT\} = c_Tq\{T\} = \operatorname{sgn}(q)c_T\{T\} = \pm v_T$. □

Теорема 11.2

Модуль Шпехта S_λ изоморфен неприводимому представлению V_λ левыми умножениями в идеале $\mathbb{C}[S_n]\, s_T$, построенному по произвольному заполнению T формы λ.

Доказательство. Покажем сначала, что S_λ неприводим. Пусть имеется разложение $S_\lambda = V \oplus W$ в сумму S_n-подмодулей. Тогда оператор c_T, построенный по заполнению T формы λ, переводит каждое из слагаемых в себя. Так как $c_T S_\lambda \subset c_T M_\lambda = \mathbb{C} v_T$ по лем. 11.5, ненулевой вектор v_T лежит ровно в одном из слагаемых — скажем, в V. Но тогда V содержит и все остальные векторы $v_{gT} = g v_T$, а значит, совпадает с S_λ. При $\mu \neq \lambda$ неприводимые представления S_λ и S_μ не изоморфны: если λ лексикографически меньше μ, то по лем. 11.5 оператор c_T аннулирует подмодуль $S_\mu \subset M_\mu$, а на модуле S_λ действует нетривиально, ибо $c_T v_T = c_T c_T\{T\} = |C_T| c_T\{T\} = |C_T| v_T$. Из сказанного вытекает, что модуль S_λ изоморфен ровно одному из неприводимых представлений $V_\mu = \mathbb{C}[S_n]\, s_U$, где U — любое заполнение формы μ. Поскольку по лем. 11.4 левое умножение на c_T аннулирует все идеалы V_μ с лексикографически меньшими, чем λ диаграммами μ, мы заключаем, что $S_\lambda \simeq V_\lambda$. □

Следствие 11.3
В разложении представления M_λ в сумму неприводимых встречаются только модули S_μ с $\mu \rhd \lambda$, а также модуль S_λ, входящий в M_λ с кратностью 1.

Доказательство. Так как оператор c_T переводит M_λ в подмодуль Шпехта и нетривиально действует на последнем, в разложении модуля M_λ в прямую сумму простых есть ровно одно слагаемое, изоморфное S_λ. Если существует S_n-линейное вложение $S_\mu \hookrightarrow M_\lambda$, то оператор c_U, отвечающий произвольному заполнению U формы μ, нетривиально действует на M_λ. Но в силу лем. 11.5 $c_U M_\lambda = 0$, когда μ не доминирует λ. □

11.4.1. Табличный базис модуля Шпехта. Назовём *столбцовой развёрткой* заполнения T диаграммы λ слово, которое получится при прочтении заполнения T по столбцам, так что каждый столбец читается снизу вверх, а сами столбцы перебираются слева направо. Например, столбцовая развёртка стандартной таблицы

$$T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\ \hline 2&5 \\ \cline{1-2}\end{array}$$

это слово 21534. Скажем, что $T \succ U$, если наибольшее из чисел, стоящих в заполнениях T и U в разных клетках, встречается в столбцовой развёртке заполнения T раньше, чем в столбцовой развёртке заполнения U.

Упражнение 11.5. Проверьте, что это отношение задаёт линейный порядок на стандартных заполнениях формы λ.

Например, 120 стандартных заполнений формы $\begin{array}{|c|c|}\hline \; & \; \\ \hline \; & \; \\ \hline \; \\ \cline{1-1}\end{array}$ выстроятся по убыванию так:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 3&1\\ \hline 4&2\\ \hline 5\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 3&2\\ \hline 4&1\\ \hline 5\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 2&1\\ \hline 4&3\\ \hline 5\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\ \hline 4&3\\ \hline 5\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 2&3\\ \hline 4&1\\ \hline 5\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\ \hline 4&2\\ \hline 5\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 4&1\\ \hline 3&2\\ \hline 5\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \dots$$

$$\dots \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 4&5\\ \hline 2&3\\ \hline 1\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&5\\ \hline 2&4\\ \hline 3\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 2&5\\ \hline 1&4\\ \hline 3\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 2&5\\ \hline 3&4\\ \hline 1\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&5\\ \hline 3&4\\ \hline 2\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 3&5\\ \hline 1&4\\ \hline 2\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 3&5\\ \hline 2&4\\ \hline 1\\ \cline{1-1}\end{array}.$$

Обратите внимание, что этот порядок отличается от лексикографического порядка на столбцовых развёртках. Главная его особенность состоит в том, что для любой *стандартной таблицы*[1] T и любых $p \in R_T$, $q \in C_T$ выполнены строгие неравенства $pT \succ T \succ qT$. Действительно, самое большое число в любом цикле перестановки p сдвигается влево, а самое большое число

[1]См. n° 11.1 на стр. 164.

в любом цикле перестановки q сдвигается вверх. В частности, каждая стандартная таблица T является минимальным элементом своей R_T-орбиты $R_T T$. Из этого вытекает, что для любого заполнения $U \prec T$ таблоид $\{U\} \neq \{T\}$ в модуле M_λ.

Упражнение 11.6. Покажите, что $c_T\{U\} = 0$ для любых стандартных таблиц $U \succ T$.

Теорема 11.3
Векторы v_T, где T пробегает множество стандартных таблиц формы λ, образуют базис модуля Шпехта S_λ. В частности, $\dim S_\lambda = d_\lambda$.

Доказательство. Покажем, что d_λ векторов v_T, построенных по всем стандартным таблицам T, линейно независимы. Выражение вектора $v_T = \sum_{q \in C_T} \operatorname{sgn}(q)\{qT\}$ через базисные векторы $\{U\}$ пространства M_λ имеет вид $v_T = \{T\} + \sum_{U \prec T} \varepsilon_U\{U\}$, где $\varepsilon_U = -1, 0, 1$, а всякая линейная зависимость между ними может быть записана в виде[1] $v_T = \sum_{U \prec T} x_U v_U$. Раскладывая векторы v_T и v_U по базису из таблоидов, мы получаем равенство вида $\{T\} = \sum_{U \prec T} y_U\{U\}$, невозможное в силу того, что $\{T\} \neq \{U\}$ ни для какого $U \prec T$. Из линейной независимости векторов v_T вытекает неравенство $\dim S_\lambda \geqslant d_\lambda$. С другой стороны, второе равенство из форм. (11-1) на стр. 164 и соотношение на сумму квадратов размерностей неприводимых представлений из сл. 10.1 на стр. 148 влекут равенство $\sum d_\lambda^2 = n! = \sum \dim^2 S_\lambda$. Поэтому $\dim S_\lambda = d_\lambda$. □

11.5. Кольцо представлений симметрических групп. Обозначим через $\mathfrak{R}_n$ аддитивную группу абелеву кольца представлений[2] группы S_n, т. е. свободный $\mathbb{Z}$-модуль с базисом $[V_\lambda]$, где V_λ пробегает множество попарно неизоморфных представителей всех неприводимых представлений S_n. Иначе $\mathfrak{R}_n$ можно описать как целочисленную линейную оболочку неприводимых характеров группы S_n в пространстве всех функций $S_n \to \mathbb{C}$. Положим $\mathfrak{R}_0 \overset{\text{def}}{=} \mathbb{Z}$. На прямой сумме

$$\mathfrak{R} \overset{\text{def}}{=} \bigoplus\nolimits_{n \geqslant 0} \mathfrak{R}_n$$

имеется коммутативное *умножение Литтлвуда – Ричардсона*[3] со свойством $\mathfrak{R}_k \mathfrak{R}_m \subset \mathfrak{R}_{k+m}$, т. е. наделяющее $\mathfrak{R}$ структурой *градуированного* коммутативного кольца с единицей.

11.5.1. Умножение Литтлвуда – Ричардсона в кольце $\mathfrak{R}$. Каждая пара линейных представлений $\varphi : S_k \to \mathrm{GL}(U)$ и $\psi : S_m \to \mathrm{GL}(W)$ задаёт представление

$$\varphi \times \psi : S_k \times S_m \to \mathrm{GL}(U \otimes W), \quad (g, h) : u \otimes w \mapsto gu \otimes hw. \tag{11-14}$$

Вложим $S_k \times S_m$ в S_{k+m} в качестве подгруппы, сохраняющей разбиение

$$\{1, \dots, k+m\} = \{1, \dots, k\} \sqcup \{k+1, \dots, k+m\}, \tag{11-15}$$

образуем представление $\operatorname{ind}(\varphi \times \psi)$ группы S_{k+m}, индуцированное представлением (11-14), и положим $[\varphi]\,[\psi] \overset{\text{def}}{=} [\operatorname{ind}(\varphi \times \psi)]$. Если вместо разбиения (11-15) воспользоваться другим разбиением $\{1, \dots, k+m\} = I \sqcup J$ на непересекающихся подмножества из k и m элементов, получится другая подгруппа $S_k \times S_m \subset S_{k+m}$, сопряжённая к использованной выше, и представление $\operatorname{ind}(\varphi \times \psi)$, индуцированное с этой подгруппы, будет изоморфно предыдущему.

[1] Для этого надо оставить слева ненулевой член с максимальным индексом T, а все остальные члены перенести направо.

[2] См. n° 10.2.2 на стр. 156.

[3] Оно *отличается* от имеющегося на каждом кольце представлений $\mathfrak{R}_n$ в отдельности тензорного умножения $[U], [W] \mapsto [U \otimes W]$ из n° 10.2.2 на стр. 156.

Упражнение 11.7. Убедитесь в этом.

Таким образом, класс $[\varphi]\,[\psi]$ не зависит от выбора разбиения (11-15), используемого для его построения. В частности, умножение (11-14) коммутативно. Его ассоциативность вытекает из того, что для любых трёх представлений ξ, η и ζ групп S_k, S_ℓ и S_m, оба класса $([\xi]\,[\eta])[\zeta]$ и $[\xi]\,([\eta]\,[\zeta])$ совпадают с классом представления S_{m+n+k}, индуцированного с представления подгруппы $S_k \times S_\ell \times S_m \subset S_{m+n+k}$ в тензорном произведении пространств представлений ξ, η и ζ по правилу $(g_1, g_2, g_3) \mapsto \xi(g_1) \otimes \eta(g_2) \otimes \zeta(g_3)$.

Упражнение 11.8. Убедитесь в этом.

Дистрибутивность умножения по отношению к прямым суммам представлений следует из дистрибутивности тензорных произведений.

Лемма 11.6

Кольцо $\mathfrak{R}$ изоморфно кольцу многочленов с целыми коэффициентами от счётного числа переменных, отвечающих классам тривиальных одномерных представлений $[\mathbb{1}_k]$ групп S_k для всех $k \in \mathbb{N}$. При этом классы модулей таблоидов $[M_\lambda] = [\mathbb{1}_{\lambda_1}] \dots [\mathbb{1}_{\lambda_n}] = [\mathbb{1}_1]^{\ell_1} \dots [\mathbb{1}_n]^{\ell_n}$, где ℓ_i означает количество строк длины i в диаграмме λ, образуют базис кольца $\mathfrak{R}$ как модуля над $\mathbb{Z}$.

Доказательство. Из сл. 11.3 вытекает, что классы таблоидных представлений $[M_\lambda]$ выражаются через неприводимые классы $[S_\lambda]$ при помощи верхней треугольной матрицы с целыми коэффициентами и единицами по главной диагонали. Поэтому классы $[M_\lambda]$ образуют базис $\mathfrak{R}$ как модуля над $\mathbb{Z}$. Поскольку представление M_λ, отвечающее диаграмме $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, индуцировано с тривиального одномерного представления подгруппы $S_{\lambda_1} \times \dots \times S_{\lambda_n} \subset S_{|\lambda|}$, класс $[M_\lambda]$ является произведением классов тривиальных одномерных представлений $[\mathbb{1}_{\lambda_i}]$ групп S_{λ_i}. При этом $[\mathbb{1}_{\lambda_i}] = [M_{(\lambda_i)}]$ — это тоже модуль таблоидов, состоящих из одной строки длины λ_i. Поэтому совокупность мономов от классов тривиальных представлений в точности совпадает с совокупностью классов модулей таблойдов, а их формальное перемножение как мономов, совпадает с умножением в кольце $\mathfrak{R}$. □

11.5.2. Скалярное произведение в кольце $\mathfrak{R}$. Обозначим через $([U], [W])$ евклидово скалярное произведение на $\mathfrak{R}$, для которого базис из классов неприводимых представлений $[V_\lambda]$ является ортонормальным. Сумма $\mathfrak{R} = \bigoplus \mathfrak{R}_k$ является ортогональной относительно такого скалярного произведения, а для любых двух классов $[U] = \sum k_\lambda [V_\lambda]$ и $[W] = \sum m_\lambda [V_\lambda]$, лежащих в одной и той же компоненте $\mathfrak{R}_n$, выполняется равенство

$$([U], [W]) = \sum\nolimits_{|\lambda|=n} k_\lambda m_\lambda = \dim \operatorname{Hom}_{S_n}(U, W) = (\chi_U, \chi_W)_n\,, \tag{11-16}$$

где $(\chi_U, \chi_W)_n$ означает скалярное произведение характеров в алгебре функций[1] $\mathbb{C}^{S_n}$. Как обычно, для каждой диаграммы μ обозначим через m_i число её строк длины i и положим

$$z_\mu = \prod\nolimits_i m_i!\, i^{m_i}\,, \tag{11-17}$$

так что число элементов в классе сопряжённости $C_\mu \subset S_n$, состоящем из всех перестановок циклового типа μ, равно $|C_\mu| = n!/z_\mu$. В силу зам. 10.2. на стр. 155 скалярное произведение характеров в правой части (11-16) переписывается в виде

$$\frac{1}{n!} \sum\nolimits_{g \in S_n} \chi_U(g)\chi_W(g) = \frac{1}{n!} \sum\nolimits_\mu |C_\mu| \chi_U(C_\mu)\chi_W(C_\mu) = \sum\nolimits_\mu z_\mu^{-1} \chi_U(C_\mu)\chi_W(C_\mu)\,.$$

[1] См. зам. 10.2. на стр. 155.

Таким образом, скалярное произведение классов представлений $[U], [W] \in \mathfrak{R}_n$ равно

$$([U],[W]) = \sum\nolimits_{\mu} z_{\mu}^{-1} \chi_U(C_{\mu}) \chi_W(C_{\mu})\,. \tag{11-18}$$

11.5.3. Изоморфизм кольца $\mathfrak{R}$ с кольцом симметрических функций. В n° 8.6 на стр. 127 мы ввели на кольце Λ симметрических функций с целыми коэффициентами скалярное произведение $\langle\, *\, ,\, *\, \rangle$, для которого базис из полиномов Шура s_{λ} является ортонормальным, базис из полных симметрических функций h_{λ} является двойственным к мономиальному базису m_{λ}, а полиномы Ньютона p_{λ} образуют ортогональный базис векторного пространства $\mathbb{Q} \otimes \Lambda$ со скалярными квадратами $\langle\, p_{\lambda}\, ,\, p_{\lambda}\, \rangle = z_{\lambda}$. Согласно предл. 11.2 на стр. 168 значения $\psi_{\lambda}(C_{\mu})$ характера ψ_{λ} таблоидного представления M_{λ} совпадают с коэффициентами разложения ньютоновской симметрической функции $p_{\mu} = \sum_{\lambda} \psi_{\lambda}(C_{\mu}) m_{\lambda}$ по мономиальному базису m_{λ}, а значит, равны скалярным произведениям симметрических функций p_{λ} с элементами двойственного к мономиальному базиса из полных симметрических многочленов: $\psi_{\lambda}(C_{\mu}) = \langle\, p_{\mu}\, ,\, h_{\lambda}\, \rangle$, которые в свою очередь являются коэффициентами разложения полных симметрических многочленов h_{λ} по ортогональному базису $z_{\mu}^{-1} p_{\mu}$:

$$h_{\lambda} = \sum\nolimits_{\mu} z_{\mu}^{-1} \langle\, p_{\mu}\, ,\, h_{\lambda}\, \rangle p_{\mu} = \sum\nolimits_{\mu} z_{\mu}^{-1} \chi_{M_{\lambda}}(C_{\mu})\, p_{\mu}\,. \tag{11-19}$$

Сопоставление равенств (11-19) и (11-18) подсказывает следующий результат:

Теорема 11.4
Существует изометрический изоморфизм колец $\mathrm{ch} : \mathfrak{R} \xrightarrow{\sim} \Lambda$, переводящий классы таблоидных представлений $[M_{\lambda}]$ в полные симметрические многочлены h_{λ}, классы неприводимых представлений $[S_{\lambda}]$ — в многочлены Шура s_{λ}, а инволюцию на классах представлений, заданную тензорным умножением на одномерное знаковое представление, — в каноническую инволюцию[1] ω на Λ, переводящую друг в друга s_{λ} и s_{λ^t}, а также h_{λ} и e_{λ}. Этот изоморфизм корректно задаётся формулой[2]

$$\mathrm{ch}([U]) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\nolimits_{\mu} z_{\mu}^{-1} \chi_U(C_{\mu}) p_{\mu}\,. \tag{11-20}$$

Доказательство. Отображение (11-20) очевидно линейно по $[U]$:

$$\mathrm{ch}([U]+[W]) = \mathrm{ch}([U \oplus W]) = \sum\nolimits_{\mu} z_{\mu}^{-1} \chi_{U\oplus W}(C_{\mu}) p_{\mu} = \\ = \sum\nolimits_{\mu} z_{\mu}^{-1} \left(\chi_U(C_{\mu}) + \chi_W(C_{\mu})\right) p_{\mu} = \mathrm{ch}([U]) + \mathrm{ch}([W])\,.$$

Согласно лем. 11.6 на стр. 172 и сл. 7.2 на стр. 105 оба кольца $\mathfrak{R}$ и Λ являются кольцами многочленов от счётного числа переменных: первое — от классов тривиальных одномерных представлений $[\mathbb{1}_k]$ групп S_k, второе — от простейших полных симметрических многочленов[3] h_k, где в обоих случаях k пробегает $\mathbb{N}$. В силу соотношения (11-19) отображение ch переводит каждый базисный моном $[M_{\lambda}] = [\mathbb{1}_{\lambda_1}] \dots [\mathbb{1}_{\lambda_n}] = [\mathbb{1}_1]^{\ell_1} \dots [\mathbb{1}_n]^{\ell_n}$, где ℓ_i равно количеству строк длины i в диаграмме λ, в базисный моном $h_{\lambda} = h_{\lambda_1} \dots h_{\lambda_n} = h_1^{\ell_1} \dots h_n^{\ell_n}$ с сохранением мультипликативной структуры, ибо $\mathrm{ch}([\mathbb{1}_k]) = h_k$. Тем самым, отображение (11-20) является корректно определённым изоморфизмом колец. Ортогональность отображения ch вытекает из форму-

[1] См. сл. 8.2 на стр. 127.

[2] Не смотря на то, что она содержит знаменатели.

[3] Напомню, что $h_k(x)$ представляет собою сумму всех мономов полной степени k, см. n° 7.3 на стр. 105.

лы (11-18) и того, что полиномы Ньютона p_λ образуют в ортогональный базис $\mathbb{Q}\otimes\Lambda$ со скалярными квадратами[1] $\langle\, p_\lambda\,,\, p_\lambda\,\rangle = z_\lambda$. А именно:

$$\langle\, \mathrm{ch}([U])\,,\, \mathrm{ch}([W])\,\rangle = \sum\nolimits_{\lambda,\mu} z_\lambda^{-1} z_\mu^{-1} \chi_U(C_\lambda)\chi_W(C_\mu)\,\langle\, p_\mu\,,\, p_\lambda\,\rangle = \sum\nolimits_\mu z_\mu^{-1}\chi_U(g)\chi_W(g) = ([U],[W])\,.$$

Из сл. 11.3 на стр. 170 вытекает, что ортонормальный базис $[S_\lambda]$ выражается через таблоидный базис $[M_\lambda]$ при помощи нижней унитреугольной матрицы: $[S_\lambda] = [M_\lambda] + \sum_{\mu\rhd\lambda} x_{\mu\lambda}[M_\mu]$. По форм. (8-18) на стр. 126 полные симметрические многочлены h_λ выражаются через многочлены Шура s_λ также при помощи нижней унитреугольной матрицы[2]: $h_\lambda = s_\lambda + \sum_{\mu\rhd\lambda} K_{\mu,\lambda}s_\mu$. Поэтому $\mathrm{ch}([S_\lambda])$ выражается через полиномы Шура тоже посредством нижней унитреугольной матрицы: $\mathrm{ch}\,\big([S_\lambda]\big) = \mathrm{ch}\big([M_\lambda] + \sum_{\mu\rhd\lambda} x_{\mu\lambda}[M_\mu]\big) = h_\lambda + \sum_{\mu\rhd\lambda} x_{\mu\lambda}h_\mu = s_\lambda + \sum_{\mu\rhd\lambda} y_{\mu\lambda}s_\mu$. Из равенств $1 = \big([S_\lambda],[S_\lambda]\big) = \langle\, \mathrm{ch}([S_\lambda])\,,\, \mathrm{ch}([S_\lambda])\,\rangle = \langle\, s_\lambda\,,\, s_\lambda\,\rangle + \sum_{\mu\rhd\lambda} y_{\mu\lambda}^2\langle\, s_\mu\,,\, s_\mu\,\rangle = 1 + \sum_{\mu\rhd\lambda} y_{\mu\lambda}^2$ мы заключаем, что все $y_{\mu\lambda} = 0$ и $\mathrm{ch}([S_\lambda]) = s_\lambda$. Утверждение об инволюциях вытекает из сл. 11.2 на стр. 168 и сл. 8.2 на стр. 127. □

Следствие 11.4 (правило Юнга)
Кратность вхождения неприводимого представления S_μ в модуль таблоидов M_λ равна числу Костки[3] $K_{\mu,\lambda}$. □

Следствие 11.5 (правило Литтлвуда – Ричардсона)
Кратность вхождения $[S_\nu]$ в $[S_\lambda]\,[S_\mu]$ равна коэффициенту Литтлвуда – Ричардсона[4] $c^\nu_{\lambda\mu}$ из разложения $s_\lambda s_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda\mu}s_\nu$. □

Следствие 11.6 (правило ветвления индуцированных представлений)
Представление группы S_{n+1}, индуцированное неприводимым представлением S_λ подгруппы $S_n \subset S_{n+1}$, является прямой суммой однократных неприводимых представлений S_μ, диаграмма μ которых получается добавлением одной клетки к диаграмме λ.

Доказательство. Поскольку $[\mathrm{ind}(S_\lambda)] = [S_\lambda]\,[\mathbb{1}_1]$, утверждение вытекает из предыдущего следствия и формулы Пьери[5] для вычисления $s_\lambda h_1$. □

Следствие 11.7 (правило ветвления ограниченных представлений)
Ограничение неприводимого представления S_λ группы S_n на подгруппу $S_{n-1}\subset S_n$ является прямой суммой однократных неприводимых представлений S_μ, диаграмма μ которых получается выкидыванием одной клетки из диаграммы λ.

Доказательство. Это получается из предыдущего следствия и взаимности Фробениуса: кратность вхождения неприводимого представления S_μ в $\mathrm{res}\, S_\lambda$ равна кратности вхождения неприводимого представления S_λ в $\mathrm{ind}\, S_\mu$. □

---

[1] См. предл. 8.2 на стр. 128.

[2] Напомню, что *число Костки* $K_{\mu,\lambda}$ равно количеству таблиц формы μ, заполненных λ_1 единицами, λ_2 двойками, и т. д. Оно ненулевое лишь при $\mu \trianglerighteq \lambda$, и все $K_{\lambda,\lambda} = 1$. См. пояснения к форм. (8-11) на стр. 123.

[3] См. формулу (8-11) на стр. 123.

[4] См. теор. 8.2 на стр. 125.

[5] См. упр. 8.5 на стр. 125.

Следствие 11.8 (формула Фробениуса для характеров S_n)
Значение характера χ_λ неприводимого представления S_λ симметрической группы S_n на классе сопряжённости $C_\mu \subset S_n$ равно каждому из следующих трёх чисел:

- коэффициенту при $z_\mu^{-1} p_\mu(x)$ в разложении многочлена Шура $s_\lambda(x)$ по базису $z_\mu^{-1} p_\mu(x)$ в векторном пространстве $\mathbb{Q} \otimes \Lambda$
- коэффициенту при $s_\lambda(x)$ в разложении многочлена Ньютона $p_\mu(x)$ по базису Шура $s_\lambda(x)$ в $\mathbb{Z}$-модуле Λ
- коэффициенту при одночлене $x^{\lambda+\delta} = x_1^{\lambda_1+n-1} x_2^{\lambda_2+n-2} \dots x_n^{\lambda_n}$ в многочлене
$$p_\mu(x)\Delta_\delta(x) = p_1(x)^{m_1} \dots p_n(x)^{m_n} \prod\nolimits_{i<j}(x_i - x_j)\,,$$
где $p_k(x) = \sum_i x_i^k$ суть степенные суммы Ньютона, число m_i равно количеству строк длины i в диаграмме μ, а $\Delta_\delta(x) = \det\left(x_j^{n-i}\right)$ — это определитель Вандермонда.

Доказательство. Первое вытекает прямо из теор. 11.4. Второе — из свойств скалярного произведения на кольце симметрических функций: поскольку система многочленов p_μ ортогональна со скалярными квадратами z_μ, коэффициент при $z_\mu^{-1} p_\mu(x)$ в разложении s_λ по базису p_μ равен скалярному произведению $\langle\, s_\lambda\,,\, p_\mu\,\rangle$, которое в свою очередь равно коэффициенту при s_λ в разложении p_μ по ортонормальному базису s_λ. Для доказательства третьего запишем s_λ по формуле Якоби – Труди как отношение определителей $s_\lambda(x) = \Delta_{\lambda+\delta}(x) \,/\, \Delta_\delta(x)$ и умножим обе части разложения $p_\mu(x) = \sum_\lambda \chi_\lambda(C_\mu)\Delta_{\lambda+\delta}(x) \,/\, \Delta_\delta(x)$ на Δ_δ. Получим равенство $p_\mu(x)\Delta_\delta(x) = \sum_\lambda \chi_\lambda(C_\mu)\Delta_{\lambda+\delta}(x)$, означающее, что $\chi_\lambda(C_\mu)$ равен коэффициенту разложения кососимметрического многочлена $p_\mu(x)\Delta_\delta(x)$ по стандартному детерминантному базису[1] $\Delta_{\lambda+\delta}(x)$. □

11.5.4. Размерности неприводимых представлений. По формуле Фробениуса размерность $\dim S_\lambda = \chi_\lambda(1)$ равна коэффициенту при $x^{\lambda+\delta} = x_1^{\lambda_1+n-1} x_2^{\lambda_2+n-2} \dots x_n^{\lambda_n}$ в многочлене
$$p_1^n \Delta_\delta = \left(\sum x_i\right)^n \det\left(x_j^{n-i}\right) = \sum_{m_1 \dots m_n} \frac{n!}{m_1!\dots m_n!} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) x_1^{n-\sigma(1)} \dots x_n^{n-\sigma(n)}\,.$$
Обозначим строго убывающие длины строк диаграммы $\eta = \lambda + \delta$ через $\eta_i = \lambda_i + n - i$. Коэффициент при $x^\eta = x_1^{\eta_1} \dots x_n^{\eta_n}$ в предыдущем произведении равен
$$\sum_\sigma \frac{\operatorname{sgn}(\sigma) n!}{\prod_j \left(\eta_j - n + \sigma(j)\right)!} = \frac{n!}{\eta_1! \dots \eta_n!} \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_j \eta_j(\eta_j - 1) \dots (\eta_j - n + \sigma(j) + 1)\,,$$
где суммирование происходит по всем перестановкам $\sigma \in S_n$, для которых каждое из n чисел $\eta_j - n + \sigma(j) \geqslant 0$, и j-тый сомножитель последнего произведения сам является произведением $n - \sigma(j)$ последовательно убывающих чисел, начиная с η_j. Такая сумма равна
$$\det\begin{pmatrix} \eta_1 \dots (\eta_1 - n + 1) & \eta_2 \dots (\eta_2 - n + 1) & \dots & \eta_n \dots (\eta_n - n + 1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \eta_1(\eta_1 - 1) & \eta_2(\eta_2 - 1) & \cdots & \eta_n(\eta_n - 1) \\ \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

[1] См. n° 7.1.2 на стр. 103.

Упражнение 11.9. Покажите, что этот определитель равен $\prod_{i<j}(\eta_i - \eta_j)$.

Таким образом, нами установлено

Следствие 11.9 (формула Фробениуса для размерностей)
Пусть $\eta = \lambda + \delta$, т. е. $\eta_i = \lambda_i + n - i$. Тогда $\dim S_\lambda = \frac{n!}{\eta_1! \dots \eta_n!} \prod_{i<j}(\eta_i - \eta_j)$. □

Упражнение 11.10 (формула крюков). Назовём *крюком* клетки a в диаграмме Юнга λ Г-образную поддиаграмму, состоящую из клетки a и всех клеток ниже a в том же столбце и всех клеток правее a в той же строке. Количество клеток в таком крюке обозначим через $\Gamma(a)$ и назовём *длиной крюка* клетки a. Докажите, что $\dim S_\lambda = n!/\prod_{a\in\lambda}\Gamma(a)$.

Например, длины крюков диаграммы $\lambda = (4,2,1)$ суть $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 6&4&2&1\\ \hline 3&1\\ \cline{1-2} 1\\ \cline{1-1}\end{array}$, откуда размерность модуля Шпехта $S_{(4,2,1)}$ группы S_7 равна $7!/(6\cdot4\cdot3\cdot2) = 7\cdot5 = 35$. Довольно нетривиальным следствием из упр. 11.10 и теор. 11.3 на стр. 171 является возможность подсчитать количество стандартных таблиц формы λ по формуле крюков. К примеру, только что проделанное вычисление показывает, что стандартных таблиц формы $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \ &\ &\ &\ \\ \hline \ &\ \\ \cline{1-2} \ \\ \cline{1-1}\end{array}$ имеется ровно 35 штук.

Задачи для самостоятельного решения к §11

Задача 11.1. Укажите, каким стандартным представлениям V_λ изоморфны все явно описанные в предыдущих двух параграфах неприводимые представления групп S_3, S_4 и S_5.

Задача 11.2. Покажите, что представление S_n левыми умножениями в идеале $\mathbb{C}[S_n]\, r_T$ индуцировано с тривиального представления подгруппы $R_T \subset S_n$, а в $\mathbb{C}[S_n]\, c_T$ — со знакового представления подгруппы $C_T \subset S_n$.

Задача 11.3. Покажите, что идеал $\mathbb{C}[S_n]\, s_T$, вообще говоря, не содержится в идеале $\mathbb{C}[S_n]\, r_T$.

Задача 11.4. Установите для $(n-1)$-мерного симплициального представления V_Δ группы S_n изоморфизмы а) $\Lambda^k V_\Delta \simeq V_{((n-k),\,1^k)}$ б) $V_\Delta^{\otimes 2} \simeq \mathbb{C} \oplus V_\Delta \oplus V_{((n-2),2)} \oplus V_{((n-2),1,1)}$.

Задача 11.5. Докажите равенства
а) $\chi_{((n-2),1,1)}(C_\mu) = \binom{m_1-1}{2} - m_2$ б) $\chi_{((n-2),2)}(C_\mu) = \binom{m_1-1}{2} + m_2 - 1$

Задача 11.6. С какой кратностью входят в индуцированное одномерным представлением максимального цикла умножением на $e^{2\pi i/n}$ а) знаковое б) симплициальное представления?

Задача 11.7. Покажите, что значение неприводимого характера χ_λ группы S_n на максимальном цикле равно $(-1)^k$ при $\lambda = \big((n-k),\ 1^k\big)$ и нулю для всех прочих λ.

Задача 11.8. Пусть диаграмма $\lambda = \lambda^t$ является объединением k симметричных крюков $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ с вершинами на главной диагонали, длины которых $\gamma_i = |\Gamma_i| = 2(\lambda_i - i + 1) - 1$, где $1 \leqslant i \leqslant k$, строго убывают. Покажите, что $\chi_\lambda(C_\gamma) = (-1)^{(n-k)/2}$, где $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$.

Задача 11.9. Покажите, что неприводимое представление V_μ группы S_m тогда и только тогда входит в разложение представления, индуцированного с неприводимого представления V_ν подгруппы $S_n \subset S_m$, когда $\mu \supset \nu$, и в этом случае его кратность равна числу заполнений косой диаграммы $\mu \setminus \nu$ не повторяющимися числами от 1 до $m - n$, строго возрастающими как по строкам, так и по столбцам.

Задача 11.10. Сформулируйте и докажите двойственное утверждение про ограничения неприводимых представлений.

Задача 11.11. Покажите, что V_λ является единственным общим неприводимым слагаемым представлений M_λ и $M_\lambda \otimes V_{(1^n)}$.

Задача 11.12. Покажите, что $[V_\nu]\,[V_{(1^n)}] = \oplus V_\mu$, где μ пробегает множество диаграмм, которые можно получить из ν добавлением n клеток так, чтобы никакие две не попали в одну строку.

Задача 11.13. Покажите, что V_λ входит в $V_\mu \otimes V_\nu$ с кратностью $\sum_\eta z_\eta^{-1} \chi_\lambda(C_\eta)\chi_\mu(C_\eta)\chi_\nu(C_\eta)$, которая при $\lambda = (n)$ равна $\delta_{\mu,\nu}$, а при $\lambda = (1^n)$ равна δ_{μ,ν^t}.

Задача 11.14. Докажите, что $\dim V_\lambda < |\lambda|$ только у тривиального, знакового, симплициального и тензорного произведения симплициального и знакового представлений, а также у представления $V_{(2,2)}$ группы S_4 и представлений $V_{(2,2,2)}$ и $V_{(3,3)}$ группы S_6 .

Задача 11.15. Зафиксируем диаграмму Юнга λ из n клеток и для каждого стандартного[1] заполнения T этой диаграммы положим $f_T(x_1, \dots, x_n) \overset{\text{def}}{=} \prod_\gamma \prod_{\beta>\alpha} \left(x_{T(\beta,\gamma)} - x_{T(\alpha,\gamma)}\right)$, где $T(i,j)$ — число, стоящее в i-й строке и j-м столбце заполнения T. Покажите, что порождённое многочленами f_T векторное подпространство в $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ инвариантно относительно действия симметрической группы S_n перестановками переменных и разложите его на неприводимые представления.

[1] То есть не повторяющимися числами от 1 до n.

§12. $\mathfrak{sl}_2$-модули.

Всюду в этом параграфе мы считаем, что $\Bbbk$ — поле характеристики нуль.

12.1. Алгебры Ли. Напомню[1], что $\Bbbk$-*алгеброй* называется векторное пространство A над $\Bbbk$ с билинейным умножением $A \times A \to A$. Алгебра $\mathfrak{g}$ называется *алгеброй Ли*, если умножение кососимметрично и удовлетворяет тождеству Якоби[2]. Умножение в алгебре Ли принято обозначать квадратными скобками — также, как коммутатор в ассоциативной алгебре:

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}\,, \quad (X, Y) \mapsto [X, Y] = -[Y, X]\,.$$

Тождество Якоби утверждает, что левое умножение на любой элемент $X \in \mathfrak{g}$:

$$\mathrm{ad}_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}\,, \quad Y \mapsto [X, Y]\,,$$

является *дифференцированием*, т. е. действует на произведения по *правилу Лейбница*:

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]$$

для всех $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Пример 12.1 (коммутаторная алгебра)
На каждой ассоциативной алгебре A над полем $\Bbbk$ имеется структура алгебры Ли, задаваемая *коммутатором* $[a, b] \overset{\text{def}}{=} ab - ba$. Эта алгебра Ли называется *коммутаторной алгеброй* ассоциативной алгебры A.

Упражнение 12.1. Убедитесь, что коммутаторы удовлетворяют тождеству Якоби.

12.1.1. Касательные алгебры Ли линейных групп. Мультипликативные группы матриц

$$\begin{aligned}
\mathrm{SL}_n(\Bbbk) &= \{X \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk) \mid \det X = 1\}\,,\\
\mathrm{SO}_n(\Bbbk) &= \{X \in \mathrm{SL}_n(\Bbbk) \mid X^t X = E\}\,,\\
\mathrm{Sp}_{2n}(\Bbbk) &= \{X \in \mathrm{SL}_{2n}(\Bbbk) \mid X^t J X = J\}\,, \text{ где } J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}\,,
\end{aligned}$$

являются алгебраическими многообразиями[3] в аффинном пространстве $\mathrm{Mat}_n(\Bbbk) \simeq \mathbb{A}^{n^2}(\Bbbk)$. Проходящая через единицу E такой группы G прямая (EX) называется *касательной* к G в точке $E \in G$, если ограничение системы задающих группу G полиномиальных уравнений на прямую (EX) имеет кратный корень в точке E, т. е. при подстановке $E + tX$ в уравнения, задающие группу G, получатся уравнения, делящиеся на t^2. Поскольку[4]

$$\det(E + tX) = 1 + t\ \mathrm{tr}\,X + \text{члены, делящиеся на } t^2,$$

мы заключаем, что прямая $(EX) = \{E + tX \mid t \in \Bbbk\}$ с направляющим вектором X касается группы SL_n в единице если и только если $\mathrm{tr}\,X = 0$. Таким образом, направляющие векторы

[1]См. n° 8.1 на стр. 131 части I.
[2]См. прим. 5.2 на стр. 79.
[3]См. n° 13.6.1 на стр. 249 части I.
[4]См. прим. 11.6 на стр. 197 части I.

всех касательных к SL_n прямых составляют векторное пространство бесследных матриц. Оно называется *касательным пространством* к SL_n в E и обозначается

$$T_E\,\mathrm{SL}_n = \{X \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk) \mid \operatorname{tr} X = 0\}\,.$$

Упражнение 12.2. Убедитесь, что

$$T_E\,\mathrm{SO}_n(\Bbbk) = \{X \in T_E\,\mathrm{SL}_n \mid X^t = -X\}\,,$$
$$T_E\,\mathrm{Sp}_{2n}(\Bbbk) = \{X \in T_E\,\mathrm{SL}_n \mid X^t J = -JX\}\,.$$

Каждый элемент $g \in G$ задаёт автоморфизм сопряжения $\mathrm{Ad}_g : G \to G$, который является ограничением на группу $G \subset \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$ линейного преобразования

$$\mathrm{Ad}_g : \mathrm{Mat}_n(\Bbbk) \to \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)\,, \quad h \mapsto ghg^{-1}\,,$$

переводящего в себя единицу $E \in G$ и касательное пространство $T_E G$. Сопоставляя элементу $g \in G$ ограничение преобразования Ad_g на $T_E G$, получаем гомоморфизмом групп

$$\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(T_E G)\,, \quad g \mapsto \mathrm{Ad}_g|_{T_E G}\,, \tag{12-1}$$

который называется *присоединённым* линейным представлением группы G. Дифференциал отображения (12-1) в точке $E \in G$ представляет собою линейное отображение

$$\mathrm{ad} \overset{\text{def}}{=} D_E\,\mathrm{Ad} : T_E G \to T_E\,\mathrm{GL}(T_E G) = \mathrm{End}(T_E G)\,.$$

Его значение на касательном векторе $X \in T_E G$ принято обозначать

$$\mathrm{ad}_X : T_E G \to T_E G\,, \quad Y \mapsto \mathrm{ad}_X Y\,.$$

Упражнение 12.3 (по анализу). Убедитесь, что дифференциал в точке $E \in \mathrm{GL}_n$ отображения $\mathrm{Ad} : \mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}(\mathrm{Mat}_n)$, сопоставляющего обратимой матрице F линейное преобразование $\mathrm{Ad}_F : \mathrm{Mat}_n \to \mathrm{Mat}_n$, $X \mapsto FXF^{-1}$, переводит касательный вектор $X \in T_E\,\mathrm{GL}_n = \mathrm{Mat}_n$ в касательный вектор $\mathrm{ad}_X \in T_{\mathrm{Id}}\,\mathrm{GL}(\mathrm{Mat}_n) = \mathrm{End}(\mathrm{Mat}_n)$, действующий на Mat_n по правилу $\mathrm{ad}_X(Y) = XY - YX$.

Мы заключаем, что на $T_E G$ имеется структура алгебры Ли с умножением

$$T_E G \times T_E G \to T_E G\,,\ (X, Y) \mapsto \mathrm{ad}_X Y = XY - YX\,.$$

Эта алгебра обозначается строчной готической версией $\mathfrak{g}$ латинского названия G группы, и называется *алгеброй Ли* группы G. Таким образом получаются матричные алгебры Ли

$$\mathfrak{sl}_n(\Bbbk) = \{X \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk) \mid \operatorname{tr} X = 0\}\,,$$
$$\mathfrak{so}_n(\Bbbk) = \{X \in \mathfrak{sl}_n(\Bbbk) \mid X^t = -X\}\,,$$
$$\mathfrak{sp}_{2n}(\Bbbk) = \{X \in \mathfrak{sl}_{2n}(\Bbbk) \mid X^t J = -JX\}\,.$$

Упражнение 12.4. Убедитесь прямым вычислением, что каждое из этих пространств вместе с любыми двумя матрицами X, Y содержат и их коммутатор $[X, Y] = XY - YX$.

Через $\mathfrak{gl}_n = \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$ обозначается алгебра Ли полной линейной группы $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$.

12.1.2. Универсальная обёртывающая алгебра. С каждой алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ канонически связаны ассоциативная алгебра $U\mathfrak{g}$ и такое линейное отображение $\nu : \mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}$, что

$$\nu([X,Y]) = \nu(X)\nu(Y) - \nu(Y)\nu(X)$$

для всех $X, Y \in \mathfrak{g}$ и для любого линейного отображения $\psi : \mathfrak{g} \to A$ в ассоциативную алгебру A со свойством $\psi([X,Y]) = \psi(X)\psi(Y) - \psi(Y)\psi(X)$ существует единственный гомоморфизм ассоциативных алгебр $\widetilde{\psi} : U\mathfrak{g} \to A$, такой, что $\psi = \widetilde{\psi} \circ \nu$.

Упражнение 12.5. Убедитесь, алгебра $U\mathfrak{g}$ и линейное отображение $\nu : \mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}$ описываются этими свойствами однозначно с точностью до единственного перестановочного с ν изоморфизма ассоциативных алгебр.

Ассоциативная алгебра $U\mathfrak{g}$ называется *универсальной обёртывающей* алгеброй алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Она строится как фактор тензорной алгебры $T\mathfrak{g}$ по двустороннему идеалу, порождённому всевозможными разностями $X \otimes Y - Y \otimes X - [X,Y] \in \mathfrak{g}^{\otimes 2} \oplus \mathfrak{g}$.

Упражнение 12.6. Проверьте, что эта фактор алгебра обладает требуемым универсальным свойством.

Предостережение 12.1. Универсальную обёртывающую алгебру $U\mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, возникающей как коммутаторная алгебра Ли[1] ассоциативной алгебры A, не следует путать с A. Алгебра $U\mathfrak{g}$ гомоморфно отображается на A, но обычно гораздо больше A и во всяком случае бесконечномерна над $\Bbbk$. Подпространства $F_n = \pi\left(\bigoplus_{k\leqslant n} T^{\otimes k}\mathfrak{g}\right)$, где $\pi : T\mathfrak{g} \twoheadrightarrow U\mathfrak{g}$ — отображение факторизации, образуют в $U\mathfrak{g}$ возрастающую цепочку $F_{-1} = 0 \subset F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots$, и тензорное умножение в алгебре $T\mathfrak{g}$ корректно задаёт на прямой сумме её последовательных факторов

$$\operatorname{gr} U\mathfrak{g} \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{n\geqslant 0} F_i / F_{i-1}$$

коммутативное ассоциативное умножение. Можно показать, что изоморфная $U\mathfrak{g}$ как векторное пространство над $\Bbbk$ коммутативная алгебра $\operatorname{gr} U\mathfrak{g}$ изоморфна алгебре многочленов[2] $S\mathfrak{g}$.

12.1.3. Линейные представления. Линейное отображение $\varrho : \mathfrak{g} \to \operatorname{End}(V)$ называется *представлением* алгебры Ли $\mathfrak{g}$, если оно переводит скобку на $\mathfrak{g}$ в коммутатор операторов, т. е.

$$\varrho([A,B]) = [\varrho(A), \varrho(B)] = \varrho(A)\varrho(B) - \varrho(B)\varrho(A)$$

для всех $A, B \in \mathfrak{g}$. Пространство V называется в этой ситуации $\mathfrak{g}$-модулем. В силу универсального свойства обёртывающей алгебры $U\mathfrak{g}$, линейные представления $\varrho : \mathfrak{g} \to \operatorname{End}(V)$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ биективно соответствуют линейным представлениям $\tilde{\varrho} : U\mathfrak{g} \to \operatorname{End}(V)$ ассоциативной алгебры $U\mathfrak{g}$. Представление $\tilde{\varrho}$ отображает класс тензора $A_1 \otimes \dots \otimes A_m$ в композицию $\varrho(A_1) \circ \varrho(A_2) \circ \dots \circ \varrho(A_m)$, и образ представления $\tilde{\varrho}$ совпадает с ассоциативной оболочкой $\operatorname{Ass}(\operatorname{im}\varrho) \subset \operatorname{End}(V)$ образа представления ϱ.

Также, как для представлений групп и ассоциативных алгебр, прямая сумма $\mathfrak{g}$-модулей U и W наделяется структурой $\mathfrak{g}$-модуля на котором $F \in \mathfrak{g}$ действует по правилу $F(u \dotplus w) \stackrel{\text{def}}{=} (Fu) \dotplus (Fw)$. Для любого $\mathfrak{g}$-подмодуля $V \subset W$ фактор пространство W/V также является $\mathfrak{g}$-модулем с действием $F[v] \stackrel{\text{def}}{=} [Fv]$.

---

[1] См. прим. 12.1 на стр. 178.

[2] Этот факт известен как *теорема Пуанкаре – Биркгофа – Витта*, см. §4 главы III книги Ж.-П. Серр, Алгебы Ли и группы Ли, М. «Мир», 1969.

Упражнение 12.7. Убедитесь, что это правило корректно.

Тензорные произведения, а также внешние и симметрические степени $\mathfrak{g}$-модулей тоже имеют канонические структуры $\mathfrak{g}$-модулей, однако в отличие от представлений групп и ассоциативных алгебр действие оператора $F \in \mathfrak{g}$ распространяется на произведения не по мультипликативности, а *по правилу Лейбница*:

$$F(u \otimes w) \stackrel{\text{def}}{=} (Fu) \otimes w + u \otimes (Fw)\,,$$
$$F(u \wedge w) \stackrel{\text{def}}{=} (Fu) \wedge w + u \wedge (Fw)\,,$$
$$F(u\,w) \stackrel{\text{def}}{=} (Fu)\,w + u\,(Fw)\,.$$

Упражнение 12.8. Убедитесь, что эти правила переводят скобку в коммутатор.

Двойственное к представлению $\varrho : \mathfrak{g} \to \operatorname{End}(V)$ представление $\varrho^* : \mathfrak{g} \to \operatorname{End}(V^*)$ задаётся правилом $\varrho^*(F) \stackrel{\text{def}}{=} -\varrho(F)^*$ и взаимодействует со свёрткой по формуле

$$\langle\, \varrho^*(F)\,\xi\,,\, w\,\rangle + \langle\, \xi\,,\, \varrho(F)\,w\,\rangle = 0\,.$$

Действие $\mathfrak{g}$ на пространстве $\operatorname{Hom}(U, V)$ линейных отображений между $\mathfrak{g}$-модулями U, W задаётся правилом

$$F : \varphi \mapsto [F, \varphi] \stackrel{\text{def}}{=} F\varphi - \varphi F\,. \tag{12-2}$$

Упражнение 12.9. Проверьте, что скобка переходит в коммутатор, а канонический изоморфизм $U^* \otimes V \simeq \operatorname{Hom}(U, V)$ является изоморфизмом $\mathfrak{g}$-модулей[1].

Подпространство неподвижных векторов представления (12-2) обозначается

$$\operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(U, V) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi : U \to V \mid \forall F \in \mathfrak{g}\ F\varphi = \varphi F\} \tag{12-3}$$

и называется пространством $\mathfrak{g}$-*инвариантных* операторов[2].

12.2. Описание неприводимых $\mathfrak{sl}_2$-модулей. Линейные представления трёхмерной алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ бесследных 2×2-матриц встречаются в самых разных областях математики. Будем называть матрицы

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{12-4}$$

стандартным базисом в $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$. Они коммутируют по правилам:

$$[X, Y] = H\,, \quad [H, X] = 2X\,, \quad [H, Y] = -2Y\,. \tag{12-5}$$

Линейное представление $\mathfrak{sl}_2 \to \operatorname{End}(V)$ задаётся указанием трёх операторов $X, Y, H : V \to V$, удовлетворяющих коммутационным соотношениям (12-5). Векторное пространство V с такими тремя операторами называется $\mathfrak{sl}_2$-*модулем*.

[1] Т. е. перестановочен с действием $\mathfrak{g}$

[2] а также $\mathfrak{g}$-*гомоморфизмов*

Пример 12.2 (стандартные $\mathfrak{sl}_2$-модули)
Дифференциальные операторы

$$X = x\,\frac{\partial}{\partial y}\,,\quad Y = y\,\frac{\partial}{\partial x}\,,\quad H = x\,\frac{\partial}{\partial x} - y\,\frac{\partial}{\partial y} \tag{12-6}$$

действуют на пространстве многочленов $\Bbbk[x,y]$ сохраняя степень. Обозначим через $V_n \subset \Bbbk[x,y]$ подпространство однородных многочленов степени n. Действие операторов (12-6) на одномерном пространстве $V_0 \simeq \Bbbk$ нулевое, а на двумерном пространстве V_1 задаётся в базисе x, y матрицами (12-4), т. е. является тавтологическим представлением $\mathfrak{sl}_2 \subset \mathrm{Mat}_2(\Bbbk)$ на $\Bbbk^2$. Действие операторов (12-6) на пространстве $V_n = S^n V_1$ является продолжением тавтологического представления на его симметрическую степень по правилу Лейбница.

Упражнение 12.10. Проверьте, что каждый линейный дифференциальный оператор первого порядка

$$F = a(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\,,\quad \text{где}\quad a, b \in \Bbbk[x,y]\,,$$

удовлетворяет правилу Лейбница: $F(gh) = F(g)\cdot h + g\cdot F(h)$, и что коммутатор

$$[F_1, F_2] = F_1F_2 - F_2F_1$$

любых двух таких операторов также является линейным дифференциальным оператором первого порядка.

Модули V_n называются *стандартными*. В базисе $e_k = x^k y^{n-k}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, действие операторов X, Y, H задаётся формулами

$$X(e_k) = (n-k)\,e_{k+1}\,,\quad Y(e_k) = k\,e_{k-1}\,,\quad H(e_k) = (2k-n)\,e_k\,. \tag{12-7}$$

Предложение 12.1
Все стандартные $\mathfrak{sl}_2$-модули V_n неприводимы.

Доказательство. Разложим произвольный вектор $v \in V_n$ по базису $e_k = x^k y^{n-k}$ и обозначим через m наибольший из номеров базисных векторов, входящих в это разложение с ненулевым коэффициентом. В силу формул (12-7) векторы $X^k Y^m v$ с $0 \leqslant k \leqslant n$ являются ненулевыми кратными базисных векторов e_k. Следовательно, $\mathfrak{sl}_2$-орбита любого вектора v линейно порождает всё пространство V_n. □

Лемма 12.1
В любом $\mathfrak{sl}_2$-модуле операторы X и Y переводят собственное подпространство оператора H с собственным числом λ в его собственные подпространства с собственными числами $\lambda + 2$ и $\lambda - 2$ соответственно.

Доказательство. Пусть $Hv = \lambda v$. Пользуясь соотношениями $HX - XH = 2X$ и $HY - YH = -2Y$, получаем $HXv = XHv + 2Xv = (\lambda+2)\,Xv$ и $HYv = YHv - 2Yv = (\lambda-2)\,Yv$. □

Определение 12.1
Собственные значения оператора H на неприводимом модуле V называются *весами*, а собственные векторы — *весовыми векторами*. Весовые векторы, находящиеся в ядре оператора X называются *примитивными*.

Лемма 12.2
Любой конечномерный $\mathfrak{sl}_2$-модуль над алгебраически замкнутым полем обладает примитивным вектором.

Доказательство. Действуя на произвольный весовой вектор $v \neq 0$ оператором X, получаем цепочку собственных векторов $v, Xv, X^2v, \dots$ оператора H со строго возрастающими собственными числами. Так как ненулевые собственные векторы с разными собственными числами линейно независимы[1], в какой-то момент мы получим вектор $w = X^m v \neq 0$ с $Xw = 0$, являющийся примитивным. □

Лемма 12.3
В конечномерном $\mathfrak{sl}_2$-модуле над полем характеристики нуль вес каждого примитивного вектора является натуральным числом, и $\mathfrak{sl}_2$-орбита примитивного вектора веса m изоморфна стандартному модулю V_m из прим. 12.2.

Доказательство. Пусть $Hv = \lambda v$ и $Xv = 0$. По лем. 12.1 векторы $v, Yv, Y^2v, \dots$ являются собственными для H с собственными числами $\lambda, (\lambda-2), (\lambda-4), \dots$ Поэтому существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $Y^{m+1}v = 0$, а $Y^m v \neq 0$. Обозначим этот последний ненулевой вектор через $v_0 = Y^m v$, а его предшественников — через $v_1, v_2, \dots, v_m = v$, так что вся цепочка примет вид

$$0 \overset{Y}{\leftarrow\!\shortmid} v_0 \overset{Y}{\leftarrow\!\shortmid} v_1 \overset{Y}{\leftarrow\!\shortmid} v_2 \overset{Y}{\leftarrow\!\shortmid} \dots \overset{Y}{\leftarrow\!\shortmid} v_{m-1} \overset{Y}{\leftarrow\!\shortmid} v_m \overset{X}{\mapsto} 0$$

Оператор H действует на векторы цепочки как $Hv_i = (\lambda - 2\,(m-i))\,v_i$. Пользуясь соотношением $XY = YX + H$, последовательно вычисляем действие оператора X на векторы цепочки:

$$\begin{aligned}
Xv_m &= 0\\
Xv_{m-1} &= XYv_m = YXv_m + Hv_m = \lambda v_m\\
Xv_{m-2} &= XYv_{m-1} = YXv_{m-1} + Hv_{m-1} = (2\lambda - 2)\,v_{m-1}\\
Xv_{m-3} &= XYv_{m-2} = YXv_{m-2} + Hv_{m-2} = (3\lambda - (2+4))\,v_{m-2}\\
\dots &\quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots\\
Xv_{m-k} &= XYv_{m-k+1} = YXv_{m-k+1} + Hv_{m-k+1} =\\
&= \big(k\lambda - (2 + 4 + \dots + 2(k-1))\big)\,v_{m-k+1} = k\,(\lambda - k + 1)\,v_{m-k+1}\\
\dots &\quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots\\
Xv_0 &= m\,(\lambda - m + 1)\,v_1\,.
\end{aligned}$$

Следующий такой шаг даёт нулевой вектор

$$0 = XYv_0 = YXv_0 + Hv_0 = (m+1)(\lambda - m)\,v_0\,,$$

что возможно только при $\lambda = m$. Таким образом, X, Y, H действуют по формулам

$$X(v_k) = (m-k)(k+1)\,v_{k+1}\,, \quad Y(v_k) = v_{k-1}\,, \quad H(v_k) = (2k - m)\,v_k\,.$$

Отображение $v_k \mapsto x^k y^{m-k} / k!$ задаёт $\mathfrak{sl}_2$-инвариантный[2] изоморфизм линейной оболочки векторов v_k с модулем V_m. □

[1] См. предл. 12.3 на стр. 220 части I.
[2] См. 12-3 на стр. 181.

Теорема 12.1
Конечномерные неприводимые $\mathfrak{sl}_2$-модули над любым полем $\Bbbk$ характеристики нуль исчерпываются стандартными модулями V_n.

Доказательство. Обозначим через $\overline{\Bbbk} \subset \Bbbk$ алгебраическое замыкание[1] поля $\Bbbk$. Как мы видели в n° 1.5 на стр. 16, тензорное произведение $\overline{V} = \overline{\Bbbk} \otimes_{\Bbbk} V$ является векторным пространством над $\overline{\Bbbk}$. Умножение векторов на скаляры задаётся формулой $\lambda \cdot (\mu \otimes v) = (\lambda\mu) \otimes v$, и любой $\Bbbk$-линейный оператор $F : V \to V$ продолжается до $\overline{\Bbbk}$-линейного оператора $\overline{F} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Id} \otimes F : \overline{V} \to \overline{V}$.

Упражнение 12.11. Пусть векторы $e_1, \dots, e_n$ составляют базис V над $\Bbbk$. Покажите, что векторы $\overline{e}_i = 1 \otimes e_i$ образуют базис $\overline{V}$ над $\overline{\Bbbk}$, и матрица оператора $\overline{F}$ в этом базисе совпадает с матрицей F в базисе $e_1, \dots, e_n$.

Если пространство V является $\mathfrak{sl}_2$-модулем, то пространство $\overline{V}$ также является $\mathfrak{sl}_2$-модулем относительно действия операторов $\overline{X}$, $\overline{Y}$ и $\overline{H}$. В силу предыдущей леммы у оператора $\overline{H}$ существует целое собственное число. По упр. 12.11 оно является собственным числом и для оператора H на пространстве V. Повторяя рассуждения из доказательства лем. 12.2, заключаем, что в пространстве V имеется примитивный вектор, и тогда по лем. 12.3 он порождает в V стандартный $\mathfrak{sl}_2$-подмодуль, который должен совпасть со всем V, поскольку V неприводимо. □

12.3. Полная приводимость $\mathfrak{sl}_2$-модулей. Линейное представление

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{sl}_2 \to \mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2)\,, \quad F \mapsto \mathrm{ad}_F\,, \tag{12-8}$$

переводящее матрицу $F \in \mathfrak{sl}_2$ в оператор $\mathrm{ad}_F : \mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{sl}_2$, $Z \mapsto [F, Z] = FZ - ZF$, называется *присоединённым представлением*.

Упражнение 12.12. Проверьте, что $\mathrm{ad}_{[F,G]} = [\mathrm{ad}_F, \mathrm{ad}_G]$ и что отображение (12-8) действительно является линейным представлением алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$.

На ассоциативной алгебре $\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2)$ имеется каноническая симметричная билинейная форма — след композиции[2] $(\varphi, \psi) = \mathrm{tr}(\varphi\psi)$. Её ограничение на образ присоединённого представления задаёт на $\mathfrak{sl}_2$ невырожденную симметричную билинейную *форму Киллинга*

$$(F, G) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_F \circ \mathrm{ad}_G)\,. \tag{12-9}$$

Упражнение 12.13. Проверьте, что её матрица Грама в базисе X, Y, H равна

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Двойственным[3] к базису X, Y, H относительно формы Киллинга является базис

$$X^\times = \frac{1}{4}Y\,, \quad Y^\times = \frac{1}{4}X\,, \quad H^\times = \frac{1}{8}H\,.$$

[1] См. теор. 18.3 на стр. 280.
[2] Ср. с n° 10.1.2 на стр. 150.
[3] См. n° 15.2.1 на стр. 276 части I.

Корреляция формы Киллинга[1] задаёт изоморфизм $\mathfrak{sl}_2 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{sl}_2^*$, переводящий матрицу F в линейный функционал $Z \mapsto (Z, F)$. Тензорное произведение обратного к нему изомофизма $\mathfrak{sl}_2^* \xrightarrow{\sim} \mathfrak{sl}_2$ и тождественного отображения $\mathrm{Id}_{\mathfrak{sl}_2}$ задаёт изоморфизм

$$\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2) \simeq \mathfrak{sl}_2^* \otimes \mathfrak{sl}_2 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{sl}_2 \otimes \mathfrak{sl}_2 \,, \tag{12-10}$$

который переводит тождественный эндоморфизм $\mathrm{Id}_{\mathfrak{sl}_2} \in \mathrm{End}\,\mathfrak{sl}_2$ в *тензор Казимира*

$$X^\times \otimes X + Y^\times \otimes Y + H^\times \otimes H = \frac{1}{4}\,(X \otimes Y + Y \otimes X) + \frac{1}{8}\,H \otimes H\,.$$

Каждое линейное представление $\varrho : \mathfrak{sl}_2 \to \mathrm{End}(V)$ продолжается до линейного отображения

$$\tilde{\varrho} : \mathfrak{sl}_2 \otimes \mathfrak{sl}_2 \to \mathrm{End}(V)\,, \quad A \otimes B \mapsto \varrho(A)\varrho(B)\,. \tag{12-11}$$

переводящее тензор Казимира в оператор[2]

$$K \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{4}\,(XY + YX) + \frac{1}{8}\,H^2\,,$$

который называется *оператором Казимира*.

Упражнение 12.14. Зададим на $\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2)$ и $\mathrm{End}(V)$ структуру $\mathfrak{sl}_2$-модулей по форм. (12-2) на стр. 181, т. е. $F(\varphi) \overset{\text{def}}{=} [\mathrm{ad}_F, \varphi]$ и $F(\psi) \overset{\text{def}}{=} [\varrho(F), \psi]$, где $F \in \mathfrak{sl}_2$, $\varphi \in \mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2)$, $\psi \in \mathrm{End}(V)$. Убедитесь, что композиция $\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2) \to \mathrm{End}(V)$ отображений (12-10) и (12-11) является гомоморфизмом $\mathfrak{sl}_2$-модулей.

Так как тождественный эндоморфизм $\mathrm{Id}_{\mathfrak{sl}_2} \in \mathrm{End}\,\mathfrak{sl}_2$ аннулируется[3] всеми операторами из $\mathfrak{sl}_2$, мы заключаем, что $K \in \mathrm{End}_{\mathfrak{sl}_2}(V)$ и по теореме Бернсайда[4] действует в каждом неприводимом $\mathfrak{sl}_2$-модуле V_m как скалярная гомотетия.

Упражнение 12.15. Убедитесь прямым вычислением, что K коммутирует с X, Y, H и действует на стандартном неприводимом модуле V_m гомотетией с коэффициентом $(m^2 + 2m)/8$.

Лемма 12.4

В любом конечномерном $\mathfrak{sl}_2$-модуле V у каждого $\mathfrak{sl}_2$-подмодуля $U \subset V$ коразмерности 1 имеется дополнительный одномерный[5] $\mathfrak{sl}_2$-подмодуль $L \subset V$, такой, что $V = U \oplus L$.

Доказательство. Поскольку в коммутативной алгебре эндоморфизмов одномерного векторного пространства все коммутаторы нулевые, каждый одномерный $\mathfrak{sl}_2$-модуль автоматически тривиален: $H = [X, Y] = 0$, $2X = [H, X] = 0$, $2Y = [Y, H] = 0$. В частности, фактор модуль V/U по любому подмодулю $U \subset V$ коразмерности 1 тривиален, т. е. все три оператора X, Y, H переводят V в U. Дополнительный к U тривиальный одномерный подмодуль L строится индукцией по $\dim U$. Если подмодуль U тривиален (что так, когда $\dim U = 1$), то и V тривиален, так как по предыдущему $\mathfrak{sl}_2\, V = [\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{sl}_2]\, V \subset \mathfrak{sl}_2\, \mathfrak{sl}_2\, V \subset \mathfrak{sl}_2\, U = 0$. Поэтому любое дополнительное к U

[1] См. n° 15.1.1 на стр. 272 части I.

[2] Здесь мы для упрощения обозначений опускаем символ ϱ и пишем X, Y, Z, имея в виду образы этих матриц в представлении ϱ.

[3] Т. е. $[\mathrm{ad}_F, \mathrm{Id}_{\mathfrak{sl}_2}] = 0$ для всех $F \in \mathfrak{sl}_2$.

[4] См. сл. 9.5 на стр. 135.

[5] И тем самым автоматически тривиальный.

одномерное подпространство $L \subset V$ является искомым подмодулем. Если $U \simeq V_m$ нетривиален и неприводим, оператор $8K/(m^2+2m) : V \to U$ перестановочен с действием $\mathfrak{sl}_2$ и тождественно действует на U по упр. 12.15, т. е. является $\mathfrak{sl}_2$-инвариантным[1] проектором V на U, и можно взять $L = \ker K$. Если подмодуль $U \subset V$ приводим, выберем в нём ненулевой неприводимый подмодуль $W \subsetneq U$ и сначала по индуктивному предположению построим $\mathfrak{sl}_2$-инвариантное разложение фактора $(V/W) = (U/W) \oplus (\tilde{L}/W)$, в котором $\mathfrak{sl}_2$-подмодуль $\tilde{L} \subset V$ таков, что $L \cap U = W$ и $\dim(L/W) = 1$, а затем, применяя индуктивное предположение к паре $W \subset \tilde{L}$, построим инвариантное разложение $\tilde{L} = W \oplus L$. Тривиальный одномерный подмодуль $L \subset \tilde{L} \subset V$ дополнителен к U. □

Теорема 12.2
Всякий конечномерный $\mathfrak{sl}_2$-модуль над полем характеристики нуль вполне приводим, т. е. является прямой суммой стандартных простых модулей V_m из прим. 12.2 на стр. 182.

Доказательство. Чтобы построить $\mathfrak{sl}_2$-инвариантный проектор модуля V на его подмодуль $U \subset V$, рассмотрим в $\mathfrak{sl}_2$-модуле[2] $\mathrm{Hom}(V, U)$ подпространства

$$W = \{\varphi : \varphi|_U \in \Bbbk\,\mathrm{Id}_U\} \quad \text{и} \quad W' = \{\varphi \in W : \varphi|_U = 0\}.$$

Упражнение 12.16. Убедитесь, что $W \supset W'$ являются $\mathfrak{sl}_2$-подмодулями[3] и коразмерность W' в W равна 1.

По предыдущей лемме $W = W' \oplus L$, для некоторого тривиального $\mathfrak{sl}_2$-модуля $L \subset W$. Искомым проектором $V \twoheadrightarrow U$ является ненулевой оператор из одномерного пространства L, который ограничивается на U в точности в Id_U. □

Задачи для самостоятельного решения к §12

Задача 12.1. Покажите, что двумерная алгебра Ли с ненулевой скобкой единственна с точностью до изоморфизма.

Задача 12.2. Покажите, что в любом конечномерном представлении $\mathfrak{sl}_2$ операторы X и Y нильпотентны, а H диагонализуем.

Задача 12.3. Покажите, что для билинейной формы Киллинга[4] $(a, b) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_a \circ \mathrm{ad}_b)$ на $\mathfrak{sl}_2$ при всех $a, b, c \in \mathfrak{sl}_2$ выполняется равенство $([a, b], c) + (b, [a, c]) = 0$.

Задача 12.4. Пусть $\Bbbk = \mathbb{C}$. Напишите коммутационные соотношения на *матрицы Паули*

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

составляющие базис алгебры $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ над $\mathbb{C}$, вычислите в этом базисе матрицу Грама формы Киллинга и выразите двойственный базис $\sigma_1^\times, \sigma_2^\times, \sigma_3^\times$ и тензор Казимира $K \in \mathfrak{sl}_2 \otimes \mathfrak{sl}_2$ через через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

[1] См. формулу (12-3) на стр. 181.
[2] См. формулу (12-2) на стр. 181.
[3] Т. е. $[X, \varphi]$, $[Y, \varphi]$, $[H, \varphi]$ лежат в W (соотв. в W') для любого $\varphi \in W$ (соотв. $\varphi \in W'$).
[4] См. формулу (12-9) на стр. 184.

Задача 12.5 (разложение Клебша – Гордана). Покажите, что при $m \geqslant n$

$$V_m \otimes V_n \simeq V_{m+n} \oplus V_{m+n-2} \oplus V_{m+n-4} \oplus \ldots \oplus V_{m-n}\,.$$

При каких m, n это разложение содержит а) V_0 б) V_1?

Задача 12.6 (инвариантное скалярное произведение). Покажите, что существует единственная с точностью до пропорциональности невырожденная билинейная форма $\beta : V_n \times V_n \to \Bbbk$, такая[1], что $\beta(Fu, w) + \beta(u, Fw) = 0$ для всех $u, w \in V_n$ и $F \in \mathfrak{sl}_2$, причём она симметрична для чётных n и кососимметрична для нечётных.

Задача 12.7. При каких условиях на натуральные числа m, n, k существует ненулевой $\mathfrak{sl}_2$-инвариантный[2] оператор $V_m \otimes V_n \to V_k$? Много ли таких операторов, когда они есть?

Задача 12.8. Разложите в сумму неприводимых $\mathfrak{sl}_2$-модули
а) $W = \mathrm{End}(V_1)$ б) $W^{\otimes 2}$ в) $S^2 W$ г) $\Lambda^2 W$.

Задача 12.9. Покажите, что $S^n(V_2) = \bigoplus\limits_{i=0}^{[n/2]} V_{2n-4i}$.

Задача 12.10. Разложите $S^2 V_2$ в сумму неприводимых $\mathfrak{sl}_2$-модулей и сопоставьте результат с тем, что в пространстве $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2 V_2)$ коник на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V_2^*)$ имеется не проходящая через изображающую конику Веронезе[3] $C = V(1,2) \subset \mathbb{P}_2$ точку $C \in \mathbb{P}_5$ четырёхмерная гиперплоскость, точки которой изображают двойные прямые, касающиеся коники C.

Задача 12.11. Покажите, что $S^2 V_3 = V_2 \oplus V_6$ и сопоставьте это с наличием в пространстве $\mathbb{P}_9 = \mathbb{P}(S^2 V_3)$ квадрик в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V_3^*)$ двумерной плоскости $\Pi \subset \mathbb{P}_9$, состоящей из квадрик, содержащих кубическую кривую Веронезе $C = V(1,3) \subset \mathbb{P}_3$, и дополнительного к ней шестимерного подпространства $H \subset \mathbb{P}_9$, состоящего из двойных сопровождающих касательных плоскостей рациональной нормальной кубики C.

Задача 12.12. В условиях предыдущей задачи покажите, что $\mathfrak{sl}_2$-инвариантная проекция

$$S^2 V_3 \twoheadrightarrow V_2\,,$$

рассматриваемая как квадратичное отображение из пространства V_3 однородных кубических форм от x, y в пространство V_2 квадратичных форм, сопоставляет многочлену $f(x,y) \in V_3$ его *гессиан*

$$H_f = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \in V_2\,.$$

Задача 12.13. Покажите, что $S^2(V_n) = \bigoplus_{k \geqslant 0} V_{2n-2k}$, где при $i < 0$ мы полагаем $V_i = 0$.

Задача 12.14. Разложите $S^3 V_3$ в сумму неприводимых $\mathfrak{sl}_2$-модулей.

Задача 12.15 (взаимность Эрмита). Покажите, что $S^m V_n \simeq S^n V_m$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$.

Задача 12.16. Покажите, что $\Lambda^m V_n \simeq S^m V_{n-m+1}$ для всех $m \leqslant n$.

[1] Форма с этим свойством называется *инвариантной* относительно действия алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$.
[2] См. формулу (12-3) на стр. 181.
[3] См. прим. 6.5 на стр. 90.

§13. Категории и функторы

13.1. Категории. Категория $\mathcal{C}$ это *класс*[1] объектов, обозначаемый $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$, в котором для каждой упорядоченной пары объектов $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ задано *множество* морфизмов

$$\operatorname{Hom}(X,Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)\,.$$

Для разных пар объектов эти множества не пересекаются. Морфизмы удобно представлять себе в виде стрелок $\varphi\colon X \to Y$. Объединение всех стрелок категории $\mathcal{C}$ обозначается

$$\operatorname{Mor}\mathcal{C} = \bigsqcup_{X,Y\in\operatorname{Ob}\mathcal{C}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$$

и тоже является классом, а не множеством. Кроме того, для всех $X, Y, Z \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ имеется отображение

$$\operatorname{Hom}(Y,Z)\times\operatorname{Hom}(X,Y)\to\operatorname{Hom}(X,Z)\,,\quad (\varphi,\psi)\mapsto\varphi\circ\psi\ (=\varphi\psi)\,,$$

которое называется *композицией морфизмов*[2] и ассоциативно в том смысле, что

$$(\chi\circ\varphi)\circ\psi = \chi\circ(\varphi\circ\psi)$$

всякий раз, когда левая или правая часть этого равенства определена. Наконец, каждый объект $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ имеет *тождественный эндоморфизм* $\operatorname{Id}_X \in \operatorname{Hom}(X,X)$, такой, что

$$\varphi\circ\operatorname{Id}_X = \varphi \quad \text{и} \quad \operatorname{Id}_X\circ\psi = \psi$$

для всех морфизмов $\varphi\colon X \to Y$ и $\psi\colon Z \to X$. Выкладка $\operatorname{Id}' = \operatorname{Id}'\circ\operatorname{Id}'' = \operatorname{Id}''$ показывает, что тождественный эндоморфизм единствен. Категория $\mathcal{C}$ называется *малой*, если $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$ это *множество*, а не больший класс. В этом случае $\operatorname{Mor}\mathcal{C}$ тоже является множеством.

Подкатегория $\mathcal{D}\subset\mathcal{C}$ это категория, все объекты, стрелки и композиции которой наследуются из $\mathcal{C}$. Подкатегория называется *полной*, если $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ для всех $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$.

Пример 13.1 (категории, не являющиеся малыми)
Примеры категорий, которые *не* являются малыми, это категория $\mathcal{S}et$ всех множеств и всех отображений между ними, категория $\mathcal{T}op$ топологических пространств и непрерывных отображений, категория $\mathcal{G}rp$ всех групп и их гомоморфизмов, категория $\mathcal{C}mr$ коммутативных колец с единицей и гомоморфизмов, переводящих единицу в единицу, категория $\mathcal{M}od_K$ модулей над коммутативным кольцом K и K-линейных отображений, категория $\mathcal{V}ec_{\Bbbk} = \mathcal{M}od_{\Bbbk}$ векторных пространств над полем $\Bbbk$, категория абелевых групп $\mathcal{A}b = \mathcal{M}od_{\mathbb{Z}}$ и т. п., а также полные подкатегории $\mathcal{grp}\subset\mathcal{G}rp$ конечно представимых групп, $\mathcal{mod}_K\subset\mathcal{M}od_K$ конечно представимых[3] K-модулей, $\mathcal{vec}_{\Bbbk}$ конечномерных векторных пространств и т. п.

[1] Не хотелось бы вдаваться в точную формализацию этого термина (содержательную в той же мере, как формализации арифметики и теории множеств, изучаемые в стандартном курсе математической логики). Для наших нужд достаточно, что такая формализация существует и позволяет говорить, например, о «категории множеств», объекты которой, по понятным причинам, множества не образуют.

[2] Значок композиции «$\circ$», как и знак умножения, принято опускать, когда ясно, о чём речь.

[3] Модуль называется *конечно представимым*, если он изоморфен фактору свободного модуля конечного ранга по конечно порождённому подмодулю.

Пример 13.2 (предпорядки, чумы и топологии)
Каждое множество M с предпорядком[1] $\leqslant$ может рассматриваться как малая категория, объекты которой суть элементы $m \in M$, стрелки суть неравенства:

$$\mathrm{Hom}_M(n,m) = \begin{cases} \text{одноэлементное множество, когда } n \leqslant m, \\ \varnothing \text{ в остальных случаях}, \end{cases}$$

а композиция стрелок $k \leqslant \ell$ и $\ell \leqslant n$ это стрелка $k \leqslant n$. Наличие композиции и тождественных морфизмов обеспечиваются транзитивностью и рефлексивностью отношения $\leqslant$.

Если предпорядок $\leqslant$ кососимметричен, т. е. является частичным порядком[2], то при $m \neq n$ как минимум одно из множеств $\mathrm{Hom}(m,n)$, $\mathrm{Hom}(n,m)$ пусто. Важным примером такой категории-чума[3] является категория $\mathcal{U}(X)$ всех открытых подмножеств топологического пространства X, стрелками в которой являются включения:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}(X)}(U,W) = \begin{cases} \text{вложение } U \hookrightarrow W, \text{ если } U \subseteq W \\ \text{пустое множество, когда } U \nsubseteq W. \end{cases}$$

Пример 13.3 (малые категории и ассоциативные алгебры)
Всякую ассоциативную алгебру A с единицей можно рассматривать как малую категорию с одним объектом $*$ и множеством стрелок $\mathrm{Hom}(*,*) = A$, композиция на котором задаётся умножением в этой алгебре. Наоборот, со всякой малой категорией $\mathcal{C}$ и коммутативным кольцом K с единицей можно связать *алгебру стрелок* $K[\mathcal{C}]$, состоящую из формальных конечных линейных комбинаций стрелок категории $\mathcal{C}$ с коэффициентами в K. Условимся для заданного множества M обозначать через $K \otimes M$ свободный K-модуль с базисом M, образованный всеми конечными формальными линейными комбинациями элементов множества M с коэффициентами из K. Тогда

$$K[\mathcal{C}] \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{X,Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}} K \otimes \mathrm{Hom}(X,Y) = \left\{ \sum x_i \varphi_i \;\middle|\; x_i \in K\,,\ \varphi_i \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \right\}.$$

Умножение стрелок в алгебре $K[\mathcal{C}]$ определяется их композицией в категории $\mathcal{C}$

$$\varphi\psi \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \varphi \circ \psi & \text{если конец } \psi \text{ совпадает с началом } \varphi \\ 0 & \text{во всех прочих случаях} \end{cases}$$

и по дистрибутивности распространяется на произвольные конечные линейные комбинации стрелок. Алгебру $K[\mathcal{C}]$ можно представлять себе как алгебру финитных квадратных матриц[4], строки и столбцы которых занумерованы объектами категории, и в каждой клетке (Y,X) стоят элементы из своего K-модуля $K \otimes \mathrm{Hom}(X,Y)$. Эта алгебра, вообще говоря, некоммутативна и без единицы, однако, для всякого $f \in K[\mathcal{C}]$ существует идемпотент $e_f = e_f^2$ со свойствами

$$e_f \circ f = f \circ e_f = f\,.$$

В качестве такового можно взять сумму тождественных эндоморфизмов Id_X всех объектов X, служащих началами или концами стрелок, линейной комбинацией которых является стрелка f.

[1] Т. е. рефлексивным и транзитивным бинарным отношением, см. упр. 1.15 на стр. 17 части I.
[2] См. n° 1.7 на стр. 17 части I.
[3] Т. е. частично упорядоченного множества, см. предыдущую сноску.
[4] Возможно, бесконечного размера, но с конечным числом ненулевых элементов.

13.1.1. Мономорфизмы, эпиморфизмы и изоморфизмы. Стрелка φ категории $\mathcal{C}$ называется *мономорфизмом*[1] (соотв. *эпиморфизмом*[2]), если на неё можно сокращать слева (соотв. справа), т. е. когда $\varphi\alpha = \varphi\beta \Rightarrow \alpha = \beta$ (соотв. $\alpha\varphi = \beta\varphi \Rightarrow \alpha = \beta$). Мономорфные и эпиморфные стрелки обозначаются $\hookrightarrow$ и $\twoheadrightarrow$ соответственно. Стрелка $\varphi : X \to Y$ называется *обратимой* или *изоморфизмом* и обозначается $\xrightarrow{\sim}$, если существует такая стрелка $\psi : Y \to X$, что $\varphi\psi = \mathrm{Id}_Y$ и $\psi\varphi = \mathrm{Id}_X$. В этой ситуации объекты X и Y называются *изоморфными*, а морфизмы φ и ψ — *обратными* друг к другу. Например, в предупорядоченном множестве M, рассматриваемом как категория[3], изоморфность элементов m и n означает, что $m \leqslant n$ и $n \leqslant m$, т. е. m и n принадлежат одному классу эквивалентности, ассоциированному с предпорядком.

13.1.2. Подобъекты и фактор объекты. Класс инъективной стрелки с концом в X по модулю её умножения справа на обратимые стрелки называется *подобъектом* объекта X, а класс сюрьективной стрелки с началом в X по модулю левого умножения на обратимые стрелки — *фактор объектом* объекта X. Категория называется *умеренно мощной*[4], если подобъекты любого её объекта образуют множество. Все категории из прим. 13.3 умеренно мощны.

Упражнение 13.1 (частичный порядок на под- и фактор объектах). Проверьте, что в умеренно мощной категории отношение $\varphi \subseteq \psi$, означающее, что $\varphi = \psi\xi$ для некоторой стрелки ξ, задаёт частичный порядок на множестве подобъектов, а отношение $\varphi \succcurlyeq \psi$, означающее, что $\varphi = \xi\psi$ для некоторой стрелки ξ, задаёт частичный порядок на множестве фактор объектов.

Пример 13.4 (конечные упорядоченные множества и комбинаторные симплексы)
Обозначим через Δ_{big} категорию, объектами которой являются конечные упорядоченные множества X, а морфизмами — сохраняющие порядок[5] отображения. Категория Δ_{big} не является малой[6], но содержит полную малую *симплициальную подкатегорию* $\Delta \subset \Delta_{\mathrm{big}}$, объектами которой являются конечные подмножества в $\mathbb{Z}$ вида

$$[n] \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{0,\, 1,\, \dots\, ,\, n\}\,, \quad n \geqslant 0\,, \tag{13-1}$$

со стандартным порядком. Множество (13-1) называется n-мерным *комбинаторным симплексом*, а категория Δ — *симплициальной категорией*. Для любого $X \in \mathrm{Ob}\,\Delta_{\mathrm{big}}$ имеется *единственный* изоморфизм $n_X : X \xrightarrow{\sim} [n]$ с *единственным* $[n] \in \mathrm{Ob}\,\Delta$, а именно нумерация элементов X в порядке возрастания.

Упражнение 13.2. Сколько всего стрелок в множестве $\mathrm{Hom}_\Delta([n],[m])$? Сколько среди них инъективных? Сколько сюрьективных?

13.1.3. Обращение стрелок. С каждой категорией $\mathcal{C}$ связана *противоположная* категория $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ с теми же объектами, но с обращённым направлением всех стрелок:

$$\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^{\mathrm{op}} = \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}\,, \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)\,, \quad \varphi^{\mathrm{op}} \circ \psi^{\mathrm{op}} = (\psi \circ \varphi)^{\mathrm{op}}\,.$$

[1] А также *вложением* или *инъективным* морфизмом.
[2] А также *наложением* или *сюрьективным* морфизмом.
[3] См. прим. 13.2 на стр. 189.
[4] По-английски: *well powered*.
[5] Т. е. такие отображения $\varphi : X \to Y$, что $x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) \leqslant \varphi(x_2)$ для всех $x_1, x_2 \in X$.
[6] По упомянутым выше логическим причинам, см. сноску на стр. 188.

На языке алгебр такое обращение стрелок означает переход от алгебры $C = K[\mathcal{C}]$ к противоположной алгебре C^{op} из тех же элементов, но с происходящим в противоположном порядке умножением. Мономорфизмы и подобъекты категории $\mathcal{C}$ являются эпиморфизмами и фактор объектами категории $\mathcal{C}^{\text{op}}$ и наоборот.

13.2. Функторы. Функтор[1] $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{D}$ это отображение классов $\text{Ob}\,\mathcal{C} \to \text{Ob}\,\mathcal{D}$, $X \mapsto F(X)$, и набор таких отображений множеств[2]

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y)), \quad \varphi \mapsto F(\varphi), \tag{13-2}$$

что $F(\text{Id}_X) = \text{Id}_{F(X)}$ для всех $X \in \text{Ob}\,\mathcal{C}$ и $F(\varphi \circ \psi) = F(\varphi) \circ F(\psi)$ всякий раз, когда композиция $\varphi \circ \psi$ определена. На языке ассоциативных алгебр, каждый функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ задаёт *гомоморфизм* алгебр стрелок $F : K[\mathcal{C}] \to K[\mathcal{D}]$. Если все отображения (13-2) сюрьективны, функтор F называется *полным*[3]. Образ такого функтора является полной подкатегорией. Если все отображения (13-2) инъективны, функтор F называется *строгим*[4]. Такой функтор задаёт вложение алгебр стрелок. Полные строгие функторы иначе называются *вполне строгими*.

Простейшие функторы — это *тождественный функтор* $\text{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, тождественно действующий на объектах и морфизмах, и *забывающие функторы*, действующие из какой-либо категории множеств с дополнительной структурой[5], морфизмы в которой суть сохраняющие эту структуру отображения множеств, в категорию $\mathcal{S}et$ всех множеств — такие функторы просто забывают о структуре. Забывающий функтор не строг, если имеются различные морфизмы структур, одинаково действующие на подлежащих множествах, и не полон, если не всякое отображение множеств сохраняет рассматриваемую структуру.

Пример 13.5 (геометрическая реализация комбинаторных симплексов)
Зададим функтор $\Delta \to \mathcal{T}op$ из категории комбинаторных симплексов в категорию топологических пространств, сопоставляя n-мерному комбинаторному симплексу $[n]$ стандартный n-мерный симплекс[6]

$$\Delta^n = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum x_\nu = 1\,,\ x_\nu \geqslant 0 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}\,, \tag{13-3}$$

а стрелке $\varphi : [n] \to [m]$ — единственное аффинное отображение $\varphi_* : \Delta^n \to \Delta^m$, действующее на базисные векторы по правилу $e_\nu \mapsto e_{\varphi(\nu)}$. Это строгий, но не полный функтор. Вложение $\varphi_* : \Delta^{n-1} \hookrightarrow \Delta^n$ в качестве гиперграни, не содержащей i-ю вершину e_i, соответствует вложению $\partial_n^i : [n-1] \hookrightarrow [n]$, образ которого не содержит i. Поэтому стрелка ∂_n^i называется *i-й гранью* симплекса $[n]$.

13.2.1. Предпучки. Функтор $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \to \mathcal{D}$ называется *контравариантным функтором* из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{D}$ или *предпучком*[7] объектов категории $\mathcal{D}$ на категории $\mathcal{C}$. Такой функтор оборачивает композицию: $F(\varphi \circ \psi) = F(\psi) \circ F(\varphi)$ и на языке ассоциативных алгебр является *антигомоморфизмом* алгебр стрелок.

[1]Иногда вместо «функтор» говорят *ковариантный функтор*.
[2]По одному отображению для каждой упорядоченной пары объектов $X, Y \in \text{Ob}\,\mathcal{C}$.
[3]По-английски: *full*.
[4]По-английски: *faithful*.
[5]Например, геометрической — такой, как топология или структура гладкого многообразия, или алгебраической — такой, как структура группы, кольца или модуля.
[6]Т. е. выпуклую оболочку концов стандартных базисных векторов $e_0, e_1, \dots, e_n$ в $\mathbb{R}^{n+1}$.
[7]Термин «предпучок» чаще употребляется в ситуациях, когда категория $\mathcal{C}$ малая.

Пример 13.6 (триангулированные пространства)
Обозначим через $\Delta_s \subset \Delta$ неполную подкатегорию, объектами которой тоже являются комбинаторные симплексы, $\mathrm{Ob}\,\Delta_s = \mathrm{Ob}\,\Delta$, но в качестве морфизмов допускаются только *строго возрастающие*[1] отображения.

Упражнение 13.3. Покажите, что каждая нетождественная стрелка категории $\Delta_s \subset \Delta$ является композицией отображений граней $\partial_n^i : [n-1] \hookrightarrow [n]$ из прим. 13.5.

Категория Δ_s называется *полусимплициальной категорией*. Предпучок множеств $X : \Delta_s^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}et$ на полусимплициальной категории Δ_s называется *полусимплициальным множеством* и является ни чем иным, как комбинаторным описанием *триангулированного топологического пространства* $|X|$, которое называется *геометрической реализацией* полусимплициального множества X. В самом деле, функтор X задаёт для каждого целого неотрицательного n множество $X_n = X([n])$, каждый элемент которого мы будем воспринимать как стандартный n-мерный симплекс (13-3). Таким образом, каждое множество X_n представляет собою набор одинаковых n-мерных симплексов Δ^n. Пространство $|X|$ склеивается из них так. Стрелки $\varphi : [n] \to [m]$ категории Δ_s биективно соответствуют n-мерным граням m-мерного симплекса Δ^m. Будем воспринимать отображение $X(\varphi) : X_m \to X_n$, которое функтор X сопоставляет стрелке φ, как *правило склейки*: оно указывает каждому m-мерному симплексу $x \in X_m$, какой именно n-мерный симплекс $X(\varphi)x \in X_n$ надлежит приклеить к x в качестве φ-той n-мерной грани.

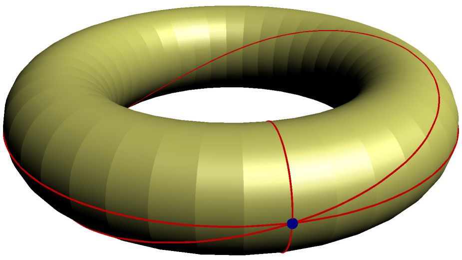


Рис. 13◊1. Триангуляция тора.

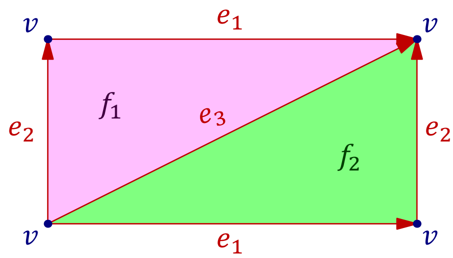


Рис. 13◊2. Симплексы триангуляции.

Так, на рис. 13◊1 показана стандартная триангуляция двумерного тора, склеенного из прямоугольника, изображённого на рис. 13◊2. Эта триангуляция состоит из одного 0-мерного симплекса, в который склеятся все вершины прямоугольника, трёх 1-мерных симплексов, в которые склеятся, соответственно, две горизонтальных стороны, две вертикальных стороны, и диагональ прямоугольника, а также пары 2-мерных симплексов, на которые прямоугольник разрезается диагональю. Стрелки на рис. 13◊2 изображают порядок на множестве вершин каждого симплекса и направлены от меньших вершин к большим. Вертикальные рёбра e_2 с рис. 13◊2 изображаются на рис. 13◊1 меридианом тора, а горизонтальные рёбра e_1 — экватором тора. Соответствующее полусимплициальное множество X имеет

$$X_0 = \{v\}\,,\ X_1 = \{e_1, e_2, e_3\}\,,\ X_2 = \{f_1, f_2\} \text{ и } X_i = \varnothing \text{ для всех } i \geqslant 3\,,$$

а отображения склейки $X(\varphi)$ действуют по правилам

$$\begin{aligned} X(\partial_1^0) = X(\partial_1^1) : X_1 \to X_0\,, &\quad e_i \mapsto v \text{ для всех } i = 1,2,3 \\ X(\partial_2^0) : X_2 \to X_1\,, &\quad f_1 \mapsto e_1\,,\ f_2 \mapsto e_2\,, \\ X(\partial_2^1) : X_2 \to X_1\,, &\quad f_1 \mapsto e_3\,,\ f_2 \mapsto e_3\,, \\ X(\partial_2^2) : X_2 \to X_1\,, &\quad f_1 \mapsto e_2\,,\ f_2 \mapsto e_1\,. \end{aligned} \tag{13-4}$$

[1] Т. е. сохраняющие порядок и инъективные.

Пример 13.7 (симплициальные множества)
Предпучок множеств $X : \Delta^{\text{op}} \to \mathcal{S}et$ на всей симплициальной категории называется *симплициальным множеством*. Из каждого симплициального множества X также, как и в предыдущем примере, можно изготовить топологическое пространство $|X|$, называемое его *геометрической реализацией*. Для этого, как и выше, сопоставим каждой точке $x \in X_n$ стандартный n-мерный симплекс Δ^n_x и обозначим через $\varphi^* \stackrel{\text{def}}{=} X(\varphi)$ отображение $X_m \to X_n$, которое функтор X сопоставляет каждому неубывающему отображению $\varphi : [n] \to [m]$ из категории Δ, а через $\varphi_* : \Delta^n \to \Delta^m$ — аффинное отображение симплексов, переводящее вершины симплекса Δ^n в вершины симплекса Δ^m так, как предписывает φ. После чего для каждого m, каждого $x \in X_m$ и каждой стрелки $\varphi : [n] \to [m]$ склеим каждую точку $s \in \Delta^n_{\varphi^*(x)}$ с точкой $\varphi_*(s) \in \Delta^m_x$. На языке формул результат такой склейки описывается как топологическое фактор пространство дизъюнктного объединения[1] $\bigsqcup_{n \geqslant 0} X_n \times \Delta^n$ по наименьшему отношению эквивалентности, содержащему отождествления $(\varphi^* x, s) \simeq (x, \varphi_* s)$ для всех точек $x \in X_m$, $s \in \Delta^n$ и стрелок $\varphi : [n] \to [m]$.

Если стрелка $\varphi : [n] \to [m]$ является композицией наложения $\sigma : [n] \twoheadrightarrow [k]$ и вложения $\delta : [k] \hookrightarrow [m]$, то каждый n-мерный симплекс Δ^n_z, лежащий в образе φ^* и помеченный точкой $z = \sigma^* y = \sigma^* \delta^* x$, вклеится в пространство $|X|$ в виде k-мерного симплекса $\Delta^k_y = \sigma_* \Delta^n_z$, полученного из Δ^n_z аффинно линейной проекцией $\sigma_* : \Delta^n \twoheadrightarrow \Delta^k$. При этом он окажется δ-той k-мерной гранью m-мерного симплекса Δ^m_x. Таким образом, каждый симплекс $z \in X_n$, лежащий в образе отображения σ^*, отвечающего какой-нибудь стрелке $\sigma : [n] \to [k]$ с $k < n$, виден в итоговом пространстве $|X|$ как симплекс меньшей, чем n размерности. Такие симплексы называются *вырожденными*. Их использование позволяет описывать более общие клеточные структуры, чем стандартные триангуляции. Платой за это является громоздкость получающегося описания: для любого функтора $X : \Delta^{\text{op}} \to \mathcal{S}et$ каждое из множеств X_n непусто.

Например, n-мерная сфера S^n гомеоморфна топологическому фактору стандартного n-мерного симплекса по его границе[2] $S^n \simeq \Delta^n / \partial \Delta^n$. Этот гомеоморфизм задаёт на сфере S^n клеточную структуру, состоящую из одной нульмерной вершины, в которую склеится граница симплекса, и одной n-мерной клетки, в которую превратится весь симплекс. Она описывается предпучком $X : \Delta^{\text{op}} \to \mathcal{S}et$, у которого при всех k множество $X_k = X([k])$ получается из множества $\text{Hom}_\Delta([k], [n])$ отождествлением всех неэпиморфных стрелок в один элемент, а правило склейки $\varphi^* : X_m \to X_k$, отвечающее неубывающему отображению $\varphi : [k] \to [m]$, переводит класс стрелки $\zeta : [m] \to [n]$ в класс стрелки $\zeta\varphi : [k] \to [n]$.

Упражнение 13.4. Убедитесь, что это описание корректно задаёт предпучок X с геометрической реализацией $|X| \simeq S^n$, и найдите количество элементов в каждом множестве X_k, $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Пример 13.8 (предпучки и пучки на топологических пространствах)
Исторически, термин «предпучок» впервые возник в контексте категории $\mathcal{C} = \mathcal{U}(X)$ всех открытых подмножеств $U \subset X$ заданного топологического пространства X. Предпучок

$$F : \mathcal{U}(X)^{\text{op}} \to \mathcal{D}$$

[1] В котором множества X_n рассматриваются с *дискретной*, а симплексы $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ со стандартной топологией объемлющего вещественного аффинного пространства.

[2] Т. е. склеивании всех точек границы в одну. Например, двумерная сфера S^2 получается таким способом из треугольника.

сопоставляет каждому открытому множеству $U \subset X$ объект $F(U) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$, который называется *сечениями* предпучка F над U. В зависимости от категории $\mathcal{D}$ сечения могут образовывать множество, кольцо, алгебру, векторное или топологическое пространство и т. п. Морфизм $F(W) \to F(U)$, отвечающий включению $U \subset W$, называется *ограничением сечений*, определённых над W, на подмножество U, а результат его применения к сечению $s \in F(W)$ обозначается через $s|_U$. Вот несколько типичных примеров таких предпучков:

1) предпучок Γ_E локальных сечений непрерывного отображения $p: E \to X$ имеет в качестве $\Gamma_E(U)$ множество таких непрерывных отображений $s: U \to E$, что[1] $p \circ s = \mathrm{Id}_U$, а его отображения ограничения — это обычные ограничения сечений с большего подмножества на меньшее

2) беря в предыдущем примере в качестве отображения проекцию $p: X \times Y \to X$, получаем предпучок локальных непрерывных отображений $\mathcal{C}^0(X, Y)$ пространства X в пространство Y, имеющий в качестве сечений над $U \subset X$ непрерывные отображения $s: U \to Y$

3) дальнейшими специализациями являются так называемые *структурные предпучки* $\mathcal{O}_X$: предпучок дифференцируемых функций $X \to \mathbb{R}$ на гладком вещественном многообразии X, предпучок локальных голоморфных функций $X \to \mathbb{C}$ на комплексно аналитическом многообразии X, предпучок локальных рациональных функций $X \to \Bbbk$ на алгебраическом многообразии X над полем $\Bbbk$ и т. п. (все они являются предпучками алгебр над соответствующим полем)

4) *постоянный* предпучок S имеет в качестве $S(U)$ одно и то же фиксированное множество S для всех $U \subset X$, и все его отображения ограничения — тождественные морфизмы Id_S.

Предпучок F называется *пучком*, если для любого семейства открытых подмножеств U_i и любого набора таких локальных сечений $s_i \in F(U_i)$, что $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ при всех i, j, существует единственное такое сечение $s \in F(\bigcup_i U_i)$, что $s|_{U_i} = s_i$ при всех i. В случае, когда имеется не более одного такого сечения (но может не быть и ни одного), предпучок F называется *отделимым*. Все предпучки (1) – (4) отделимы, и только последний из них — постоянный *предпучок* — не является пучком, поскольку для непересекающихся открытых множеств U_1, U_2 не всякая пара констант $s_i \in S(U_i)$ является ограничением одной константы $s \in S(U_1 \sqcup U_2)$. Тем не менее, наряду с постоянным предпучком в природе имеется и

5) *постоянный пучок* $S^\sim$, у которого $S^\sim(U)$ это *непрерывные* отображения $U \to S$ в множество S, рассматриваемое с *дискретной* топологией, или — что то же самое — *локально* постоянные функции со значениями в S.

Упражнение 13.5. Опишите множество первообразных действительной функции $1/x$.

13.2.2. Функторы Hom. С каждым объектом $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ любой категории $\mathcal{C}$ связаны функтор

$$h^X: \mathcal{C} \to \mathcal{S}et, \quad Y \mapsto h^X(Y) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}(X, Y),$$

переводящий стрелку $\varphi: Y_1 \to Y_2$ в левое умножение на эту стрелку

$$\varphi_*: \mathrm{Hom}(X, Y_1) \to \mathrm{Hom}(X, Y_2), \quad \psi \mapsto \varphi \circ \psi,$$

[1] Это требование означает, что каждая точка $x \in U$ отображается в слой $p^{-1}(x)$ над нею.

а также предпучок

$$h_X : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et\,, \quad Y \mapsto h_X(Y) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}(Y, X)\,,$$

переводящий стрелку $\varphi : Y_1 \to Y_2$ в отображение правого умножения на эту стрелку

$$\varphi^* : \mathrm{Hom}(Y_2, X) \to \mathrm{Hom}(Y_1, X)\,, \quad \psi \mapsto \psi \circ \varphi\,.$$

Например, предпучок $h_{[n]} : \varDelta_s \to \mathcal{S}et$ на полусимплициальной категории $\varDelta_s$ задаёт стандартную триангуляцию n-мерного симплекса: множество $h_{[n]}([k]) = \mathrm{Hom}([k],[n])$ её k-мерных симплексов — это в точности множество всех k-мерных граней комбинаторного симплекса $[n]$. Предпучок $h_U : \mathcal{U}(X) \to \mathcal{S}et$ на топологическом пространстве X имеет ровно одно сечение над всеми $W \subseteq U$ и пустое множество сечений над любым $W \nsubseteq U$.

Пример 13.9 (двойственность в категории векторных пространств)
Предпучок $h_{\Bbbk} : \mathcal{V}ec_{\Bbbk}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ сопоставляет векторному пространству V двойственное векторное пространство $h_{\Bbbk}(V) = \mathrm{Hom}(V, \Bbbk) = V^*$, а линейному отображению $\varphi : V \to W$ — двойственное отображение $\varphi^* : W^* \to V^*$, переводящее линейную форму $\xi : W \to \Bbbk$ в линейную форму $\xi \circ \varphi : V \to \Bbbk$.

Пример 13.10 (двойственность конечных упорядоченных множеств)
Это комбинаторная версия предыдущего примера. Обозначим через через ∇_{big} категорию конечных упорядоченных множеств из не менее двух элементов, морфизмами в которой являются неубывающие отображения, переводящие минимальный элемент в минимальный, а максимальный — в максимальный[1]. Тавтологическое включение $\nabla_{\mathrm{big}} \hookrightarrow \varDelta_{\mathrm{big}}$ является строгим, но не полным функтором. Предпучки

$$h_{[1]} : \varDelta_{\mathrm{big}}^{\mathrm{op}} \to \nabla_{\mathrm{big}} \quad \text{и} \quad h_{[1]} : \nabla_{\mathrm{big}}^{\mathrm{op}} \to \varDelta_{\mathrm{big}}$$

переводят упорядоченные множества $X \in \mathrm{Ob}\,\varDelta_{\mathrm{big}}$ и $Y \in \mathrm{Ob}\,\nabla_{\mathrm{big}}$ в множества

$$X^* \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\varDelta_{\mathrm{big}}}(X, [1]) \quad \text{и} \quad Y^* \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\nabla_{\mathrm{big}}}(Y, [1])\,,$$

порядок на которых задаётся поточечным сравнением значений:

$$\varphi \leqslant \psi\,, \text{ если } \varphi(x) \leqslant \psi(x) \text{ для всех } x.$$

Стрелка $\varphi : Z_1 \to Z_2$ переводится обоими функторами в морфизм правого умножения

$$\varphi^* : \mathrm{Hom}(Z_2, [1]) \to \mathrm{Hom}(Z_1, [1])\,, \quad \xi \mapsto \xi \circ \varphi\,.$$

Иначе можно сказать, что элементы множества Z^* — это *дедекиндовы сечения* множества Z, т. е. такие разбиения $Z = Z_0 \sqcup Z_1$, что $z_0 < z_1$ для всех $z_0 \in Z_0$, $z_1 \in Z_1$, причём оба подмножества Z_0, Z_1 должны быть непустыми, если $Z \in \mathrm{Ob}\,\nabla_{\mathrm{big}}$, а если $Z \in \mathrm{Ob}\,\varDelta_{\mathrm{big}}$, это ограничение снимается. Обратите внимание, что сечения ведут себя *контра*вариантно по отношению к морфизмам: при наличии неубывающего отображения $Z_1 \to Z_2$ разбиение множества Z_2 индуцирует разбиение на Z_1, но не наоборот.

[1] Отметим, что минимальный и максимальный элементы различны.

13.3. Естественные преобразования. Пусть имеются функторы $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Занумерованное объектами $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ семейство стрелок $f_X : F(X) \to G(X)$ в категории $\mathcal{D}$ называется *естественным* или *функториальным преобразованием* F в G, если для любой стрелки $\varphi : X \to Y$ из $\mathcal{C}$ возникающая в категории $\mathcal{D}$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(\varphi)"] \arrow[d, "f_X"'] & F(Y) \arrow[d, "f_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(\varphi)"'] & G(Y) \end{tikzcd} \tag{13-5}$$

коммутативна. На языке алгебр, гомоморфизм $F : K[\mathcal{C}] \to K[\mathcal{D}]$ наделяет алгебру $K[\mathcal{D}]$ структурой модуля над алгеброй $K[\mathcal{C}]$, в которой умножение элемента $b \in K[\mathcal{D}]$ на элемент $a \in K[\mathcal{C}]$ определяется правилом $ab \overset{\text{def}}{=} F(a)\,b$. Пара функторов F, G задаёт на алгебре $K[\mathcal{D}]$ две различных структуры $K[\mathcal{C}]$-модуля, и естественное преобразование $f : F \to G$ это гомоморфизм $K[\mathcal{C}]$-модулей, переводящий стрелку ψ с концом в $F(X)$ в стрелку $f_X \circ \psi$ с концом в $G(X)$, а все не заканчивающиеся в объектах вида $F(X)$ стрелки — в нуль.

Упражнение 13.6. Убедитесь, что $K[\mathcal{C}]$-линейность описанного отображения действительно означает, что для любого $\varphi \in K[\mathcal{C}]$ действие на $K[\mathcal{D}]$ операторов $F(\varphi)$ и $G(\varphi)$ удовлетворяет соотношению $f \circ F(\varphi) = G(\varphi) \circ f$.

13.3.1. Категории функторов. Функторы из малой категории $\mathcal{C}$ в произвольную категорию $\mathcal{D}$ образуют категорию $\mathcal{F}un(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, объектами которой являются функторы $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, а морфизмами — естественные преобразования $f : F \to G$. Для малой категории $\mathcal{C}$ мы будем обозначать категорию предпучков $\mathcal{F}un(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathcal{D})$ через $p\mathcal{S}h(\mathcal{C}, \mathcal{D})$. Опущенная буква $\mathcal{D}$ в этой записи по умолчанию означает, что $\mathcal{D} = \mathcal{S}et$, т. е. $p\mathcal{S}h(\mathcal{C}) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{F}un(\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathcal{S}et)$.

Упражнение 13.7. Проверьте, что описанное в n° 13.2.2 сопоставление $X \mapsto h_X$ задаёт функтор $\mathcal{C} \to p\mathcal{S}h(\mathcal{C})$, а сопоставление $X \mapsto h^X$ — предпучок $\mathcal{C}^{\text{op}} \to \mathcal{F}un(\mathcal{C}, \mathcal{S}et)$.

Пример 13.11 (категория предпучков)

Предпучки на категории $\mathcal{U}(X)$ открытых множеств топологического пространства X обычно называются просто предпучками на X. Они образуют категорию, обозначаемую $p\mathcal{S}h(X)$. Морфизм предпучков $f : F \to G$ на X задаётся набором согласованных с ограничениями отображений между множествами сечений $f_U : F(U) \to G(U)$, по одному отображению для каждого открытого $U \subset X$. Согласованность с ограничениями означает, что $f_W(s)|_U = f_U(s|_U)$ для любой пары вложенных открытых множеств $U \subset W$ и любого сечения $s \in F(W)$. Пучки и отделимые предпучки[1] на X составляют полные подкатегории $\mathcal{S}h(X)$ и $sp\mathcal{S}h(X)$ в категории $p\mathcal{S}h(X)$ всех предпучков.

Пример 13.12 (категория симплициальных множеств)

Предпучки $X : \Delta \to \mathcal{S}et$ на симплициальной категории[2] Δ, образуют категорию, морфизмами $X \to Y$ в которой являются наборы отображений $f_n : X_n \to Y_n$, согласованные со склейкой, т. е. такие, что для любого симплекса $x \in X_m$ и неубывающего отображения $\varphi : [n] \to [m]$ из Δ в Y_n выполняется равенство $f_n(\varphi^* x) = \varphi^* f_m(x)$. На геометрическом языке такому отображению отвечает непрерывное отображение $f : |X| \to |Y|$, при котором образ каждого симплекса Δ_x^n в

[1] См. прим. 13.8 на стр. 193.
[2] См. прим. 13.7 на стр. 193.

пространстве[1] $|X|$ отображается на образ симплекса $\varDelta^n_{f_n(x)}$ в пространстве $|Y|$ так, что все соотношения инцидентности[2] между симплексами при этом сохраняются.

13.3.2. Эквивалентности категорий. Категории $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ называются *эквивалентными*, если между ними есть такие функторы $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, что композиция GF естественно изоморфна тождественному функтору $\mathrm{Id}_\mathcal{C}$, а композиция FG естественно изоморфна $\mathrm{Id}_\mathcal{D}$, т. е. имеются функториальные по $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ и $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ преобразования

$$GF(X) \xrightarrow{\sim} X \quad \text{и} \quad FG(Y) \xrightarrow{\sim} Y\,, \tag{13-6}$$

являющиеся для всех X и Y изоморфизмами в категориях $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ соответственно. Такие функторы F и G называются *квазиобратными* друг другу *эквивалентностями категорий*. Подчеркнём, что наличие изоморфизмов (13-6) не означает равенств $FG = \mathrm{Id}_\mathcal{D}$ или $GF = \mathrm{Id}_\mathcal{C}$: объекты $GF(X)$ и X могут быть различны, как и объекты $FG(Y)$ и Y.

Пример 13.13 (выбор базиса)
Зафиксируем поле $\Bbbk$ и обозначим через $\mathcal{vec}$ категорию конечномерных векторных пространств над $\Bbbk$, а через $\mathcal{coord} \subset \mathcal{vec}$ — её полную малую подкатегорию со счётным множеством объектов, коими являются *координатные* пространства $\Bbbk^n$, где $n \geqslant 0$ и $\Bbbk^0 = \{0\}$. Зафиксируем в каждом пространстве $V \in \operatorname{Ob}\mathcal{vec}$ какой-нибудь базис, т. е. выберем для каждого $V \in \operatorname{Ob}\mathcal{vec}$ изоморфизм[3]

$$f_V : V \xrightarrow{\sim} \Bbbk^{\dim(V)}, \tag{13-7}$$

причём для всех координатных пространств положим $f_{\Bbbk^n} = \mathrm{Id}_{\Bbbk^n}$. Рассмотрим функтор

$$F : \mathcal{vec} \to \mathcal{coord}\,, \quad V \mapsto \Bbbk^{\dim V},$$

переводящий стрелку $\varphi : V \to W$ в стрелку $F(\varphi) = f_W \circ \varphi \circ f_V^{-1}$, которую можно воспринимать как матрицу оператора φ в выбранных базисах пространств V, W. Покажем, что F является эквивалентностью категорий, квазиобратной к тавтологическому вложению

$$G : \mathcal{coord} \hookrightarrow \mathcal{vec}\ .$$

По построению, имеется точное равенство[4] $FG = \mathrm{Id}_{\mathcal{coord}}$. Противоположная композиция

$$GF : \mathcal{vec} \to \mathcal{vec}$$

принимает значения в несопоставимой с $\mathcal{vec}$ по мощности малой подкатегории $\mathcal{coord} \subset \mathcal{vec}$. Однако изоморфизмы (13-7) задают естественное преобразование из $\mathrm{Id}_{\mathcal{vec}}$ в GF, т. к. в силу определения действия функтора F на стрелки все диаграммы (13-5) коммутативны:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Id}_{\mathcal{vec}}(V) = V \arrow[r, "\varphi = \mathrm{Id}_{\mathcal{vec}}(\varphi)"] \arrow[d, "f_V"'] & W = \mathrm{Id}_{\mathcal{vec}}(W) \arrow[d, "f_W"] \\
GF(V) = \Bbbk^{\dim V} \arrow[r, "GF(\varphi) = f_W \circ \varphi \circ f_V^{-1}"] & \Bbbk^{\dim W} = GF(W)\,.
\end{tikzcd}$$

Тем самым, тождественный функтор $\mathrm{Id}_{\mathcal{vec}}$ естественно изоморфен композиции GF.

[1]Этот образ, вообще говоря, может быть симплексом меньшей, чем n, размерности.
[2]Т. е. отношения вида «симплекс a является φ-той гранью (или ψ-тым вырождением) симплекса b».
[3]Переводящий выбранный базис в стандартный базис пространства $\Bbbk^n$, см. сл. 7.4 на стр. 117 части I.
[4]А не просто изоморфизм функторов.

Упражнение 13.8. Покажите, что категория Δ_{big} канонически эквивалентна своей малой симплициальной подкатегории[1] $\Delta \subset \Delta_{\text{big}}$.

Предложение 13.1
Функтор $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ тогда и только тогда задаёт эквивалентность категорий, когда он вполне строг[2] и каждый объект $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{D}$ изоморфен объекту вида $G(X)$ для некоторого (зависящего от Y) объекта[3] $X = X(Y) \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$.

Доказательство. Пусть для каждого $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{D}$ указаны объект $X = X(Y) \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ и изоморфизм $f_Y : Y \xrightarrow{\sim} G(X)$, причём $f_{G(X)} = \operatorname{Id}_{G(X)}$ для $Y = G(X)$. Рассмотрим функтор

$$F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}\,, \quad Y \mapsto X(Y)$$

переводящий стрелку $\varphi : Y_1 \to Y_2$ в такую стрелку $\psi : X(Y_1) \to X(Y_2)$, что[4] $G(\psi) = f_{Y_2} \circ \varphi \circ f_{Y_1}^{-1}$. Тогда $FG = \operatorname{Id}_{\mathcal{C}}$, и для любой стрелки $\varphi : Y_1 \to Y_2$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Id}_{\mathcal{D}}(Y_1) = Y_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f_{Y_1}"'] & Y_2 = \operatorname{Id}_{\mathcal{D}}(Y_2) \arrow[d, "f_{Y_2}"] \\
GF(Y_1) = X_1 \arrow[r, "GF(\varphi)=G(\psi)"] & X_2 = GF(Y_2)\,.
\end{tikzcd}$$

Таким образом, $f_Y : Y \xrightarrow{\sim} G(X) = GF(Y)$ задают естественный изоморфизм тождественного функтора $\operatorname{Id}_{\mathcal{D}}$ с композицией GF. □

Упражнение 13.9. Покажите, что функтор дуализации из прим. 13.10 и ограничение функтора дуализации из прим. 13.9 на полную подкатегорию конечномерных пространств являются квазиобратными самим себе антиэквивалентностями[5] категорий.

13.4. Представимые функторы. Предпучок $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \to \mathcal{S}et$, естественно изоморфный предпучку $h_X : Y \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ для некоторого $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$, называется *представимым*, и объект X в этом случае называют *представляющим* предпучок F. Двойственным образом, ковариантный функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ называется *копредставимым*, если он естественно изоморфен функтору $h^X : Y \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ для некоторого объекта X, который в этом случае называется *копредставляющим* функтор F.

Упражнение 13.10. Убедитесь, что тензорное произведение конечномерных векторных пространств $U \otimes V$ копредставляет функтор $\mathcal{V}ec \to \mathcal{S}et$, сопоставляющий векторному пространству W множество билинейных отображений $U \times V \to W$.

Множество $X_n = X([n])$ всех n-мерных симплексов триангулированного топологического пространства $X : \Delta_{\text{s}}^{\text{op}} \to \mathcal{S}et$ можно описать как множество всех *симплициальных* отображений $\Delta^n \to X$ из стандартным образом триангулированного n-мерного симплекса $\Delta^n = h_{[n]}$ в триангулированное пространство X, т. е. как $\operatorname{Hom}_{p\mathcal{S}h(\Delta_{\text{s}})}(h_{[n]}, X)$. Прямым обобщением этого наблюдения является

[1]См. прим. 13.4 на стр. 190.

[2]Т. е. все отображения $G : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X), G(Y))$ являются изоморфизмами.

[3]Функторы G, обладающие этим свойством, называются *по существу сюръективными* (по-английски: *essentially surjective*).

[4]Поскольку $G : \operatorname{Hom}(X_1, X_2) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(G(X_1), G(X_2))$ является изоморфизмом, стрелка ψ существует и единственна.

[5]Т. е. контравариантными эквивалентностями: устанавливают эквивалентность не $\mathcal{C}$ с $\mathcal{D}$, а $\mathcal{C}^{\text{op}}$ с $\mathcal{D}$.

Лемма 13.1 (лемма Ионеды 1)
Для любого предпучка множеств $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \to \mathcal{S}et$ на произвольной категории $\mathcal{C}$ имеется функториальная по $F \in p\mathcal{S}h(\mathcal{C})$ и по $A \in \mathcal{C}$ биекция $F(A) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{p\mathcal{S}h(\mathcal{C})}(h_A, F)$, переводящая элемент $a \in F(A)$ в естественное преобразование

$$f_X : \operatorname{Hom}(X, A) \to F(X)\,, \tag{13-8}$$

которое посылает стрелку $\varphi : X \to A$ в значение отображения $F(\varphi) : F(A) \to F(X)$ на элементе a. Обратная биекция сопоставляет каждому естественному преобразованию (13-8) значение отображения $f_A : h_A(A) \to F(A)$ на элементе $\operatorname{Id}_A \in h_A(A)$.

Доказательство. Для любого естественного преобразования (13-8), любого объекта $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ и любой стрелки $\varphi : X \to A$ мы имеем коммутативную диаграмму (13-5)

$$\begin{tikzcd} h_A(A) = \operatorname{Hom}(A, A) \arrow[r, "h_A(\varphi)"] \arrow[d, "f_A"'] & \operatorname{Hom}(X, A) = h_A(X) \arrow[d, "f_X"] \\ F(A) \arrow[r, "F(\varphi)"] & F(X)\,, \end{tikzcd} \tag{13-9}$$

верхняя строка которой переводит Id_A в φ, так что $f_X(\varphi) = F(\varphi)\big(f_A(\operatorname{Id}_A)\big)$. Это означает, что естественное преобразование $f : h_A \to F$ однозначно восстанавливается по элементу

$$a = f_A(\operatorname{Id}_A) \in F(A)\,,$$

а каждый элемент $a \in F(A)$ задаёт преобразование (13-8), переводящее $\varphi \in \operatorname{Hom}(X, A)$ в $f_X(\varphi) = F(\varphi)(a) \in F(X)$ и естественное, так как для всех $\psi : Y \to X$ и $\varphi \in h_A(X)$

$$f_Y\left(h_A(\psi)\varphi\right) = f_Y(\varphi\psi) = F(\varphi\psi)a = F(\psi)F(\varphi)a = F(\psi)\left(f_X(\varphi)\right)\,,$$

т. е. $f_Y \circ h_A(\psi) = F(\psi) \circ f_X$ как отображения $h_A(X) \to F(Y)$. □

Упражнение 13.11 (лемма Ионеды 2). Для ковариантного функтора $F : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ постройте функториальную по F и $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ биекцию $F(A) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{C},\mathcal{S}et)}(h^A, F)$.

Следствие 13.1
Функторы $X \mapsto h_X$ и $X \mapsto h^X$ задают вполне строгие ковариантное и контравариантное вложения категории $\mathcal{C}$ в категории предпучков и ковариантных функторов соответственно. Иными словами, имеются функториальные по $A, B \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ изоморфизмы

$$\operatorname{Hom}_{p\mathcal{S}h(\mathcal{C})}(h_A, h_B) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \quad \text{и} \quad \operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{C})}(h^A, h^B) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)\,.$$

Доказательство. Применяем леммы Ионеды к функторам $F = h_B$ и $F = h^B$. □

Следствие 13.2
Если объект $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, копредставляющий функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ (соотв. представляющий предпучок $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \to \mathcal{S}et$) существует, то он единствен с точностью до канонического изоморфизма.

Доказательство. Если имеются два таких объекта A, B, что $h^A \simeq F \simeq h^B$ (соотв. $h_A \simeq F \simeq h_B$), то беря подходящую композицию этих естественных изоморфизмов, мы получаем естественный изоморфизм $h^B \xrightarrow{\sim} h^A$ (соотв. $h_A \xrightarrow{\sim} h_B$), которому по лемме Ионеды отвечает естественный по A и B изоморфизм $A \xrightarrow{\sim} B$. □

13.4.1. Описание объектов универсальными свойствами. При помощи сл. 13.2 можно пытаться переносить в произвольную категорию $\mathcal{C}$ естественные[1] операции над множествами, имеющиеся в категории $\mathcal{S}et$. А именно, будем называть результатом применения такой операции к набору объектов $X_i \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ представляющий объект X предпучка $\mathcal{C}^{\text{op}} \to \mathcal{S}et$, переводящего каждый объект $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ в результат применения этой операции к множествам $\operatorname{Hom}(Y, X_i)$ в категории $\mathcal{S}et$. Разумеется, такое неявное описание не даёт никаких гарантий *существования* определяемого объекта, т. к. рассматриваемый функтор может оказаться непредставимым. Однако, если он представим, то представляющий объект X, во-первых, автоматически обладает некоторыми «универсальными свойствами», а во-вторых, единствен с точностью до *единственного* изоморфизма, сохраняющего эти свойства. Вдобавок, у каждой такого рода конструкции есть двойственная версия, получающаяся из предыдущей обращением стрелок и объявляющая результатом теоретико множественной операции над объектами $X_i \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ копредставляющий объект ковариантного функтора $\mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, переводящего $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ в результат применения операции к множествам $\operatorname{Hom}(X_i, Y)$.

Пример 13.14 (произведение $A \times B$)
Определим *произведение* $A \times B$ объектов $A, B \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ произвольной категории $\mathcal{C}$ как объект, представляющий предпучок $\mathcal{C}^{\text{op}} \to \mathcal{S}et$, $Y \mapsto \operatorname{Hom}(Y, A) \times \operatorname{Hom}(Y, B)$. Если произведение существует, то имеется функториальный по Y изоморфизм

$$\beta_Y : \operatorname{Hom}(Y, A \times B) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(Y, A) \times \operatorname{Hom}(Y, B)\,.$$

Полагая в нём $Y = A \times B$, получаем пару стрелок

$$(\pi_A, \pi_B) = \beta_{A\times B}\operatorname{Id}_{A\times B} \in \operatorname{Hom}(A \times B, A) \times \operatorname{Hom}(A \times B, B)\,,$$

универсальную в том смысле, что для любой пары стрелок $(\varphi, \psi) \in \operatorname{Hom}(Y, A) \times \operatorname{Hom}(Y, B)$ существует единственная такая стрелка $\varphi \times \psi : Y \to A \times B$, что $\beta_Y(\varphi \times \psi) = (\varphi, \psi)$. Коммутативная диаграмма[2]

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}(A \times B, A \times B) \arrow[r, "h_{A\times B}(\varphi\times\psi)"] \arrow[d, "\beta_{A\times B}"'] & \operatorname{Hom}(Y, A \times B) \arrow[d, "\beta_Y"] \\
\operatorname{Hom}(A \times B, A) \times \operatorname{Hom}(A \times B, B) \arrow[r, "h_A(\varphi\times\psi)\times h_B(\varphi\times\psi)"] & \operatorname{Hom}(Y, A) \times \operatorname{Hom}(Y, B)\,,
\end{tikzcd}$$

верхняя горизонтальная стрелка которой переводит $\operatorname{Id}_{A\times B}$ в $\varphi \times \psi$, а композиция нижней и левой стрелок действуют на $\operatorname{Id}_{A\times B}$ как

$$\operatorname{Id}_{A\times B} \xmapsto{\beta_{A\times B}} (\pi_A, \pi_B) \xmapsto{h_A(\varphi\times\psi)\times h_B(\varphi\times\psi)} \big(\pi_A \circ (\varphi \times \psi), \pi_B \circ (\varphi \times \psi)\big)\,,$$

показывает, что равенство $\beta_Y(\varphi \times \psi) = (\varphi, \psi)$ равносильно равенствам

$$\varphi = \pi_A \circ (\varphi \times \psi) \quad \text{и} \quad \psi = \pi_B \circ (\varphi \times \psi)\,.$$

Упражнение 13.12. Пусть диаграмма $A \xleftarrow{\pi'_A} C \xrightarrow{\pi'_B} B$ тоже универсальна в том смысле, что для любой пары стрелок $(\varphi, \psi) \in \operatorname{Hom}(Y, A) \times \operatorname{Hom}(Y, B)$ существует единственная стрелка

[1] Т. е. функториальные по всем участвующим множествам.

[2] Ср. с использованной в доказательстве леммы Ионеды диаграммой из форм. (13-9) на стр. 199

$Y \to C$, композиции которой с π'_A и π'_B равны φ и π соответственно. Убедитесь, что существует единственный такой изоморфизм $\gamma : C \xrightarrow{\sim} A \times B$, что $\pi_A \circ \gamma = \pi'_A$ и $\pi_B \circ \gamma = \pi'_B$. Покажите также, что любая пара стрелок $\alpha : A_1 \to A_2$, $\beta : B_1 \to B_2$ задаёт единственный такой морфизм $\alpha \times \beta : A_1 \times B_1 \to A_2 \times B_2$, что $\alpha \circ \pi_A = (\alpha \times \beta) \circ \alpha$ и $\beta \circ \pi_B = (\alpha \times \beta) \circ \beta$.

В категории множеств $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$. Снабжённое слабейшей топологией, в которой π_A и π_B непрерывны, это множество задаёт произведение и в категории топологических пространств. Снабжённое покомпонентными операциями, оно же является произведением групп, колец и модулей над кольцами.

Пример 13.15 (копроизведение $A \boxtimes B$)
Двойственным образом, *копроизведение* $A \boxtimes B$ объектов $A, B \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ произвольной категории $\mathcal{C}$ определяется как объект, копредставляющий ковариантный функтор

$$Y \mapsto \operatorname{Hom}(A, Y) \times \operatorname{Hom}(B, Y)$$

из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{S}et$. Обращая все стрелки в предыдущем примере, можно охарактеризовать копроизведение как объект, включающийся в диаграмму $A \xrightarrow{\iota_A} A \boxtimes B \xleftarrow{\iota_B} B$, универсальную в том смысле, что для любой пары стрелок $A \xrightarrow{\varphi} Y \xleftarrow{\psi} B$ в $\mathcal{C}$ имеется единственный такой морфизм $\varphi \boxtimes \psi : A \boxtimes B \to Y$, что $\varphi = (\varphi \boxtimes \psi) \circ \iota_A$ и $\psi = (\varphi \boxtimes \psi) \circ \iota_B$.

Упражнение 13.13. Убедитесь, что если такая универсальная диаграмма существует, то она единственна с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного со стрелками ι_A, ι_B, и что любая пара стрелок $\alpha : A_1 \to A_2$, $\beta : B_1 \to B_2$ задаёт единственный такой морфизм $\alpha \boxtimes \beta : A_1 \boxtimes B_1 \to A_2 \boxtimes B_2$, что $\iota_A \circ \alpha = (\alpha \boxtimes \beta) \circ \alpha$.

В категориях $\mathcal{S}et$ и $\mathcal{T}op$ множеств и топологических пространств копроизведением является дизъюнктное объединение $A \sqcup B$.

Упражнение 13.14. Убедитесь в этом.

Копроизведение в категории групп $\mathcal{G}rp$ обозначается $A * B$ и называется *свободным произведением* групп A и B. Оно строится как фактор свободной группы[1] $F_{A \sqcup B}$ с множеством образующих $A \sqcup B$ по наименьшей нормальной подгруппе соотношений[2], заменяющих пару соседних лежащих в одной группе букв их произведением и наоборот. Например, $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} \simeq F_2$ — это свободная группа с двумя образующими[3].

Упражнение 13.15. Убедитесь, что свободное произведение групп обладает универсальными свойствами копроизведения.

В категории $\mathcal{C}mr$ коммутативных колец с единицей копроизведение называется *тензорным произведением* и обозначается $A \otimes B$. Как аддитивная абелева группа оно совпадает с тензорным произведением $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ аддитивных абелевых групп колец A и B, умножение разложимых тензоров происходит покомпонентно: $(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 \cdot a_2) \otimes (b_1 \cdot b_2)$.

Упражнение 13.16. Убедитесь, что это умножение корректно продолжается до $\mathbb{Z}$-билинейного умножения произвольных тензоров и задаёт на $A \otimes B$ структуру коммутативного кольца с единицей $1 \otimes 1$, обладающего универсальными свойствами копроизведения.

[1] См. n° 20.1 на стр. 364 части I.
[2] См. n° 20.2 на стр. 365 части I.
[3] Ср. с упр. 20.2 на стр. 364 части I.

В категории K-модулей[1] $\mathcal{M}od_K$ произведение и копроизведение совпадают друг с другом и представляют собою прямую сумму $A \oplus B$.

Упражнение 13.17. Убедитесь в этом.

Пример 13.16 (свободные модули)
Согласно предл. 6.4 на стр. 110 части I для любого множества $E \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{S}et$ функтор

$$\mathcal{M}od_K \to \mathcal{S}et\,, \quad M \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}(E, M)\,,$$

копредставим *свободным* K-модулем с базисом E. Он состоит из формальных линейных комбинаций $\sum_{e \in E} x_e e$ элементов множества E с коэффициентами $x_e \in K$, лишь конечное число которых ненулевые, и обозначается $K \otimes E$.

Упражнение 13.18. Установите функториальный по M и E изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od_K}(K \otimes E, M) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}(E, M)\,. \tag{13-10}$$

Задачи для самостоятельного решения к §13

Задача 13.1. Рассмотрим следующие стрелки в симплициальной категории Δ:

тождественное отображение $e_n = \mathrm{Id}_{[n]}$,
вложение $\partial_n^i : [n-1] \hookrightarrow [n]$, образ которого не содержит i,
эпиморфизм $s_n^i : [n+1] \twoheadrightarrow [n]$, отображающий $i+1$ в i.

Покажите, что: а) Каждая стрелка $[m] \to [n]$ в Δ однозначно представляется в виде композиции $\iota\pi$ сюрьекции π и вложения ι, а также в виде

$$\underbrace{\partial_n^{i_1} \partial_{n-1}^{i_2} \dots \partial_{n-r+1}^{i_r}}_{r} \underbrace{s_{m-s}^{j_s} \dots s_{m-2}^{j_2} s_{m-1}^{j_1}}_{s}\,,$$

где $n + s = m + r$ и $n \geqslant i_1 > \dots > i_r \geqslant 0$, $m > j_1 > \dots > j_r \geqslant 0$. б) Алгебра стрелок $\mathbb{Z}[\Delta]$ является фактором тензорной алгебры свободного $\mathbb{Z}$-модуля с базисом из векторов e_n, ∂_n^i, s_n^i, где $n \geqslant 0$ и $0 \leqslant i \leqslant n$, по двустороннему идеалу, порождённому разностями

$$\partial_{n+1}^j \otimes \partial_n^i - \partial_{n+1}^i \otimes \partial_n^{j-1}\,, \text{ где } i < j\,,$$
$$s_n^j \otimes s_{n+1}^i - s_n^i \otimes s_{n+1}^{j+1}\,, \text{ где } i \leqslant j\,,$$
$$s_{n-1}^j \otimes \partial_n^i - \partial_{n-1}^i \otimes s_{n-2}^{j-1}\,, \text{ где } i < j\,,$$
$$s_{n-1}^j \otimes \partial_n^i - \partial_{n-1}^{i-1} \otimes s_{n-2}^j\,, \text{ где } i > j+1\,,$$
$$s_{n-1}^i \otimes \partial_n^i - e_{n-1} \text{ и } s_{n-1}^{i-1} \otimes \partial_n^i - e_{n-1}\,.$$

[1] В частности, в категории $\mathcal{A}b = \mathcal{M}od_{\mathbb{Z}}$ абелевых групп.

Задача 13.2. Убедитесь, что алгебра стрелок $\mathbb{Z}[\Delta_s]$ порождается стрелками e_n, ∂_n^i, и опишите идеал соотношений между ними.

Задача 13.3. Задайте какую-нибудь триангуляцию[1] а) ленты Мёбиуса б) вещественного проективного пространства[2] $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$.

Задача 13.4. Существует ли триангуляция окружности S^1 а) тремя 0-мерными и тремя 1-мерным симплексами[3] б) одним 0-мерным и одним 1-мерным симплексом? Если да, задайте все отображения $X(\varphi)$ явно, если нет, объясните почему.

Задача 13.5. Существует ли триангуляция двумерной сферы S^2 а) четырьмя 0-мерными, шестью 1-мерными и четырьмя 2-мерным симплексами б) двумя 0-мерными, одним 1-мерным и одним 2-мерным симплексом? Если да, задайте все отображения $X(\varphi)$ явно, если нет, объясните почему.

Задача 13.6. Для каждого целого неотрицательного m обозначим через $[m\rangle$ категорию циклически упорядоченных против часовой стрелки комплексных корней $(m+1)$-й степени из единицы, в которой $\mathrm{Hom}(x, y)$ состоит из проходимой против часовой стрелки дуги[4] xy единичной окружности $\mathrm{U}(1) \subset \mathbb{C}$ и всех дуг, получающихся добавлением к ней любого натурального числа оборотов против часовой стрелки. Для каждого $x \in \mathrm{Ob}[m\rangle$ обозначим через $\tau_x \in \mathrm{End}(x)$ эндоморфизм, задаваемый одним оборотом по окружности. Определим *малую циклическую категорию* Λ следующим образом: объекты Λ суть категории $[m\rangle$, а стрелки $\varphi : [n\rangle \to [m\rangle$ — такие функторы, что $\varphi(\tau_x) = \tau_{\varphi(x)}$ для всех $x \in \mathrm{Ob}[n\rangle$. Доопределите представимый предпучок $h_{[0\rangle} : [m\rangle \mapsto \mathrm{Hom}_\Lambda([m\rangle, [0\rangle)$ на Λ так, чтобы он принимал значения не в $\mathcal{S}et$, а в Λ, и задавал инволютивную[5] эквивалентность категорий $\Lambda^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\sim} \Lambda$.

Задача 13.7. Обозначим через $S^* : \mathcal{S}et^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}et$ и $S_* : \mathcal{S}et \to \mathcal{S}et$ функторы, переводящие каждое множество X в множество $S^*X = S_*X = \mathcal{S}(X)$ всех его подмножеств, а стрелку $\varphi : X \to Y$ — в стрелки $S^*\varphi : U \mapsto \varphi^{-1}U$ и $S_*\varphi : W \mapsto \varphi(W)$, где $U \subseteq Y$, $W \subseteq X$. Выясните, а) представим ли S^* б) копредставим ли S_*, и если да, то каким множеством?

Задача 13.8 (колемма Ионеды 2). Пусть $F : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ — ковариантный функтор. Обозначим через $\mathcal{F}$ категорию с $\mathrm{Ob}\,\mathcal{F} = \bigsqcup_{X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}} FX$, в которой для $x \in FX$ и $y \in FY$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(x, y) = \{\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \mid F\varphi(x) = y\},$$

а через $A, \Pi : \mathcal{F} \to \mathcal{C}$ *постоянный функтор*, переводящий все объекты в $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, а все стрелки — в Id_A, и функтор, переводящий $x \in FX$ в X и тождественно действующий на стрелки. Постройте функториальную по F и $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ биекцию

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{C},\mathcal{S}et)}(F, h^A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{F},\mathcal{C})}(A, \Pi).$$

Задача 13.9. Имеется ли колемма Ионеды 1, в том же духе описывающая $\mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(\mathcal{C})}(h_A, F)$?

---

[1] Т. е. явно опишите предпучок $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}et$, геометрической реализацией которого является указанное топологическое пространство, см. прим. 13.6 на стр. 192.

[2] Если общий случай вызывает затруднения, решите задачу для $n = 1, 2, 3$.

[3] Т. е. можно ли получить окружность в качестве геометричекой реализации полусимплициального множества X, у которого X_0 и X_1 состоят из трёх элементов, а все остальные X_i пусты.

[4] При $y = x$ эта дуга состоит из одной точки и задаёт тождественный эндоморфизм объекта x.

[5] Т. е. обратную самой себе.

Задача 13.10 (точные функторы). Функтор $F : \mathcal{Ab} \to \mathcal{Ab}$ (соотв. предпучок $\mathcal{Ab}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{Ab}$) называется *точным слева*, если он переводит ядра (соотв. коядра) в ядра. Двойственным образом, F называется *точным справа*, если он переводит коядра (соотв. ядра) в коядра. Функтор называется *точным*, если он точен и справа и слева. Покажите, что для любой группы $N \in \operatorname{Ob} \mathcal{Ab}$:

а) функтор $X \mapsto X \otimes_{\mathbb{Z}} N$ точен справа, и предъявите группу N, для которой он не точен слева

б) функторы h^N и h_N точны слева, и предъявите группы N, для которых они не точны справа.

§14. Сопряжённые функторы и (ко)пределы

14.1. Сопряжённые функторы. Функторы $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ между категориями $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ называются, соответственно, *левым* и *правым сопряжёнными* друг другу, если имеется функториальная по $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ и $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ биекция

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) . \tag{14-1}$$

С каждой парой сопряжённых функторов связаны естественные преобразования

$$t : F \circ G \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \quad \text{и} \quad s : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F . \tag{14-2}$$

Стрелка $t_Y : FG(Y) \to Y$, задающая действие преобразования t над $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$, является образом элемента $\mathrm{Id}_{G(Y)} \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(G(Y), G(Y)) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(FG(Y), Y)$ при изоморфизме (14-1), написанном для $X = G(Y)$. Двойственным образом, стрелка $s_X : X \to GF(X)$ получается из $\mathrm{Id}_{F(X)} \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(X)) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GF(X))$ при изоморфизме (14-1), написанном для $Y = F(X)$.

Упражнение 14.1. Убедитесь в естественности этих преобразований.

Пример 14.1 (продолжение прим. 13.16 про свободные модули)
Изоморфизм из форм. (13-10) на стр. 202 означает, что функтор

$$F : \mathcal{S}et \to \mathcal{M}od_K , \quad E \mapsto K \otimes E ,$$

сопоставляющий произвольному множеству E свободный левый K-модуль с базисом E, сопряжён слева к забывающему функтору $G : \mathcal{M}od_K \to \mathcal{S}et$, переводящему модуль в множество его элементов, т. е. $\operatorname{Hom}_{\mathcal{M}od_K}(K \otimes E, M) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{S}et}\big(E, G(M)\big)$ функториально по модулю M и множеству E. Естественное преобразование $s_E : E \hookrightarrow G(A \otimes E)$ вкладывает E в качестве множества базисных векторов в множество всех векторов свободного модуля $R \otimes E$. Естественное преобразование $t_M : R \otimes G(M) \twoheadrightarrow M$ — это R-линейный эпиморфизм огромного свободного модуля, базисом которого служит множество всех векторов модуля M, на модуль M. Он переводит каждый базисный вектор m в элемент $m \in M$, а формальную линейную комбинацию базисных векторов — в результат её вычисления внутри модуля M. Так, при $M = K = \mathbb{R}$ векторное пространство $\mathbb{R} \otimes G(\mathbb{R})$ состоит из формальных линейных комбинаций $\sum_{x\in\mathbb{R}} f(x) \cdot x$, в которых лишь конечное множество коэффициентов $f(x)$ отлично от нуля. Оно изоморфно пространству всех функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с конечным носителем, и преобразование $t_{\mathbb{R}}$ сопоставляет такой функции f вещественное число $\sum_{x\in\mathbb{R}} x f(x)$.

Пример 14.2 (самосопряжённость представимых предпучков на $\mathcal{A}b$)
Для любых трёх абелевых групп A, B, C имеется канонический изоморфизм

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}b}\big(A, \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}b}(B, C)\big) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}b}\big(B, \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}b}(A, C)\big) , \tag{14-3}$$

переводящий семейство гомоморфизмов $\varphi_a : B \to C$, запараметризованное элементами $a \in A$ так, что $\varphi_{a'+a''} = \varphi_{a'} + \varphi_{a''}$ для всех $a', a'' \in A$, в запараметризованное элементами $b \in B$ семейство гомоморфизмов $\psi_b : A \to C$, $a \mapsto \varphi_a(b)$.

Упражнение 14.2. Проверьте, что каждое отображение ψ_b является гомоморфизмом абелевых групп и что $\psi_{b'+b''} = \psi_{b'} + \psi_{b''}$ для всех $b', b'' \in B$. Постройте обратное отображение из правой части (14-3) в левую.

Изоморфизм (14-3) можно переписать как $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Ab}^{\mathrm{op}}}\big(h_C(B), A\big) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{Ab}}\big(B, h_C(A)\big)$. Это означает, что для любой абелевой группы C представимый предпучок $h_C : \mathcal{Ab}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{Ab}$, $X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{Ab}}(X, C)$, самосопряжён. Естественное преобразование $s_X : X \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{Ab}}\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{Ab}}(X, C), C\big)$ сопоставляют элементу $x \in X$ гомоморфизм вычисления $s_X(x) = \mathrm{ev}_x : \mathrm{Hom}(X, C) \to C$, $\varphi \mapsto \varphi(x)$. Естественное преобразование t_X представляет собою стрелку $h_C\big(h_C(X)\big) \to X$ в категории $\mathcal{Ab}^{\mathrm{op}}$, т. е. стрелку $X \to h_C\big(h_C(X)\big)$ в категории $\mathcal{Ab}$, и в таком виде совпадает с преобразованием s_X.

Предложение 14.1
Для существования левого сопряжённого функтора $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ к данному функтору $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ функтор

$$h^X G : \mathcal{D} \to \mathcal{Set}, \quad Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X, G(Y)\big), \tag{14-4}$$

был копредставим, и в этом случае $F(X)$ является его копредставляющим объектом.

Доказательство. Необходимость очевидна из определений. Докажем достаточность. Пусть для каждого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ функтор (14-4) представляется объектом $F(X)$, т. е. имеется естественный изоморфизм функторов $f^X : h^{F(X)} \xrightarrow{\sim} h^X G$. Чтобы продолжить соответствие $X \mapsto F(X)$ до функтора $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ заметим, что морфизм $\varphi : X_1 \to X_2$ задаёт естественное преобразование

$$\varphi^* : h_G^{X_2} \to h_G^{X_1}$$

правого умножения на φ, переводящее стрелку $\psi : X_2 \to G(Y)$ в $\psi\varphi : X_1 \to G(Y)$. Из леммы Ионеды[1] вытекает, что композиция естественных преобразований

$$(f^{X_1})^{-1} \circ \varphi^* \circ f^{X_2} : h^{F(X_2)} \to h^{F(X_1)}$$

задаётся правым умножением на единственную стрелку $F(X_1) \to F(X_2)$, которую мы и объявим образом $F(\varphi)$ стрелки φ под действием функтора F. По построению имеется функториальный по X изоморфизм $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$. □

Следствие 14.1 (из доказательства предл. 14.1)
Если функтор F, сопряжённый слева к функтору G, существует, то он определяется по G однозначно с точностью до естественного изоморфизма функторов. □

Упражнение 14.3. Докажите двойственные утверждения: для существования правого сопряжённого функтора G к функтору $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ предпучок $h_Y^F : \mathcal{C} \to \mathcal{Set}$, $X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y)$ был представим, и в этом случае объект $G(Y)$ его представляет, а функтор G определяется по F однозначно с точностью до естественного изоморфизма функторов.

Предложение 14.2
Функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ сопряжён слева функтору $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ если и только если существуют такие естественные преобразования $t : F \circ G \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ и $s : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F$, что композиции

$$F \xrightarrow{F\circ s} FGF \xrightarrow{t\circ F} F \quad \text{и} \quad G \xrightarrow{s\circ G} GFG \xrightarrow{G\circ t} G$$

являются тождественными эндоморфизмами функторов F и G соответственно.

[1] См. сл. 13.1 на стр. 199.

Доказательство. Если имеются функториальные по X и Y изоморфизмы

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(X),Y\big) \arrow[r, bend left, "\varrho"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X,G(Y)\big) \arrow[l, bend left, "\lambda"] \end{tikzcd} \tag{14-5}$$

то для любой стрелки $\varphi\colon X_1 \to X_2$ в $\mathcal{C}$ и любого $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X_1),Y) & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1,G(Y)) \arrow[l, "\lambda"', "\sim"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X_2),Y) \arrow[u, "F(\varphi)^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_2,G(Y)) \arrow[l, "\lambda"', "\sim"] \arrow[u, "\varphi^*"] \end{tikzcd}$$

вертикальные стрелки которой задаются правым умножением на $F(\varphi)$ и на φ соответственно. Рисуя это для $Y = F(X)$ и морфизма $\varphi = s_X\colon X \to GF(X)$, который задаёт действие над объектом X естественного преобразования $s\colon \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to GF$ из форм. (14-2) на стр. 205, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(X)) & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,GF(X)) \arrow[l, "\lambda"', "\sim"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FGF(X),F(X)) \arrow[u, "F(s_X)^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GF(X),GF(X)) \arrow[l, "\lambda"', "\sim"] \arrow[u, "s_X^*"] \end{tikzcd}$$

верхняя стрелка λ которой переводит s_X в $\mathrm{Id}_{F(X)}$, а нижняя стрелка λ переводит $\mathrm{Id}_{GF(X)}$ в морфизм $t_{F(X)}\colon FGF(X) \to F(X)$, задающий действие естественного преобразования $t\colon FG \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ из форм. (14-2) на стр. 205 над объектом $F(X)$. Мы заключаем, что

$$\mathrm{Id}_{F(X)} = \lambda(s_X) = \lambda s_X^*\left(\mathrm{Id}_{GF(X)}\right) = F(s_X)^*\lambda\left(\mathrm{Id}_{GF(X)}\right) = F(s_X)^*\left(t_{F(X)}\right) = t_{F(X)} \circ F(s_X)\,,$$

т. е. композиция $F \xrightarrow{F\circ s} FGF \xrightarrow{t\circ F} F$ задаёт тождественное преобразование функтора F. Проверка того, что $G \xrightarrow{s\circ G} GFG \xrightarrow{G\circ t} G$ совпадает с Id_G полностью симметрична.

Наоборот, если имеются преобразования $s\colon \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to GF$ и $t\colon FG \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$, зададим в (14-5) действие λ и ϱ на стрелки $\varphi\colon F(X) \to Y$ и $\psi\colon X \to G(Y)$ формулами

$$\varrho(\varphi) = G(\varphi) \circ s_X \quad \text{и} \quad \lambda(\psi) = t_Y \circ F(\psi)\,,$$

в правых частях которых стоят композиции морфизмов

$$X \xrightarrow{s_X} GF(X) \xrightarrow{G(\varphi)} G(Y) \quad \text{и} \quad F(X) \xrightarrow{F(\psi)} FG(Y) \xrightarrow{t_Y} Y\ .$$

Композиция $\lambda\varrho(\varphi) = t_Y \circ FG(\varphi) \circ F(s_X)\colon F(X) \to Y$ представляет собою путь из левого нижнего угла в правый верхний на диаграмме

$$\begin{tikzcd} & F(X) \arrow[rr, "\varphi"] & & Y \\ F(X) \arrow[ur, equal, "\mathrm{Id}_{F(X)}"] \arrow[rr, "F(s_X)"] & & FGF(X) \arrow[ul, "t_{F(X)}"'] \arrow[rr, "FG(\varphi)"] & & FG(Y) \arrow[ul, "t_Y"'] \end{tikzcd}$$

правый параллелограмм которой коммутативен в силу естественности преобразования t, а левый треугольник — в силу того, что $F \xrightarrow{F\circ s} FGF \xrightarrow{t\circ F} F$ совпадает с Id_F. Поэтому $\lambda\varrho(\varphi) = \varphi$. Равенство $\varrho\lambda(\psi) = \psi$ проверяется симметричным образом. □

Пример 14.3 (соответствие предпорядков)
Функтор $F : N \to M$ между предупорядоченными множествами, рассматриваемыми как категории[1], представляет собою сохраняющее предпорядок отображение, т. е. $n_1 \leqslant n_2 \Rightarrow F(n_1) \leqslant F(n_2)$. Такое отображение сопряжено слева сохраняющему порядок отображению $G : M \to N$ если и только если неравенства $F(n) \leqslant m$ и $n \leqslant G(m)$ равносильны друг другу. Наличие естественных преобразований $t : F \circ G \to \mathrm{Id}_M$ и $s : \mathrm{Id}_N \to G \circ F$ означает неравенства[2] $FG(m) \leqslant m$ и $n \leqslant GF(n)$ для всех $n \in N$, $m \in M$, а тождественность сквозных преобразований $F \to FGF \to F$ и $G \to GFG \to G$ — неравенства $F(n) \leqslant FGF(n) \leqslant F(n)$ и $G(m) \leqslant GFG(m) \leqslant G(m)$.

Упражнение 14.4. Убедитесь непосредственно, что условие $F(n) \leqslant m \iff n \leqslant G(m)$ на сохраняющие предпорядок отображения F, G эквивалентно системе неравенств $F(G(m)) \leqslant m$ и $n \leqslant GF(n)$ для всех $m \in M$, $n \in N$, причём если эти неравенства выполнены, то неравенства $F(n) \leqslant FGF(n) \leqslant F(n)$ и $G(m) \leqslant GFG(m) \leqslant G(m)$ выполняются автоматически.

Если оба предпорядка являются частичными порядками, последние два неравенства превращаются в равенства $F(n) = FGF(n)$ и $G(m) = GFG(m)$. Примером такой ситуации является *соответствие Галуа*[3], рассматриваемое ниже.

Пример 14.4 (соответствие Галуа)
Пусть группа H действует на множестве X. Обозначим через $\mathcal{S}(H)$ и $\mathcal{S}(X)$ частично упорядоченные по включению множества подгрупп в H и подмножеств X соответственно. Пусть функтор

$$F : \mathcal{S}(H) \to \mathcal{S}(X)^{\mathrm{op}}, \quad S \mapsto X^S = \{x \in X \mid \forall h \in S \ hx = x\}$$

сопоставляет подгруппе $S \subset G$ множество её неподвижных точек, а функтор

$$G : \mathcal{S}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}(H), \quad T \mapsto Z_T = \{h \in H \mid \forall x \in T \ hx = x\}$$

сопоставляет подмножеству $T \subset X$ его *централизатор*[4].

Упражнение 14.5. Убедитесь, что функторы F и G сопряжены, т. е. $X^S \supset T \iff S \subset Z(T)$.

Согласно предыдущему примеру, это означает, что для любого подмножества $T \subset X$ и любой подгруппы $S \subset H$ выполняются равенства

$$Z_{X^{Z_T}} = Z_T \quad \text{и} \quad X^{Z_{X^S}} = X^S.$$

Пример 14.5 (эквивалентности категорий как сопряжённые функторы)
Пусть функторы $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ являются квазиобратными эквивалентностями[5], т. е. имеются естественные изоморфизмы $g : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \simeq GF$ и $f : \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \simeq FG$. Как и в доказательстве предл. 14.2, рассмотрим естественные по X, Y отображения

$$\begin{aligned} \varrho_{FG} &: \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(X), Y\big) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X, G(Y)\big), \quad \varphi \mapsto G(\varphi) \circ g_X = (g_X^* \circ G)\varphi \\ \varrho_{GF} &: \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(G(Y), X\big) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\big(Y, F(X)\big), \quad \psi \mapsto F(\psi) \circ f_Y = (f_Y^* \circ F)\psi\,. \end{aligned}$$

---

[1] См. прим. 13.2 на стр. 189.
[2] Задающие действие этих естественных преобразований над объектами m и n.
[3] Название мотивируется теор. 18.6 на стр. 285.
[4] Т. е. поточечный стабилизатор, см. n° 18.3 на стр. 339 части I. Обратите внимание, что оба функтора оборачивают включения.
[5] См. n° 13.3.2 на стр. 197.

Поскольку оба отображения

$$g_X^*\colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(GF(X),G(Y)\big) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X,G(Y)\big)\,, \quad \xi\mapsto \xi\circ f_X\,,$$
$$G\colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(X),Y\big) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(GF(X),G(Y)\big)\,, \quad \xi\mapsto G(\xi)\,,$$

являются биективными[1], их композиция ϱ_{FG} тоже биективна. Это означает, что функтор F сопряжён слева к функтору G. По аналогичной причине биективно и преобразование ϱ_{GF}, т. е. функтор F сопряжён к функтору G также и справа. Тем самым, квазиобратные эквивалентности категорий сопряжены друг другу с обеих сторон. Отметим, что по сл. 14.1 и упр. 14.3 на стр. 206 отсюда вытекает, что если один из двух сопряжённых друг другу функторов является эквивалентностью категорий, то и другой тоже таковою является.

14.2. Тензорные произведения и Hom. Абелева группа R называется *кольцом*, если на нём имеется $\mathbb{Z}$-билинейное[2] умножение $R\times R\to R$, $(a,b)\mapsto ab$. Кольцо R называется *ассоциативным*, если $(ab)c=a(bc)$ для всех $a,b,c\in R$. Всюду далее мы по умолчанию подразумеваем все кольца ассоциативными.

Абелева группа M называется *левым* (соотв. *правым*) R-модулем, если имеется $\mathbb{Z}$-билинейное *левое* (соотв. *правое*) *действие* R на M

$$R\times M\to M\,,\ (a,w)\mapsto aw\,,\quad (\text{соотв. } M\times R\to M\,,\ (w,a)\mapsto wa)$$

со свойством $a(bw)=(ab)w$ (соотв. $(wa)b=w(ab)$). Отображение R-модулей $\varphi\colon M\to N$ называется *R-линейным* или *гомоморфизмом R-модулей*, если оно $\mathbb{Z}$-линейно и перестановочно с действием, т. е. $\varphi(aw)=a\varphi(w)$ (соотв[3] $\varphi(wa)=\varphi(w)a$.). Категории левых и правых R-модулей обозначаются $R\text{-}\mathcal{M}od$ и $\mathcal{M}od\text{-}R$ соответственно.

Упражнение 14.6. Убедитесь, что когда кольцо R коммутативно, каждое левое действие R на произвольной абелевой группе M одновременно является правим действием и наоборот, т. е. каждый левый R-модуль может рассматриваться как правый, и наоборот.

Пример 14.6 (функтор $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}$)
Каждая абелева группа A задаёт функтор $h_A\colon R\text{-}\mathcal{M}od\to \mathcal{A}b$, $M\mapsto \operatorname{Hom}(M,A)$, сопоставляющий левому R-модулю M абелеву группу $\mathbb{Z}$-линейных отображений $M\to A$. На $\operatorname{Hom}(M,A)$ имеется естественное *правое* действие кольца R по правилу $\varphi a(w)=\varphi(aw)$, где $\varphi\colon M\to A$, $a\in R$, $w\in M$.

Упражнение 14.7. Убедитесь в том, что это именно правое действие.

Таким образом, функтор $h_A\colon R\text{-}\mathcal{M}od\to \mathcal{M}od\text{-}R$ принимает значения в категории правых R-модулей.

14.2.1. Тензорное умножение над кольцом. Тензорным произведением $M\otimes_R N$ правого R-модуля M на левый R-модуль N называется фактор тензорного произведения абелевых групп $M\otimes N$ по подгруппе, порождённой всевозможными разностями

$$(mx)\otimes n-m\otimes(xn)\,,\quad \text{где}\quad m\in M\,,\ x\in R\,,\ n\in N\,.$$

[1] Первое — в силу того, что является правым умножением на обратимую стрелку g_X, второе — потому что функтор F вполне строг.

[2] Или, что то же самое, *дистрибутивное* по отношению к сложению.

[3] Соотношение $\varphi(aw)=a\varphi(w)$ называется *R-линейностью слева*, а соотношение $\varphi(wa)=\varphi(w)a$ — *R-линейностью справа*.

Это абелева группа, на которой кольцо R, вообще говоря, больше уже не действует, но в которой выполняются соотношения $(mx) \otimes_R n = m \otimes_R (xn)$. Тензорное умножение на фиксированный левый R-модуль N задаёт функтор из категории правых R-модулей в абелевы группы

$$\mathcal{M}od\text{-}R \to \mathcal{A}b\,, \quad X \mapsto X \otimes_R N\,, \tag{14-6}$$

переводящий стрелку $\varphi : X_1 \to X_2$ в стрелку $\varphi \otimes \mathrm{Id}_N : m \otimes_R n \mapsto \varphi(m) \otimes_R n$.

Пусть абелева группа N одновременно является левым модулем над кольцом R и правым модулем над кольцом S. Если правое действие S коммутирует с левым действием R, то N называется R-S *бимодулем*. Функтор тензорного умножения (14-6) на такой бимодуль N принимает значения в категории $\mathcal{M}od\text{-}S$: правое действие S на разложимые тензоры из $M \otimes N$ задаётся правилом $(m \otimes n)y = m \otimes (ny)$.

Упражнение 14.8. Убедитесь, что оно корректно распространяется по линейности на произвольные тензоры.

14.2.2. Функтор Hom_S. Каждый R-S бимодуль N задаёт представимый функтор

$$h^N : \mathcal{M}od\text{-}S \to \mathcal{A}b\,, \quad Y \mapsto \mathrm{Hom}_S(N, Y)\,, \tag{14-7}$$

сопоставляющий правому S-модулю Y группу S-линейных справа гомоморфизмов $N \to Y$. Как и в прим. 14.6, левое действие кольца R на N задаёт правое действие R на $\mathrm{Hom}_S(N, Y)$ по правилу $\varphi a(u) = \varphi(au)$, где $\varphi : N \to Y$, $a \in R$, $u \in N$. Таким образом, функтор (14-7) принимает значения в $\mathcal{M}od\text{-}R$.

Предложение 14.3

Тензорное умножение(14-6) на R-S-бимодуль N сопряжено слева функтору h^N из (14-7), т. е. имеется естественный по $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}od\text{-}R$ и $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}od\text{-}S$ изоморфизм абелевых групп

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}\big(X \otimes_R N, Y\big) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}R}\big(X, \mathrm{Hom}_S(N, Y)\big)\,. \tag{14-8}$$

Доказательство. Отображение из левой части (14-8) в правую сопоставляет S-линейному справа гомоморфизму $\varphi : X \otimes_R N \to Y$ зависящее от $x \in X$ семейство гомоморфизмов

$$\varphi_x : N \to Y\,, \quad u \mapsto \varphi(x \otimes u)\,.$$

Каждый из них S-линеен справа, так как $\varphi_x(us) = \varphi(x \otimes_R us) = \varphi(x \otimes_R u)s = \varphi_x(u)s$, и R-линейно справа зависит от x, так как $\varphi_{x_1r_1+x_2r_2}u = \varphi((x_1r_1 + x_2r_2) \otimes_R u) = \varphi(x_1r_1 \otimes_R u) + \varphi(x_2r_2 \otimes_R u) = \varphi(x_1 \otimes_R r_1u) + \varphi(x_2 \otimes_R r_2u) = \varphi_{x_1}(r_1u) + \varphi_{x_2}(r_2u) = \varphi_{x_1}r_1(u) + \varphi_{x_2}r_2(u) = (\varphi_{x_1}r_1 + \varphi_{x_2}r_2)\,u$. Обратное отображение из правой части (14-8) в левую переводит R-линейно справа зависящее от $x \in X$ семейство S-линейных справа гомоморфизмов $\varphi_x : N \to Y$ в S-линейный справа гомоморфизм $\varphi : x \otimes_R n \mapsto \psi_x(n)$. □

Упражнение 14.9. Убедитесь в этом и явно опишите естественные преобразования

$$t_Y : \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(N, Y) \otimes_R N \to Y \quad \text{и} \quad s_X : X \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(N, X \otimes_R N)\,.$$

Упражнение 14.10. Для S-R бимодуля M определите функторы $R\text{-}\mathcal{M}od \to S\text{-}\mathcal{M}od$, $X \mapsto M \otimes X$, и $S\text{-}\mathcal{M}od \to R\text{-}\mathcal{M}od$, $Y \mapsto \mathrm{Hom}_S(M, Y)$, постройте функториальный по $X \in \mathrm{Ob}\,R\text{-}\mathcal{M}od$ и $Y \in \mathrm{Ob}\,S\text{-}\mathcal{M}od$ изоморфизм абелевых групп

$$\mathrm{Hom}_{S\text{-}\mathcal{M}od}\big(M \otimes_R X, Y\big) \simeq \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathcal{M}od}\big(X, \mathrm{Hom}_S(M, Y)\big) \tag{14-9}$$

и явно опишите естественные преобразования

$$t_Y : M \otimes_R \mathrm{Hom}_{S\text{-}\mathcal{M}od}(M, Y) \to Y \quad \text{и} \quad s_X : X \to \mathrm{Hom}_{S\text{-}\mathcal{M}od}(M, M \otimes_R X) .$$

Пример 14.7 (индуцирование и коиндуцирование)
Если кольцо A содержится в кольце B, то каждый правый B-модуль X одновременно является и правым A-модулем, что задаёт *функтор ограничения*

$$\mathrm{res} : \mathcal{M}od\text{-}B \to \mathcal{M}od\text{-}A . \tag{14-10}$$

Рассмотрим B как A-B бимодуль и положим в предл. 14.3 $S = N = B$, $R = A$. Если кольца $A \subset B$ имеют общую единицу, т. е. такой элемент $1 \in A$, что $1 \cdot b = b \cdot 1 = b$ для всех $b \in B$, то абелева группа $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}B}(B, Y)$ канонически отождествляется с Y гомоморфизмом $\varphi \mapsto \varphi(1)$, и как правый A-модуль изоморфна $\mathrm{res}\, Y$.

Упражнение 14.11. Убедитесь в этом.

Мы заключаем, что изоморфизм (14-8) из предл. 14.3 превращается в этом случае в функториальный по A-модулю X и B-модулю Y изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}B}(X \otimes_A B, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}A}(X, \mathrm{res}\, Y) .$$

Правый B-модуль $\mathrm{ind}\, X \stackrel{\text{def}}{=} X \otimes_A B$ называется *индуцированным* с A-модуля X. Таким образом, функтор индуцирования $\mathrm{ind} : \mathcal{M}od\text{-}A \to \mathcal{M}od\text{-}B$ сопряжён слева к функтору ограничения.

Упражнение 14.12. Явно опишите естественные преобразования

$$t_Y : \mathrm{res}\,\mathrm{ind}\, Y \to Y \quad \text{и} \quad s_X : X \to \mathrm{ind}\,\mathrm{res}\, X .$$

Теперь рассмотрим B как B-A бимодуль и положим в предл. 14.3 $S = A$, $N = R = B$. Канонический гомоморфизм $X \otimes_B B \xrightarrow{\sim} X$, $x \otimes_B b \mapsto xb$, является изоморфизмом абелевых групп и отождествляет правый A-модуль $X \otimes_B B$ с $\mathrm{res}\, X$.

Упражнение 14.13. Убедитесь в этом.

Мы заключаем, что изоморфизм (14-8) из предл. 14.3 превращается в этом случае в функториальный по B-модулю X и A-модулю Y изоморфизм абелевых групп

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}A}(\mathrm{res}\, X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}B}\big(X, \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}A}(B, Y)\big) .$$

Правый B-модуль $\mathrm{coind}\, Y \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}A}(B, Y)$ называется *коиндуцированным* с A-модуля Y. Таким образом, функтор коиндуцирования $\mathrm{coind} : \mathcal{M}od\text{-}A \to \mathcal{M}od\text{-}B$ сопряжён справа к функтору ограничения.

Упражнение 14.14. Явно опишите естественные преобразования

$$t_Y : \mathrm{res}\,\mathrm{coind}\, Y \to Y \quad \text{и} \quad s_X : X \to \mathrm{coind}\,\mathrm{res}\, X .$$

В частном случае, когда $A = \Bbbk[H]$ и $B = \Bbbk[G]$ являются групповыми алгебрами группы G и её подгруппы $H \subset G$ с коэффициентами в поле $\Bbbk$, левомодульные версии этих функторов, получающиеся из упр. 14.10, превращаются в разбиравшиеся нами в n° 10.3.1 на стр. 157 и n° 10.3.3 на стр. 159 функторы (ко)индуцирования линейных представлений группы G над полем $\Bbbk$ с представлений её подгруппы H.

Пример 14.8 (сингулярные симплексы)

Свяжем с топологическим пространством Y симплициальное множество[1] его *сингулярных симплексов* $S(Y) : \varDelta^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}et$, которое сопоставляет комбинаторному симплексу $[n] \in \mathrm{Ob}\,\varDelta$ множество $S_n(Y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(\varDelta^n, Y) = h_Y(\varDelta^n)$ всех непрерывных отображений правильного n-мерного симплекса $\varDelta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ в Y, а неубывающему отображению $\varphi : [n] \to [m]$ — правое умножение $f \mapsto f \circ \varphi^*$ на аффинное отображение $\varphi^* : \varDelta^m \to \varDelta^n$, действие которого на вершины симплекса совпадает с φ. Возникающий таким образом функтор $S : \mathcal{T}op \to p\mathcal{S}h(\varDelta)$ сопряжён справа функтору геометрической реализации $p\mathcal{S}h(\varDelta) \to \mathcal{T}op$, $X \mapsto |X|$, из прим. 13.7 на стр. 193, т. е. имеется естественный по симплициальному множеству $X : \varDelta^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}et$ и топологическому пространству Y изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(|X|, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h}(X, S(Y)) , \tag{14-11}$$

который является категорным аналогом изоморфизма из форм. (14-8) на стр. 210. В самом деле, функтор геометрической реализации вкладывает категорию $\varDelta$ в категорию $\mathcal{T}op$ в виде дизъюнктного набора $D = \bigsqcup_{n\geqslant 0} \varDelta^n$ правильных симплексов всех размерностей. На пространстве D имеется левое действие стрелок φ категории $\varDelta$ аффинными отображениями φ_*. Оно задаёт правое действие стрелок из $\varDelta$ на множестве $S(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(D, Y)$ сингулярных симплексов топологического пространства Y. С другой стороны, каждое симплициальное множество $X : \varDelta^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}et$ по определению снабжено правым действием стрелок категории $\varDelta$ на множества $X_n = X([n])$, и геометрическая реализация $|X|$, представляющая собою фактор дизъюнктного объединения $\bigsqcup_{n\geqslant 0} X_n \times \varDelta^n$ по соотношениям $(x\varphi, s) = (x, \varphi s)$, является прямым аналогом тензорного произведения $X \otimes_{\varDelta} D$. Таким образом, изоморфизм (14-11) имеет вид

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}\big(X \otimes_{\varDelta} D, Y\big) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}\varDelta}\big(X, \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(D, Y)\big) , \tag{14-12}$$

ничем не отличающийся от изоморфизма (14-8) со стр. 210.

Упражнение 14.15. Явно постройте взаимно обратные изоморфизмы между левой и правой частями формулы (14-12) и опишите естественные преобразования[2]

$$t_Y : |S(Y)| \to Y \quad \text{и} \quad s_X : X \to S\big(|X|\big) .$$

14.3. (Ко)пределы диаграмм. Любую малую категорию $\mathcal{N}$ можно воспринимать как диаграмму, вершинами которой служат объекты, а стрелками — морфизмы категории $\mathcal{N}$. С этой точки зрения функтор $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ реализуют такую диаграмму внутри категории $\mathcal{C}$ в том смысле, что указывают объекты $X_\nu = X(\nu)$, занумерованные множеством $\mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$, а также стрелки $X(\nu \to \mu) : X_\nu \to X_\mu$, занумерованные множеством $\mathrm{Mor}\,\mathcal{N}$. Поэтому такой функтор часто называют *диаграммой* вида $\mathcal{N}$ в категории $\mathcal{C}$. Диаграммы образуют категорию $\mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})$ с естественными преобразованиями функторов в качестве морфизмов. Каждый объект $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ задаёт *постоянную диаграмму* Y, в которой все объекты $Y_\nu = Y$, а все стрелки $Y(\nu \to \mu) = \mathrm{Id}_Y$. Со всякой диаграммой $X \in \mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})$ связан предпучок множеств $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}et$, $Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(Y, X)$. Если он представим, т. е. существует такой объект $L \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, что имеется естественный по $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, L) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(Y, X) , \tag{14-13}$$

[1] См. прим. 13.7 на стр. 193.

[2] Первое является непрерывным отображением топологических пространств, второе — естественным преобразованием функторов $\varDelta^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}et$, переводящих комбинаторный симплекс $[n]$ в множества X_n и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}\big(\varDelta^n, |X|\big)$ соответственно.

то представляющий объект L называют *пределом*[1] диаграммы X и пишут $L = \lim X$.

Двойственным образом, объект $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, копредставляющий ассоциированный с диаграммой X ковариантный функтор $\mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, $Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(X,Y)$, называется *копределом*[2] диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ и обозначается $C = \operatorname{colim} X$. С копределом C связана функториальная по $Y \in \mathcal{C}$ биекция

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(X,Y)\,. \tag{14-14}$$

Как и все (ко)представляющие объекты, (ко)пределы однозначно характеризуются своими универсальными свойствами. Полагая $Y = L$ в формуле (14-13), мы получаем естественное преобразование $\pi : L \to X$, соответствующее тождественному эндоморфизму Id_L и представляющее собою набор стрелок $\pi_\nu : \lim X \to X_\nu$, которые коммутируют со всеми стрелками диаграммы X и универсальны в том смысле, что для любого коммутирующего со всеми стрелками диаграммы X набора стрелок $\psi_\nu : Y \to X_\nu$, выпущенных из произвольного объекта $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, существует единственный морфизм $\alpha : Y \to \lim X$, такой что $\psi_\nu = \pi_\nu \circ \alpha$ для всех ν.

Двойственным образом, в копредел $\operatorname{colim} X$ диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ ведёт канонический набор таких коммутирующих со всеми стрелками диаграммы X морфизмов $\iota_\nu : X_\nu \to \operatorname{colim} X$, что для любых перестановочных со всеми стрелками диаграммы X морфизмов $\psi_\nu : X_\nu \to Y$ в произвольный объект $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ существует единственный такой морфизм $\beta : \operatorname{colim} X_\nu \to Y$, что $\psi_\nu = \beta \circ \iota_\nu$ для всех ν.

Упражнение 14.16. Проверьте, что универсальные свойства задают предел и копредел однозначно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного со всеми каноническими стрелками π_ν и ι_ν соответственно.

Пример 14.9 (начальный, конечный и нулевой объекты)
Простейшая диаграмма — пустая. Её предел Fin называется *конечным*, а копредел Or — *начальным* объектами категории. Эти объекты однозначно с точностью до единственного изоморфизма определяются тем, что для любого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ есть единственная стрелка $X \to \mathrm{Fin}$ и единственная стрелка $\mathrm{Or} \to X$.

Упражнение 14.17. Укажите начальный и конечный объекты в категориях множеств, топологических пространств, абелевых групп, всех групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным кольцом.

Если в категории имеется объект 0, являющийся одновременно и начальным, и конечным, то этот объект называется *нулевым*. Морфизм $X \to Y$ в категории с нулевым объектом называется *нулевым*, если он является композицией канонических морфизмов $X \to 0 \to Y$.

Упражнение 14.18. Какие категории из упр. 14.17 обладают нулевым объектом?

Пример 14.10 (прямые (ко)произведения)
Малая категория $\mathcal{N}$ называется *дискретной*, если все её морфизмы исчерпываются тождественными морфизмами Id_ν с $\nu \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$. Соответствующие *дискретные диаграммы* $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ — это семейства объектов X_ν без стрелок между ними. Пределы и копределы таких диаграмм называются *прямыми произведениями* и *копроизведениями* и обозначаются, соответственно, через $\prod_\nu X_\nu$ и $\coprod_\nu X_\nu$. Когда индексов всего два, мы получаем прямые (ко)произведения двух

[1] Или *проективным* пределом.
[2] Или *инъективным* пределом.

объектов из прим. 13.14 и прим. 13.15 на стр. 201. Очевидная индукция показывает, что для существования всех конечных прямых (ко)произведений достаточно существования прямых (ко)произведений любых двух объектов.

Пример 14.11 ((ко)уравнители)
(Ко)предел диаграммы вида $X \overset{\varphi}{\underset{\psi}{\rightrightarrows}} Y$ называется *(ко)уравнителем*[1] стрелок φ и ψ. В категории множеств уравнитель представляет собою множество решений уравнения $\varphi(x) = \psi(x)$ на $x \in X$ или, чуть более научно, прообраз диагонали $\Delta_Y \subset Y \times Y$ при каноническом отображении $\varphi \times \psi : X \to Y \times Y$. Коуравнитель является фактором множества Y по наименьшему отношению эквивалентности[2] $R \subset Y \times Y$, содержащему образ отображения $\varphi \times \psi$, т. е. все отождествления $\varphi(x) = \psi(x)$ с $x \in X$.

Упражнение 14.19. Проверьте это и постройте (ко)уравнители любой пары стрелок в категориях топологических пространств, абелевых групп, произвольных групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным коммутативным кольцом.

Например, в категории абелевых групп $\mathcal{Ab}$ (ко)ядро гомоморфизма $f : A \to B$ есть не что иное, как (ко)уравнитель f и нулевого гомоморфизма. Интуитивно, уравнители позволяют задавать подобъекты уравнениями, а коуравнители — фактор объекты наложением соотношений.

Пример 14.12 (послойные произведения)
Предел диаграммы вида

$$X \xrightarrow{\xi} B \xleftarrow{\eta} Y$$

называется *послойным* или *расслоенным произведением*[3] и обозначается $X \times_B Y$. Он включается в коммутативный *декартов квадрат*

$$\begin{tikzcd} X \times_B Y \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \arrow[d, "\eta"] \\ X \arrow[r, "\xi"] & B \end{tikzcd} \qquad (14\text{-}15)$$

универсальный в том смысле, что для любого коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "\varphi'"'] & Y \arrow[d, "\eta"] \\ X \arrow[r, "\xi"] & B \end{tikzcd}$$

[1] По-английски (*co*)*equalizer*.

[2] Напомню, что *отношением эквивалентности* на Y называется подмножество $R \subset Y \times Y$, которое *рефлексивно* (содержит диагональ Δ_Y), *симметрично* (переходит в себя при транспозиции сомножителей) и *транзитивно* (т. е. (y_1, y_2), $(y_2 . y_3) \in R \Rightarrow (y_1, y_3) \in R$), см. опр. 1.1 на стр. 11 части I. Пересечение отношений эквивалентности тоже эквивалентность. Поэтому любое подмножество $S \subset Y \times Y$ содержится в единственном минимальном по включению отношении эквивалентности R_S, которое называется *порождённым* подмножеством S, см. n° 1.4.1 на стр. 13 части I. Всякое отображение $\xi : Y \to Z$ определяет отношение эквивалентности $R_\xi = \{(y_1, y_2) \mid \xi(y_1) = \xi(y_2)\}$ на Y, причём $\xi' : Y \to Z'$ тогда и только тогда представляется в виде композиции $\xi' = \eta \circ \xi$ с некоторой стрелкой $\eta : Z \to Z'$, когда $R_\xi \subset R_{\xi'}$, т. е. когда эквивалентность, отвечающая ξ, *влечёт* эквивалентность, отвечающую ξ' (в этом случае говорят, что первая эквивалентность *тоньше* или *сильнее*, а вторая — *грубее* или *слабее*).

[3] Ср. с n° 8.2.4 на стр. 119.

имеется единственный такой морфизм $\varphi' \times \psi' : Z \to X \times_B Y$, что

$$\varphi' = \varphi \circ (\varphi' \times \psi') \quad \text{и} \quad \psi' = \psi \circ (\varphi' \times \psi').$$

Упражнение 14.20. Убедитесь, что левый верхний угол диаграммы (14-15) задаётся этим универсальным свойством однозначно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с φ и ψ.

В категории множеств отображение $X \times_B Y \to B$ имеет в качестве слоя над произвольной точкой $b \in B$ прямое произведение слоёв $\varphi^{-1}(b) \times \psi^{-1}(b)$, отсюда и название.

Упражнение 14.21. Убедитесь, что $U \times_X V = U \cap V$ в категории $\mathcal{U}(X)$ открытых подмножеств топологического пространства X.

Пример 14.13 (послойные копроизведения)

Оборачивая все стрелки в предыдущем примере, назовём *послойным копроизведением* $X \boxtimes_B Y$ копредел диаграммы $X \xleftarrow{\xi} B \xrightarrow{\eta} Y$. Он вписывается в коммутативный *кодекартов квадрат*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\xi"'] & Y \arrow[d, "\psi"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & X \boxtimes_B Y \end{tikzcd} \tag{14-16}$$

универсальный в том смысле, что для любого коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\xi"'] & Y \arrow[d, "\psi'"] \\ X \arrow[r, "\varphi'"] & Z \end{tikzcd}$$

существует единственный такой морфизм $\varphi' \boxtimes \psi' : X \boxtimes_B Y \to Z$, что

$$\varphi' = (\varphi' \boxtimes \psi') \circ \varphi \quad \text{и} \quad \psi' = (\varphi' \boxtimes \psi') \circ \psi.$$

Упражнение 14.22. Явно опишите послойные (ко)произведения $A \boxtimes_C B$ в категориях множеств, топологических пространств, групп[1], коммутативных колец с единицей и модулей над коммутативным кольцом[2].

Определение 14.1 ((ко) замкнутость и полнота)

Категория $\mathcal{C}$ называется (*ко*) *замкнутой*, если для любой малой категории $\mathcal{N}$ каждая диаграмма $\mathcal{N} \to \mathcal{C}$ имеет (ко)предел в $\mathcal{C}$. Мы будем называть категорию *полной*, если она одновременно замкнута и козамкнута.

Предложение 14.4

Для замкнутости категории $\mathcal{C}$ достаточно существования в $\mathcal{C}$ конечного объекта, прямых произведений любых множеств объектов и уравнителей любой пары стрелок с общим началом и концом, а для козамкнутости — существования в $\mathcal{C}$ начального объекта, прямых копроизведений любых множеств объектов и коуравнителей любой пары стрелок с общим началом и концом.

[1] В теории групп копроизведения традиционно называются *амальгамами*.

[2] В частности, в категории $\mathcal{Ab}$ абелевых групп.

Доказательство. Мы построим предел произвольной диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$, копредел строится аналогично путём обращения стрелок. Надо предъявить универсальный набор мофизмов $\varphi_\nu : L \to X_\nu$, решающий уравнения $\varphi_\mu = X(\nu \to \mu) \circ \varphi_\nu$, где $\nu \to \mu$ пробегает $\operatorname{Mor} \mathcal{N}$. Для каждой стрелки $\nu \to \mu$ обозначим через $T_{\nu\to\mu} = X_\mu$ тот объект диаграммы X, в который ведёт эта стрелка, и образуем два произведения $A = \prod_\mu X_\mu$ и $B = \prod_{\nu\to\mu} T_{\nu\to\mu}$. В первое из них каждый объект диаграммы X входит ровно один раз, а во второе — столько раз, сколько стрелок в нём заканчивается. Для каждой стрелки $\mu \to \nu$ имеются два отображения $A \to T_{\nu\to\mu}$: проекция $\pi_\mu : A \to X_\mu$ произведения A на μ-тый сомножитель и композиция $\varkappa_{\nu\to\mu} = X(\nu \to \mu) \circ \pi_\nu$ проекции $\pi_\nu : A \to X_\nu$ произведения A на ν-тый сомножитель со стрелкой $X(\nu \to \mu) : X_\nu \to X_\mu$ диаграммы X. По универсальному свойству произведения B эти пары отображении задают два морфизма $\pi, \varkappa : A \to B$. Их уравнитель L приходит вместе с морфизмом $\varphi : L \to A$, который представляет собою набор стрелок $\varphi_\mu = \pi_\mu \circ \varphi$, удовлетворяющих равенствам

$$\varphi_\mu = \pi_\mu \circ \varphi = \varkappa_{\nu\to\mu} \circ \varphi = X(\nu \to \mu) \circ \varphi_\nu$$

и обладающих требуемым универсальным свойством (убедитесь в этом!). □

Пример 14.14

В категории множеств $\lim X$ изоморфен подмножеству прямого произведения $\prod X_\nu$, образованному такими семействами (x_ν), $\nu \in \operatorname{Ob} \mathcal{N}$, $x_\nu \in X_\nu$, где $x_\mu = X(\nu \to \mu) x_\nu$ для всех стрелок $\nu \to \mu$ из $\operatorname{Mor} \mathcal{N}$.

Упражнение 14.23. Проверьте, что $\operatorname{colim} X$ изоморфен коуравнителю диаграммы

$$\textstyle\coprod_{\nu\to\mu} S_{\nu\to\mu} \overset{\iota}{\underset{\varkappa}{\rightrightarrows}} \coprod_\nu X_\nu \ ,$$

в которой объекты $S_{\nu\to\mu} = X_\nu$ суть начала стрелок $X(\nu \to \mu)$ диаграммы X, а морфизмы задаются семействами стрелок

$$\iota_\nu : S_{\nu\to\mu} \to \coprod_\nu X_\nu \quad \text{и} \quad \varkappa_{\nu\to\mu} = \iota_\mu \circ X(\nu \to \mu) : S_{\nu\to\mu} \to \coprod_\nu X_\nu \,.$$

В частности, убедитесь, что в категории множеств $\operatorname{colim} X$ является фактором дизъюнктного объединения $\bigsqcup_\nu X_\nu$ по наименьшему отношению эквивалентности, содержащему отождествления $x \sim X(\nu \to \mu)x$ для всех $x \in X_\nu$ и всех стрелок $\nu \to \mu$ из $\operatorname{Mor} \mathcal{N}$.

Замечание 14.1. Для того, чтобы в категории существовали (ко)пределы всех *конечных* диаграмм, в условиях предл. 14.4 достаточно потребовать существования (ко)произведения любых двух объектов.

Следствие 14.2

Категории множеств, топологических пространств, абелевых групп, всех групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным кольцом полны.

Доказательство. Сделайте упр. 14.19. □

Пример 14.15 (уточнённое определение пучка)
Объединение $U = \bigcup_i U_i$ произвольного семейства $\{U_i\}_{i\in I}$ открытых множеств топологического пространства X представляет собою коуравнитель отображений

$$\coprod_{ij} U_i \cap U_j \underset{\psi_2}{\overset{\psi_1}{\rightrightarrows}} \coprod_i U_i\,,$$

являющихся копроизведениями вложений $U_i \cap U_j \hookrightarrow U_i$ и $U_i \cap U_j \hookrightarrow U_j$. Всякий предпучок $F : \mathcal{U}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ объектов любой категории $\mathcal{C}$ переводит диаграмму коуравнителя

$$\coprod_{ij} U_i \cap U_j \underset{\psi_2}{\overset{\psi_1}{\rightrightarrows}} \coprod_i U_i \xrightarrow{\varphi} U\,, \tag{14-17}$$

в следующую диаграмму в категории $\mathcal{C}$:

$$F(U) \xrightarrow{\varphi^*} \prod_i F(U_i) \underset{\psi_2^*}{\overset{\psi_1^*}{\rightrightarrows}} \prod_{ij} F(U_i \cap U_j)\,. \tag{14-18}$$

Стрелка φ^* этой диаграммы является произведением ограничений $F(U) \to F(U_i)$, а стрелки ψ_1^* и ψ_2^* — ограничений $F(U_i) \to F(U_i \cap U_j)$ и $F(U_j) \to F(U_i \cap U_j)$ соответственно. По определению, предпучок F является *пучком*, если стрелка φ является уравнителем стрелок ψ_1^* и ψ_2^*. В частности, когда множество индексов $I = \varnothing$, мы получаем в левом члене диаграммы (14-18) объект $F(\varnothing) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, а в среднем и правом членах — произведения пустых множеств объектов, т. е. пределы пустых диаграмм, канонически изоморфные конечному объекту[1] $\mathrm{Fin}_{\mathcal{C}}$ категории $\mathcal{C}$. Стрелки ψ_1^* и ψ_2^* являются в этом случае тождественными эндоморфизмами конечного объекта, и их уравнитель равен $\mathrm{Id}_{\mathrm{Fin}_{\mathcal{C}}}$. Таким образом, для любого пучка объектов произвольной категории $\mathcal{C}$ на топологическом пространстве X должно выполняться равенство $F(\varnothing) = \mathrm{Fin}_{\mathcal{C}}$. Например, для любого пучка множеств $F : \mathcal{U}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}et$ множество $F(\varnothing)$ состоит из одной точки, а для пучка абелевых групп $F : \mathcal{U}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}b$ группа $F(\varnothing) = 0$.

Предложение 14.5
Для существования конечного объекта в козамкнутой категории $\mathcal{C}$ достаточно существования такого множества объектов $S \subset \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, что из любого объекта категории $\mathcal{C}$ существует хотя бы одна стрелка в хотя бы один объект из S.

Доказательство. Рассмотрим прямое копроизведение $C = \coprod_{X\in S} X$ всех объектов из S и обозначим через F коуравнитель всех его эндоморфизмов. Он приходит вместе с таким эпиморфизмом[2] $\pi : C \to F$, что $\pi\psi = \pi$ для всех $\psi \in \mathrm{End}\,C$. Рассмотрим произвольный объект $Z \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. Из него ведёт стрелка в некоторый $X \in S$. Беря её композицию с канонической стрелкой $X \to C$ и проекцией $C \to F$, получаем стрелку $Z \to F$. Пусть имеются две стрелки $\alpha, \beta : Z \to F$ с коуравнителем $\varkappa : F \to Q$. Рассмотрим какую-нибудь стрелку[3] $\gamma : Q \to C$. В диаграмме

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & F \arrow[r, "\varkappa"] & Q \arrow[dl, "\gamma"] \\ & C \arrow[u, "\pi"] & \end{tikzcd}$$

[1] Тем самым, для того чтобы предпучок F был пучком, необходимо, чтобы в категории $\mathcal{C}$ был конечный объект (см. прим. 14.9 на стр. 213).

[2] Ибо из универсального свойства коуравнителя равенство $\varphi_1\pi = \varphi_2\pi$ возможно только при $\varphi_1 = \varphi_2$.

[3] Например, композицию произвольной стрелки $Z \to X$ с канонической стрелкой $X \to C$.

композиция $\gamma\varkappa\pi \in \operatorname{End} C$ удовлетворяет равенству $\pi\gamma\varkappa\pi = \pi$. Сокращая справа на эпиморфизм π, заключаем, что $\pi\gamma\varkappa = \mathrm{Id}_F$. Умножая обе части равенства $\varkappa\alpha = \varkappa\beta$ слева на $\pi\gamma$, получаем $\alpha = \beta$. □

Упражнение 14.24. Докажите двойственный критерий существования начального объекта в замкнутой категории.

Пример 14.16 (козамкнутая категория без конечного объекта)
Классы изоморфных вполне упорядоченных множеств образуют *категорию ординалов* $\mathcal{O}rd$, морфизмами в которой являются включения меньшего ординала в больший в качестве начального интервала. Эта категория козамкнута: начальным объектом служит $\varnothing$, коуравнителем и копроизведением любого множества ординалов является их точная верхняя грань — класс объединения, взятого в любом большем ординале, содержащем все ординалы из рассматриваемого множества в качестве начальных интервалов. Однако ординала, содержащего все ординалы, нет.

14.4. Фильтрующиеся диаграммы. Малая категория $\mathcal{F}$ называется *фильтрующейся*, если из любых двух её объектов выходят стрелки с общим концом и для любых двух стрелок φ, ψ с общими началом и концом из их конца ведёт такая стрелка ζ, что $\zeta\varphi = \zeta\psi$. Например, любой чум, в котором у каждых двух элементов есть общая верхняя грань, является фильтрующейся категорией[1]. Диаграммы вида $\mathcal{F} \to \mathcal{C}$ и $\mathcal{F}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ с фильтрующейся категорией $\mathcal{F}$ принято называть, соответственно, *индуктивными* (или *прямыми*) и *проективными* (или *обратными*) *системами* стрелок категории $\mathcal{C}$.

Пример 14.17 (разбиения отрезка)
Конечные наборы точек $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1$, разбивающие отрезок $[0, 1]$ на непересекающиеся интервалы, как в определении интеграла Римана, образуют прямую систему в категории[2] ∇_{big} относительно морфизмов включения

$$\{0,\, x_1, \dots, x_n,\, 1\} \hookrightarrow \{0,\, x_1', \dots, x_m',\, 1\}\,, \tag{14-19}$$

отвечающих добавлениям новых точек в разбиение. Копределом этой системы в категории всех (не обязательно конечных) упорядоченных множеств с отмеченными максимальным и минимальным элементами является $[0, 1]$. В категории ∇_{big} копредела не существует.

Двойственным образом, естественно упорядоченные полуинтервалы $I_\nu = [x_\nu, x_{\nu+1})$ разбиения $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} = 1$ образуют объект категории упорядоченных множеств[3] Δ_{big} и измельчению разбиения (14-19) отвечает идущий в противоположную сторону морфизм

$$\{I_0, I_1, \dots, I_n\} \hookleftarrow \{I_0', I_1', \dots, I_m'\}\,, \tag{14-20}$$

сопоставляющий каждому полуинтервалу I_ν' полуинтервал $I_\nu \supset I_\nu'$. Эти морфизмы образуют обратную систему в Δ_{big}, которая не имеет предела в Δ_{big}, но в категории всех упорядоченных множеств её пределом является полуинтервал $[0, 1)$.

[1] Ср. с прим. 13.2 на стр. 189.
[2] См. прим. 13.10 на стр. 195.
[3] См. прим. 13.4 на стр. 190.

Предложение 14.6
Копредел индуктивной системы множеств $X : \mathcal{F} \to \mathcal{S}et$ изоморфен фактору дизъюнктного объединения $\coprod_{\nu \in \operatorname{Ob} \mathcal{F}} X_\nu$ по отношению эквивалентности, отождествляющему элементы $x_\nu \in X_\nu$ и $x_\mu \in X_\mu$, если для некоторой пары стрелок $\nu \to \eta \leftarrow \mu$ в множестве X_η выполняется равенство

$$X(\nu \to \eta)x_\nu = X(\mu \to \eta)x_\mu\,.$$

Доказательство. Согласно упр. 14.23 копредел $\operatorname{colim} X$ является фактором дизъюнктного объединения $\coprod_{\nu \in \operatorname{Ob} \mathcal{F}} X_\nu$ по наименьшему отношению эквивалентности, обеспечивающему равенства $x = X(\nu \to \mu)x$ для всех стрелок $\nu \to \mu$ из $\operatorname{Mor} \mathcal{F}$ и всех $x \in X_\nu$. При этом элементы $x_\nu \in X_\nu$ и $x_\mu \in X_\mu$ заведомо отождествляются, если $X(\nu \to \eta)x_\nu = X(\mu \to \eta)x_\mu$ для некоторой пары стрелок $\nu \to \eta \leftarrow \mu$. Таким образом, достаточно убедиться, что описанное в предложении отношение является эквивалентностью. Рефлексивность и симметричность очевидны. Докажем транзитивность. Если x_α эквивалентен x_β, а x_β эквивалентен x_γ, то в категории $\mathcal{F}$ имеется диаграмма[1] из таких стрелок

$$\begin{tikzcd}
 & & \varepsilon & & \\
 & & \delta \arrow[u, "\xi"] & & \\
 & \eta \arrow[ur, "\psi_{\delta\eta}"] & & \zeta \arrow[ul, "\psi_{\delta\zeta}"'] & \\
\alpha \arrow[ur, "\varphi_{\eta\alpha}"] & & \beta \arrow[ul, "\varphi_{\eta\beta}"] \arrow[ur, "\varphi_{\zeta\beta}"'] & & \gamma \arrow[ul, "\varphi_{\zeta\gamma}"']
\end{tikzcd}$$

что $X\left(\varphi_{\eta\alpha}\right) x_\alpha = X\left(\varphi_{\eta\alpha}\right) x_\beta$ и $X\left(\varphi_{\zeta\beta}\right) x_\beta = X\left(\varphi_{\zeta\gamma}\right) x_\gamma$ в категории $\mathcal{S}et$, а $\xi\psi_{\delta\eta}\varphi_{\eta\beta} = \xi\psi_{\delta\zeta}\varphi_{\zeta\beta}$ в $\operatorname{Hom}_{\mathcal{F}}(\beta, \varepsilon)$. Обозначая стрелку из последнего равенства через $\varkappa$, имеем

$$X\left(\varepsilon\psi_{\delta\eta}\varphi_{\eta\alpha}\right) x_\alpha = X(\varkappa)x_\beta = X\left(\varepsilon\psi_{\delta\zeta}\varphi_{\zeta\gamma}\right) x_\gamma\,,$$

что и требовалось. □

Упражнение 14.25. Покажите, что копредел фильтрующейся диаграммы $A : \mathcal{N} \to \mathcal{A}b$ как множество совпадает с копределом диаграммы подлежащих абелевым группам множеств и является фактором прямой суммы $\bigoplus_{\nu \in \operatorname{Ob} \mathcal{N}} A_\nu$ по подгруппе, образованной всеми конечными суммами $\sum_{\nu \in N} a_\nu$, $N \subset \operatorname{Ob} \mathcal{N}$, $a_\nu \in A_\nu$, для которых в диаграмме A найдутся группа A_μ и стрелки $\varphi_\nu : A_\nu \to A_\mu$, по одной для каждого $\nu \in N$, со свойством $\sum_{\nu \in N} \varphi(a_\nu) = 0$ в A_μ.

Пример 14.18 (открытые окрестности и слой предпучка)
Множество открытых окрестностей любого подмножества $Z \subset X$ топологического пространства X является проективной системой в категории $\mathcal{U} = \mathcal{U}(X)$ открытых подмножеств в X, т. к. для любых окрестностей $U, W \supset Z$ окрестность $U \cap W = U \times_X V \supset Z$ вкладывается и в окрестность U, и в окрестность W. Пределом этой системы в категории $\mathcal{S}et$ является пересечение всех открытых окрестностей Z. В категории $\mathcal{U}$ предела может и не быть. Для любого предпучка $F : \mathcal{U}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}et$ множества сечений $F(U)$ над открытыми окрестностями U произвольно заданного подмножества $Z \subset X$ образуют индуктивную систему в $\mathcal{S}et$. Её копредел называется

[1] Не обязательно коммутативная!

слоем предпучка F над Z и обозначается F_Z. В силу козамкнутости категории $\mathcal{S}et$ этот копредел всегда существует. Согласно предл. 14.6, каждый элемент слоя F_Z представляет собою класс $s|_Z$ некоторого сечения $s \in F(U)$ над каким-либо открытым множеством $U \supset Z$ по модулю эквивалентности, отождествляющей сечения $s \in F(U)$ и $t \in F(W)$, когда $s|_V = t|_V$ над некоторым открытым V, таким что $Z \subset V \subset U \cap W$. Определённые таким образом классы $s|_Z$ называются *ростками сечений* предпучка F над Z. В частности, когда $Z = \{x\}$ это одна точка, слой F_x называется *слоем F в точке x*. Отметим, что *росток* локальной функции $f \in F(U)$ в слое F_x над точкой $x \in U$ не следует путать со *значением* $f(x)$ этой функции в точке x. Во-первых, они лежат в разных множествах. Во-вторых, равенство ростков двух функций означает равенство их значений в некоторой открытой окрестности точки x, что обычно гораздо сильнее, чем равенство значений лишь в самой точке x.

Пример 14.19 (локализация кольца)

Пусть подмножество S ассоциативного (но не обязательно коммутативного) кольца R с единицей таково, что $1 \in S$ и $st \in S$ для всех $s, t \in S$. Пусть, кроме того, выполняются следующие *левые условия Оре*[1]:

$$\forall \varrho \in R,\ \forall s \in S \quad \exists \lambda \in R,\ \exists t \in S : \ \lambda s = t\varrho \tag{LO$_1$}$$

$$\forall \varphi, \psi \in R \quad \text{из} \quad \exists s \in S : \ \phi s = \psi s \quad \text{следует, что} \quad \exists t \in S : \ t\phi = t\psi\,. \tag{LO$_2$}$$

Превратим множество S в категорию, полагая $\mathrm{Hom}_S(s,t) \overset{\text{def}}{=} \{\lambda \in R \mid \lambda s = t\}$.

Упражнение 14.26. Выведите из условий Оре, что категория S фильтрующаяся.

Рассмотрим в категории правых R-модулей фильтрующуюся диаграмму $S \to \mathcal{M}od\text{-}R$, образованную свободными модулями $s^{-1}R$ ранга один, где символом s^{-1} обозначен базисный вектор того модуля, который отвечает объекту $s \in S$, и R-линейными отображениями $\lambda_* : s_1^{-1}R \to s_2^{-1}R$, которые отвечают стрелкам $\lambda \in \mathrm{Hom}_S(s_1, s_2)$ и действуют на базисный вектор по правилу $s_1^{-1} \mapsto s_2^{-1}\lambda$. Копредел этой диаграммы в категории $\mathcal{M}od\text{-}R$ состоит из классов $s^{-1}\varrho$, где $s \in S$, $\varrho \in R$, по модулю равенств $s_1^{-1}\varrho_1 = s_2^{-1}\varrho_2$, означающих существование таких $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, что $\lambda_1 s_1 = \lambda_2 s_2 \in S$ и $\lambda_1\varrho_1 = \lambda_2\varrho_2$ в R. Классы $s^{-1}\varrho$ называются *левыми дробями* со знаменателями в S. Они образуют правый R-модуль, обозначаемый $S^{-1}R$ и именуемый *левой локализацией* кольца R относительно мультипликативной системы Оре S.

Упражнение 14.27. Чему равна сумма $s_1^{-1}\varrho_1 + s_2^{-1}\varrho_2$ в модуле $S^{-1}R$?

Определим *произведение* левых дробей $s_1^{-1}\varrho_1$ и $s_2^{-1}\varrho_2$ следующим образом. Пользуясь условием (LO$_1$) подберём такие $\lambda_1 \in R$ и $t_2 \in S$, что[2] $t_2\varrho_1 = \lambda_1 s_2$, и положим

$$s_1^{-1}\varrho_1 \cdot s_2^{-1}\varrho_2 \overset{\text{def}}{=} (t_2 s_1)^{-1}(\lambda_1\varrho_2)\,.$$

Упражнение 14.28. Проверьте, что это определение корректно[3] и задаёт на модуле $S^{-1}R$ структуру ассоциативного кольца с единицей. Убедитесь, что для коммутативного кольца R кольцо дробей $S^{-1}R$ изоморфно кольцу частных из n° 4.1 на стр. 62 части I.

[1] В коммутативном кольце R эти условия всегда выполнены.

[2] Это «политкорректная» запись интуитивно желаемого равенства $\varrho_1 s_2^{-1} = t_2^{-1}\lambda_1$.

[3] Т. е. результат умножения не зависит от выбора таких $\lambda_1 \in R$ и $t_2 \in S$, что $t_2\varrho_1 = \lambda_1 s_2$.

Упражнение 14.29. Для мультипликативного подмножества $S \subset R$, удовлетворяющего *правым условиям Оре*

$$\forall\,\lambda \in R,\ \forall\,t \in S \quad \exists\,\varrho \in R,\ \exists s \in S:\ \lambda s = t\varrho \tag{RO$_1$}$$

$$\forall\,\varphi, \psi \in R \quad \text{из} \quad \exists\,t \in S:\ t\phi = t\psi \quad \text{следует, что} \quad \exists\,s \in S:\ \phi s = \psi s\,, \tag{RO$_2$}$$

постройте кольцо правых дробей RS^{-1}, а если S удовлетворят одновременно и левым и правым условиям Оре, установите канонический изоморфизм колец $S^{-1}R \simeq RS^{-1}$.

14.5. Функториальность (ко)пределов. Равенства (14-14) и (14-13) со стр. 213, описывающие универсальные свойства копредела и предела диаграммы $X:\ \mathcal{N} \to \mathcal{C}$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{colim}, C) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(X, C)$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(C, X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \lim X)$$

означают[1], что для заданных малой категории $\mathcal{N}$ и (ко)замкнутой категории $\mathcal{C}$ копредел и предел являются, соответственно, левым и правым сопряжёнными к функтору $\mathcal{C} \to \mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})$, переводящему каждый объект $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ в постоянную диаграмму C. В частности, предел и копредел задают функторы $\lim, \mathrm{colim}:\ \mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$.

Если не предполагать категорию $\mathcal{C}$ (ко)замкнутой, то (ко)предел будет функториален на всех диаграммах, у которых он есть. Действие функторов lim и colim на естественные преобразования диаграмм определено даже в более общей ситуации: пусть диаграммы $X:\ \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ и $Y:\ \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ имеют пределы в категории $\mathcal{C}$ и пусть заданы функтор $\tau:\ \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ и естественное преобразование $f:\ X \circ \tau \to Y$, т. е. набор стрелок $f_\mu:\ X_{\tau(\mu)} \to Y_\mu$, по одной для каждого $\mu \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}$, перестановочных со всеми стрелками обеих диаграмм. Беря композиции этих стрелок с каноническими проекциями предела $\lim X$ на элементы диаграммы X, получаем стрелки $f_\mu \pi_{\tau(\mu)}:\ \lim X \to Y_\mu$, перестановочные со стрелками диаграммы Y. По универсальному свойству предела $\lim Y$ существует единственный морфизм $\lim f:\ \lim X \to \lim Y$, делающий коммутативными все диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\lim X \arrow[r, "\pi_{\tau(\mu)}"] \arrow[d, "\lim f"'] & X_{\tau(\mu)} \arrow[d, "f_\mu"] \\
\lim Y \arrow[r, "\pi_\mu"] & Y_\mu\,,
\end{tikzcd} \tag{14-21}$$

горизонтальные стрелки которых суть канонические морфизмы из предела в элементы диаграммы. Двойственным образом, если существуют копределы $\mathrm{colim}\,X$ и $\mathrm{colim}\,Y$, то любые функтор $\tau:\ \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ и естественное преобразование $f:\ X \to Y \circ \tau$ задают единственный морфизм $\mathrm{colim}\,f:\ \mathrm{colim}\,X \to \mathrm{colim}\,Y$, делающий коммутативными все диаграммы

$$\begin{tikzcd}
X_\nu \arrow[r, "\iota_\nu"] \arrow[d, "f_\nu"'] & \mathrm{colim}\,X \arrow[d, "\mathrm{colim}\,f"] \\
Y_{\tau(\nu)} \arrow[r, "\iota_{\tau(\nu)}"] & \mathrm{colim}\,Y\,,
\end{tikzcd}$$

горизонтальные стрелки которых суть канонические морфизмы элементов диаграммы в копредел.

[1] См. предл. 14.1 на стр. 206.

Пример 14.20 (полнота категории предпучков)
Если задана диаграмма $F : \mathcal{N} \to p\mathcal{Sh}(\mathcal{U})$ предпучков множеств на малой категории $\mathcal{U}$, то над каждым объектом $U \in \operatorname{Ob}\mathcal{U}$ возникает диаграмма множеств $F(U) : \mathcal{N} \to \mathcal{Set}$, вершинами которой служат множества сечений $F_\nu(U)$ предпучков F_ν диаграммы F над объектом U с отображениями, задающими действие стрелок диаграммы F над этим объектом. В силу функториальности (ко)предела множества $L(U) \stackrel{\text{def}}{=} \lim F(U)$ и $C(U) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{colim} F(U)$ ведут себя функториально по U, т. е. задают на $\mathcal{U}$ предпучки множеств. Для любого предпучка $F_\nu : \mathcal{U}^{\text{op}} \to \mathcal{Set}$ диаграммы F имеются канонические морфизмы предпучков $L \to F_\nu$ и $F_\nu \to C$, действие которых над каждым объектом $U \in \operatorname{Ob}\mathcal{U}$ задаётся стрелками $\lim F(U) \to F_\nu(U)$ и $F_\nu(U) \to \operatorname{colim} F(U)$ в категории $\mathcal{Set}$. Универсальность последних в категории $\mathcal{Set}$ над каждым объектом $U \in \operatorname{Ob}\mathcal{U}$ влечёт универсальность первых в категории $p\mathcal{Sh}(\mathcal{U})$. Таким образом, категория $p\mathcal{Sh}(\mathcal{U})$ предпучков множеств на малой категории $\mathcal{U}$ замкнута и козамкнута.

Упражнение 14.30. Покажите, что категория $\mathcal{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{Ab})$ ковариантных функторов из любой малой категории $\mathcal{C}$ в абелевы группы тоже замкнута и козамкнута.

14.5.1. Перестановочность функторов с (ко)пределами. Скажем, что функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *перестановочен с (ко) пределами*, если для любого $L \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ и любой диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ из того, что L является (ко)пределом X в $\mathcal{C}$, вытекает, что $F(L)$ является (ко)пределом диаграммы $F \circ X$ в $\mathcal{D}$.

Предложение 14.7
Если функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ сопряжён слева к функтору $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, то F перестановочен с копределами, а G — с пределами.

Доказательство. В силу сопряжённости F и G имеем функториально по $D \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$:

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(\operatorname{colim} X), D\big) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(\operatorname{colim} X, G(D)\big) \simeq \\ \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{Fun}(\mathcal{N},\mathcal{C})}\left(X, \overline{G(D)}\right) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{Fun}(\mathcal{N},\mathcal{D})}(F \circ X, D) \,.$$

Тем самым, $F(\operatorname{colim} X) \simeq \operatorname{colim}(F \circ X)$. Рассуждение про пределы аналогично. □

Следствие 14.3
Пределы коммутируют с пределами, а копределы — с копределами всякий раз, когда они существуют. Более пространно, пусть задана диаграмма $F : \mathcal{M} \to \mathcal{Fun}(\mathcal{N}, \mathcal{C})$, вершинами которой являются диаграммы $F_\mu : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$, по одной для каждого объекта $\mu \in \operatorname{Ob}\mathcal{M}$, а стрелками — естественные преобразования $F(\mu_1 \to \mu_2) : F_{\mu_1} \to F_{\mu_2}$, по одному для каждой стрелки $\mu_1 \to \mu_2$ из $\operatorname{Mor}\mathcal{M}$, и пусть для каждого $\mu \in \mathcal{M}$ диаграмма F_μ имеет (ко)предел, а для каждого $\nu \in \mathcal{N}$ имеет (ко)предел диаграмма $F(\nu) : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$, образованная объектами $F_\mu(\nu)$ и стрелками $F(\mu_1 \to \mu_2)_\nu : F_{\mu_1}(\nu) \to F_{\mu_2}(\nu)$, задающими действие естественных преобразований $F(\mu_1 \to \mu_2)$ над объектом ν. Тогда

$$\lim_\mu \lim_\nu F_\mu \simeq \lim_\nu \lim_\mu F(\nu) \quad \text{и} \quad \operatorname*{colim}_\mu \operatorname*{colim}_\nu F_\mu \simeq \operatorname*{colim}_\nu \operatorname*{colim}_\mu F(\nu)\,.$$

Пример 14.21 (ядра и коядра в категории модулей)
В категории $\mathcal{Mod}\text{-}R$ правых модулей над кольцом R (ко)ядро морфизма R-модулей $\varphi : A \to B$ является (ко)уравнителем φ с нулевым морфизмом из A в B. Следовательно, ядро и коядро являются функторами из категории диаграмм вида $* \to *$ в категорию $\mathcal{Mod}\text{-}R$, причём коядро коммутирует с копределами, а ядро — с пределами. В подробностях это звучит так. Пусть имеются

две диаграммы правых R-модулей $X, Y : \mathcal{N} \to \mathcal{M}od\text{-}R$ и гомоморфизмы $f_\nu : X_\nu \to Y_\nu$, задающие естественное преобразование этих диаграмм. В силу функториальности (ко)пределов возникают гомоморфизмы $\lim f_\nu : \lim X \to \lim Y$ и $\operatorname{colim} f_\nu : \operatorname{colim} X \to \operatorname{colim} Y$, а также диаграммы $\ker f, \operatorname{coker} f : \mathcal{N} \to \mathcal{M}od\text{-}R$, элементами которых являются ядра и коядра гомоморфизмов f_ν. Имеют место канонические изоморфизмы

$$\operatorname{colim} \operatorname{coker} f \simeq \operatorname{coker} \operatorname{colim} f \quad \text{и} \quad \lim \ker f \simeq \ker \lim f\,.$$

Каждый левый сопряжённый функтор со значениями в абелевых группах, будучи перестановочен с копределами, переводит коядра в коядра, а любой правый сопряжённый функтор переводит ядра в ядра.

Свойство функтора F сохранять ядра, т. е. наличие естественного по диаграмме $A \to B$ изоморфизма $\ker(FA \to FB) \simeq F\ker(A \to B)$, называется *точностью слева*. Сохранение коядер, т. е. изоморфизм $\operatorname{coker}(FA \to FB) \simeq F\operatorname{coker}(A \to B)$, называется *точностью справа*. Таким образом, все левые сопряжённые функторы точны справа, а все правые — слева.

Например, ядра точны слева, а коядра — справа, т. е. в категории модулей со всякой коммутативной диаграммой с точными[1] строками

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B_1 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\beta"] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & C_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \qquad (14\text{-}22)$$

канонически связаны две точные последовательности

$$0 \to \ker\alpha \to \ker\beta \to \ker\gamma \quad \text{и} \quad \operatorname{coker}\alpha \to \operatorname{coker}\beta \to \operatorname{coker}\gamma \to 0\,. \qquad (14\text{-}23)$$

Упражнение 14.31. Убедитесь, что на диаграмме (14-22) для любого $\pi(b_1) \in \ker\gamma$ элемент $\beta(b_1) \in A_2$ и что сопоставление $\pi(b_1) \mapsto \beta(b_1) \pmod{\operatorname{im}\alpha}$ корректно задаёт гомоморфизм $\delta : \ker\gamma \to \operatorname{coker}\alpha$ связывающий две последовательности (14-23) в одну длинную точную последовательность

$$0 \to \ker\alpha \to \ker\beta \to \ker\gamma \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}\alpha \to \operatorname{coker}\beta \to \operatorname{coker}\gamma \to 0\,.$$

Пример 14.22 (тензорное произведение и копредставимые функторы)
Функтор $* \otimes_R N : \mathcal{M}od\text{-}R \to \mathcal{A}b$, $X \mapsto X \otimes_R N$, задаваемый тензорным умножением правых модулей на фиксированный левый модуль N, сопряжён слева к копредставимому функтору[2] $h^N : \mathcal{A}b \to \mathcal{M}od\text{-}R$, $Y \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, Y)$. Поэтому тензорное произведение перестановочно с копределами. В частности, оно точно справа, т. е. для любого гомоморфизма $\varphi : A \to B$ коядро $\operatorname{coker}\big(\varphi \otimes_R \operatorname{Id}_N : A \otimes_R B \to A \otimes_R B\big) \simeq \operatorname{coker}(\varphi) \otimes_S N$. В свою очередь, каждый копредставимый функтор $h^M : \mathcal{M}od\text{-}R \to \mathcal{A}b$, $X \mapsto \operatorname{Hom}_R(M, X)$, перестановочен с пределами и точен слева.

[1]Это означает, что ядро каждой стрелки совпадает с образом предыдущей.

[2]См. предл. 14.3 на стр. 210.

Пример 14.23 (представимые функторы, продолжение прим. 14.2 на стр. 205)
Поскольку каждый представимый функтор $h_C : \mathcal{Ab}^{\text{op}} \to \mathcal{Ab}$, $X \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{Ab}}(X, C)$, является правым сопряжённым самому себе[1], он переводит пределы в категории $\mathcal{Ab}^{\text{op}}$, т. е. копределы в категории $\mathcal{Ab}$, в пределы. В частности, функтор h_C переводит коядра в ядра (контравариантные функторы, переводящие коядра в ядра, тоже называются *точными слева*).

Предложение 14.8 (точность фильтрующихся копределов)
Для малой фильтрующейся категории $\mathcal{N}$ и естественного преобразования $f : X \to Y$ диаграмм абелевых групп $X, Y : \mathcal{N} \to \mathcal{Ab}$ имеется канонический изоморфизм

$$\operatorname{colim} \ker \left(f_\nu : X_\nu \to Y_\nu\right) \xrightarrow{\sim} \ker \left(\operatorname{colim} f : \operatorname{colim} X_\nu \to \operatorname{colim} Y_\nu\right) . \tag{14-24}$$

Иными словами, копредел фильтрующейся диаграммы абелевых групп перестановочен не только с коядрами, но и с ядрами, т. е. задаёт точный функтор

$$\operatorname{colim} : \mathcal{Fun}(\mathcal{N}, \mathcal{Ab}) \to \mathcal{Ab}\,, \quad X \mapsto \operatorname{colim} X\,.$$

Доказательство. Согласно упр. 14.25 на стр. 219, копредел фильтрующейся диаграммы

$$Z : \mathcal{N} \to \mathcal{Ab}$$

является фактором прямой суммы $\bigoplus Z_\nu$ по подгруппе, состоящей из всех конечных сумм

$$\sum\nolimits_{\nu \in N} z_\nu\,, \quad \text{где} \quad N \subset \operatorname{Ob} \mathcal{N}\,,\ z_\nu \in Z_\nu\,,$$

для которых в диаграмме Z имеются группа Z_μ и стрелки $\varphi_\nu : Z_\nu \to Z_\mu$, по одной для каждого $\nu \in N$, со свойством $\sum_{\nu \in N} \varphi(z_\nu) = 0$ в Z_μ.

Предельная стрелка $\operatorname{colim} f$ в (14-24) переводит класс $[x] \in \operatorname{colim} X$ элемента $x = \sum_{\nu \in N} x_\nu$ в класс $[f(x)]$ элемента $f(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu \in N} f_\nu(x_\nu)$ в фактор группе $\operatorname{colim} Y$.

Упражнение 14.32. Убедитесь, что описание корректно.

Если $[x] \in \ker \operatorname{colim} f$, то в $\mathcal{N}$ есть такие стрелки $\varphi_\nu : \nu \to \mu$ с общим концом μ, по одной для каждого $\nu \in N$, что $\sum_\nu Y\varphi_\nu(f_\nu(x_\nu)) = f_\mu(\sum_\nu X\varphi_\nu(x_\nu)) = 0$ в Y_μ, т. е. сумм $\sum_\nu X\varphi_\nu(x_\nu) \in X_\mu$ лежит в $\ker(f_\mu : X_\mu \to Y_\mu)$. Сопоставление классу $[x] \in \ker \operatorname{colim} f$ класса $\left[\sum_\nu X\varphi_\nu(x_\nu)\right] \in \operatorname{colim} \ker f_\nu$ корректно задаёт гомоморфизм $\ker \operatorname{colim} f \to \operatorname{colim} \ker f_\nu$.

Упражнение 14.33. Убедитесь, в этом.

Обратный гомоморфизм $\operatorname{colim} \ker f_\nu \to \ker \operatorname{colim} f$ переводит класс элемента $x_\nu \in \ker f_\nu$ в фактор группе $\operatorname{colim} \ker f_\nu$ в класс того же элемента в фактор группе $\operatorname{colim} X_\nu$. □

Упражнение 14.34. Убедитесь, что это определение корректно, т. е. класс элемента x_ν лежит в ядре предельного гомоморфизма $\operatorname{colim} f$ и не зависит от выбора представителя x_ν в классе, а также убедитесь в том, что полученный гомоморфизм $\operatorname{colim} \ker f_\nu \to \ker \operatorname{colim} f$ действительно обратен предыдущему.

Предложение 14.9
В категории $\mathcal{S}et$ копределы фильтрованных диаграмм перестановочны с конечными пределами.

[1] См. прим. 14.2 на стр. 205.

Доказательство. Достаточно доказать, что для любых двух фильтрованных диаграмм множеств $X, Y : \mathcal{N} \to \mathcal{S}et$ имеется канонический изоморфизм

$$\operatorname{colim}(X_\nu \times Y_\nu) \simeq \operatorname{colim}(X_\nu) \times \operatorname{colim}(Y_\nu)\,,$$

а для любых двух естественных преобразований $f, g : X \to Y$ этих диаграмм и индуцированных ими отображений $\operatorname{colim} f, \operatorname{colim} g : \operatorname{colim} X \to \operatorname{colim} Y$ имеется канонический изоморфизм $\operatorname{colim}\operatorname{Eq}(f_\nu, g_\nu) \simeq \operatorname{Eq}(\operatorname{colim} f, \operatorname{colim} g)$, где $\operatorname{Eq}(\varphi, \psi)$ означает уравнитель стрелок φ и ψ. Первый изоморфизм переводит класс в $\operatorname{colim}(X_\nu \times Y_\nu)$ пары (x_ν, y_ν) в пару классов

$$([x_\nu], [y_\nu]) \in \operatorname{colim}(X_\nu) \times \operatorname{colim}(Y_\nu)\,.$$

Упражнение 14.35. Проверьте, что это отображение определено корректно и является биекцией.

Второй изоморфизм переводит класс в $\operatorname{colim}\operatorname{Eq}(f_\nu, g_\nu)$ такого элемента $x_\nu \in X_\nu$, что $f_\nu(x_\nu) = g_\nu(x_\nu)$ в Y_ν, в класс этого же элемента в $\operatorname{colim} X$. □

Упражнение 14.36. Проверьте, что последний класс лежит в $\operatorname{Eq}(\operatorname{colim} f, \operatorname{colim} g)$ и что таким образом получается корректно определённое и биективное отображение

$$\operatorname{colim}\operatorname{Eq}(f_\nu, g_\nu) \to \operatorname{Eq}(\operatorname{colim} f, \operatorname{colim} g)\,.$$

Следствие 14.4

В категории $\mathcal{S}et$ копредел инъективного (соотв. сюрьективного или биективного) преобразования[1] фильтрованных диаграмм является инъективным (соотв. сюрьективным или биективным) отображением копределов этих диаграмм.

Задачи для самостоятельного решения к §14

Задача 14.1. Предпучки $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$ и $G : \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ называются *левосопряжёнными* (соотв. *правосопряжёнными*) друг к другу, если имеется функториальная по $C \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ и $D \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ биекция $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(GD, C) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, D)$ (соотв. $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C, GD) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(D, FC)$).

а) Приведите примеры лево- и правосамосопряжённых предпучков.

б) Сформулируйте и докажите критерии существования лево- и правосопряжённого предпучка, аналогичные критериям из предл. 14.1 на стр. 206.

Задача 14.2. Постройте левый сопряжённый к функтору $\mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ забывания алгебраической структуры для а) $\mathcal{C} = \mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ б) $\mathcal{C} = \mathrm{Ass}_{\Bbbk}$ в) $\mathcal{C} = \mathcal{C}mr$ г) $\mathcal{C} = \mathcal{G}rp$. В каждом случае явно опишите естественные преобразования между композициями сопряжённых функторов и тождественным эндофунктором.

[1] По определению, это означает, что действие естественного преобразования над каждым объектом диаграммы инъективно (соотв. сюрьективно или биективно).

Задача 14.3. Приведите примеры, показывающие, что (ко)представимый функтор может быть не точен справа, а тензорное умножение на фиксированную абелеву группу N может быть не точно слева.

Задача 14.4. Покажите, что замкнутая категория $\mathcal{C}$ тогда и только тогда обладает начальным объектом, когда имеется такое множество $S \subset \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, что в каждый объект категории $\mathcal{C}$ ведёт хотя бы одна стрелка из хотя бы одного объекта, лежащего в S.

Задача 14.5. Пусть $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ — перестановочный с копределами функтор из козамкнутой категории $\mathcal{C}$. Обозначим через $\mathcal{F}_Y$ категорию с объектами (X, α), где $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, $\alpha \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y)$, а морфизмами из (X_1, α_1) в (X_2, α_2) являются $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1 \to X_2)$, для которых диаграмма

$$\begin{tikzcd} FX_2 \arrow[dr, "\alpha_2"] & \\ & Y \\ FX_1 \arrow[uu, "F\varphi"] \arrow[ur, "\alpha_1"'] & \end{tikzcd}.$$

коммутативна. Покажите, что а) категория $\mathcal{F}_Y$ козамкнута для любого $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ б) если функтор $G : \mathcal{D} \to \mathcal{F}$ сопряжён F справа, то естественное преобразование $t_Y : FG(Y) \to Y$ является конечным объектом категории $\mathcal{F}_Y$ в) для любых $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ и $\alpha \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y)$ есть единственная стрелка $\varphi_\alpha \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$, делающая коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd} FG(Y) \arrow[dr, "t_Y"] & \\ & Y \\ FX \arrow[uu, "F\varphi_\alpha"] \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}. \tag{14-25}$$

Задача 14.6. Покажите, что функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ из козамкнутой категории $\mathcal{C}$ обладает правым сопряжённым если и только если он перестановочен с копределами и для каждого $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ имеется такое множество S_Y пар (X, α), где $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, $\alpha \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y)$, что любая стрелка вида $FZ \to Y$ в $\mathcal{D}$ раскладывается в композицию

$$FZ \xrightarrow{F\varphi} FX \xrightarrow{\alpha} Y,$$

где $(X, \alpha) \in S_Y$ и $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$.

Задача 14.7. Покажите, что функтор $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ из замкнутой категории $\mathcal{D}$ обладает левым сопряжённым если и только если он перестановочен с пределами и для каждого $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ имеется такое множество S_X пар (Y, β), где $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$, $\beta \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY)$, что любая стрелка вида $X \to GZ$ в $\mathcal{C}$ раскладывается в композицию

$$X \xrightarrow{\beta} GY \xrightarrow{F\varphi} GZ,$$

где $(Y, \beta) \in S_X$ и $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$.

Задача 14.8 (проективные модули). Модуль $P \in \operatorname{Ob} R\text{-}\mathcal{M}od$ называется *проективным*, если функтор $h^P : R\text{-}\mathcal{M}od \to \mathcal{A}b$, $M \mapsto \operatorname{Hom}_R(P, M)$, точен. Покажите, что это равносильно каждому из свойств

а) любая стрелка $\varphi : P \to X$ поднимается вдоль любого эпиморфизма $\pi : Y \twoheadrightarrow X$, т. е. существует такая стрелка $\psi : P \to Y$, что $\varphi = \pi\psi$

б) любой эпиморфизм $\pi : Z \twoheadrightarrow P$ расщепляется, т. е. существует такое вложение $\gamma : P \hookrightarrow Z$, что $\pi\gamma = \operatorname{Id}_P$.

Задача 14.9 (инъективные модули). Модуль $I \in \operatorname{Ob} R\text{-}\mathcal{M}od$ называется *инъективным*, если функтор $h_I : R\text{-}\mathcal{M}od \to \mathcal{A}b$, $M \mapsto \operatorname{Hom}_R(M, I)$, точен. Покажите, что это равносильно каждому из свойств

а) любая стрелка $\varphi : X \to I$ продолжается на любое расширение $\iota : X \hookrightarrow Y$, т. е. существует такая стрелка $\psi : Y \to I$, что $\psi\iota = \varphi$.

б) любое вложение $\iota : I \hookrightarrow Z$ расщепляется, т. е. существует такая сюрьекция $\gamma : Z \twoheadrightarrow I$, что $\gamma\iota = \operatorname{Id}_I$.

Задача 14.10. Покажите, что абелева группа $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ инъективна, причём для любых $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}b$ и $a \in A$ существует такой гомоморфизм $\psi : A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, что $\psi(a) \neq 0$.

Задача 14.11. Покажите, что абелева группа $I_R = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ со структурой левого R-модуля, задаваемой правым действием R на себе, является инъективным R-модулем

Задача 14.12 ((ко)генераторы). Объект $G \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ называется *генератором* или *порождающим объектом* (соотв. *когенератором* или *копорождающим объектом*) категории $\mathcal{C}$, если функтор $h^G : X \mapsto \operatorname{Hom}(G, X)$ (соотв. функтор $h_G : X \mapsto \operatorname{Hom}(X, G)$) строг[1]. Покажите, что категории $R\text{-}\mathcal{M}od$ и $\mathcal{M}od\text{-}R$ порождаются проективным R-модулем R и копорождаются инъективным R-модулемь I_R из зад. 14.11.

Задача 14.13. Покажите, что для любого кольца R с единицей категории правых модулей над кольцами матриц $\operatorname{Mat}_{n\times n}(R)$ и $\operatorname{Mat}_{m\times m}(R)$ точно[2] эквивалентны друг другу при всех $m, n \in \mathbb{N}$.

Задача 14.14 (абелевы категории). Категория $\mathcal{A}$ называется *абелевой*, если она обладает следующими свойствами:

(A_1) в $\mathcal{A}$ есть нулевой объект[3] 0

(A_2) у каждой пары объектов есть произведение и копроизведение

(A_3) у каждой стрелки есть ядро[4] и коядро[5]

(A_4) каждый мономорфизм[6] является ядром некоторой стрелки, а каждый эпимирфизм — коядром некоторой стрелки.

[1]Т. е. переводит разные стрелки в разные.
[2]Т. е. оба задающие эквивалентность квазиобратные другу функторы точны.
[3]См. прим. 14.9 на стр. 213.
[4]Т. е. уравнитель этой стрелки с нулевым морфизмом.
[5]Т. е. коуравнитель этой стрелки с нулевым морфизмом.
[6]См. n° 13.1.1 на стр. 190.

Убедитесь, что категория $\mathcal{A}$ абелева если и только если противоположная категория $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ тоже абелева, и докажите, что в каждой абелевой категории[1]

а) сопоставление стрелке с концом в X её коядра, а стрелке с началом в X — её ядра являются корректно определёнными обратными друг другу биекциями между подобъектами[2] и фактор объектами объекта X

б) каждая одновременно мономорфная и эпиморфная стрелка обратима

в) у любых двух подобъектов в X имеется максимальная общая нижняя грань в чуме всех подобъектов[3] (она называется *пересечением* этих подобъектов)

г) любые две стрелки с общими началом и концом имеют уравнитель и коуравнитель (в частности, в $\mathcal{A}$ есть послойные произведения и копроизведения)

д) для любой стрелки $\alpha : A \to B$ ядро канонической стрелки $B \to \operatorname{coker} \alpha$ является наименьшим подобъектом в B, через который пропускается стрелка α (и называется *образом* стрелки α)

е) для любой стрелки $\alpha : A \to B$ коядро канонической стрелки $\ker \alpha \to A$ является наименьшим фактором объекта A, через который пропускается стрелка α (и называется *кообразом* стрелки α)

ж) сюрьективность (соотв. инъективность) стрелки $\alpha : A \to B$ равносильна как равенству $\operatorname{im} \alpha = B$ (соотв. $\operatorname{coim} \alpha = A$, так и равенству $\operatorname{coker} \alpha = 0$ (соотв. $\ker \alpha = 0$)

з) образ и кообраз любого морфизма канонически изоморфны

и) для любой пары объектов X, Y каноническая стрелка $\iota : X \boxtimes Y \to X \times Y$ обратима

к) сложение морфизмов $\varphi, \psi : X \to Y$, определяемое диаграммой[4]

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\varphi+\psi"] \arrow[d, "\Delta_X"'] & & Y \\
X \times X \arrow[r, "\varphi\times\psi"] & Y \times Y \arrow[r, "\iota^{-1}"] & Y \otimes Y \arrow[u, "\nabla_Y"']
\end{tikzcd}$$

дистрибутивно по отношению к композициям и задаёт на $\operatorname{Hom}(X, Y)$ структуру абелевой группы

л) во всяком послойном произведении

$$\begin{tikzcd}
X \times_B Y \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \arrow[d, "\eta"] \\
X \arrow[r, "\xi"] & B
\end{tikzcd}$$

эпиморфность ξ влечёт эпиморфность ψ, а ψ задаёт изоморфизм $\ker \varphi \xrightarrow{\sim} \ker \eta$.

Задача 14.15 (электрификация). Покажите, что абелева категория с генератором[5] умеренно мощна[6].

Задача 14.16 (диаграмный поиск). В абстрактной абелевой категории *псевдоэлементом* $\alpha \in A$

[1] Решения этих задач можно подглядеть во второй главе книги P. Freyd, Abelian Categories.

[2] См. n° 13.1.2 на стр. 190.

[3] См. упр. 13.1 на стр. 190.

[4] В которой Δ_X и ∇_Y — канонические морфизмы, отвечающие парам тождественных отображений Id_X и Id_Y.

[5] См. зад. 14.12 на стр. 227.

[6] Т. е. подобъекты любого объекта составляют множество, см. n° 13.1.2 на стр. 190.

объекта A называется класс стрелок α с концом в A по модулю эквивалентности $\alpha_1 \sim \alpha_2$, означающей равенство $\alpha_1\pi_1 = \alpha_2\pi_2$ для некоторых эпиморфизмов π_1, π_2. Проверьте, что:

а) это действительно эквивалентность

б) каждый морфизм $\varphi : A \to B$ корректно отображает псевдоэлементы A в псевдоэлементы B по правилу $\alpha \mapsto \varphi\alpha$

в) морфизм φ мономорфен если и только если $\varphi(\alpha) \sim 0$ лишь для $\alpha \sim 0$, и это равносильно тому, что $\varphi(\alpha_1) \sim \varphi(\alpha_2)$ только при $\alpha_1 \sim \alpha_2$

г) морфизм φ эпиморфен если и только если для каждого $\beta \Subset B$ существует такой $\alpha \Subset A$, что $\varphi(\alpha) \sim \beta$

д) $\varphi = 0$ если и только если $\varphi(\alpha) \sim 0$ для всех $\Subset A$

е) $\ker\varphi = \operatorname{im}\psi$ в диаграмме $A \xrightarrow{\psi} B \xrightarrow{\varphi} C$ если и только если $\varphi\psi = 0$ и для каждого такого $\beta \Subset B$, что $\varphi(\beta) \sim 0$, имеется такой $\alpha \Subset A$, что $\psi(\alpha) \sim \beta$

ж) если $\varphi(\alpha) \sim \varphi(\beta)$ для стрелки φ с началом в A, то найдётся такой $\delta_{\beta-\alpha} \Subset A$, что $\varphi(\delta_{\beta-\alpha}) \sim 0$ и для любой стрелки ψ с началом в A из $\psi(\alpha) \sim 0$ (соотв. из $\psi(\beta) \sim 0$) следует $\psi(\beta) \sim \psi(\delta_{\beta-\alpha})$ (соотв. $\psi(\alpha) \sim -\psi(\delta_{\beta-\alpha})$).

з) в коммутативной диаграмме с точными[1] строками

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_2"] & X_3 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_3"] & X_4 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_4"] & X_5 \arrow[d, "\varphi_5"] \\
Y_1 \arrow[r] & Y_2 \arrow[r] & Y_3 \arrow[r] & Y_4 \arrow[r] & Y_5
\end{tikzcd}$$

сюрьективным φ_1, инъективным φ_5 и обратимыми φ_2 и φ_4 стрелка φ_3 обратима.

Задача 14.17. Для объектов G, X козамкнутой абелевой категории $\mathcal{A}$ обозначим через

$$\operatorname{Hom}(G,X) \otimes G \stackrel{\text{def}}{=} \coprod\nolimits_{\varphi :\, G\to X} \varphi \otimes G$$

копроизведение занумерованных стрелками $\varphi \in \operatorname{Hom}(G,X)$ одинаковых копий $\varphi \otimes G \stackrel{\text{def}}{=} G$ объекта G. Докажите, что G порождает категорию $\mathcal{A}$ если и только если для любого $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ задаваемый семейством стрелок $\varphi : \varphi \otimes G \to X$ *морфизм свёртки* $c : \operatorname{Hom}(G,X) \otimes G \to X$ эпиморфен.

Задача 14.18. Для объектов G, X замкнутой абелевой категории $\mathcal{A}$ обозначим через

$$C^{\operatorname{Hom}(Y,C)} \stackrel{\text{def}}{=} \prod\nolimits_{\psi :\, Y\to C} C^{\varphi}$$

прямое произведение занумерованных стрелками $\psi \in \operatorname{Hom}(Y,C)$ одинаковых копий $C^{\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} C$ объекта C. Докажите, что C копорождает $\mathcal{A}$ если и только если для любого $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ задаваемая стрелками $\varphi : Y \to C^{\varphi}$ *косвёртка* $c' : Y \to C^{\operatorname{Hom}(Y,C)}$ мономорфна.

[1] Последовательность стрелок $\xrightarrow{\varphi} * \xrightarrow{\psi}$ абелевой категории называется *точной* в объекте $*$, если $\ker\psi = \operatorname{im}\varphi$. Более длинные последовательности стрелок называются *точными*, если они точны в каждом задействованном в них объекте.

§15. Расширения коммутативных колец

Всюду этом параграфе слово «кольцо» по умолчанию означает коммутативное кольцо с единицей, а все гомоморфизмы колец предполагаются отображающими единицу в единицу.

15.1. Целые элементы. Пусть коммутативное кольцо A является подкольцом коммутативного кольца B и у этих колец общая единица. Мы будем называть такую пару $A \subset B$ *расширением колец*.

Лемма 15.1 (свойства целых элементов)
Следующие свойства элемента $b \in B$ в расширении колец $A \subset B$ эквивалентны:

(1) $b^m = a_1 b^{m-1} + \dots + a_{m-1} b + a_m$ для некоторых $m \in \mathbb{N}$ и $a_1, \dots, a_m \in A$

(2) A-линейная оболочка всех целых неотрицательных степеней b^m линейно порождается над A конечным числом элементов

(3) существует такой конечно порожденный A-подмодуль $M \subset B$, что $bM \subset M$ и M не аннулируется умножением ни на какой ненулевой элемент[1] $b' \in B$.

Доказательство. Импликации (1) ⇒ (2) ⇒ (3) очевидны. Чтобы вывести (1) из (3), допустим, что $e_1, \dots, e_m$ порождают M над A и A-линейный оператор $M \to M$, $m \mapsto bm$, умножения на b имеет в этих образующих матрицу $Y \in \mathrm{Mat}_m(A)$, т. е.

$$(be_1, be_2, \dots, be_m) = (e_1, \dots, e_m) \cdot Y\,. \tag{15-1}$$

Из тождества[2] $\det X \cdot E = X \cdot X^\vee$, где X — произвольная квадратная матрица, E — единичная матрица того же размера, а $X^\vee$ — присоединённая к X матрица[3], вытекает, что образ оператора умножения на $\det X$ содержится в линейной оболочке столбцов матрицы X. Поэтому модуль $\det(bE - Y)\,M$ содержится в линейной оболочке векторов $(e_1, \dots, e_m) \cdot (bE - Y)$, нулевой в силу равенства (15-1). Из равенства $\det(bE - Y)\,M = 0$ и B-точности модуля M вытекает, что $\det(bE - Y) = 0$. Так как все элементы матрицы Y лежат в A, последнее равенство имеет такой вид, как в условии (1). □

Определение 15.1
Элемент b, обладающий тремя свойствами из лем. 15.1, называется *целым* над A. Множество всех таких элементов называется *целым замыканием* A в B. Если оно совпадает с A, кольцо A называется *целозамкнутым* в B. Если оно совпадает с B, кольцо B называется *целым расширением* кольца A или *целой A-алгеброй*.

Пример 15.1 (целозамкнутость факториального кольца в поле частных)
Покажем, что каждое факториальное[4] кольцо A целозамкнуто в его поле частных[5] Q_A. Если многочлен $a_0 t^m + \ldots + a_{m-1} t + a_m \in A[t]$ аннулирует дробь $p/q \in Q_A$, у которой нод$(p, q) = 1$, то $a_0 p^m + a_1 q p^{m-1} + \ldots + a_{m-1} q^{m-1} p + a_m q^m = 0$, откуда $q \mid a_0$, и если $a_0 = 1$, то q обратим, и $p/q \in A$. В частности, кольцо $\mathbb{Z}$ целозамкнуто в поле $\mathbb{Q}$, а кольцо $\Bbbk[x]$ — в поле $\Bbbk(x)$.

[1] Такие модули называются *B-точными* (по-английски *faithful*).
[2] См. формулу (11-22) на стр. 198 части I.
[3] См. n° 11.4 на стр. 198 части I.
[4] См. опр. 5.4 на стр. 92 части I.
[5] См. прим. 4.2 на стр. 63 части I.

Пример 15.2 (инварианты действия конечной группы)
Если конечная группа G действует на кольце B кольцевыми автоморфизмами, то B цело над *подкольцом инвариантов* $B^G \overset{\text{def}}{=} \{a \in B \mid ga = a \ \ \forall g \in G\}$, поскольку каждый элемент $b \in B$ является корнем приведённого сепарабельного многочлена $B(t) = \prod_{\beta \in Gb}(t-\beta)$, где произведение берётся по всем элементам G-орбиты Gb элемента b, и коэффициенты этого многочлена, будучи симметрическими многочленами от элементов Gb-орбиты, G-инвариантны.

Предложение 15.1
Целое замыкание любого подкольца $A \subset B$ является подкольцом в B. В любом расширении колец $C \supset B$ всякий элемент $c \in C$, целый над целым замыканием A в B, цел и над A.

Доказательство. Если элементы $p, q \in B$ таковы, что

$$p^m = x_1\, p^{m-1} + \dots + x_{m-1}\, p + x_m \quad \text{и} \quad q^n = y_1\, q^{n-1} + \dots + y_{n-1}\, q + y_n$$

для некоторых $x_\nu, y_\mu \in A$, то произведения $p^i q^j$ с $0 \leqslant i \leqslant m-1$ и $0 \leqslant j \leqslant n-1$ порождают A-модуль, который выдерживает умножение и на p, и на q, а значит, и на $p+q$, и на pq. Поскольку он содержит единицу, его нельзя аннулировать умножением ни на какой элемент из B. Аналогично, если $z_0^r = z_1 z_0^{r-1} + \dots + z_{r-1} z_0 + z_r$, где каждый z_k с $k > 0$ удовлетворяет равенству

$$z_k^{m_k} = a_{k,1}\, z_k^{m_k-1} + \dots + a_{k,m_k-1}\, z_k + a_{k,m_k}$$

для некоторых $a_{k,\ell} \in A$, то умножение на элемент z_0 переводит в себя A-линейную оболочку всех произведений $z_0^{j_0} z_1^{j_1} \cdots z_r^{j_r}$, где $0 \leqslant j_0 \leqslant r-1$ и $0 \leqslant j_k \leqslant m_k - 1$ при $k > 0$. □

Следствие 15.1 (лемма Гаусса – Кронекера – Дедекинда)
Для любого расширения колец $A \subset B$ и произвольных приведённых многочленов $f, g \in B[x]$ положительной степени все коэффициенты произведения $f(x)g(x)$ целы над A если и только если все коэффициенты обоих многочленов $f(x)$ и $g(x)$ целы над A.

Доказательство. Если коэффициенты многочленов f и g целы над A, то коэффициенты их произведения $h = fg$ тоже целы над A, поскольку целые элементы образуют кольцо. Чтобы показать обратное, рассмотрим какое-нибудь кольцо $C \supset B$, над которым f и g полностью разлагаются на линейные множители[1], т. е. $f(x) = \prod(x-\alpha_\nu)$ и $g(x) = \prod(x-\beta_\mu)$ в $C[x]$ для некоторых $\alpha_\nu, \beta_\mu \in C$. Если все коэффициенты многочлена $h(x) = \prod(x-\alpha_\nu)\prod(x-\beta_\mu)$ целы над A, то все его корни α_ν и β_μ целы над целым замыканием A в C, а значит, и над самим A. Поскольку коэффициенты многочленов f и g являются многочленами от α_ν и β_μ, они тоже целы над A. □

Предложение 15.2
Пусть кольцо B цело над подкольцом $A \subset B$. Если B — поле, то A также является полем. Наоборот, если A — поле, и в B нет делителей нуля, то B — поле.

[1] Кольцо $C \supset B$, над которым заданный приведённый многочлен $f \in B[x]$ полностью раскладывается на линейные множители, строится индукцией по $\deg f$. Если $\deg f > 0$, то B вкладывается в фактор кольцо $F = B[x]/(f)$ как подкольцо, образованное классами констант. В кольце F многочлен f имеет корень $\gamma = x \pmod f$. Поэтому $f(x) = (x-\gamma)\cdot f_1(x)$, где $f_1 \in F[x]$ тоже приведён и $\deg f_1 < \deg f$. По индукции, $f_1 = \prod(x-\gamma_i)$ для подходящих элементов γ_i из подходящего расширения $C \supset F \supset B$.

Доказательство. Если B — поле, целое над A, то обратный к произвольному ненулевому $a \in A$ элемент $a^{-1} \in B$ удовлетворяет уравнению $a^{-m} = \alpha_1\, a^{1-m} + \dots + \alpha_{m-1}\, a^{-1} + \alpha_0$, где $\alpha_\nu \in A$. Умножая обе части на a^{m-1}, заключаем, что $a^{-1} = \alpha_1 + \dots + \alpha_{m-1}\, a^{m-2} + \alpha_0\, a^{m-1} \in A$.

Обратно, если A — поле, и B — целая A-алгебра, то все неотрицательные целые степени b^i любого ненулевого элемента $b \in B$ порождают конечномерное векторное пространство V над полем A. Если в B нет делителей нуля, то линейный оператор $b : V \to V$, $x \mapsto bx$, сюрьективен, так как имеет нулевое ядро. Обратный к b элемент b^{-1} является прообразом единицы $1 \in V$. □

Пример 15.3 (целые алгебраические числа)
Пусть поле $K \supset \mathbb{Q}$ конечномерно как векторное пространство над $\mathbb{Q}$. Элементы таких полей называются *алгебраическими числами*. По предл. 15.1 целые над $\mathbb{Z}$ алгебраические числа образуют в поле K подкольцо. Оно называется *кольцом целых* поля K и обозначается $\mathcal{O}_K$. Поскольку целые неотрицательные степени ξ^m любого числа $\xi \in K$ линейно зависимы над $\mathbb{Q}$, каждое алгебраическое число ξ удовлетворяет уравнению $a_0\xi^n + \ldots + a_{n-1}\xi + a_n = 0$ с коэффициентами $a_i \in \mathbb{Z}$. Так как число $\zeta = a_0\xi$ удовлетворяет уравнению $\zeta^n = -a_1 \cdot \zeta^{n-1} - a_0 a_2 \cdot \zeta^{n-2} - \dots - a_0^{n-1} a_n$, оно цело над $\mathbb{Z}$, т. е. подходящее целое кратное любого алгебраического числа цело над $\mathbb{Z}$. Мы заключаем, что каждое конечномерное над $\mathbb{Q}$ поле $K \supset \mathbb{Q}$ является полем частных своего кольца целых $\mathcal{O}_K$, и для любого базиса $e_1, \ldots, e_d$ поля K как векторного пространства над $\mathbb{Q}$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что все $ne_i \in \mathcal{O}_K$.

Упражнение 15.1. Покажите, что кольцо целых $\mathcal{O}_K \subset K$ является свободным $\mathbb{Z}$-модулем ранга $d = \dim_{\mathbb{Q}} K$, а число $\zeta \in K$ является целым над $\mathbb{Z}$ если и только если оператор умножения на ζ записывается в подходящем базисе пространства K над $\mathbb{Q}$ целочисленной матрицей[1].

Пример 15.4 (целые квадратичные иррациональности)
Расширение $K \supset \mathbb{Q}$ называется *квадратичным*, если K двумерно как векторное пространство над $\mathbb{Q}$. В этом случае для любого $\zeta \in K \smallsetminus \mathbb{Q}$ числа 1 и ζ образуют базис K над $\mathbb{Q}$, и $\zeta^2 = b\zeta + c$ для некоторых $b, c \in \mathbb{Q}$, откуда $\zeta = x + y\sqrt{d}$ для подходящих $x, y \in \mathbb{Q}$ и свободного от квадратов[2] целого d. Поэтому $K = \mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \mathbb{Q}[x]/(x^2 - d)$. Таким образом, каждое квадратичное расширение получается присоединением к $\mathbb{Q}$ квадратного корня из свободного от квадратов целого числа.

Упражнение 15.2. Покажите, что $\mathbb{Q}[\sqrt{d_1}] \not\simeq \mathbb{Q}[\sqrt{d_2}]$ для свободных от квадратов $d_1 \neq d_2$.

Пусть число $\xi = a + b\sqrt{d}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$, цело над $\mathbb{Z}$. Обозначим через $t = \operatorname{tr}(\xi)$ и $n = N(\xi)$ след и определитель оператора умножения на ξ в поле $K = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$. Так как в подходящем базисе поля K над $\mathbb{Q}$ этот оператор имеет целочисленную матрицу, оба числа $t, n \in \mathbb{Z}$. В базисе $1, \sqrt{d}$ умножение на ξ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} a & db \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Поэтому $t = 2a \in \mathbb{Z}$ и $n = a^2 - db^2 = t^2/4 - db^2 \in \mathbb{Z}$. Полагая $s = 2b$, мы заключаем, что $s \in \mathbb{Z}$ и $t^2 - ds^2 \equiv 0 \pmod 4$.

Если $d \equiv 1 \pmod 4$, то $t^2 \equiv s^2 \pmod 4$, откуда $t \equiv s \pmod 2$. Пусть $s = t + 2r$, где $r \in \mathbb{Z}$. Тогда $\xi = t + r(1 + \sqrt{d})/2$.

[1] Именно так целые алгебраические числа были впервые определены Дедекиндом в XIX веке.

[2] Целое число называется *свободным от квадратов*, если оно отлично от нуля и единицы и не делится на отличные от единицы целые квадраты.

Упражнение 15.3. Убедитесь, что $(1+\sqrt{d})/2 \in \mathcal{O}_K$ при $d \equiv 1 \pmod 4$.

Мы заключаем, что при $d \equiv 1 \pmod 4$ базис $\mathbb{Z}$-модуля $\mathcal{O}_K$ образуют 1 и $(1+\sqrt{d})/2$. В частности, *числа Кронекера*, т. е. целые элементы поля $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}] = \mathbb{Q}[\omega]/(\omega^2+\omega+1)$, исчерпываются целочисленными линейными комбинациями вида $a+b\omega$, где $\omega = (-1+\sqrt{-3})/2$ — первообразный комплексный кубический корень из единицы.

Если $d \equiv 2 \pmod 4$ или $d \equiv 3 \pmod 4$, то соответственно $t^2 \equiv 2s^2 \pmod 4$ или $t^2 + s^2 \equiv 0 \pmod 4$, и оба числа t, s чётны, а $\xi = a + b\sqrt{d}$ имеет $a, b \in \mathbb{Z}$. Так как $\sqrt{d} \in \mathcal{O}_K$, базис $\mathbb{Z}$-модуля $\mathcal{O}_K$ при $d \equiv 2, 3 \pmod 4$ составляют 1 и $\sqrt{d}$. В частности, *гауссовы числа*, т. е. целые элементы поля $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}] = \mathbb{Q}[i]/(i^2+1)$исчерпываются целочисленными линейными комбинациями вида $a+bi$, где $i = \sqrt{-1}$ — первообразный комплексный корень четвёртой степени из единицы.

15.2. Приложения к теории представлений. Пусть G — конечная группа. Значение характера χ_ϱ любого конечномерного представления ϱ группы G на любом элементе $g \in G$ цело над $\mathbb{Z}$ в силу того, что оператор $\varrho(g)$ аннулируется многочленом $t^{|G|}-1$, все корни которого целы над $\mathbb{Z}$, а значение $\chi_\varrho(g)$ равно сумме некоторых из этих корней[1].

Теорема 15.1

Если конечная группа G имеет нормальную абелеву подгруппу $A \lhd G$, то размерности всех комплексных неприводимых линейных представлений группы G делят индекс $[G : A]$.

Доказательство. Пусть $\varrho : \mathbb{C}[G] \to \operatorname{End} W$ — неприводимое комплексное представление. Сначала докажем теорему для единичной подгруппы $A = \{e\}$, т. е. покажем, что $\dim W$ делит $|G|$. В силу прим. 15.1 достаточно убедиться, что рациональное число $|G|/\dim W$ цело над $\mathbb{Z}$. Так как представление ϱ неприводимо, скалярный квадрат его характера равен единице:

$$1 = (\chi_\varrho, \chi_\varrho) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \operatorname{tr}\varrho(g^{-1}) \cdot \operatorname{tr}\varrho(g)\,. \tag{15-2}$$

Функция $g \mapsto \operatorname{tr}\varrho(g^{-1})$ постоянна на классах сопряжённости, и её значения целы над $\mathbb{Z}$. Обозначим через $\tau(K) \in \mathbb{C}$ её значение на классе $K \in \operatorname{Cl}(G)$ и перепишем (15-2) как

$$\frac{|G|}{\dim W} = \frac{1}{\dim W}\sum_{g\in G} \operatorname{tr}\varrho(g^{-1}) \cdot \operatorname{tr}\varrho(g) = \sum_{K\in \operatorname{Cl} G} \frac{\tau(K)}{\dim W}\ \operatorname{tr}\sum_{g\in K}\varrho(g)\,.$$

Достаточно проверить, что каждое из чисел

$$\frac{1}{\dim W}\ \operatorname{tr}\sum_{g\in K}\varrho(g) = \frac{\operatorname{tr}\varrho(g_K)}{\dim W}\,, \quad \text{где} \quad g_K \overset{\text{def}}{=} \sum_{g\in K} g \in Z(\mathbb{Z}[G])\,,$$

цело над $\mathbb{Z}$. Неприводимое представление ϱ переводит конечно порождённый $\mathbb{Z}$-модуль центральных элементов подкольца $\mathbb{Z}[G] \subset \mathbb{C}[G]$ в конечно порождённый $\mathbb{Z}$-подмодуль кольца $\operatorname{End} W$. По лемме Шура все элементы последнего подмодуля являются скалярными гомотетиями, ибо перестановочны со всеми элементами группы. Коэффициенты этих гомотетий образуют конечно порождённый $\mathbb{Z}$-подмодуль в $\mathbb{C}$, выдерживающий умножение на каждый из коэффициентов.

[1] Напомню, что собственные числа оператора содержатся среди корней любого аннулирующего этот оператор многочлена.

Следовательно, все эти коэффициенты целы над $\mathbb{Z}$. Но коэффициент гомотетии $\varrho(g_K)$ как раз и равен $\operatorname{tr}\varrho(g_K)/\dim W$. Итак, $|G|/\dim W \in \mathbb{Z}$.

Теперь рассмотрим случай, когда $A = Z(G)$ является центром группы G, т. е. покажем, что рациональное число $q = [G : Z(G)]/\dim W$ тоже цело над $\mathbb{Z}$. Для этого достаточно убедиться, что все его натуральные степени q^n лежат в конечно порождённом $\mathbb{Z}$-подмодуле поля $\mathbb{Q}$. Рассмотрим действие группы $G^n = G \times \dots \times G$ на $W^{\otimes n}$ по правилу

$$(g_1, \dots, g_n) : w_1 \otimes \ldots \otimes w_n \mapsto \varrho(g_1)w_1 \otimes \dots \otimes \varrho(g_n)w_n \,.$$

Упражнение 15.4. Убедитесь, что это неприводимое линейное представление.

Подгруппа $C \subset G^n$, состоящая из таких элементов $(c_1, \dots, c_n)$, что все $c_i \in Z(G)$ и произведение $c_1 \dots c_n = 1$, содержится в ядре этого представления, поскольку по лемме Шура каждый центральный элемент c_i действует в неприводимом представлении ϱ умножением на некоторую константу, и произведение этих констант равно единице в силу равенства $\prod \varrho(c_i) = \varrho(c_1 \dots c_n) = \varrho(1) = 1$. Подгруппа C имеет порядок $|Z(G)|^{n-1}$ и нормальна, поскольку лежит в центре группы G^n. Таким образом, пространство $W^{\otimes n}$ размерности $\dim^n W$ является неприводимым представлением фактор группы G^n/C порядка $|G|^n/|Z(G)|^{n-1}$. По уже доказанному

$$\frac{|G|^n}{(\dim W)^n |Z(G)|^{n-1}} = |Z(G)| \cdot q^n \in \mathbb{Z}\,.$$

Тем самым, все степени q^n лежат в $\mathbb{Z}$-модуле $|Z(G)|^{-1}\,\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ ранга 1.

Наконец, рассмотрим произвольную нормальную абелеву подгруппу $A \lhd G$ и изотипное разложение $\operatorname{res}_A W = \bigoplus W_\chi$ ограничения представления ϱ на A. Каждая изотипная компонента W_χ является прямой суммой одномерных представлений абелевой группы A, отвечающих некоторому мультипликативному характеру[1] $\chi : A \to \mathbb{C}^*$, т. е. $aw = \chi(a)w$ для всех $a \in A$ и $w \in W_\chi$. Поскольку подгруппа A нормальна в G, группа G действует на её мультипликативных характерах: элемент $g \in G$ переводит характер $\chi : A \to \mathbb{C}^*$ в композицию $\chi^g = \chi \circ \operatorname{Ad}_{g^{-1}}$, принимающую на элементах $a \in A$ значения $\chi^g(a) = \chi(g^{-1}ag)$. Так как $agw = gg^{-1}agw = g\chi^g(a)w = \chi^g(a)gw$ для всех $w \in W_\chi$, $a \in A$, $g \in G$, в представлении ϱ каждый элемент $g \in G$ изоморфно отображает изотипную компоненту W_χ в компоненту W_{χ^g}. Поскольку представление ϱ неприводимо, действие G на изотипных компонентах W_χ транзитивно. Поэтому все компоненты имеют одну и ту же размерность, которая делит $\dim W$. Если компонента всего одна, то все элементы подгруппы A действуют на W скалярно, и образ $\varrho(A)$ лежит в центре $Z(\varrho(G))$ образа всего представления. По уже доказанному индекс центра $[\varrho(G) : Z(\varrho(G))]$ делится на $\dim W$. Но этот индекс делит индекс $[\varrho(G) : \varrho(A)]$ центральной подгруппы $\varrho(A)$, а последний в свою очередь делит индекс[2] $[G : A]$. Остаётся рассмотреть случай, когда изотипных компонент несколько. Пусть W_χ — одна из них. Обозначим через $H = \{g \in G \mid g(W_\chi) = W_\chi\}$ её стабилизатор в G. Тогда общее число изотипных компонент равно $[G : H]$, подгруппа $H \subsetneq G$ является собственной, содержит A, и её линейное представление в пространстве W_χ неприводимо.

Упражнение 15.5. Убедитесь в этом.

Применяя индукцию по порядку $|G|$, мы можем считать, что $\dim W_\chi$ делит индекс $[H : A]$. Но тогда и $\dim W = [G : H]\,\dim W_\chi$ делит $[G : A] = [G : H]\,[H : A]$. □

[1] См. n° 9.5 на стр. 140.

[2] Ибо гомоморфизм ϱ корректно задаёт эпиморфизм фактор групп $G/A \twoheadrightarrow \varrho(G)/\varrho(A)$.

15.3. Алгебраические элементы. Коммутативная $\Bbbk$-алгебра B называется *конечно порождённой*, если существует эпиморфизм $\Bbbk$-алгебр $\pi : \Bbbk[x_1, \dots, x_m] \twoheadrightarrow B$. В этом случае образы переменных $b_i = \pi(x_i) \in B$ называются *образующими* алгебры B, а ядро $\ker \pi \subset \Bbbk[x_1, \dots, x_m]$ называется *идеалом соотношений* между ними. Элемент $b \in B$ цел над полем $\Bbbk$ если и только если *гомоморфизм вычисления* $\mathrm{ev}_b : \Bbbk[x] \to B$, $f \mapsto f(b)$, имеет ненулевое ядро, т. е. $f(b) = 0$ для какого-нибудь ненулевого $f \in \Bbbk[x]$. Такие элементы b также называют *алгебраическими* над полем $\Bbbk$. Поскольку все идеалы в $\Bbbk[x]$ главные, $\ker(\mathrm{ev}_b) = (\mu_b)$, где образующая $\mu_b \in \Bbbk[x]$ однозначно определяется алгебраическим элементом b как приведённый многочлен наименьшей степени, аннулирующий b. Этот многочлен называется *минимальным многочленом* элемента b над $\Bbbk$. Элемент $b \in B$, не являющийся алгебраическим, называется *трансцендентным* над $\Bbbk$.

Обозначим через $\Bbbk[b] = \operatorname{im} \mathrm{ev}_b \subset B$ наименьшую $\Bbbk$-подалгебру в B, содержащую элементы 1 и b. Если b трансцендентен, подалгебра $\Bbbk[b]$ изоморфна кольцу многочленов $\Bbbk[x]$. В частности, она бесконечномерна как векторное пространство над $\Bbbk$ и не является полем. Когда b алгебраичен, алгебра $\Bbbk[b] \simeq \Bbbk[x]/(\mu_b)$ имеет размерность $\deg \mu_b$ как векторное пространство над $\Bbbk$. Она является полем если и только если многочлен μ_b неприводим в $\Bbbk[x]$.

Упражнение 15.6. Убедитесь, что следующие три свойства алгебраического над полем $\Bbbk$ элемента $b \in B$ с минимальным многочленом $\mu_b \in \Bbbk[x]$ эквивалентны друг другу: а) $\Bbbk[b]$ является полем б) $\Bbbk[b]$ не имеет делителей нуля в) μ_b неприводим в $\Bbbk[x]$.

Теорема 15.2
Если конечно порождённая $\Bbbk$-алгебра является полем, то все её элементы алгебраичны над $\Bbbk$.

Доказательство. Пусть алгебра B является полем и порождается над $\Bbbk$ элементами $b_1, \dots, b_m$. Воспользуемся индукцией по m. Случай $m = 1$ был разобран перед упр. 15.6 выше. Пусть $m > 1$. Если b_m алгебраичен над $\Bbbk$, то алгебра $\Bbbk[b_m]$ является полем. Тогда по предположению индукции поле B алгебраично над $\Bbbk[b_m]$, а значит и над $\Bbbk$ по предл. 15.1 на стр. 231. Остаётся убедиться, что образующая b_m не может быть трансцендентна над $\Bbbk$. Допустим противное. Тогда изоморфизм $\Bbbk[x] \xrightarrow{\sim} \Bbbk[b_m]$ продолжается до изоморфизма поля рациональных функций $\Bbbk(x)$ с наименьшим содержащим элемент b_m подполем $\Bbbk(b_m) \subset B$. По предположению индукции поле B алгебраично над полем $\Bbbk(b_m)$, т. е. каждая из образующих $b_1, \dots, b_{m-1}$ удовлетворяет некоторому полиномиальному уравнению с коэффициентами из $\Bbbk(b_m)$. Умножая эти уравнения на подходящие многочлены от b_m, сделаем их коэффициенты лежащими в $\Bbbk[b_m]$, а все старшие коэффициенты — равными одному и тому же многочлену $p(b_m) \in \Bbbk[b_m]$. Поле B цело над подалгеброй $F \subset B$, порождённой над $\Bbbk$ элементами b_m и $1/p(b_m)$. По предл. 15.2 подалгебра F является полем. Покажем, что элемент $1 + p(b_m) \in F$ не обратим в F. Пусть это не так, и

$$\big(1 + p(b_m)\big)\, g\big(b_m, 1/p(b_m)\big) = 1 \tag{15-3}$$

для некоторого многочлена $g \in \Bbbk[x_1, x_2]$. Записывая рациональную функцию $g\big(x, 1/p(x)\big)$ в виде $h(x)/p^k(x)$, где $h \in \Bbbk[x]$ не делится в $\Bbbk[x]$ на p, и умножая обе части (15-3) на $p^k(b_m)$, мы получим на b_m полиномиальное уравнение $h(b_m)\,(1 + p(b_m)) = p^{k+1}(b_m)$. Оно нетривиально, поскольку $h(1 + p) = h + hp$ не делится на p. □

Следствие 15.2
Всякое поле $\mathbb{F}$, являющееся конечно порождённой алгеброй над подполем $\Bbbk \subset \mathbb{F}$, конечномерно как векторное пространство над $\Bbbk$.

Доказательство. Индукция по числу образующих: добавление очередной алгебраической образующей приводит к конечномерному пространству над полем, порождённым предыдущими образующими. □

Определение 15.2 (нормальные кольца)
Целостное[1] коммутативное кольцо A называется *нормальным*, если оно целозамкнуто в своём поле частных Q_A. В частности, каждое поле нормально. В прим. 15.1 на стр. 230 мы видели, что все факториальные кольца нормальны.

Предложение 15.3 (лемма Гаусса)
Пусть A — нормальное кольцо с полем частных Q_A. Если в $Q_A[x]$ многочлен $f \in A[x]$ раскладывается в произведение приведённых множителей, то все эти множители лежат в $A[x]$.

Доказательство. Это вытекает из сл. 15.1 на стр. 231. □

Следствие 15.3
Пусть A — целостное кольцо с полем частных Q_A, и B — произвольная Q_A-алгебра. Если элемент $b \in B$ цел над A, то все коэффициенты его минимального многочлена над полем Q_A целы над A.

Доказательство. Поскольку b цел над A, он аннулируется приведённым многочленом $f \in A[x]$, который делится в $Q_A[x]$ на минимальный многочлен элемента b над полем Q_A. Поэтому все коэффициенты минимального многочлена целы над A в силу сл. 15.1 на стр. 231. □

Следствие 15.4
Пусть A — нормальное кольцо с полем частных Q_A, и B — произвольная Q_A-алгебра. Если элемент $b \in B$ цел над A, то его минимальный многочлен над полем Q_A лежит в $A[x]$. □

15.4. Базисы трансцендентности. Пусть $\Bbbk$-алгебра A не имеет делителей нуля. Обозначаем через Q_A её поле частных, а через $\Bbbk(a_1, \dots, a_m) \subset Q_A$ — наименьшее подполе, содержащее заданные элементы $a_1, \dots, a_m \in A$.

Элементы $a_1, \dots, a_m \in A$ называются *алгебраически независимыми* над $\Bbbk$, если гомоморфизм вычисления $\mathrm{ev}_{(a_1,\dots,a_m)} : \Bbbk[x_1, \dots, x_m] \to A$, $f \mapsto f(a_1, \dots, a_m)$ инъективен, т. е. на элементы $a_1, \dots, a_m$ нет нетривиальных полиномиальных соотношений. В этом случае гомоморфизм вычисления продолжается до изоморфизма полей $\Bbbk(x_1, \dots, x_m) \xrightarrow{\sim} \Bbbk(a_1, \dots, a_m) \subset Q_A$, переводящего рациональную функцию $f(x_1, \dots, x_m)$ в её значение на элементах a_i.

Элементы $a_1, \dots, a_m \in A$ называются *алгебраически порождающими* A над $\Bbbk$, если каждый элемент алгебры A алгебраичен над $\Bbbk(a_1, \dots, a_m)$. В этом случае поле Q_A тоже алгебраично над $\Bbbk(a_1, \dots, a_m)$, так как целое замыкание $\Bbbk(a_1, \dots, a_m)$ в Q_A является полем по предл. 15.2 на стр. 231 и содержит A, а значит, и Q_A.

Алгебраически независимый набор элементов $a_1, \dots, a_m$ алгебры A, алгебраически порождающий A над $\Bbbk$, называется *базисом трансцендентности* алгебры A над $\Bbbk$. Поскольку собственные подмножества любого базиса трансцендентности алгебраически независимы, но не являются базисами трансцендентности, базис трансцендентности можно иначе охарактеризовать либо как такой минимальный по включению набор $a_1, \dots, a_m$, что алгебра A алгебраична над

[1] Т. е. без делителей нуля, см. n° 2.4.1 на стр. 30 части I.

$\Bbbk(a_1, \dots, a_m)$, либо как максимальный по включению алгебраически независимый набор. Доказательство того, что все базисы трансцедентности состоят из одинакового числа элементов совершенно аналогично доказательству ответствующей теоремы о базисах векторных пространств.

Лемма 15.2 (о замене)
Если $b_1, \dots, b_n \in A$ алгебраически независимы, а $a_1, \dots, a_m \in A$ алгебраически порождают A над $\Bbbk$, то $n \leqslant m$ и элементы a_i можно перенумеровать так, что набор $b_1, \dots, b_n, a_{n+1}, \dots, a_m$ будет алгебраически порождать A над $\Bbbk$.

Доказательство. Поскольку b_1 алгебраичен над $\Bbbk(a_1, \dots, a_m)$, имеется содержащее b_1 полиномиальное соотношение $f(b_1, a_1, \dots, a_m) = 0$, и так как b_1 трансцендентен над $\Bbbk$, в это соотношение входит какое-нибудь a_i. Перенумеруем a_i так, чтобы это было a_1. Тогда алгебра A алгебраична над $\Bbbk(b_1, a_2, \dots, a_m)$. Пусть по индукции элементы $b_1, \dots, b_k, a_{k+1}, \dots, a_m$ алгебраически порождают алгебру A над $\Bbbk$, и при этом $k < n$. Поскольку b_{k+1} алгебраичен над полем $\Bbbk(b_1, \dots, b_k, a_{k+1}, \dots, a_m)$, имеется содержащее b_{k+1} полиномиальное соотношение

$$f(b_1, \dots, b_{k+1}, a_{k+1}, \dots, a_m) = 0 .$$

Так как $b_1, \dots, b_n$ алгебраически независимы над $\Bbbk$, в это соотношение входит какое-нибудь a_i. Поэтому $m > k$, и после надлежащей перенумерации можно считать, что в последнем соотношении участвует элемент a_{k+1}. Тогда этот элемент, а с ним и вся алгебра A алгебраичны над полем $\Bbbk(b_1, \dots, b_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_m)$, что воспроизводит индуктивное предположение. □

Следствие 15.5 (теорема о базисе)
Все базисы трансцендентности конечно порождённой $\Bbbk$-алгебры состоят из одинакового числа элементов, не превосходящего число образующих, причём любой набор элементов, алгебраически порождающий A над $\Bbbk$, содержит в себе базис трансцендентности, а любой алгебраически независимый набор элементов можно дополнить до базиса трансцендентности. □

Определение 15.3
Число элементов в базисе трансцендентности конечно порождённой алгебры A над $\Bbbk$ называется *степенью трансцендентности* этой алгебры и обозначается $\operatorname{tr}\deg_{\Bbbk} A$.

Пример 15.5 (теорема Люрота)
Степень трансцендентности любой отличной от поля $\Bbbk$ подалгебры $A \subset \Bbbk(t)$ в поле рациональных функций $\Bbbk(t)$ равна единице. В самом деле, если $\psi = f(t)/g(t) \in A \smallsetminus \Bbbk$, то элемент t алгебраичен над наименьшим содержащим ψ подполем $\Bbbk(\psi) \subset \mathbb{Q}_A$, ибо удовлетворяет уравнению $\psi \cdot g(x) - f(x) = 0$ с коэффициентами в $\Bbbk(\psi)$.

Упражнение 15.7. Убедитесь, что многочлен $\psi \cdot g(x) - f(x)$ отличен от нуля в $\Bbbk(\psi)[x]$.

Поэтому ψ трансцендентен над $\Bbbk$ (иначе t был бы алгебраичен над $\Bbbk$), и поле $\Bbbk(t)$ алгебраично над полем $\Bbbk(\psi)$, причём последнее поле изоморфно полю рациональных функций. Это наблюдение известно как *теорема Люрота*.

Задачи для самостоятельного решения к §15

Задача 15.1. Пусть A-модуль M порождается элементами $m_1, \dots, m_r \in M$ и A-линейный эндоморфизм $\varphi : M \to M$ имеет в этих образующих матрицу $F \in \mathrm{Mat}_r(A)$. Покажите, что $\det(F)\, M \subset \varphi(M)$, и если M A-точен[1], то $I\, M \neq M$ ни для какого собственного идеала $I \subsetneq A$.

Задача 15.2. Опишите кольца целых и вычислите дискриминанты полей
а) $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$ б) $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$ в) $\mathbb{Q}[\sqrt[7]{1}] = \mathbb{Q}[x]/(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$.

Задача 15.3. Цело ли кольцо $\Bbbk[x, y]$ над подкольцом многочленов f с $\frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) = 0$?

Задача 15.4. Цело ли кольцо непрерывных функций $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ над подкольцом таких функций f, что $f(1, 0) = f(0, 1)$?

Задача 15.5. Пусть $\Bbbk$ — поле, $a_1, \dots, a_n \in \Bbbk$, и $f \in \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]$. Рассмотрим вложение

$$\psi : \Bbbk[t_1, \dots, t_n] \hookrightarrow \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n], \quad t_i \mapsto x_i + a_i x_0 .$$

При каких условиях на f и $a_1, \dots, a_n$ фактор кольцо $\Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]/(f)$ цело над подкольцом $((f) + \mathrm{im}\,\psi)/(f)$?

Задача 15.6. Пусть $\Bbbk$ — бесконечное поле, и многочлен $f \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ отличен от константы. Найдите $\mathrm{tr}\deg_{\Bbbk} \Bbbk[x_1, \dots, x_n]/(f)$.

Задача 15.7. Пусть имеется расширение полей $\mathbb{F} \supset \Bbbk$, в котором $\mathbb{F}$ конечномерно как векторное пространство над $\Bbbk$. Покажите, что любая конечно порождённая $\Bbbk$-подалгебра $A \subset \mathbb{F}$ является полем и $\dim_{\Bbbk} A$ делит $\dim_{\Bbbk} \mathbb{F}$.

Задача 15.8. Покажите, что любой гомоморфизм кольца A в алгебраически замкнутое поле $\Bbbk$ можно продолжить до гомоморфизма $B \to \Bbbk$ любого целого расширения $B \supset A$.

Задача 15.9. Покажите, что если фактор $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]/I$ является полем, то оно конечно.

Задача 15.10. Покажите, что неодномерный неприводимый комплексный характер конечной группы зануляется хотя бы на одном классе сопряжённости.

Задача 15.11. Покажите, что кольцо многочленов над нормальным кольцом нормально.

Задача 15.12. Покажите, что всякое поле $\mathbb{F} \supset \mathbb{C}$, базис которого как векторного пространства над $\mathbb{C}$ не более, чем счётен, совпадает с $\mathbb{C}$.

Задача 15.13. Выведите из зад. 15.12, что для любых многочленов $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ имеет место альтернатива: либо система уравнений $f_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ имеет решение в $\mathbb{C}^n$, либо существуют такие $g_1, \dots, g_m \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, что $\sum f_i g_i = 1$.

[1] Т. е. не аннулируется умножением ни на какой ненулевой элемент $a \in A$.

§16. Аффинная алгебраическая геометрия

16.1. Системы полиномиальных уравнений. Каждую систему полиномиальных уравнений

$$f_\nu(x_1, \dots , x_n) = 0\,, \text{ где } f_\nu \in \Bbbk[x_1, \dots , x_n]\,, \tag{16-1}$$

можно, с одной стороны, расширить до бесконечной системы, левые части которой пробегают порождённый многочленами f_ν идеал $J \subset \Bbbk[x_1, \dots , x_n]$, и такое расширение не изменит множества решений, а с другой стороны, в силу нётеровости[1] кольца многочленов, эта бесконечная система эквивалентна своей конечной подсистеме $f_1 = \dots = f_m = 0$, левые части которой порождают идеал J и могут выбраны из левых частей исходной системы[2] (16-1). Мы заключаем, что любая (в том числе бесконечная) система полиномиальных уравнений равносильна как некоторой своей конечной подсистеме, так и системе, левые части которой образуют в кольце многочленов идеал. Множество всех решений системы полиномиальных уравнений (16-1), левые части которых пробегают идеал $J \subset \Bbbk[x_1, \dots , x_n]$, обозначается

$$V(J) \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in \mathbb{A}^n \mid \forall f \in J\ f(a) = 0\}$$

и называется *аффинным алгебраическим многообразием*, задаваемым идеалом J. Это множество может оказаться пустым, что происходит, к примеру, когда идеал $J = (1) = \Bbbk[x_1, \dots , x_n]$ содержит уравнение $1 = 0$.

Для произвольной фигуры $\Phi \subset \mathbb{A}^n$ множество всех многочленов, тождественно зануляющихся на Φ, образует в кольце многочленов идеал, который обозначается

$$I(\Phi) \stackrel{\text{def}}{=} \{ f \in \Bbbk[x_1, \dots , x_n] \mid \forall p \in \Phi\ f(p) = 0\}$$

и называется *идеалом фигуры* Φ. Множество нулей $V(I(\Phi))$ этого идеала является наименьшим по включению аффинным алгебраическим многообразием, содержащим Φ. Для любого идеала $J \subset \Bbbk[x_1, \dots , x_n]$ имеется тавтологическое включение $J \subset I(V(J))$. Вообще говоря, оно строгое: например, при $n = 1$ для идеала $J = (x^2)$ многообразие $V(J) = \{0\}$, тогда как идеал

$$I(V(J)) = (x) \supsetneq (x^2) = J\,.$$

Теорема 16.1 (Nullstellensatz, или теорема Гильберта о нулях)
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ для любого идеала $J \subset \Bbbk[x_1, \dots , x_n]$ имеют место *слабая теорема о нулях*: $V(J) = \varnothing$ если и только если $1 \in J$ и *сильная теорема о нулях*: $f \in I(V(J))$ если и только если $f^m \in J$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Чтобы доказать первое утверждение, достаточно для каждого собственного[3] идеала $J \subset \Bbbk[x_1, \dots , x_n]$ указать точку $p \in \mathbb{A}^n$, в которой зануляются все многочлены из J. Если имеется необратимый по модулю J многочлен $g \notin J$, идеал $J' = (J, g)$ не содержит 1 и строго больше, чем J. Так как увеличение идеала J только усложняет нашу задачу, мы можем заменить J на J'. В силу нётеровости кольца многочленов конечное число таких расширений приведёт к *максимальному* собственному идеалу J, фактор по которому $\Bbbk[x_1, \dots , x_n]/J$ является полем[4]. Поскольку это поле конечно порождено как $\Bbbk$-алгебра, каждый его элемент ϑ алгебраичен[5] над $\Bbbk$, т. е. удовлетворяет уравнению $\mu(\vartheta) = 0$, где $\mu(t) \in \Bbbk[t]$ — неприводимый при-

[1] См. опр. 5.1 на стр. 86 части I.
[2] См. лем. 5.1 на стр. 85 части I.
[3] Т. е. отличного от всего кольца многочленов.
[4] См. прим. 5.3 на стр. 88 части I.
[5] См. теор. 15.2 на стр. 235.

ведённый многочлен. Так как поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, многочлен μ линеен, и $\vartheta \in \Bbbk$. Тем самым, $\Bbbk[x_1, \dots, x_n]/J = \Bbbk$, т. е. любой многочлен $f \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ сравним по модулю идеала J с некоторой константой. Пусть переменная x_i сравнима с $p_i \in \Bbbk$. Так как редукция по модулю J является гомоморфизмом, каждый многочлен $f(x_1, \dots, x_n) \equiv f(p_1, \dots, p_n) \pmod J$. Следовательно, все многочлены $f \in J$ зануляются в точке $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{A}^n$.

Для доказательства второго утверждения вложим $\mathbb{A}^n$ в большее пространство $\mathbb{A}^{n+1}$ с координатами $(t, x_1, \dots, x_n)$ в качестве гиперплоскости $t = 0$. Так как многочлен $f(x)$ тождественно обращается в нуль на $V(J) \subset \mathbb{A}^n$, многочлен $g(t, x) = 1 - t\,f(x)$ тождественно равен единице на цилиндре $\mathbb{A}^1 \times V(J) \subset \mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^n$. Поэтому порождённый многочленами из идеала $J \subset \Bbbk[x_1, \dots, x_n] \subset \Bbbk[t, x_1, \dots, x_n]$ и многочленом $g(t, x)$ идеал в $\Bbbk[t, x_1, \dots, x_n]$ имеет пустое множество нулей в $\mathbb{A}^{n+1}$. По слабой теореме о нулях он содержит единицу, т. е. существуют такие $q_0, q_1, \dots, q_s \in \Bbbk[t, x_1, \dots, x_n]$ и $f_1, \dots, f_s \in J$, что

$$q_0(x, t) \cdot \big(1 - tf(x)\big) + q_1(t, x) \cdot f_1(x) + \dots + q_s(x, t) \cdot f_s(x) = 1\,.$$

Применяя к этому равенству гомоморфизм $\Bbbk[t, x_1, \dots, x_n] \to \Bbbk(x_1, \dots, x_n)$, действующий на переменные по правилам $t \mapsto 1/f(x)$, $x_\nu \mapsto x_\nu$, получаем равенство

$$q_1\big(1/f(x), x\big) \cdot f_1(x) + \dots + q_s\big(1/f(x), x\big) \cdot f_s(x) = 1$$

в поле рациональных функций $\Bbbk(x_1, \dots, x_n)$. Умножая обе части на подходящую степень f^m получаем равенство $f^m = \tilde{q}_1 f_1 + \dots + \tilde{q}_s f_s$, в котором $\tilde{q}_\nu \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$. □

16.2. Аффинный алгебро-геометрический словарик. Всюду далее мы по умолчанию считаем, что основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто. Аффинные алгебраические многообразия, определённые над полем $\Bbbk$, образуют категорию $\mathcal{A}\mathit{ff}_\Bbbk$, морфизмами в которой являются такие отображения $\varphi : X \to Y$ из аффинного алгебраического многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ в аффинное алгебраическое многообразие $Y \subset \mathbb{A}^m$, которые задаются в координатах формулой

$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))\,, \quad \text{где} \quad \varphi_i(x) \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]\,.$$

Такие отображения называются *регулярными* или *полиномиальными*. Функция $f : X \to \Bbbk$ называется *регулярной*, если она является ограничением на X многочлена $f \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$. Регулярные функции на X образуют конечно порождённую приведённую[1] $\Bbbk$-алгебру, которая называется *координатной алгеброй* аффинного алгебраического многообразия X и обозначается

$$\Bbbk[X] \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\mathit{ff}_\Bbbk}(X, \Bbbk) \simeq \Bbbk[x_1, \dots, x_n]/I(X)\,, \tag{16-2}$$

где $I(X) = \{f \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n] \mid f|_X \equiv 0\}$ — идеал всех зануляющихся на X многочленов.

Лемма 16.1

Всякая конечно порождённая приведённая алгебра A над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ изоморфна координатной алгебре $A = \Bbbk[X]$ некоторого аффинного алгебраического многообразия X.

Доказательство. Зададим алгебру A образующими и соотношениями, т. е. представим её в виде фактора $A = \Bbbk[x_1, \dots, x_n]/I$. Так как A приведена, равенство $f^n \in I$ для $f \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ возможно только если $f \in I$. По сильной теореме о нулях это означает, что $I = I(V(I))$ является идеалом аффинного алгебраического многообразия $V(I) \subset \mathbb{A}^n$. □

[1] Напомню, что коммутативное кольцо называется *приведённым*, если в нём нет нильпотентов, см. n° 2.4.1 на стр. 30 части I.

16.2.1. Максимальный спектр. С каждой точкой $p \in X$ аффинного алгебраического многообразия X связан *гомоморфизм вычисления* $\mathrm{ev}_p : \Bbbk[X] \to \Bbbk$, $f \mapsto f(p)$. Он эпиморфен, поскольку переводит единицу, а значит, является гомоморфизмом факторицации по модулю своего ядра

$$\mathfrak{m}_p \overset{\text{def}}{=} \ker \mathrm{ev}_p = \{ f \in \Bbbk[X] \mid f(p) = 0 \}, \tag{16-3}$$

которое является максимальным идеалом в $\Bbbk[X]$, так как фактор по нему — поле. Идеал (16-3) называется *максимальным идеалом точки* $p \in X$. Итак,

$$\mathrm{ev}_p : \Bbbk[X] \twoheadrightarrow \frac{\Bbbk[X]}{\mathfrak{m}_p} \simeq \Bbbk, \quad f \mapsto f \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{m}_p) = f(p) \in \Bbbk.$$

Множество всех максимальных идеалов произвольной $\Bbbk$-алгебры A называется её *максимальным спектром* и обозначается $\mathrm{Spec}_{\mathrm{m}}(A)$. Каждой точке $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} A$ отвечает гомоморфизм факторизации $A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{m}$, $a \mapsto a \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{m})$, принимающий значения в поле $A/\mathfrak{m} \supset \Bbbk$. Если алгебра A конечно порождена, поле $A/\mathfrak{m}$ является конечно порождённой $\Bbbk$-алгеброй, а значит, конечным алгебраическим расширением[1] поля $\Bbbk$. Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ это влечёт равенство $A/\mathfrak{m} = \Bbbk$, что позволяет интерпретировать элементы *любой* конечно порождённой алгебры A над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ как функции $\mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} A \to \Bbbk$.

Лемма 16.2

Для любого аффинного алгебраического многообразия X над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ соответствия $p \mapsto \mathrm{ev}_p \mapsto \mathfrak{m}_p = \ker(\mathrm{ev}_p)$ устанавливают биекции между точками многообразия X, гомоморфизмами $\Bbbk[X] \to \Bbbk$, тождественными на $\Bbbk$, и максимальными идеалами алгебры $\Bbbk[X]$.

Доказательство. Биективность второго соответствия мы уже проверили выше[2]. Сопоставление точке $p \in X \subset \mathbb{A}^n$ её максимального идеала $\mathfrak{m}_p = \ker \mathrm{ev}_p$ вкладывает множество точек в множество максимальных идеалов, поскольку для $p \neq q$ всегда[3] можно указать аффинно линейную функцию $f : \mathbb{A}^n \to \Bbbk$ зануляющуюся в p и отличную от нуля в q. Чтобы показать, что над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ любой максимальный идеал $\mathfrak{m} \subset \Bbbk[X]$ имеет вид $\mathfrak{m}_p = \ker \mathrm{ev}_p$ для некоторой точки $p \in X$, рассмотрим полный прообраз $\widetilde{\mathfrak{m}} \subset \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ идеала $\mathfrak{m} \subset \Bbbk[x_1, \dots, x_n]/I(X)$. Так как $\Bbbk[x_1, \dots, x_n]/\widetilde{\mathfrak{m}} = \Bbbk[X]/\mathfrak{m} = \Bbbk$, идеал $\widetilde{\mathfrak{m}}$ является собственным, максимальным и содержит $I(X)$. По слабой теореме о нулях $V(\widetilde{\mathfrak{m}}) \neq \varnothing$, т. е. $\widetilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}_p$ для некоторой точки $p \in \mathbb{A}^n$. Поскольку $I(X) \subset \widetilde{\mathfrak{m}}$, точка $p \in X$. Так как $\mathfrak{m}$ максимален, включение $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_p$ влечёт равенство $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_p$. □

Определение 16.1

Множество нильпотентных элементов $\mathfrak{n}(A) \overset{\text{def}}{=} \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} : a^n = 0\}$ произвольного коммутативного кольца A называется *нильрадикалом* этого кольца.

[1] См. теор. 15.2 и сл. 15.2 на стр. 235.

[2] Над алгебраически не замкнутым полем $\Bbbk$ сопоставление $\varphi \mapsto \ker \varphi$ по-прежнему вкладывает множество гомоморфизмов $\varphi : A \to \Bbbk$ в множество максимальных идеалов алгебры A, однако не все максимальные идеалы в A являются ядрами вычислений значений в $\Bbbk$. Например, ядро гомоморфизма вычисления $\mathrm{ev}_i : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}$, $f \mapsto f(i)$, где $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$, является максимальным идеалом $\mathbb{R}$-алгебры $\mathbb{R}[x]$, но его нельзя реализовать как ядро вычисления $\mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$, так как $\mathrm{codim}_{\mathbb{R}} \ker \mathrm{ev}_i = 2$.

[3] Даже над не замкнутым полем.

Упражнение 16.1. Убедитесь, что нильрадикал является идеалом в A.

Следствие 16.1
Для любой конечно порождённой алгебры A над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$

$$\mathfrak{n}(A) = \bigcap_{\mathfrak{m}\in \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A} \mathfrak{m}\,.$$

Иначе говоря, $\mathfrak{n}(A)$ — это ядро гомоморфизма из алгебры A в алгебру функций на $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A$, сопоставляющего элементу $a \in A$ функцию $a:\ \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A \to \Bbbk \simeq A/\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m} \mapsto a \pmod{\mathfrak{m}}$.

Доказательство. Для любого максимального идеала $\mathfrak{m}$ фактор $A/\mathfrak{m}$ является полем, поэтому класс любого нильпотента в нём равен нулю. Тем самым, нильрадикал лежит в пересечении всех максимальных идеалов. Для доказательства обратного включения рассмотрим приведённую алгебру $A_{\mathrm{red}} \overset{\mathrm{def}}{=} A/\mathfrak{n}(A)$. Достаточно убедиться, что каждый элемент $a \in A_{\mathrm{red}}$, задающий нулевую функцию на $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A_{\mathrm{red}} = \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A$, является нулевым в A_{red}. Но редуцированная алгебра A_{red} изоморфна координатной алгебре $\Bbbk[X] = \Bbbk[x_1, \dots, x_n]/I(X)$ некоторого аффинного алгебраического многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ и точки $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A_{\mathrm{red}}$ находятся в биекции с точками многообразия X. Если многочлен $f \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ задаёт нулевую функцию на X, то он лежит в $I(X)$ и задаёт нулевой класс в $\Bbbk[X]$. □

16.2.2. Антиэквивалентность категорий. Со всяким отображением множеств $\varphi:\ X \to Y$ связан *гомоморфизм поднятия* $\varphi^*:\ \Bbbk^Y \to \Bbbk^X$, $f \mapsto f \circ \varphi$, действующий из алгебры $\Bbbk^Y$ всех функций $Y \to \Bbbk$ в алгебру $\Bbbk^X$ всех функций $X \to \Bbbk$. Если аффинные многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ и $Y \subset \mathbb{A}^m$ имеют координатные алгебры $\Bbbk[X] = \Bbbk[x_1, \dots, x_n]/I(X)$ и $\Bbbk[Y] = \Bbbk[y_1, \dots, y_m]/I(Y)$, а отображение $\varphi:\ X \to Y$ задаётся в координатах формулой $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \big(\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)\big)$, то

$$\varphi^*(y_i) = \varphi_i\,.$$

Регулярность отображения φ, по определению означающая, что $\varphi_i(x) \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$, равносильна включению[1] $\varphi^*\left(\Bbbk[Y]\right) \subset \Bbbk[X]$, т. е. тому, что поднятие регулярной функции на Y является регулярной функцией на X.

Упражнение 16.2. Проверьте, что теоретико множественное отображение топологических (соотв. гладких или аналитических) многообразий $X \to Y$ является непрерывным (соотв. гладким или аналитическим) если и только если его гомоморфизм поднятия переводит непрерывные (соотв. гладкие или аналитические) функции $Y \to \mathbb{R}$ в непрерывные (соотв. гладкие или аналитические) функции $X \to \mathbb{R}$.

Теорема 16.2
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ контравариантный функтор

$$\mathcal{Aff}_{\Bbbk} \to \mathcal{Alg}_{\Bbbk}^{\mathrm{op}}\,, \quad X \mapsto \Bbbk[X] = \operatorname{Hom}_{\mathcal{Aff}_{\Bbbk}}(X, \mathbb{A}^1)\,, \tag{16-4}$$

переводящий регулярный морфизм $\varphi:\ X \to Y$ аффинных многообразий в гомоморфизм поднятия $\varphi^*:\ \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$, является эквивалентностью категорий.

[1] Обратите внимание, что включение $\varphi(X) \subset Y$ гарантирует включение $\varphi^*\big(I(Y)\big) \subset I(X)$, означающее, что правило $y_i \mapsto \varphi_i$ корректно задаёт гомоморфизм фактор алгебр $\Bbbk[Y] = \Bbbk[y_1, \dots, y_m]/I(Y) \to \Bbbk[x_1, \dots, x_n] = \Bbbk[X]$.

Доказательство. Согласно предл. 13.1 на стр. 198 достаточно убедиться, что функтор (16-4) по-существу сюрьективен и вполне строг. Первое было установлено в лем. 16.1 на стр. 240. Для доказательства второго рассмотрим функтор

$$\mathcal{Alg}_{\Bbbk} \to \mathcal{Set}\,, \quad A \mapsto \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A = \operatorname{Hom}_{\mathcal{Alg}_{\Bbbk}}(A, \Bbbk)\,, \tag{16-5}$$

переводящий гомоморфизм алгебр $\psi : A \to B$ в отображение поднятия

$$\psi^* : \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} B \to \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A\,,$$

сопоставляющее эпиморфизму $\mathrm{ev} : B \twoheadrightarrow \Bbbk$ с ядром $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} B$ композицию $\psi^*(\mathrm{ev}) = \mathrm{ev} \circ \psi$, которая является эпиморфизмом с ядром $\psi^{-1}(\mathfrak{m}) \in \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} \Bbbk[X]$. Отображения множеств

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{Aff}_{\Bbbk}}(X, Y) \underset{\psi^* \leftarrow\!\shortmid \psi}{\overset{\varphi \mapsto \varphi^*}{\rightleftarrows}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{Alg}_{\Bbbk}}(\Bbbk[Y], \Bbbk[X])$$

являются взаимно обратными биекциями, т. е. $\varphi^{**} = \varphi$ и $\psi^{**} = \psi$ для любых аффинных многообразий $X \subset \mathbb{A}^n$ и $Y \subset \mathbb{A}^m$ с координатными алгебрами $\Bbbk[X] = \Bbbk[x_1, \dots, x_n]/I(X)$ и $\Bbbk[Y] = \Bbbk[y_1, \dots, y_m]/I(Y)$. В самом деле, если регулярный морфизм $\varphi : X \to Y$ задаётся формулой $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \big(\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)\big)$, где $\varphi_i(x) \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$, то $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$ действует на образующие алгебры $\Bbbk[Y]$ по правилу $y_i \mapsto \varphi_i \pmod{I(X)}$, причём включение $\varphi(X) \subset Y$ гарантирует включение $\varphi^*\big(I(Y)\big) \subset I(X)$, обеспечивающее корректное действие φ^* на фактор алгебру $\Bbbk[Y] = \Bbbk[y_1, \dots, y_m]/I(Y)$. Дважды двойственное отображение $\varphi^{**} : \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} \Bbbk[X] \to \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} \Bbbk[Y]$ переводит гомоморфизм вычисления $\mathrm{ev}_p : \Bbbk[X] \to \Bbbk$, $f(x) \mapsto f(p)$, в точке $p = (p_1, \dots, p_n) \in X$, в его композицию с φ^*. Эта композиция переводит образующую $y_i \in \Bbbk[Y]$ в число $\varphi_i(p)$, т. е. является гомоморфизмом вычисления в точке $\varphi(p)$. Тем самым, $\varphi^{**} = \varphi$. Равенство $\psi^{**} = \psi$ для любого гомоморфизма алгебр $\psi : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$ проверяется аналогично. □

Упражнение 16.3. Сделайте эту проверку.

Замечание 16.1. Согласно лем. 16.2 на стр. 241 функтор (16-5) почти квазиобратен к функтору (16-4): применяя его к координатной алгебре $A = \Bbbk[X]$, мы получаем *множество* $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A$ точек многообразия X. Однако на этом множестве имеется много *разных*, но изоморфных друг другу структур аффинного алгебраического многообразия, если понимать такую структуру как вложение $\varphi : \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ с сюрьективным гомоморфизмом поднятия $\varphi^* : \Bbbk[\mathbb{A}^n] \twoheadrightarrow A$, отождествляющее $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A$ с аффинным алгебраическим многообразием $V\left(\ker \varphi^*\right) \subset \mathbb{A}^n$. Фиксация таковой структуры равносильна выбору конкретного задания алгебры A образующими и соотношениями, т. е. фиксации изоморфизма $A \simeq \Bbbk[x_1, \dots, x_n]/I$, ср. с прим. 13.13 на стр. 197.

Пример 16.1 (прямая и гипербола)

Так как гомоморфизм $\mathrm{ev} : \Bbbk[t] \to \Bbbk$ однозначно определяется своим значением $\mathrm{ev}(t) = p \in \Bbbk$ на образующей t, точки спектра $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} \Bbbk[t]$ биективно соответствуют точкам $p \in \mathbb{A}^1 = \Bbbk$. Соответственно, максимальные идеалы $\mathfrak{m} \subset \Bbbk[t]$ суть главные идеалы вида $(t - p)$. Аналогично, спектр алгебры полиномов Лорана $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} \Bbbk[t, t^{-1}]$ находятся в биекции с точками $p \in \mathbb{A}^1 \smallsetminus \{0\} = \Bbbk^*$, поскольку значение $p = \mathrm{ev}(t) = 1/(\mathrm{ev}(t^{-1})$ должно быть обратимым элементом поля $\Bbbk$. Алгебру полиномов Лорана можно задать образующими и соотношениями при помощи изоморфизма $\varphi^* : \Bbbk[t, t^{-1}] \xrightarrow{\sim} \Bbbk[x, y]/(xy - 1)$, $t \mapsto x$, $t^{-1} \mapsto y$. Алгебра $\Bbbk[x, y]/(xy - 1)$ является координатной алгеброй гиперболы $xy = 1$ в $\mathbb{A}^2$. Отображение поднятия $\varphi : V(xy - 1) \to \mathbb{A}^1 \smallsetminus \{0\}$, отвечающее предыдущему гомоморфизму алгебр φ^*, проектирует гиперболу на координатную ось, биективно отождествляя точки гиперболы с отличными от нуля точками этой оси.

Пример 16.2 (копроизведение многообразий)
Так как алгебра $\Bbbk[X] \times \Bbbk[Y]$ конечно порождена и приведена, она является прямым произведением[1] алгебр $\Bbbk[X]$ и $\Bbbk[Y]$ в категории $\mathcal{A}\ell g_{\Bbbk}$. Поэтому максимальный спектр

$$\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}\big(\Bbbk[X] \times \Bbbk[Y]\big) \simeq X \sqcup Y$$

является прямым копроизведением[2] X и Y в категории $\mathcal{A}ff_{\Bbbk} \simeq \mathcal{A}\ell g_{\Bbbk}^{\mathrm{op}}$. Таким образом, дизъюнктное объединение аффинных алгебраических многообразий X и Y также является аффинным алгебраическим многообразием.

Пример 16.3 (произведение многообразий)
Тензорное произведение $\Bbbk$-алгебр $A \otimes B$ определяется как тензорное произведение векторных пространств над $\Bbbk$. Умножение разложимых тензоров задаётся правилом $(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2)$ и по дистрибутивности продолжается на их линейные комбинации.

Упражнение 16.4. Убедитесь, что такое продолжение корректно и задаёт на $A \otimes B$ структуру коммутативной $\Bbbk$-алгебры с единицей и что эта алгебра является копроизведением алгебр A и B в категории всех[3] коммутативных $\Bbbk$-алгебр с единицами.

Универсальное свойство тензорного произведения задаёт теоретико множественную биекцию

$$\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(A) \times \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(B) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(A \otimes B)\,,$$

переводящую пару гомоморфизмов вычисления $\mathrm{ev}_p : A \to \Bbbk$, $\mathrm{ev}_q : B \to \Bbbk$ в гомоморфизм

$$A \otimes B \to \Bbbk\,, \quad a \otimes b \mapsto a(p)b(q)\,.$$

Если алгебры A и B конечно порождены, их тензорное произведение порождается конечным множеством всех попарных тензорных произведений образующих алгебр A и B.

Покажем, что если алгебры A и B приведены, то их тензорное произведение $A \otimes B$ тоже приведено. По сл. 16.1 на стр. 242 достаточно убедиться, что всякий элемент $h \in A \otimes B$, задающий нулевую функцию на $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(A \otimes B)$, равен нулю. Запишем h как $\sum f_\nu \otimes g_\nu$, где $g_\nu \in B$ линейно независимы над $\Bbbk$. Если $(\mathrm{ev}_p \otimes \mathrm{ev}_q)h = 0$ для всех $(p,q) \in \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(A \otimes B)$, то при каждом $p \in \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A$ линейная комбинация $\sum f_\nu(p) \cdot g_\nu \in B$ является тождественно нулевой функцией на $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} B$, а значит, равна нулю, так как алгебра B приведена. Поэтому каждое $f_\nu \in A$ является нулевой функцией на $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A$. Так как A приведена, все $f_\nu = 0$, а с ними и $h = 0$.

Мы заключаем, что $\Bbbk[X] \otimes \Bbbk[Y]$ является прямым копроизведением в категории $\mathcal{A}\ell g_{\Bbbk}$, а значит, аффинное многообразие $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}\big(\Bbbk[X] \otimes \Bbbk[Y]\big)$ является прямым произведением $X \times Y$ в категории $\mathcal{A}ff_{\Bbbk}$. Выше мы видели, что как множество оно совпадает с прямым произведением в $\mathcal{S}et$.

16.3. Топология Зарисского. На множестве $X = \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A$ имеется каноническая топология, отражающая алгебраические свойства алгебры A. Эта топология называется *топологией Зарисского* и имеет в качестве *замкнутых* подмножеств алгебраические подмногообразия в X, т. е. множества вида $V(I) = \{x \in X \mid f(x) = 0\ \forall f \in I\} = \{\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A \mid I \subset \mathfrak{m}\}$ для всевозможных идеалов $I \subset A$.

[1] См. прим. 13.14 на стр. 200.
[2] См. прим. 13.15 на стр. 201.
[3] Не обязательно приведённых.

Упражнение 16.5. Убедитесь, что а) $\varnothing = V(1)$ б) $X = V(0)$ в) $\bigcap_\nu V(I_\nu) = V\left(\sum_\nu I_\nu\right)$, где $\sum_\nu I_\nu$ означает идеал, образованный всевозможными конечными суммами $\sum_\nu f_\nu$ с $f_\nu \in I_\nu$ г) $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J) = V(IJ)$, где IJ означает идеал, представляющий собою $\Bbbk$-линейную оболочку всевозможных произведений[1] ab с $a \in I$, $b \in J$.

Топология Зарисского имеет чисто алгебраическую природу: окрестности Зарисского отражают скорее отношения делимости, нежели «близости», и многие её свойства довольно далеки от интуитивно привычных свойств метрической топологии. Скажем, топология Зарисского на произведении $X \times Y$ тоньше произведения топологий Зарисского на X и Y, поскольку замкнутые подмножества $Z \subset X \times Y$ не исчерпываются произведениями замкнутых подмножеств в X, Y. Например, при $X = Y = \mathbb{A}^1$ гипербола $V(xy - 1)$ замкнута в топологии Зарисского на $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^2$, а отличные от всей плоскости произведения замкнутых подмножеств в $\mathbb{A}^1$ исчерпываются конечными объединениями изолированных точек и прямых, параллельных координатным осям.

Предложение 16.1 (база открытых множеств и компактность)
Каждое открытое подмножество аффинного алгебраического многообразия X является объединением конечного числа *главных* открытых множеств $\mathcal{D}(f) \stackrel{\text{def}}{=} X \smallsetminus V(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$, где $f \in \Bbbk[X]$, и *компактно* в том смысле, что в каждое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие.

Доказательство. Пусть $U = X \smallsetminus V(I)$. Так как алгебра $\Bbbk[X]$ нётерова, идеал $I = (f_1, \dots, f_m)$ конечно порождён. Поэтому $V(I) = \bigcap V(f_i)$ и $U = \bigcup \left(X \smallsetminus V(f_i)\right) = \bigcup_\nu \mathcal{D}(f_i)$. Это доказывает первое утверждение. Для доказательства второго заметим, что семейство главных открытых множеств $\mathcal{D}(f_\nu)$ покрывает открытое множество U если и только если общие нули всех функций f_ν лежат вне U, т. е. $V(I) \subset X \smallsetminus U$, где I — идеал, порождённый функциями f_ν. Поскольку $I = (f_1, \dots, f_m)$ для некоего конечного набора функций $f_1, \dots, f_m$, множество U покрывается множествами $\mathcal{D}(f_i)$, на которых отличны от нуля функции из этого набора. □

Предложение 16.2 (непрерывность регулярных морфизмов)
Всякий регулярный морфизм алгебраических многообразий $\varphi : X \to Y$ непрерывен в топологии Зарисского.

Доказательство. Прообраз $\varphi^{-1}\left(V(I)\right)$ замкнутого подмножества $V(I) \subset Y$ состоит из всех таких точек $x \in X$, что $f(\varphi(x)) = 0$ для всех $f \in I$. Тем самым, он является множеством нулей идеала, порождённого в $\Bbbk[X]$ образом $\varphi^*(I)$ идеала I при гомоморфизме поднятия $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$. □

16.3.1. Неприводимые компоненты. Топологическое пространство X, представимое в виде объединения $X = X_1 \cup X_2$ своих собственных замкнутых подмножеств $X_1, X_2 \subsetneq X$, называется *приводимым*. В обычной метрической топологии практически все пространства приводимы. В топологии Зарисского приводимость многообразия X равносильна наличию делителей нуля в алгебре $\Bbbk[X]$, и неприводимые алгебраические многообразия являются грубыми аналогами степеней простых чисел в арифметике.

Предложение 16.3
Аффинное алгебраическое многообразие неприводимо если и только если в его координатной алгебре $\Bbbk[X]$ нет делителей нуля.

[1] Обратите внимание, что последнее равенство равносильно равенству $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{IJ}$.

Доказательство. Разложение $X = X_1 \cup X_2$, где каждое X_i замкнуто, непусто и отлично от X, означает наличие таких ненулевых необратимых функций $f_1 \in I(X_1)$, $f_2 \in I(X_2)$, что произведение $f_1 f_2$ тождественно зануляется на всём X. Последнее означает, что $f_1 f_2 = 0$ в $\Bbbk[X]$. Наоборот, если $f_1 f_2 = 0$ в $\Bbbk[X]$ для ненулевых $f_1, f_2 \in \Bbbk[X]$, то f_1 и f_2 необратимы в $\Bbbk[X]$, а значит, замкнутые подмножества $V(f_1)$ и $V(f_2)$ непусты и отличны от X. При этом $X = V(f_1) \cup V(f_2)$. □

Упражнение 16.6. Убедитесь, что $V(f)$ непусто и отлично от X для всякого ненулевого необратимого многочлена $f \in \Bbbk[X]$.

Следствие 16.2
Аффинная гиперповерхность $\{g(x) = 0\} \subset \mathbb{A}^n$ неприводима тогда и только тогда, когда g является степенью неприводимого многочлена.

Доказательство. Поскольку алгебра $\Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ факториальна, радикал $\sqrt{(f)}$ любого главного идеала (f) тоже является главным идеалом, порождённым произведением всех попарно неассоциированных неприводимых делителей многочлена f. Алгебра $\Bbbk[V(f)] = \Bbbk[x_1, \dots, x_n]/\sqrt{(f)}$ не имеет делителей нуля если и только если f имеет ровно один неприводимый делитель с точностью до умножения на константы. □

Теорема 16.3
Каждое аффинное алгебраическое многообразие X является конечным объединением

$$X = X_1 \cup \ldots \cup X_k$$

таких неприводимых замкнутых подмножеств $X_i \subset X$, что $X_i \not\subset X_j$ при $i \neq j$, и это разложение единственно с точностью до перестановки его элементов.

Доказательство. Сначала докажем существование разложения. Если X неприводимо, доказывать нечего. Если X приводимо, представим его в виде $X = Z_1 \cup Z_2$, где $Z_{1,2}$ — собственные замкнутые подмножества. Каждую приводимую компоненту этого разложения снова разложим в объединение двух собственных замкнутых подмножеств, и так далее. Если на каком-то шаге получится разложение $X = \bigcup Z_\nu$ в котором все Z_ν неприводимы, мы выкинем из этого объединения все неприводимые компоненты, которые содержатся в других неприводимых компонентах, и получим требуемое разложение. Если процесс не остановится через конечное число шагов, мы сможем построить бесконечную цепочку строго вложенных замкнутых подмножеств $X \supsetneq Y_1 \supsetneq Y_2 \supsetneq \ldots$, идеалы которых $(0) \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \ldots$ образуют бесконечную возрастающую цепочку, противоречащую нётеровости алгебры $\Bbbk[X]$.

Единственность доказывается индукцией по k. При $k = 1$ многообразие X неприводимо и является единственной своей неприводимой компонентой. Пусть X раскладывается в объединение $k \geqslant 2$ неприводимых компонент и для всех многообразий, раскладывающихся на меньшее число компонент, разложение в объединение неприводимых компонент единственно. Если неприводимое замкнутое подмножество $Y \subset X$ лежит в объединении замкнутых подмножеств $Z_1 \cup Z_2$, то $Y = (Y \cap Z_1) \cup (Y \cap Z_2)$, а значит, $Y \subset Z_1$ или $Y \subset Z_2$. Поэтому равенство двух разложений на неприводимые компоненты $X_1 \cup \ldots \cup X_k = Y_1 \cup \ldots \cup Y_m$ влечёт включение $X_1 \subset Y_\alpha \subset X_\beta$ для некоторых α, β, что означает равенство $X_1 = Y_\alpha = X_\beta$. Выкинем из обоих разложений компоненты X_1 и Y_α и применим предположение индукции к объединению замыканий оставшихся компонент. □

Упражнение 16.7. Пусть $Z \subsetneq Y \subset X$ замкнуты и Y неприводимо. Убедитесь, что $Y = \overline{Y \smallsetminus Z}$, где замыкание берётся в X, и что неприводимость Y для этого существенна.

Определение 16.2
Неприводимые замкнутые подмножества $X_i \subset X$ из теор. 16.3, называются *неприводимыми компонентами* многообразия X.

Следствие 16.3
Элемент $f \in \Bbbk[X]$ является ненулевым делителем нуля если и только если он обращается в нуль на некоторой неприводимой компоненте многообразия X, но не на всём X.

Пример 16.4 («большие» открытые множества)
Топология Зарисского нехаусдорфова. Если X неприводимо, любые два непустых открытых подмножества $U_1, U_2 \subset X$ имеют непустое пересечение, поскольку в противном случае возникает разложение $X = (X \smallsetminus U_1) \cup (X \smallsetminus U_2)$. Иначе говоря, каждое непустое открытое подмножество неприводимого многообразия всюду плотно в нём.

Упражнение 16.8. Пусть X неприводимо и $f, g \in \Bbbk[X]$. Докажите, что если $f|_U = g|_U$ для некоторого непустого открытого $U \subset X$, то $f = g$ в $\Bbbk[X]$.

16.4. Рациональные функции. Не являющиеся делителями нуля элементы алгебры $\Bbbk[X]$ образуют мультипликативную систему[1] $S_X \subset \Bbbk[X]$. Кольцо частных $S_X^{-1}\Bbbk[X]$ называется *кольцом рациональных функций* на X и обозначается $\Bbbk(X)$. Если X неприводимо, то $\Bbbk(X) = Q_{\Bbbk[X]}$ — это поле частных целостного кольца $\Bbbk[X]$. Скажем, что рациональная функция $f \in \Bbbk(X)$ *определена* в точке $x \in X$, если существует такое её представление дробью $f = p/q$, где $p, q \in \Bbbk[X]$ и q не делит нуль, что $q(x) \neq 0$. Число $f(x) = p(x)/q(x) \in \Bbbk$ называется *значением* f в точке x.

Упражнение 16.9. Убедитесь, что $f(x)$ не зависит от способа записи f в виде дроби $f = p/q$, где $p, q \in \Bbbk[X]$, q не делит нуль, и $q(x) \neq 0$.

Множество точек x, в которых определена рациональная функция f, называется *областью определения* функции f и обозначается $\mathrm{Dom}(f)$. Из сл. 16.3 и прим. 16.4 вытекает, что $\mathrm{Dom}(f)$ является плотным открытым подмножеством в X.

Упражнение 16.10. Убедитесь, что для совпадения двух рациональных функций как элементов кольца $\Bbbk(X)$ достаточно поточечного совпадения их значений на каком-нибудь плотном открытом подмножестве в X.

Для открытого $U \subset X$ положим $\Bbbk[U] \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \Bbbk(X) \mid \mathrm{Dom}(f) \supset U\}$ и будем называть его кольцом *рациональных функций, регулярных в* U.

Предложение 16.4
Если $h \in \Bbbk[X]$ не делит нуля, то $\Bbbk[\mathcal{D}(h)] = \Bbbk[X][h^{-1}]$ является кольцом частных $\Bbbk[X]$ со знаменателями из мультипликативной системы $\{h^k\}_{k \geqslant 0}$.

Доказательство. Для рациональной функции $f \in \Bbbk(X)$ положим

$$\left(f^{-1}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in \Bbbk[X] \mid gf \in \Bbbk[X]\}\,. \tag{16-6}$$

[1] См. n° 4.1 на стр. 62 части I.

Это идеал в $\Bbbk[X]$, и лежащие в нём неделители нуля суть все возможные знаменатели, встречающиеся в разнообразных представлениях f в виде дроби. Множество делителей нуля в (f^{-1}) представляет собою пересечение этого идеала с объединением идеалов $I(X_i)$ неприводимых компонент X_i многообразия X. Так как неделители нуля в (f^{-1}) по определению имеются, каждое пересечение $(f^{-1}) \cap I(X_i) \subsetneq (f^{-1})$ является собственным векторным подпространством в (f^{-1}), и весь идеал (f^{-1}) является объединением этих подпространств и подпространства, порождённого неделителями нуля. Если последнее подпространство тоже собственное, пространство (f^{-1}) оказалось бы объединением конечного набора собственных подпространств, что невозможно над бесконечным полем[1].

Упражнение 16.11. Убедитесь в этом.

Мы заключаем, что неделители нуля линейно порождают (f^{-1}) как векторное пространство над $\Bbbk$, и $X \smallsetminus \mathrm{Dom}(f) = V((f^{-1}))$. Включение $\mathcal{D}(h) \subset \mathrm{Dom}(f)$ означает, что $V(h) \supset V((f^{-1}))$, т. е. функция h зануляется на $V((f^{-1}))$. По теореме Гильберта о нулях $h^d \in (f^{-1})$ для некоторого $d \in \mathbb{N}$. Тем самым, $f = p/h^d$, где $p \in \Bbbk[X]$. □

16.4.1. Аффинность главных открытых множеств. Если $h \in \Bbbk[X]$ не делит нуль, то главное открытое подмножество $\mathcal{D}(h) = \mathrm{Spec_m}\,\Bbbk[X][h^{-1}] = \mathrm{Spec_m}\,\Bbbk[X][t]\,/\,(1-ht)$ всюду плотно в X и является аффинным алгебраическим многообразием: например, его можно реализовать замкнутой гиперповерхностью $V(1-ht) \subset X \times \mathbb{A}^1$. Вложение $i : \mathcal{D} \hookrightarrow X$ является регулярным морфизмом аффинных многообразий: его гомоморфизм подъёма задаёт каноническое вложение $i^* : \Bbbk[X] \hookrightarrow \Bbbk[X][h^{-1}] \simeq \Bbbk[\mathcal{D}(h)]$ и продолжается до изоморфизма колец частных $i^* : \Bbbk(X) \xrightarrow{\sim} \Bbbk\big(\mathcal{D}(h)\big)$.

Замечание 16.2. Два *разных* толкования обозначения $\Bbbk[\mathcal{D}(h)]$ — как координатной алгебры аффинного алгебраического многообразия $\mathcal{D}(h)$ и как алгебры рациональных функций, регулярных на открытом множестве $\mathcal{D}(h) \subset X$, — *согласованы* друг с другом. В частности, согласованы друг с другом и два разных толкования обозначения $\Bbbk[X]$ — как координатной алгебры аффинного многообразия X и как алгебры рациональных функций, регулярных всюду на X, т. е. $\Bbbk[x_1, \dots, x_n]\,/\,I(X) = \{f \in \Bbbk(X) \mid \mathrm{Dom}(f) = X\}$. Это вытекает из предл. 16.4 при $h = 1$, что отвечает несобственному главному открытому множеству $\mathcal{D}(h) = X$.

Предостережение 16.1. Неглавное открытое подмножество $U \subset X$, вообще говоря, *не является* аффинным подмногообразием: каноническое вложение $U \hookrightarrow \mathrm{Spec_m}\,\Bbbk[U]$, сопоставляющее точке $u \in U$ её максимальный идеал $\mathfrak{m}_u = \ker \mathrm{ev}_u \subset \Bbbk[U]$, может быть не биективно.

Упражнение 16.12. Пусть $n \geqslant 2$ и $U = \mathbb{A}^n \smallsetminus O$ — дополнение к началу координат в аффинном пространстве. Покажите, что $\Bbbk[U] = \Bbbk[\mathbb{A}^n]$ и, тем самым, $\mathrm{Spec_m}\,\Bbbk[U] = \mathbb{A}^n \neq U$.

Предложение 16.5
Пусть разложение аффинного алгебраического многообразия X на неприводимые компоненты имеет вид $X = X_1 \cup \ldots \cup X_k$. Тогда $\Bbbk(X) = \Bbbk(X_1) \times \ldots \times \Bbbk(X_k)$.

Доказательство. Объединение $Z = \bigcup_{i \neq j}(X_i \cap X_j)$ попарных пересечений неприводимых компонент замкнуто в X. Выберем в его идеале $I(Z) \subset \Bbbk[X]$ какую-нибудь ненулевую функцию $f \in I(Z)$, не делящую нуль в $\Bbbk[X]$.

[1] А алгебраически замкнутое поле бесконечно.

Упражнение 16.13. Убедитесь, что $I(Z)$ линейно порождается такими функциями как векторное пространство над $\Bbbk$.

Главное открытое подмножество $W = \mathcal{D}(f) = \operatorname{Spec_m} \Bbbk[X][f^{-1}] \subset X$ аффинно и является дизъюнктным объединением подмножеств $W_i = W \cap X_i \subset X_i$. Каждое W_i является главным открытым подмножеством многообразия X_i и тоже аффинно: $W_i = \mathcal{D}(f_i) = \operatorname{Spec_m} \Bbbk[X_i][f_i^{-1}] \subset X_i$, где $f_i = f \pmod{I(X_i)} \in \Bbbk[X_i]$. Согласно прим. 16.2 $\Bbbk[W] \simeq \Bbbk[W_1] \times \dots \times \Bbbk[W_k]$.

Упражнение 16.14. Проверьте, что кольцо частных прямого произведения коммутативных колец с единицами изоморфно прямому произведению колец частных сомножителей:

$$(K_1 \times \ldots \times K_k)S^{-1}_{K_1\times\ldots\times K_k} \simeq K_1 S^{-1}_{K_1} \times \ldots \times K_k S^{-1}_{K_k}\,.$$

Таким образом, $\Bbbk(X) \simeq \Bbbk(W) \simeq \prod \Bbbk(W_i) \simeq \prod \Bbbk(X_i)$. □

16.5. Геометрические свойства гомоморфизмов алгебр. Всякий гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр

$$\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$$

канонически разлагается в композицию эпиморфизма и вложения:

$$\Bbbk[Y] \xrightarrow{\varphi_1^*} \Bbbk[Y]/\ker(\varphi^*) = \operatorname{im}(\varphi^*) \xhookrightarrow{\varphi_2^*} \Bbbk[X]\,. \tag{16-7}$$

Поскольку алгебра $\Bbbk[Y]$ конечно порождена, а алгебра $\Bbbk[X]$ приведена, алгебра

$$\Bbbk[Y]/\ker(\varphi^*) = \operatorname{im}(\varphi^*) \subset \Bbbk[X]$$

тоже конечно порождена и приведена. Она является координатной алгеброй аффинного алгебраического многообразия $Z = \operatorname{Spec_m}\left(\operatorname{im}(\varphi^*)\right) \simeq V\left(\ker(\varphi^*)\right) \subset Y$. Инъективность гомоморфизма $\varphi_1^* : \Bbbk[Z] \to \Bbbk[X]$ означает отсутствие ненулевых функций $f \in \Bbbk[Z]$, зануляющихся на $\varphi_1(X) \subset Z$, т. е. *всюду плотность* образа $\varphi_1(X)$ в многообразии Z. Тем самым, $Z = \overline{\varphi(X)} \subset Y$ есть замыкание образа $\varphi(X)$ в многообразии Y, вложенное в Y как замкнутое подмножество $V(\ker\varphi^*)$ нулей идеала $\ker\varphi^*$. Иначе говоря, алгебраическое разложение (16-7) на геометрическом языке означает разложение регулярного морфизма многообразий $\varphi : X \to Y$ в композицию регулярного морфизма $\varphi_1 : X \to Z$ с плотным образом и регулярного вложения $\varphi_2 : Z \hookrightarrow Y$ в качестве замкнутого подмногообразия.

16.5.1. Замкнутые вложения. Морфизм $\varphi : X \to Y$ называется *замкнутым вложением*, если его гомоморфизм поднятия $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$ сюрьективен. Это означает, что φ является изоморфизмом между X и замкнутым подмногообразием $V(\ker\varphi^*) \subset Y$. Если замкнутое подмножество $Z \subset X$ неприводимо, гомоморфизм поднятия $i^* : \Bbbk[X] \twoheadrightarrow \Bbbk[Z]$, отвечающий замкнутому вложению $i : Z \hookrightarrow X$, принимает значения в целостном кольце $\Bbbk[Z]$, которое канонически вложено в своё поле частных $\Bbbk(Z)$. По универсальному свойству кольца частных[1] эпиморфизм i^* однозначно продолжается до эпиморфизма $\mathrm{ev}_Z : \Bbbk(X) \twoheadrightarrow \Bbbk(Z)$, который ограничивает рациональные функции с X на Z и может интуитивно восприниматься как гомоморфизм вычисления рациональных функций на X в «в общей точке» неприводимого подмногообразия $Z \subset X$, где вычисляемая функция всегда определена, а результат такого вычисления лежит в поле $\Bbbk(Z)$.

[1]См. теор. 4.1 на стр. 63 части I.

В частности, когда $Z \subset X$ является неприводимой компонентой приводимого аффинного многообразия X, из сюрьективности гомоморфизма $\mathrm{ev}_Z : \Bbbk(X) \twoheadrightarrow \Bbbk(Z)$ вытекает, что всякая рациональная функция на Z является ограничением некоторой рациональной функции на X, т. е. записывается дробью вида $p\,/\,q$, знаменатель которой $q \pmod{I(X_i)} \in \Bbbk[X_i] = \Bbbk[X]\,/\,I(X_i)$ представляется не делящим нуль в $\Bbbk[X]$ элементом $q \in \Bbbk[X]$.

Упражнение 16.15. Укажите такого представителя для функции $1/x \in \Bbbk\big(\mathrm{Spec_m}\,\Bbbk[x]\big)$ на прямой $Z = \mathrm{Spec_m}\,\Bbbk[x] = V(y)$ координатного креста $X = \mathrm{Spec_m}\,\Bbbk[x,y]\,/\,(xy)$ на плоскости $\mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec_m}\,\Bbbk[x,y]$.

16.5.2. Доминантные морфизмы. Регулярный морфизм $\varphi : X \to Y$ неприводимого многообразия X называется *доминантным*, если гомоморфизм алгебр $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$ инъективен. Как мы уже видели выше, инъективность гомоморфизма поднятия означает, что $\overline{\varphi(X)} = Y$. Если X приводимо, то морфизм $\varphi : X \to Y$ называется *доминантным*, если доминантно его ограничение на *каждую* неприводимую компоненту многообразия X. В этом случае каждое из ограничений $\varphi_i = \varphi|_{X_i}$ задаёт вложение $\varphi_i^* : \Bbbk[Y] \hookrightarrow \Bbbk[X_i] \subset \Bbbk(X_i)$ координатной алгебры многообразия Y в *поле* рациональных функций на X_i. По универсальному свойству кольца частных такое вложение однозначно продолжается до вложения $\Bbbk(Y) \hookrightarrow \Bbbk(X_i)$ кольца рациональных функций на Y. Поэтому каждый доминантный морфизм $X \to Y$ задаёт вложение $\Bbbk(Y) \hookrightarrow \prod \Bbbk(X_i) = \Bbbk(X)$.

Упражнение 16.16. Покажите, что любой доминантный морфизм неприводимых аффинных многообразий $\varphi : X \to Y$ является композицией некоторого (не единственного) замкнутого вложения $\psi : X \hookrightarrow Y \times \mathbb{A}^m$ и проекции $\pi : Y \times \mathbb{A}^m \twoheadrightarrow Y$ вдоль $\mathbb{A}^m$.

16.5.3. Конечные морфизмы. Морфизм $\varphi : X \to Y$ называется *конечным*, если алгебра $\Bbbk[X]$ цела над подалгеброй $\varphi^*(k[Y]) \subset \Bbbk[X]$. Это означает, что $\Bbbk[X]$ линейно порождается над $\varphi^*(k[Y])$ конечным набором функций $f_1, \dots, f_m$, т. е. любая функция $h \in \Bbbk[X]$ может быть записана как $h = \sum \varphi^*(g_i)\, f_i$ с подходящими $g_i \in \Bbbk[Y]$.

Лемма 16.3
Любой конечный морфизм $\varphi : X \to Y$ аффинных алгебраических многообразий переводит каждое замкнутое подмножество $Z \subset X$ в замкнутое подмножество $\varphi(Z) \subset Y$, причём индуцированный морфизм $\varphi|_Z : Z \to \varphi(Z)$ тоже конечен. Если X неприводимо и $Z \neq X$, то $\varphi(Z) \neq Y$.

Доказательство. обозначим через $I = I(Z) \subset \Bbbk[X]$ идеал замкнутого подмножества $Z \subset X$. Ограничение $\varphi|_Z : Z \to Y$ отвечает сквозному гомоморфизму алгебр $f_Z^* : \Bbbk[Y] \xrightarrow{\varphi^*} \Bbbk[X] \to \Bbbk[X]\,/\,I$. Поскольку алгебра $\Bbbk[X]$ конечно порождена как $\varphi^*(\Bbbk[Y])$-модуль, алгебра $\Bbbk[Z] = \Bbbk[X]\,/\,I$ тоже конечно порождена как модуль над $\varphi|_Z^*(\Bbbk[Y]) = \varphi^*(\Bbbk[Y])\,/\,(I \cap \varphi^*(\Bbbk[Y]))$. Тем самым, морфизм $f|_Z : Z \to Y$ конечен. Индуцированный морфизм $f|_Z : Z \to \overline{\varphi(Z)}$ тоже конечен, поскольку $\Bbbk[\overline{\varphi(Z)}] = \varphi^*(\Bbbk[Y])$. Поэтому при доказательстве первого утверждения можно считать, что $Z = X$ и $Y = \overline{\varphi(X)}$. Так как равенство $\varphi(X) = \overline{\varphi(X)}$ достаточно проверить отдельно для каждой неприводимой компоненты многообразия X, мы можем считать X неприводимым. Таким образом, достаточно доказать, что каждый конечный доминантный морфизм $\varphi : X \to Y$ из неприводимого аффинного многообразия X сюрьективен. На алгебраическом языке это означает, что если в расширении алгебр $\Bbbk[Y] \subset \Bbbk[X]$ большая алгебра не имеет делителей нуля и линейно порождается над меньшей конечным набором элементов $f_1, \dots, f_m$, то каждый максимальный идеал $\mathfrak{m} \subset \Bbbk[Y]$ имеет вид $\widetilde{\mathfrak{m}} \cap \Bbbk[Y]$ для некоторого максимального идеала $\widetilde{\mathfrak{m}} \subset \Bbbk[X]$. Если идеал $\mathfrak{m}\,\Bbbk[X]$, порождённый $\mathfrak{m}$ в $\Bbbk[X]$, является собственным в $\Bbbk[X]$, то в качестве $\widetilde{\mathfrak{m}}$ можно взять любой максимальный идеал, содержащий $\mathfrak{m}\,\Bbbk[X]$. Таким образом, достаточно показать, что $\mathfrak{m}\,\Bbbk[X] \neq \Bbbk[X]$ ни для какого максимального идеала $\mathfrak{m} \subset \Bbbk[Y]$. Предположим противное: пусть $\mathfrak{m}\,\Bbbk[X] = \Bbbk[X]$. Тогда каждая из образующих f_i, линейно порождающих $\Bbbk[X]$ над $\Bbbk[Y]$, запишется в виде $f_i = \sum_\nu f_\nu \beta_{\nu i}$ с $\beta_{\nu i} \in \mathfrak{m}$. Мы получаем матричное равенство

$$(f_1, \dots, f_m)\,(E - B) = 0\,,$$

где $B = \left(\beta_{\nu i}\right) \in \mathrm{Mat}_{m\times m}(\mathfrak{m})$, а E — единичная матрица. Следовательно[1]

$$(f_1, \dots, f_m) \cdot \det(E - B) = (f_1, \dots, f_m)\,(E - B)(E - B)^\vee = 0\,.$$

Так как в $\Bbbk[Z]$ нет делителей нуля, $\det(E - B) = 0$. Раскрывая этот определитель, заключаем, что $1 \in \mathfrak{m}$, т. е. идеал $\mathfrak{m} = \Bbbk[Y]$ не является собственным.

Чтобы доказать, что $\varphi(Z) \neq Y$ при $Z \subsetneq X$ рассмотрим какую-нибудь ненулевую функцию $f \in \Bbbk[X]$, тождественно зануляющуюся на Z. Поскольку она цела над $\varphi^*(\Bbbk[Y])$

$$f^m + \varphi^*(g_1)\,f^{m-1} + \ldots + \varphi^*(g_{m-1})\,f + \varphi^*(g_m) = 0$$

для некоторых $g_1, \dots, g_m \in \Bbbk[Y]$. Рассмотрим такое соотношение с наименьшим возможным m. В нём $g_m \neq 0$, иначе его можно было бы сократить на f, ибо в $\Bbbk[X]$ нет делителей нуля. Вычисляя левую часть в точках $z \in Z$, видим, что $\varphi^*(g_m)|_Z = g_m|_{\varphi(Z)} \equiv 0$. Поэтому $\varphi(Z) \subset V(g_m) \subsetneq Y$ является собственным замкнутым подмножеством. □

16.5.4. Нормальные многообразия. Аффинное алгебраическое многообразие Y называется *нормальным*, если оно неприводимо и его координатная алгебра $\Bbbk[Y]$ целозамкнута в поле рациональных функций $\Bbbk(Y) = Q_{\Bbbk[Y]}$, т. е. является *нормальным кольцом* в смысле опр. 15.2 на стр. 236. Например, все аффинные многообразия с факториальными координатными алгебрами, в частности, все аффинные пространства[2] $\mathbb{A}^n$ нормальны.

Лемма 16.4

Всякий сюрьективный конечный морфизм $\varphi : X \to Y$ в нормальное многообразие Y открыт[3] и сюрьективно отображает каждую неприводимую компоненту X на Y.

Доказательство. Вложение $\varphi^* : \Bbbk[Y] \hookrightarrow \Bbbk[X]$ позволяет рассматривать $\Bbbk[Y]$ как подалгебру в $\Bbbk[X]$. Открытость морфизма φ означает, что образ каждого главного открытого множества из X содержит вместе с каждой точкой какую-нибудь её главную открытую окрестность в Y, т. е. для любой функции $f \in \Bbbk[X]$ и каждой точки $p \in X$, в которой $f(p) \neq 0$, мы должны указать такую функцию $a \in \Bbbk[Y]$, что $\varphi(p) \in \mathcal{D}(a) \subset \varphi(\mathcal{D}(f))$. Для этого рассмотрим отображение

$$\psi = \varphi \times f : X \to Y \times \mathbb{A}^1\,, \quad p \mapsto \big(\varphi(p), f(p)\big)\,.$$

Его гомоморфизм поднятия $\psi^* : \Bbbk[Y \times \mathbb{A}^1] = \Bbbk[Y][t] \to k[X]$ вычисляет полиномы от t с коэффициентами в $\Bbbk[Y]$ на элементе $f \in \Bbbk[X]$. По сл. 15.4 минимальный многочлен μ_f элемента f над полем $\Bbbk(Y)$ лежит в $\Bbbk[Y]$. Поэтому гомоморфизм ψ^* представляет собою факторизацию по главному идеалу $(\mu_f) = \ker\psi^*$. Мы заключаем, что морфизм ψ конечен и сюрьективно отображает X

---

[1] Ср. с доказательством лем. 15.1 на стр. 230.

[2] Включая точку $\mathbb{A}^0 = \mathrm{Spec_m}\,\Bbbk$.

[3] Т. е. $\varphi(U)$ открыто в Y для любого открытого $U \subset X$.

на гиперповерхность, заданную в $Y \times \mathbb{A}^1$ уравнением $\mu_f(y;t) = t^m + a_1(y)\, t^{m-1} + \dots + a_m(y) = 0$, а морфизм φ является композицией ψ и проекции $Y \times \mathbb{A}^1 \twoheadrightarrow Y$. Образ $\varphi(\mathcal{D}(f)) \subset Y$ состоит из всех таких точек $y \in Y$, что у многочлена $\mu_f(y;t) \in \Bbbk[t]$ есть ненулевой корень. Поскольку над точкой $\varphi(p) \in Y$ многочлен $\mu_f(\varphi(p);t) \in \Bbbk[t]$ имеет ненулевой корень $t = f(p)$, хоть один из коэффициентов, пусть это будет a_i, отличен от нуля в точке $\varphi(p)$. Над всеми точками $q \in \mathcal{D}(a_i) \subset Y$ коэффициент $a_i(q)$ тоже отличен от нуля, а значит, у многочлена $\mu_f(q;t) \in \Bbbk[t]$ также есть ненулевой корень. Поэтому все эти точки q лежат в образе множества $\mathcal{D}(f)$, т. е. $\varphi(p) \in \mathcal{D}(a_i) \subset \varphi(\mathcal{D}(f))$, как и требовалось.

Что касается ограничения φ на неприводимые компоненты $X_i \subset X$, то для каждого i множество $U_i = X \smallsetminus \bigcup_{\nu \neq i} X_\nu = X_i \smallsetminus \bigcup_{\nu \neq i} (X_i \cap X_\nu)$ открыто в X и плотно в X_i. Поскольку $\varphi(U_i)$ открыто, а Y неприводимо, $\varphi(U_i)$ плотно в Y, откуда $\varphi(X_i) = \overline{\varphi(U_i)} = Y$. □

Задачи для самостоятельного решения к §16

Задача 16.1. Пусть поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, и многочлен $f \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ тождественно зануляется на неприводимой гиперповерхности $V(g) \subset \mathbb{A}^n$. Покажите, что $g \mid f$ в $\Bbbk[x_1, \dots, x_n]$.

Задача 16.2. Пусть $J = (xy, yz, zx) \subset \Bbbk[x, y, z]$. Опишите $V(J) \subset \mathbb{A}^3$ и $I(V(J)) \subset \Bbbk[x, y, z]$. Можно ли задать многообразие $V(J)$ двумя полиномиальными уравнениями?

Задача 16.3. Найдите какой-нибудь многочлен $f \in I(V(J)) \smallsetminus J$ для идеала

$$J = (x^2 + y^2 - 1, y - 1) \subset \Bbbk[x, y]\,.$$

Задача 16.4. Опишите $V(J) \subset \mathbb{A}^3$ и $I(V(J)) \subset \Bbbk[x, y, z]$ для идеалов
а) $J = (xy, (x - y)z)$ б) $J = (xy + yz + zx, x^2 + y^2 + z^2)$.

Задача 16.5. Пусть известны системы уравнений, задающих аффинные алгебраические многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ и $Y \subset \mathbb{A}^m$. Напишите систему уравнений, задающую $X \times Y \subset \mathbb{A}^{n+m}$.

Задача 16.6. Докажите, что произведение неприводимых многообразий неприводимо.

Задача 16.7. Докажите, что максимальный спектр конечномерной[1] $\Bbbk$-алгебры конечен, а любой конечный морфизм имеет конечные слои.

Задача 16.8. Приведите пример регулярного не конечного морфизма с конечными слоями.

Задача 16.9. Пусть $f \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ и $\deg f > 0$. При каком условии на вектор

$$v = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 1)$$

параллельная проекция гиперповерхности $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ вдоль v на гиперплоскость $x_n = 0$ является: а) доминантной б) конечной в) сюрьективной?

Задача 16.10. Докажите, что над алгебраически замкнутым полем проекция аффинной гиперповерхности $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ из любой точки $p \notin V(f)$ на любую гиперплоскость $H \not\ni p$ доминантна.

Задача 16.11. Покажите, что образ доминантного морфизма содержит открытое плотное множество.

[1] Как векторное пространство $\Bbbk$.

Задача 16.12. Покажите, что открытое подмножество U аффинного многообразия X является его аффинным подмногообразием[1] тогда и только тогда, когда для некоторых $f_1, \dots, f_m \in \Bbbk[U]$, порождающих единичный идеал в кольце $\Bbbk[U]$, каждое из главных открытых подмножеств $U_i = \mathcal{D}\left(f_i\right)$ является аффинным многообразием с координатным кольцом $\Bbbk[U_i]$.

Задача 16.13. Пусть $f \in \Bbbk(X)$. Покажите, что рациональная функция $f\colon\ \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{A}^1, p \mapsto f(p)$, непрерывна в топологии Зарисского.

Задача 16.14. Найдите $\mathrm{Dom}(f)$ и выясните, лежит ли f в $\Bbbk[X]$, для функции

а) $f = (1-y)/x$ на $V(x^2+y^2-1) \subset \mathbb{A}^2$

б) $f = y/x$ на $V(x^3+x^2-y^2) \subset \mathbb{A}^2$

в) $f = x_1/x_3$ на $X = V(x_1x_2 - x_3x_4) \subset \mathbb{A}^4$.

Задача 16.15 (фактор по конечной группе). Пусть конечная группа G действует регулярными автоморфизмами на аффинном алгебраическом многообразии X над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ с $\mathrm{char}\,\Bbbk = 0$. Обозначим через $R = \Bbbk[X]^G \subset \Bbbk[X]$ подалгебру G-инвариантов.

а) Покажите, что $\Bbbk$-линейный оператор $\natural\colon\ \Bbbk[X] \twoheadrightarrow R,\ f \mapsto f^\natural \overset{\text{def}}{=} |G|^{-1}\sum_{\sigma\in G}\sigma f$ таков, что $f^\natural \in R$ для всех $f \in \Bbbk[X]$, $h^\natural = h$ для всех $h \in R$, а $(fh)^\natural = f^\natural h$ для всех $f \in \Bbbk[X]$ и $h \in R$.

б) Выведите из этого, что алгебра R конечно порождена и приведена.

в) Постройте такие аффинное алгебраическое многообразие X/G и конечную регулярную сюрьекцию $\pi\colon\ X \twoheadrightarrow X/G$, слоями которой являются в точности G-орбиты, что для любого постоянного на каждой G-орбите регулярного морфизма $\varphi\colon\ X \to Y$ аффинных многообразий существует единственный такой регулярный морфизм $\psi\colon\ X/G \to Y$, что $\psi\circ\pi = \varphi$.

г) Опишите явными уравнениями в подходящем аффинном пространстве фактор $\mathbb{C}^2/G$, где $G = \mathbb{Z}/(n)$ действует на $\mathbb{C}^2$ по правилу $[k]_n\colon\ (x,y) \mapsto (e^{2\pi ik/n}x, e^{2\pi ik/n}y)$.

Задача 16.16. Докажите, что для кольца A непрерывных функций со значениями в $\mathbb{R}$ или в $\mathbb{C}$ на компактном хаусдорфовом топологическом пространстве X отображение

$$X \to \mathrm{Spec}_m A\,, \quad x \mapsto \ker \mathrm{ev}_x\,,$$

биективно и отождествляет топологию Зарисского на $\mathrm{Spec}_m A$ с исходной топологией на X.

[1] Т. е. существует аффинное многообразие Y и регулярный морфизм $Y \hookrightarrow X$ гомеоморфно отображающий Y на U.

§17. Алгебраические многообразия

Всюду в этом параграфе мы по умолчанию считаем основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнутым.

17.1. Определения и примеры. В дифференциальной геометрии и топологии гладкие и топологические многообразия определяются как топологические пространства, каждая точка которых имеет специальную открытую окрестность — *локальную карту*, гомеоморфную *стандартной модели* — пространству $\mathbb{R}^n$, причём любые две локальных карты регулярным образом согласованы на их пересечении в том смысле, что замена координат на пересечении осуществляется *регулярным* — непрерывным или гладким (в зависимости от того, какие многообразия рассматриваются) гомеоморфизмом двух открытых областей в $\mathbb{R}^n$.

Алгебраические многообразия определяются аналогичным образом, только в качестве стандартных локальных карт допускаются произвольные[1] аффинные алгебраические многообразия, а регулярность согласования двух таких карт на их пересечении означает, что переход от одной карты к другой задаётся рациональными функциями. Точные определения таковы.

Алгебраической аффинной картой на топологическом пространстве X называется гомеоморфизм $\varphi_U : X_U \xrightarrow{\sim} U$, где X_U — аффинное алгебраическое многообразие, рассматриваемое с топологией Зарисского, а $U \subset X$ — открытое подмножество, рассматриваемое с индуцированной из X топологией. Две алгебраических аффинных карты $\varphi_U : X_U \xrightarrow{\sim} U$ и $\varphi_W : X_W \xrightarrow{\sim} W$ на X называются *совместимыми*, если *гомеоморфизм склейки*

$$\varphi_{WU} \overset{\text{def}}{=} \varphi_W^{-1} \circ \varphi_U\big|_{\varphi_U^{-1}(U\cap W)} : \varphi_U^{-1}(U\cap W) \xrightarrow{\sim} \varphi_W^{-1}(U\cap W)\,,$$

который отождествляет между собою лежащие в аффинных алгебраических многообразиях X_U и X_W прообразы пересечения $U \cap W$, регулярен в том смысле, что его гомоморфизм поднятия

$$\varphi_{WU}^* : \Bbbk\left[\varphi_W^{-1}(U\cap W)\right] \xrightarrow{\sim} \Bbbk\left[\varphi_U^{-1}(U\cap W)\right]\,,\quad f \mapsto f \circ \varphi_{WU}\,,$$

является изоморфизмом алгебры регулярных на $\varphi_U^{-1}(U\cap W)$ рациональных функций на X_U с алгеброй регулярных на $\varphi_W^{-1}(U\cap W)$ рациональных функций на X_W. Открытое покрытие $X = \bigcup U_\nu$ попарно совместимыми алгебраическими картами называется *алгебраическим атласом* на X. Два алгебраических атласа называются *эквивалентными*, если их объединение также является алгебраическим атласом. Топологическое пространство X, с зафиксированным на нём классом эквивалентных алгебраических атласов называется *алгебраическим многообразием*. Алгебраические многообразия, обладающие конечным атласом, называются многообразиями *конечного типа*.

Пример 17.1 (проективные пространства)

Проективное пространство[2] $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}\left(\Bbbk^{n+1}\right)$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$ обладает алгебраическим атласом из $n+1$ стандартных аффинных карт

$$U_i = U_{x_i} = \{(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \mid x_i \neq 0\}\,,\quad 0 \leqslant i \leqslant n\,.$$

Обозначим через $X_i \simeq \mathbb{A}^n$ аффинное пространство, координаты в котором будем записывать как[3] $t_i = (t_{i,0}, \ldots, t_{i,i-1}, t_{i,i+1}, \ldots, t_{i,n})$. Отображение

$$\varphi_i : X_i \xrightarrow{\sim} U_i\,,\quad t_i \mapsto (t_{i,0} : \ldots : t_{i,i-1} : 1 : t_{i,i+1} : \ldots : t_{i,n})\,, \tag{17-1}$$

[1] В том числе не гладкие — такие, как крест $\mathrm{Spec_m}\,(\Bbbk[x,y]/(xy))$.

[2] См. n° 13.4 на стр. 241 части I.

[3] Первый индекс i является номером карты, а сами координаты $t_{i,\nu}$ в i-той карте нумеруются вторым индексом $\nu \neq i$, $0 \leqslant \nu \leqslant n$.

биективно, и прообраз $\varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \subset X_i$ представляет собою главное открытое множество

$$\mathcal{D}(t_{i,j}) = \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} \Bbbk[t_{i,j}^{-1}, t_{i,0}, \dots, t_{i,i-1}, t_{i,i+1}, \dots, t_{i,n}] .$$

Отображение склейки $\varphi_{ji} = \varphi_j^{-1}\varphi_i : \mathcal{D}(t_{i,j}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}(t_{j,i})$ действует по формуле $t_i \mapsto t_j / t_{i,j}$ и является изоморфизмом аффинных алгебраических многообразий.

Упражнение 17.1. Убедитесь в этом.

Поэтому перенос топологии Зарисского с $X_i \simeq \mathbb{A}^n$ на U_i посредством биекции (17-1) задаёт на пересечениях $U_i \cap U_j$ согласованные индуцированные топологии и корректно наделяет $\mathbb{P}_n$ топологией, в которой все отображения (17-1) становятся гомеоморфизмами.

Пример 17.2 (грассманианы)
Напомню[1], что точками грассманиана $\operatorname{Gr}(k,m)$ являются k-мерные векторные подпространства в координатном векторном пространстве $\Bbbk^m$. Иначе их можно воспринимать как орбиты матриц ранга k из k строк ширины m под действием полной линейной группы $\operatorname{GL}_k(\Bbbk)$ левыми умножениями[2]. При этом подпространству $W \subset \Bbbk^n$ отвечает орбита матрицы, по строкам которой записаны координаты векторов какого-нибудь базиса пространства W в стандартном базисе пространства $\Bbbk^m$, а действие $\operatorname{GL}_k(\Bbbk)$ заключается в замене базиса в W. Грассманиан $\operatorname{Gr}(k,m)$ покрывается $\binom{m}{k}$ стандартными аффинными картами[3]

$$U_I = \{x \in \operatorname{Mat}_{k\times m}(\Bbbk) \mid \det x_I \neq 0\} ,$$

где $I = (i_1, \dots, i_k)$, $1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant m$ пробегает строго возрастающие наборы из k индексов, а $x_I \subset x$ — подматрица, образованную столбцами с номерами из I. Обозначим через $X_I \simeq \operatorname{Mat}_{k\times(m-k)}(\Bbbk) \simeq \mathbb{A}^{k(m-k)}$ аффинное пространство всех матриц из k строк ширины $m-k$ и будем нумеровать столбцы этих матриц индексами ν из дополнительного к I набора $\overline{I} = \{1,\dots,m\} \smallsetminus I$. Отображение $\varphi_I : X_I \xrightarrow{\sim} U_I$, превращающее $k\times(m-k)$-матрицу $t \in X_I$ в $k\times m$-матрицу $\varphi_I t$ получающуюся из t вставкой единичной $k\times k$-матрицы в столбцы с номерами из I, биективно, и $\varphi_I^{-1}(U_I \cap U_J) = \mathcal{D}(\det \varphi_I(t)_J)$ является главным открытым подмножеством в X_I.

Упражнение 17.2. Убедитесь, что отображение $\varphi_J^{-1}\varphi_I : \mathcal{D}(\det(\varphi_I t)_J) \to \mathcal{D}(\det(\varphi_J t)_I)$ действует по формуле $t \mapsto ((\varphi_I t)_J^{-1} \varphi_I t)_{\overline{J}}$ и является изоморфизмом аффинных алгебраических многообразий.

Отсюда, как и в предыдущем примере, мы заключаем, что грассманиан $\operatorname{Gr}(k,n)$ является алгебраическим многообразием конечного типа. Отметим, что $\operatorname{Gr}(1, n+1) = \mathbb{P}_n$.

Пример 17.3 (прямое произведение многообразий)
Структура алгебраического многообразия на прямом произведении алгебраических многообразий X и Y задаётся атласом, состоящим из всех попарных произведений $U\times W$ аффинных карт $U \subset X$ и $W \subset X$ на X, Y.

17.1.1. Структурный пучок и регулярные морфизмы. Функция $f : X \to \Bbbk$ называется *регулярной* в точке p алгебраического многообразия X, если существуют такие аффинная карта $\varphi_U : X_U \xrightarrow{\sim} U$ и рациональная функция $\tilde f \in \Bbbk(X_U)$, что $p \in U$, $\varphi_U^{-1}(p) \in \operatorname{Dom} \tilde f$ и $\tilde f(x) = \varphi_U^* f(x)$

[1] См. n° 6.4 на стр. 93.
[2] См. n° 6.4.3 на стр. 94.
[3] См. n° 6.4.5 на стр. 95.

для всех $x \in \operatorname{Dom} \tilde{f}$. Функции $U \to \Bbbk$ на открытом подмножестве $U \subset X$, регулярные в каждой точке $p \in U$, образуют коммутативное кольцо, которое обозначается $\mathcal{O}_X(U)$ и называется кольцом *локальных регулярных функций* на U. Сопоставление $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)$ является пучком[1] $\Bbbk$-алгебр на топологическом пространстве X. Он называется *структурным пучком* алгебраического многообразия X.

Отображение алгебраических многообразий $\varphi : X \to Y$ называется *регулярным*, если для каждой точки $x \in X$ и любой локальной регулярной функции $f \in \mathcal{O}_Y(W)$, определённой в какой-либо окрестности $W \ni \varphi(x)$, существует такая окрестность $U \subset \varphi^{-1}(W)$ точки x, что $\varphi^*(f) \in \mathcal{O}_X(U)$. Иными словами, над каждым открытом $U \subset Y$ гомоморфизм поднятия должен переводить локальные регулярные функции на U в локальные регулярные функции на $\varphi^{-1}(U)$, т. е. быть гомоморфизмом $\varphi^* : \mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X\left(\varphi^{-1}(U)\right)$. Например, множество регулярных морфизмов $X \to \mathbb{A}^1$ совпадает с $\mathcal{O}_X(X)$.

Упражнение 17.3. Покажите, что для каждой аффинной карты $\varphi_U : X_U \xrightarrow{\sim} U$ гомоморфизм подъёма $\varphi_U^* : \mathcal{O}_X(U) \xrightarrow{\sim} \Bbbk[X_U]$ отождествляет кольцо локальных регулярных на U функций с координатной алгеброй аффинного многообразия X_U.

17.1.2. Замкнутые подмногообразия. Каждое замкнутое подмножество Z алгебраического многообразия X имеет естественную структуру алгебраического многообразия. А именно, для любой аффинной карты $\varphi_U : X_U \xrightarrow{\sim} U$ прообраз пересечения $\varphi_U^{-1}(Z \cap U)$ является замкнутым подмножеством в X_U, т. е. аффинным алгебраическим многообразием с координатным кольцом $\Bbbk[X_U]/\varphi_U^* I(Z \cap U) \simeq \mathcal{O}_X(U)/I(Z \cap U)$, где идеал $I(Z \cap U) \subset \mathcal{O}_X(U)$ состоит из всех локальных регулярных на U функций[2], тождественно зануляющихся на $Z \cap U$. Аффинные карты

$$\varphi_U^{-1}(Z \cap U) \xrightarrow{\sim} Z \cap U \subset Z$$

образуют алгебраический атлас на Z. Сопоставление $U \mapsto I(Z \cap U)$ является подпучком идеалов в структурном пучке $\Bbbk$-алгебр $\mathcal{O}_X$. Он называется *пучком идеалов* замкнутого подмногообразия $Z \subset X$ и обозначается $\mathcal{I}_Z \subset \mathcal{O}_X$. В этой ситуации пишут, что $Z = V\left(\mathcal{I}_Z\right)$.

Регулярный морфизм $\varphi : X \to Y$ называется *замкнутым вложением*, если его образ $\varphi(X)$ является замкнутым подмногообразием в Y и $\varphi : X \xrightarrow{\sim} \varphi(X)$ является изоморфизмом алгебраических многообразий. В частности, алгебраическое многообразие X тогда и только тогда допускает замкнутое вложение в аффинное пространство, когда оно является аффинным алгебраическим многообразием в смысле n° 16.1 на стр. 239, т. е. является множеством нулей системы полиномиальных уравнений в аффинном пространстве.

Пример 17.4 (семейства подмногообразий)
Каждый регулярный морфизм $\pi : X \to Y$ может восприниматься как семейство замкнутых подмногообразий $X_y = \pi^{-1}(y) \subset X$, параметризованное точками $y \in Y$. Если $\pi : X \to Y$, $\pi' : X' \to Y$ — два семейства с одной и той же базой, то регулярный морфизм $\varphi : X \to X'$ называется *морфизмом семейств*[3], если он переводит X_y в X'_y для каждого $y \in Y$, т. е. если $\pi = \pi' \circ \varphi$. Семейство $\pi : X \to Y$ называется *постоянным* или *тривиальным*, если оно изоморфно над Y прямому произведению $\pi_Y : X_0 \times Y \to Y$ для некоторого многообразия X_0.

[1] См. прим. 13.8 на стр. 193.
[2] Ср. с упр. 17.3.
[3] Или *морфизмом над* Y.

17.1.3. Отделимость. Стандартный атлас на $\mathbb{P}_1$ состоит из двух карт[1] $\varphi_i : \mathbb{A}^1 \xrightarrow{\sim} U_i$, $i = 0, 1$. Пересечение $U_0 \cap U_1$ видно внутри каждой карты как дополнение к началу координат:

$$\varphi_0^{-1}(U_0 \cap U_1) = \varphi_1^{-1}(U_0 \cap U_1) = \mathbb{A}^1 \smallsetminus \{O\} = \{t \in \mathbb{A}^1 \mid t \neq 0\}\,.$$

Карты склеены по этому пересечению посредством отображения склейки

$$\varphi_{01} : t \mapsto 1/t\,. \tag{17-2}$$

Если вместо этого отображения воспользоваться тождественным отображением

$$\tilde{\varphi}_{01} : t \mapsto t\,, \tag{17-3}$$

получится другое многообразие — «прямая с раздвоенной точкой»:

————:———— .

Такая патология называется *неотделимостью*. Она возникла потому, что правило склейки (17-3) не замкнуто и продолжается по непрерывности с $\mathbb{A}^1 \smallsetminus \{O\}$ на всё $\mathbb{A}^1 = \overline{\mathbb{A}^1 \smallsetminus \{O\}}$. Говоря более формально, включения $U_0 \hookleftarrow U_0 \cap U_1 \hookrightarrow U_1$ задают вложение $U_0 \cap U_1 \hookrightarrow U_0 \times U_1$, образ которого является пересечением аффинной карты $U_0 \times U_1 \subset X \times X$ с диагональю

$$\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\} \subset X \times X\,.$$

Правило (17-2) задаёт вложение $(\mathbb{A}^1 \smallsetminus O) \hookrightarrow \mathbb{A}^2$ по формуле $t \mapsto (t, t^{-1})$ и таким образом отождествляет пересечение $U_0 \cap U_1 \simeq \left(U_0 \times U_1\right) \cap \Delta$ с гиперболой $xy = 1$, которая является *замкнутым* подмножеством в $U_0 \times U_1 \simeq \mathbb{A}^2$, тогда как правило (17-3) задаёт вложение $(\mathbb{A}^1 \smallsetminus O) \hookrightarrow \mathbb{A}^2$ по формуле $t \mapsto (t, t)$, и его образ не замкнут в $\mathbb{A}^2$.

Алгебраическое многообразие X называется *отделимым*, если для любой пары аффинных карт U, W на X образ канонического вложения $U \cap W \hookrightarrow U \times W$ замкнут, или, что то же самое, если диагональ $\Delta \subset X \times X$ замкнута в $X \times X$.

Например, $\mathbb{A}^n$ и $\mathbb{P}_n$ отделимы, поскольку диагонали в $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$ и в $\mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n$ задаются, соответственно, уравнениями $x_i = y_i$ и $x_i y_j = x_j y_i$. Замкнутое подмногообразие $X \subset Y$ отделимого многообразия Y тоже отделимо, ибо диагональ в $X \times X$ является прообразом диагонали в $Y \times Y$ при вложении $X \times X \hookrightarrow Y \times Y$. В частности, всякое аффинное или проективное многообразие отделимо и имеет конечный тип.

Пример 17.5 (график морфизма)

Пусть $\varphi : X \to Y$ — регулярный морфизм. Прообраз диагонали $\Delta \subset Y \times Y$ при индуцированном морфизме $\varphi \times \mathrm{Id}_Y : X \times Y \to Y \times Y$ называется *графиком* φ и обозначается

$$\Gamma_\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}\,.$$

Если Y отделимо, то график замкнут. Например, график регулярного морфизма аффинных многообразий $\varphi : \operatorname{Spec_m}(A) \to \operatorname{Spec_m}(B)$ задаётся в $A \otimes B$ системой уравнений $1 \otimes f = \varphi^*(f) \otimes 1$, где f пробегает B.

[1] См. прим. 13.9 на стр. 243 части I.

17.1.4. Рациональные отображения. Регулярный морфизм $\varphi : U \to Y$, определённый на некотором открытом плотном подмножестве U алгебраического многообразия X, называется *рациональным отображением* из X в Y. Рациональные отображения обозначаются стрелками $\varphi : X \dashrightarrow Y$. Регулярный морфизм $\psi : W \to Y$, заданный на открытом множестве $W \supset U$ и совпадающий с φ на U, называется *продолжением* отображения $\varphi : U \to Y$. Объединение всех открытых множеств $W \supset U$, на которые продолжается φ, называется *областью определения* рационального отображения $\varphi : X \dashrightarrow Y$.

Упражнение 17.4 (квадратичная инволюция Кремоны). Покажите, что правило

$$(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0^{-1} : x_1^{-1} : x_2^{-1})$$

задаёт рациональное отображение $\varkappa : \mathbb{P}_2 \dashrightarrow \mathbb{P}_2$, определённое всюду, кроме трёх точек. Найдите эти точки и опишите образ $\varkappa$.

Рациональные отображения $\varphi : X \dashrightarrow Y$ не являются отображениями «из X» в теоретико-множественном смысле, ибо определены не везде. В частности, композиция рациональных отображений не определена, когда образ первого отображения оказывается целиком вне области определения второго. Тем не менее, рациональные отображения часто возникают и играют важную роль в алгебраической геометрии. Например, естественная проекция $\mathbb{A}(V) \dashrightarrow \mathbb{P}(V)$, переводящая точку пространства $\mathbb{A}(V)$, представленную вектором $v \in V$, в точку пространства $\mathbb{P}(V)$, представленную тем же самым вектором v, является сюрьективным рациональным отображением определённым всюду, кроме нуля.

17.2. Проективные многообразия. Алгебраическое многообразие X называется *проективным*, если оно допускает замкнутое вложение в проективное пространство, т. е. изоморфно замкнутому подмногообразию в $\mathbb{P}_n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Упражнение 17.5. Покажите, что множество решений системы однородных полиномиальных уравнений на однородные координаты пространства $\mathbb{P}_n$ является замкнутым подмногообразием в $\mathbb{P}_n$.

Поскольку грассманиан $\mathrm{Gr}(k, V)$ вкладывается в проективное пространство $\mathbb{P}(\Lambda^k V)$ отображением Плюккера[1] и образ этого вложения описывается однородными квадратными уравнениями[2], все грассманианы являются проективными алгебраическими многообразиями.

Упражнение 17.6. Покажите, что прямое произведение проективных многообразий проективно, и выведите из этого, что подмножество в $\mathbb{P}_{n_1} \times \ldots \times \mathbb{P}_{n_m}$, задаваемое набором однородных по координатам каждого сомножителя полиномиальных уравнений на однородные координаты, является проективными алгебраическим многообразием.

Пример 17.6 (раздутие точки в $\mathbb{P}_n$)
Прямые, проходящие через заданную точку $p \in \mathbb{P}_n$, находятся в естественной биекции с точками проективного пространства $E \simeq \mathbb{P}_{n-1}$. График инцидентности $\mathcal{B}_p = \{(q, \ell) \in \mathbb{P}_n \times E \mid q \in \ell\}$ называется *раздутием* точки $p \in \mathbb{P}_n$. Проекция $\sigma_p : \mathcal{B}_p \twoheadrightarrow \mathbb{P}_n$ биективна всюду над $\mathbb{P}_n \smallsetminus \{p\}$, однако слой $\sigma_p^{-1}(p) = \{p\} \times E \subset \mathcal{B}_p$. Он называется *исключительным дивизором*[3] в $\mathcal{B}_p$. Таким

[1] См. формулу (6-27) на стр. 93.

[2] См. формулу (6-26) на стр. 92.

[3] Вообще *дивизорами* (*Вейля*) на алгебраическом многообразии называются элементы свободной абелевой группы, порождённой неприводимыми замкнутыми подмногообразиями коразмерности 1 (размерности алгебраических многообразий обсуждаются в n° 17.5 ниже).

образом, раздутие точки p можно представлять себе как результат вклеивания проективного пространства E вместо точки p в пространство $\mathbb{P}_n$ таким образом, что при движении в направлении p вдоль прямой $\ell \subset \mathbb{P}_n$ попадаешь в точку $\ell \in E$. Вторая проекция $\varrho_E : \mathcal{B}_p \twoheadrightarrow E$ реализует многообразие $\mathcal{B}_p$ как *линейное расслоение* над проективным пространством E, слоем которого над точкой $q \in E$ служит прямая $(pq) \subset \mathbb{P}_n$. Это расслоение называется *тавтологическим* линейным расслоением над E. Покажем, что $\mathcal{B}_p$ является проективным многообразием. Для этого выберем однородные координаты на $\mathbb{P}_n$ так, чтобы точка $p = (1 : 0 : \ldots : 0)$, и отождествим E с гиперплоскостью $V(x_0) \subset \mathbb{P}_n$, сопоставляя прямой $\ell \ni p$ точку $t = \ell \cap V(x_0) = (0 : t_1 : \ldots : t_n)$. Тогда коллинеарность точек p, q, t запишется системой однородных квадратичных уравнений

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ q_0 & q_1 & \ldots & q_n \\ 0 & t_1 & \ldots & t_n \end{pmatrix} = 2\,, \quad \text{или} \quad q_i t_j = q_j t_i \quad \forall\ 1 \leqslant i < j \leqslant n$$

на пару точек $(q, t) \in \mathbb{P}_n \times E$. По упр. 17.6 множество решений таких уравнений является проективным алгебраическим многообразием.

Лемма 17.1

Каждое замкнутое подмногообразие $X \subset \mathbb{P}_n$ является множеством решений конечной системы полиномиальных уравнений на однородные координаты пространства $\mathbb{P}_n$.

Доказательство. В обозначениях из прим. 17.1 на стр. 254 пересечение $X \cap U_i$ со стандартной открытой картой $U_i \subset \mathbb{P}_n$ является множеством нулей некоторого идеала I_i в кольце многочленов от n переменных $t_{i,\nu} = x_\nu / x_i$, где $0 \leqslant \nu \leqslant n$ и $\nu \neq i$. Каждый такой многочлен f можно переписать как $\overline{f}(x_0, x_1, \ldots, x_n)/x_i^d$, где $d = \deg f$, а $\overline{f} \in \Bbbk[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ — такой однородный многочлен степени d, что $\overline{f}\left(t_{i,0}, \ldots, t_{i,i-1}, 1, t_{i,i+1}, \ldots, t_{i,n}\right) = f\left(t_{i,0}, \ldots, t_{i,i-1}, t_{i,i+1}, \ldots, t_{i,n}\right)$. Для каждого i рассмотрим какое-нибудь конечное множество образующих $f_{i,\alpha}$ идеала I_i и построим по ним однородные многочлены $\overline{f}_{i,\alpha} \in \Bbbk[x_0, x_1, \ldots, x_n]$. Покажем, что многообразие X совпадает с множеством Z решений системы однородных полиномиальных уравнений

$$x_i \cdot \overline{f}_{i,\alpha}(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0\,,$$

где $0 \leqslant i \leqslant n$ и при каждом i второй индекс α нумерует образующие $f_{i,\alpha}$ идеала I_i. Достаточно для каждого i установить равенство $Z \cap U_i = X \cap U_i$. Поскольку пересечение множества нулей однородного многочлена $x_i \cdot \overline{f}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ с картой $U_i \subset \mathbb{P}_n$ задаётся в аффинных координатах t_i на U_i уравнением $\overline{f}\left(t_{i,0}, \ldots, t_{i,i-1}, 1, t_{i,i+1}, \ldots, t_{i,n}\right) = f\left(t_{i,0}, \ldots, t_{i,i-1}, t_{i,i+1}, \ldots, t_{i,n}\right) = 0$, пересечение карты U_i с множеством общих нулей однородных многочленов $x_i \cdot \overline{f}_{i,\alpha}$, индекс i которых равен номеру карты, совпадает с $X \cap U_i$. Тем самым, $Z \cap U_i \subset X \cap U_i$ и для завершения доказательства остаётся убедиться, что каждый однородный многочлен $x_j \cdot \overline{f}_{j,\beta}$ с $j \neq i$ также зануляется на $X \cap U_i$. Но множитель x_j зануляется на гиперплоскости $V(t_{i,j}) \subset U_i$, а множитель $\overline{f}_{j,\beta}$ зануляется на дополнительном к этой гиперплоскости главном открытом множестве $\mathcal{D}(t_{i,j}) = X \cap U_i \cap U_j \subset X \cap U_i$, ибо оно содержится в пересечении $X \cap U_j$, на котором многочлен $\overline{f}_{j,\beta}$ равен нулю. □

Пример 17.7 (иллюстрация доказательства лем. 17.1)

Проективное многообразие $X = V(x_0 x_1 x_2) \subset \mathbb{P}_2$ представляет собою объединение трёх координатных прямых. В стандартных картах U_0, U_1, U_2 оно задаётся, соответственно, уравнениями

$t_{0,1}t_{0,2} = 0$, $t_{1,0}t_{1,2} = 0$, $t_{2,0}t_{2,1} = 0$. В предыдущем доказательстве этим уравнениям отвечают однородные многочлены $\overline{f}_{0,1} = x_1x_2$, $\overline{f}_{1,1} = x_0x_2$, $\overline{f}_{2,1} = x_0x_1$, а задающее X глобальное однородное уравнение $x_0x_1x_2 = 0$ имеет в левой части многочлен $x_0x_1x_2 = x_0 \cdot \overline{f}_{0,1} = x_1 \cdot \overline{f}_{1,1} = x_0 \cdot \overline{f}_{2,1}$.

17.3. Системы результатнтов. Рассматриваемые с точностью до пропорциональности ненулевые решения системы однородных полиномиальных уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_0, x_1, \dots , x_n) = 0 \\ f_2(x_0, x_1, \dots , x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_m(x_0, x_1, \dots , x_n) = 0 \, , \end{cases} \tag{17-4}$$

где каждый $f_i \in \Bbbk[x_0, x_1, \dots , x_n]$ однороден степени d_i, образуют проективное многообразие — пересечение проективных гиперповерхностей $S_i = V(f_i) \subset \mathbb{P}(V)$. Проективные гиперповерхности степени d являются точками проективного пространства $\mathbb{P}(S^dV^*)$. Наборы гиперповерхностей $(S_1, \dots , S_m)$ заданных степеней $d_1, \dots , d_m$ с непустым пересечением $\bigcap_i S_i \neq \varnothing$, составляют фигуру

$$\mathcal{R}(n + 1;\ d_1, \dots , d_m) \subset \mathbb{P}(S^{d_1}V^*) \times \dots \times \mathbb{P}(S^{d_m}V^*) \, , \tag{17-5}$$

которая называется *результантным множеством* системы (17-4). Например, когда число уравнений равно числу переменных и все уравнения линейны, система (17-4) превращается в систему однородных линейных уравнений $Ax = 0$ с квадратной матрицей $A = (a_{ij})$ и имеет ненулевое решение , если и только если $\det(a_{ij}) = 0$. Поэтому для $m = n + 1$ и $d_1 = \dots = d_{n+1} = 1$ результантное множество является проективным алгебраическим многообразием, заданным одним полиномиальным уравнением на коэффициенты $a_{i,j}$ линейных форм $f_1, \dots , f_{n+1}$.

Покажем, что результантное множество (17-5) всегда является проективным алгебраическим многообразием, т. е. задаётся конечной системой полиномиальных уравнений на коэффициенты многочленов f_i, однородных по коэффициентам каждого из многочленов и зависящих только от числа переменных и набора степеней. Для этого рассмотрим идеал

$$J = (f_1, \dots , f_m) \subset \Bbbk[x_0, x_1, \dots , x_n] \, .$$

Отсутствие у системы (17-4) ненулевых решений означает, что аффинное алгебраическое многообразие $V(J) \subset \mathbb{A}(V)$ пусто или совпадает с началом координат. В обоих случаях каждая из координатных функций x_i тождественно зануляется на $V(J)$, и по теореме Гильберта о нулях существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $x_i^m \in J$ для все i. Наоборот, если J содержит некоторую степень каждой из переменных, то система уравнений с левыми частями из идеала J включает в себя уравнения $x_0^m = x_1^m = \dots = x_n^m = 0$, имеющие только нулевое решение. Таким образом, отсутствие ненулевых решений у системы (17-4) равносильно тому, что для некоторого m идеал J содержит все x_i^m. Последнее означает, что любой многочлен, степень которого больше $(n+1)(m-1)$, лежит в J, т. е. J содержит все S^dV^* с $d \gg 0$. Пересечение $J \cap S^dV^*$ является образом линейного отображения

$$\mu_d : S^{d-d_1}V^* \oplus \dots \oplus S^{d-d_m}V^* \to S^d \, , \quad (g_1, \dots , g_m) \mapsto \sum g_\nu f_\nu \, , \tag{17-6}$$

задаваемого в стандартных базисах из мономов матрицей, ненулевые элементы которой суть коэффициенты многочленов f_ν. При $d \gg 0$ размерность левой части (17-6) ведёт себя как

$\sum_{\nu=1}^{m}\binom{n+d-d_\nu}{n} \sim \frac{m}{n!}\,d^n$ и становится больше, чем размерность правой части, ведущая себя как $\binom{n+d}{n} \sim \frac{1}{n!}\,d^n$. Для всех таких d неэпиморфность отображения (17-6), т. е. неравенство $J \cap S^dV^* \neq S^dV^*$, равносильно обнулению всех максимальных миноров матрицы μ_d.

Итак, наличие ненулевых решений у системы (17-4) эквивалентно обращению в нуль всех максимальных миноров матриц μ_d для всех таких d, что размерность левой части (17-6) не меньше, чем размерность правой. В силу нётеровости кольца многочленов, эта бесконечная система полиномиальных уравнений эквивалентна некоторой конечной подсистеме, называемой *системой результантов*.

Пример 17.8 (результант пары бинарных форм)
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ каждый однородный многочлен степени d от двух переменных $A(t_0,t_1) = a_0\,t_1^d + a_1\,t_0t_1^{d-1} + \ldots + a_{d-1}\,t_0^{d-1}t_1 + a_d\,t_0^d$ полностью раскладывается на линейные множители:

$$A(t_0,t_1) = \prod_{i=0}^{d}(\alpha_i''t_0 - \alpha_i't_1) = \prod_{i=0}^{d}\det\begin{pmatrix} t_0 & t_1\\ \alpha_i' & \alpha_i''\end{pmatrix}$$

биективно соответствующие d нулям[1] $\alpha_i = (\alpha_i' : \alpha_i'')$ многочлена A на проективной прямой $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_1(\Bbbk)$. Коэффициенты многочлена A выражаются через однородные координаты его нулей по *формуле Виета* $a_k = (-1)^{d-k}\sigma_k(\alpha',\alpha'') \overset{\text{def}}{=} (-1)^{d-k}\sum_{\#I=k}\left(\prod_{i\in I}\alpha_i'\cdot\prod_{j\notin I}\alpha_j''\right)$, где I пробегает все строго возрастающие подмножества из k индексов. В частности, a_k биоднороден бистепени $(k,d-k)$ по (α',α''). Для фиксированных степеней $m,n\in\mathbb{N}$ рассмотрим в кольце многочленов $\Bbbk[\alpha',\alpha'',\beta',\beta'']$ от четырёх наборов переменных

$$\alpha' = (\alpha_1',\ldots,\alpha_n'),\ \alpha'' = (\alpha_1'',\ldots,\alpha_n''),\ \beta' = (\beta_1',\ldots,\beta_m'),\ \beta'' = (\beta_1'',\ldots,\beta_m'')$$

произведение $R_{AB} \overset{\text{def}}{=} \prod_{i,j}\left(\alpha_i'\beta_j'' - \alpha_i''\beta_j'\right) = \prod_{j=1}^{n}A(\beta_j) = (-1)^{mn}\prod_{i=1}^{m}B(\alpha_i)$. Оно обращается в нуль , если и только если многочлены $A(t_0,t_1) = \sum_{i=0}^{n}a_i\,t_0^it_1^{n-i}$ и $B(t_0,t_1) = \sum_{j=0}^{m}b_j\,t_0^jt_1^{m-j}$ с коэффициентами $a_i = (-1)^{n-i}\sigma_i(\alpha',\alpha'')$ и $b_j = (-1)^{m-j}\sigma_j(\beta',\beta'')$ имеют общий нуль на $\mathbb{P}_1$. Многочлен $R_{A,B}$ биоднороден бистепени (mn,mn) по (α,β) и явно выражается через коэффициенты форм A, B по *формуле Сильвестра*

$$R_{AB} = \det\underbrace{\begin{pmatrix}
a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_n & & & \\
 & a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_n & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_n\\
b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_m & & & \\
 & b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_m & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_m
\end{pmatrix}}_{m+n}\begin{matrix}\left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\}m\\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\}n\end{matrix} \tag{17-7}$$

В самом деле, линейное отображение (17-6) для векторного пространства V^* с базисом t_0,t_1 переводит пару однородных многочленов (h_1,h_2) в $Ah_1 + Bh_2$. При $d = m+n-1$ оно имеет

[1] Эти нули не обязательно различны.

вид $\mu_{m+n-1} : S^{m-1}V^* \oplus S^{n-1}V^* \to S^{m+n-1}V^*$ и в стандартных базисах из мономов задаётся квадратной матрицей, транспонированной к матрице Сильвестра (17-7).

Упражнение 17.7. Убедитесь в этом.

Если точка (α, β) лежит на квадрике $\alpha_i'\beta_j'' - \alpha_i''\beta_j' = 0$, то с точностью до постоянного множителя $(\alpha_i'' t_0 - \alpha_i' t_1) = (\beta_i'' t_0 - \beta_i' t_1)$. Так как эта линейная форма делит все многочлены вида $Ah_1 + Bh_2$, образ $\operatorname{im}\mu_{m+n-1} \neq S^{m+n-1}V^*$. Поэтому определитель Сильвестра (17-6) зануляется на каждой квадрике $\alpha_i'\beta_j'' - \alpha_i''\beta_j' = 0$. По теореме о нулях, некоторая степень многочлена $R_{A,B}$ делится на произведение уравнений квадрик. В силу неприводимости этих уравнений и факториальности кольца многочленов такое возможно только когда $R_{A,B}$ делится на произведение уравнений квадрик. Сравнение степеней и коэффициента при старшем мономе показывает, что частное равно 1.

Упражнение 17.8. Убедитесь в этом.

Таким образом, для пары бинарных форм результантное многообразие задаётся одним уравнением[1] $R_{AB} = 0$ на коэффициенты многочленов A, B. Многочлен $R_{A,B}$ называется *результантом* форм A и B. Если положить $t_0 = 1$, $t_1 = x$, мы получим результант двух неоднородных многочленов $A(x)$ и $B(x)$. В предположении, что $a_0 b_0 \neq 0$, такой результант обращается в нуль , если и только если неоднородные многочлены A и B имеют общий корень в $\mathbb{A}^1 = \mathbb{P}_1 \smallsetminus \{(0 : 1)\}$.

17.4. Замкнутость проективных морфизмов. Геометрическим следствием алгебраичности результантного множества является замкнутость любого морфизма из проективного многообразия в любое отделимое алгебраическое многообразие. Неформально говоря, это означает, что проективные многообразия занимают в алгебраической геометрии примерно такое же место, как компактные многообразия в дифференциальной геометрии.

Лемма 17.2
Проекция $\pi : \mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n \twoheadrightarrow \mathbb{A}^n$ *замкнута*, т. е. переводит замкнутые множества в замкнутые.

Доказательство. Зафиксируем на $\mathbb{P}_m$ однородные координаты x, а на $\mathbb{A}^n$ — аффинные координаты t. Замкнутое подмножество $X \subset \mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n$ задаётся системой однородных по x полиномиальных уравнений $f_\nu(x, t) = 0$. Его образ $\pi(X) \subset \mathbb{A}^n$ состоит из всех точек p, при подстановке которых в эти уравнения вместо t получается имеющая ненулевое решение система однородных уравнений $f_\nu(x, p) = 0$ на x. Это означает, что коэффициенты форм $f_\nu(x, p)$, являющиеся полиномами от p, удовлетворяют системе результантных полиномиальных уравнений. □

Следствие 17.1
Если многообразие X проективно, то проекция $X \times Y \twoheadrightarrow Y$ замкнута для любого многообразия Y.

Доказательство. Ограничиваясь на аффинные карты в Y, мы можем считать Y аффинным. В этом случае $X \times Y$ является замкнутым подмногообразием в $\mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n$, и проекция $X \times Y \twoheadrightarrow Y$ является ограничением замкнутой проекции $\mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n \twoheadrightarrow \mathbb{A}^n$ на замкнутое подмножество $X \times Y \subset \subset \mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n$. □

Следствие 17.2
Если X проективно, а Y отделимо, то любой морфизм $\varphi : X \to Y$ замкнут.

[1] В прим. 17.10 на стр. 269 ниже мы обобщим этот результат на случай произвольной системы однородных полиномиальных уравнений, в которой число уравнений равно числу неизвестных.

Доказательство. Образ $\varphi(Z) \subset Y$ любого подмножества $Z \subset X$ совпадает с образом пересечения $\Gamma_\varphi \cap (Z \times Y) \subset X \times Y$ при проекции $X \times Y \twoheadrightarrow Y$, где $\Gamma_\varphi \subset X \times Y$ — график отображения $\varphi : X \to Y$. Если Z замкнуто в X, произведение $Z \times Y$ замкнуто в $X \times Y$. Если Y отделимо, график Γ_φ тоже замкнут[1]. Если X проективно, проекция $X \times Y \twoheadrightarrow Y$ замкнута и переводит замкнутое множество $\Gamma_\varphi \cap (Z \times Y) \subset X \times Y$ в замкнутое множество $\varphi(Z) \subset Y$. □

Следствие 17.3

Любое регулярное отображение из связного проективного многообразия X в аффинное многообразие стягивает X в одну точку. В частности, $\mathcal{O}_X(X) = \Bbbk$.

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для отображения $\varphi : X \to \mathbb{A}^n$. Беря композицию такого отображения с координатными функциями $x_i : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^1$, мы сводим утверждение к случаю $n = 1$. Композиция регулярного отображения $X \to \mathbb{A}^1$ с вложением $\mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}_1$ в качестве стандартной аффинной карты является регулярном несюрьективным отображением $X \to \mathbb{P}_1$. Так как его образ замкнут и связен, он является точкой. □

17.4.1. Конечные проекции. Регулярное отображение $\varphi : X \to Y$ алгебраических многообразий называется *конечным*, если прообраз $W = \varphi^{-1}(U)$ любой аффинной карты $U \subset Y$ является аффинной картой на X, и ограничение $\varphi_W : W \to U$ является конечным морфизмом аффинных многообразий[2]. Из лем. 16.3 на стр. 250 следует, что каждый конечный морфизм замкнут и ограничение конечного морфизма на замкнутое подмногообразие $Z \subset X$ также является конечным морфизмом. Более того, если X неприводимо, то собственное замкнутое подмножество $Z \subsetneq X$ переходит в собственное замкнутое подмножество $\varphi(Z) \subsetneq Y$.

Упражнение 17.9. Проверьте, что композиция конечных морфизмов конечна.

Предложение 17.1

Проекция любого проективного многообразия $X \subsetneq \mathbb{P}_n$ из любой точки $p \notin X$ на любую гиперплоскость $H \not\ni p$ является конечным морфизмом.

Доказательство. Зафиксируем стандартную аффинную карту $U \subset H$ и такие однородные координаты $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$ на $\mathbb{P}_n$, что $p = (1 : 0 : \ldots : 0)$, гиперплоскость $H = V(x_0)$ состоит из точек $q = (0 : q_1 : \ldots : q_n)$, а карта $U \subset H$ — из точек $u = (0 : u_1 : \ldots : u_{n-1} : 1)$. Пусть многообразие X задаётся в этих координатах системой однородных уравнений $f_\nu(x) = 0$. Поскольку $p \notin X$, прообраз $Y = \pi_p^{-1}(U) \subset X$ является пересечением многообразия X с проколотым конусом C над U, образованным всеми прямыми $(pu) \subset \mathbb{P}_n$ с выколотой точкой[3] p. Конус C является аффинным алгебраическим многообразием, изоморфным аффинному пространству $\mathbb{A}^n = U \times \mathbb{A}^1$: изоморфизм переводит точку $(u, t) \in U \times \mathbb{A}_1$ в точку $x = tp + u \in \mathbb{P}_n$. Пересечение $Y = C \cap X$ задаётся в координатах (u, t) уравнениями

$$f_\nu(tp + u) = \alpha_0^{(\nu)}(u)\, t^m + \alpha_1^{(\nu)}(u)\, t^{m-1} + \ldots + \alpha_m^{(\nu)}(u) = 0\,, \tag{17-8}$$

и является аффинным алгебраическим многообразием с координатной алгеброй

$$\Bbbk[Y] = \Bbbk[u_1, \ldots, u_{n-1}]/I\,,$$

[1] См. прим. 17.5 на стр. 257.
[2] См. n° 16.5.3 на стр. 250.
[3] Т. е. аффинными прямыми $u + pt$, $t \in \Bbbk$.

где идеал I порождается многочленами $f_\nu(tp+u)$ из левых частей уравнений (17-8). Покажем, что алгебра $\Bbbk[Y]$ цела над подалгеброй $\Bbbk[U] = \Bbbk[u_1, \dots, u_{n-1}]$. Для этого достаточно найти в идеале I приведённый многочлен от t с коэффициентами из $\Bbbk[U]$ — тогда класс $t \pmod I$, являющийся его корнем, будет цел над $\Bbbk[U]$. Наличие в I такого многочлена равносильно тому, что идеал, порождённый в $\Bbbk[U]$ старшими коэффициентами $\alpha_0^{(\nu)}(u)$ всех уравнений (17-8), содержит единицу. По теореме Гильберта это означает отсутствие у многочленов $\alpha_0^{(\nu)}(u)$ общих нулей в U. Но если такой общий нуль u_0 имеется, то однородные версии уравнений (17-8)

$$f_\nu(\vartheta_0\, p + \vartheta_1\, u_0) = \alpha_0^{(\nu)}(u_0)\,\vartheta_0^m + \alpha_1^{(\nu)}(u_0)\,\vartheta_0^{m-1}\vartheta_1 + \ldots + \alpha_m^{(\nu)}(u_0)\vartheta_1^m = 0\,,$$

которые получаются ограничением задающих X уравнений на проективную прямую (p, u_0), имеют на этой прямой общий корень $(\vartheta_0 : \vartheta_1) = (1 : 0)$, находящийся в самой точке p, что противоречит условию $p \notin X$. □

Следствие 17.4

Каждое проективное многообразие допускает конечный сюрьективный морфизм на проективное пространство.

Следствие 17.5

Каждое аффинное многообразие X допускает конечный сюрьективный морфизм на аффинное пространство.

Доказательство. Пусть $X \subsetneq \mathbb{A}^n$. Вложим $\mathbb{A}^n$ в $\mathbb{P}_n$ в виде стандартной аффинной карты U_0, положим $H_\infty \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}_n \smallsetminus U_0$ и обозначим через $\overline{X} \subset \mathbb{P}_n$ проективное замыкание аффинного многообразия X. Проекция многообразия $\overline{X}$ из любой точки $p \in H_\infty \smallsetminus \overline{X}$ на любую гиперплоскость $L \not\ni p$ выглядит в аффинной карте U_0 как параллельная проекция многообразия $X = \overline{X} \smallsetminus H_\infty$ на гиперплоскость $U_0 \cap L = L \smallsetminus H_\infty$ в направлении вектора p и по предл. 17.1 является конечным морфизмом аффинных многообразий. Если он не сюрьективен, повторяем процедуру. □

Упражнение 17.10. Убедитесь, что если $X \neq \mathbb{A}^n$, то $\overline{X} \cap H_\infty \neq H_\infty$.

Пример 17.9 (нормализация Нётер)

Рассмотрим отличный от константы многочлен $f \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ и запишем его в виде

$$f = f_0 + f_1 + \ldots + f_d\,,$$

где каждый f_k однороден степени k. Замыкание $\overline{X}$ аффинной гиперповерхности $X = V(f) \subset \mathbb{A}^n$ в проективном пространстве $\mathbb{P}_n$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$, куда $\mathbb{A}^n$ вложено в качестве стандартной карты U_0, задаётся однородным многочленом[1]

$$\overline{f} = f_0 x_0^d + \ldots + f_{d-1} x_0 + f_d\,.$$

Бесконечно удалённая точка $p = (0 : p_1 : \ldots : p_n)$ не лежит на $\overline{X}$, если и только если направление p не является асимптотическим для аффинной гиперповерхности $V(f)$, т. е. когда $f_d(p_1, \dots, p_n) \neq 0$. Если поле $\Bbbk$ бесконечно, такая точка существует по предл. 5.4 на стр. 73. После надлежащей перенумерации координат мы можем считать, что $p = (0, p_1, \dots, p_{n-1}, 1)$. Проекция π_p из неё на гиперплоскость $x_n = 0$ выглядит в $\mathbb{A}^n$ как параллельная проекция вдоль

[1] См. n° 13.6.3 на стр. 250 части I.

вектора $(p_1, \dots, p_{n-1}, 1)$ и действует по правилу $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1 - p_1 x_n, \dots, x_{n-1} - p_{n-1} x_n, 0)$. Её гомоморфизм подъёма $\pi_p^* : \Bbbk[t_1, \dots, t_{n-1}] \to \Bbbk[x_1, \dots, x_n]/(f)$ переводит t_i в $x_i - p_i x_n$. Согласно предл. 17.1 алгебра $\Bbbk[X] = \Bbbk[x_1, \dots, x_n]/(f)$ цела[1] над $\Bbbk[t_1, \dots, t_{n-1}]$.

Упражнение 17.11. Явно предъявите уравнения целой зависимости для всех x_i.

Проекция π_p доминантна, так как $q \notin \pi_p(X)$ если и только если многочлен

$$f\left(q_1 - p_1 x_n,\ q_2 - p_2 x_n,\ \dots\ ,\ q_{n-1} - p_{n-1} x_n, x_n\right) \in \Bbbk[x_n]$$

нигде не обращается в нуль, т. е. является ненулевой константой, что означает обращение в нуль всех его коэффициентов кроме свободного члена и происходит на собственном замкнутом подмножестве в $\mathbb{A}^{n-1}$. Так проекция π_p конечна, она сюрьективна по лем. 16.3 на стр. 250. Мы заключаем, что каждая аффинная гиперповерхность над любым бесконечным полем допускает конечную сюрьективную параллельную проекцию на гиперплоскость. Этот факт известен как *лемма Нётер о нормализации*.

Упражнение 17.12. Докажите лемму Нётер прямым вычислением без привлечения лем. 16.3.

17.5. Размерность алгебраического многообразия X в точке $x \in X$ определяется как максимальное $n \in \mathbb{N}$, для которого существует цепочка неприводимых замкнутых подмногообразий

$$\{x\} = X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \dots \subsetneq X_{n-1} \subsetneq X_n \subseteq X\,, \tag{17-9}$$

и обозначается $\dim_x X$. Если многообразие X неприводимо, в максимальная цепочке (17-9) с неизбежностью $X_n = X$. Если X приводимо, размерность $\dim_x X$ равна максимальной из размерностей всех проходящих через точку x неприводимых компонент многообразия X.

Упражнение 17.13. Покажите, что $\dim_x X = \dim_x U$ для всех аффинных окрестностей U точки x.

Предложение 17.2
Если многообразие Y неприводимо и имеется сюрьективный морфизм $\varphi : Y \twoheadrightarrow X$, то для любой точки $y \in Y$ выполняется неравенство $\dim_y Y \geqslant \dim_{\varphi(y)} X$.

Доказательство. Для любой цепочки (17-9) при каждом i многообразие $\varphi^{-1}(X_i) \subset Y$ имеет неприводимую компоненту Y_i, которая отображается в X_i доминантно. Они составляют цепочку $\{y\} = Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \dots \subsetneq Y_n = Y$. □

Предложение 17.3
Для любого конечного морфизма $\varphi : X \to Y$ неприводимых многообразий и любой точки $x \in X$ выполняется неравенство $\dim_x X \leqslant \dim_{\varphi(x)} Y$, равенство в котором равносильно сюрьективности φ.

Доказательство. В силу упр. 17.13 можно считать X и Y аффинными. Каждая цепочка (17-9) в X по лем. 16.3 на стр. 250 порождает цепочку строго вложенных друг в друга замкнутых неприводимых подмногообразий $\varphi(X_i)$ в Y, что даёт нужное неравенство, причём когда $\varphi(X) \neq Y$, это неравенство строгое. Если $\varphi(X) = Y$, то по предл. 17.2 имеется и противоположное неравенство. □

[1] Откуда среди прочего следует, что $\operatorname{tr}\deg \Bbbk[x_1, \dots, x_n]/(f) = n - 1$.

Следствие 17.6
В любой точке $x \in \mathbb{A}^n$ выполнено равенство $\dim_x \mathbb{A}^n = n$.

Доказательство. Так как в $\mathbb{A}^n$ имеется цепочка (17-9) из проходящих через x аффинных подпространств, $\dim_x \mathbb{A}^n \geqslant n$. Противоположное неравенство доказывается по индукции. Очевидно, что $\dim \mathbb{A}^0 = 0$. Если $\dim \mathbb{A}^{n-1} = n-1$, то беря конечную проекцию последнего отличного от $\mathbb{A}^n$ элемента максимальной цепочки (17-9), написанной для $X = \mathbb{A}^n$, на гиперплоскость в $\mathbb{A}^n$, мы заключаем из предл. 17.3, что его размерность, а значит и номер, не превосходит $n-1$. Поэтому $\dim_x \mathbb{A}^n = n$. □

Следствие 17.7
Пусть X — неприводимое аффинное многообразие и $\varphi : X \to \mathbb{A}^m$ — сюрьективный конечный морфизм. Тогда $\dim_x X = m$ в каждой точке $x \in X$, и число m не зависит от выбора φ. □

Следствие 17.8
Размерность аффинного неприводимого многообразия X равна степени трансцендентности[1] алгебры $\Bbbk[X]$ над полем $\Bbbk$.

Доказательство. Гомоморфизм подъёма конечной сюрьекции $\pi : X \twoheadrightarrow \mathbb{A}^m$ задаёт целое расширение алгебр $\pi^* : \Bbbk[u_1, \dots, u_m] = \Bbbk[\mathbb{A}^m] \hookrightarrow \Bbbk[X]$. Поэтому функции $\pi^* u_i$ образуют базис трансцендентности алгебры $\Bbbk[X]$ над полем $\Bbbk$. □

Упражнение 17.14. Докажите, что $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$ для любых неприводимых многообразий X, Y.

17.5.1. Размерности подмногообразий. Если точка x лежит сразу на нескольких неприводимых компонентах многообразия X и функция $f \in \Bbbk[X]$ тождественно обращается в ноль на одной из имеющих максимальную размерность $\dim_x X$ компонент, то гиперповерхность $V(f) \subset X$ имеет в точке x ту же размерность, что и объемлющее многообразие X. Такое возможно, только когда f делит нуль в $\Bbbk[X]$.

Предложение 17.4
Если X неприводимо, то $\dim_p V(f) = \dim_p(X) - 1$ для любой непостоянной регулярной функции $f \in \mathcal{O}_X(X)$ и любой точки $p \in V(f)$.

Доказательство. Мы можем и будем предполагать X аффинным. Случай $X = \mathbb{A}^n$ был разобран в прим. 17.9. Общий случай сводится к этому рассуждением, аналогичным использованному в доказательстве лем. 16.4 на стр. 251. Зафиксируем конечную сюрьекцию $\pi : X \twoheadrightarrow \mathbb{A}^m$ и рассмотрим отображение $\varphi = \pi \times f : X \to \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^1, x \mapsto \big(\pi(x), f(x)\big)$. В лем. 16.4 мы видели, что оно конечно и сюрьективно отображает X на аффинную гиперповерхность $V(\mu_f) \subset \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^1$ — множество нулей минимального многочлена $\mu_f(u,t) = t^n + \alpha_1(u)\, t^{n-1} + \ldots + \alpha_n(u) \in \Bbbk[u_1, \dots, u_m][t]$ функции f над полем $\Bbbk(\mathbb{A}^m)$. Гиперповерхность $V(f) \subset X$ отображается морфизмом φ в пересечение гиперповерхности $V(\mu_f)$ с аффинной гиперплоскостью $t = 0$, внутри которой это пересечение задаётся уравнением $\alpha_n(u) = 0$, т. е. является аффинной гиперповерхностью $V(a_n) \subset \mathbb{A}^m$ размерности $m - 1$. По предл. 17.3 $\dim V(f) = \dim V(a_n) = m - 1 = \dim X - 1$. □

[1] См. n° 15.4 на стр. 236.

Следствие 17.9
Для любых функций $f_1, \dots, f_m \in \Bbbk[X]$ на аффинном алгебраическом многообразии X в каждой точке $p \in V(f_1, \dots, f_m) \subset X$ выполняется неравенство $\dim_p V(f_1, \dots, f_m) \geqslant \dim_p(X) - m$. Если при каждом i класс функции f_i не делит нуль в $\Bbbk[X]/(f_1, \dots, f_{i-1})$, это неравенство превращается в равенство[1].

Предостережение 17.1. Предыдущее следствие вовсе не утверждает, что $V(f_1, \dots, f_m) \neq \varnothing$, и формально истинно при $V(f_1, \dots, f_m) = \varnothing$. Такое часто случается: например, $V(x, x+1) = \varnothing$ в $\mathbb{A}^3 = \operatorname{Spec_m} \Bbbk[x, y, z]$. Из слабой теоремы Гильберта о нулях вытекает, что $V(f_1, \dots, f_m) = \varnothing$, если и только если при некотором i класс f_i в $\Bbbk[X]/(f_1, \dots, f_{i-1})$ равен ненулевой константе, т. е. f_i обратим по модулю $(f_1, \dots, f_{i-1})$.

Предложение 17.5
Для любых аффинных многообразий $X_1, X_2 \subset \mathbb{A}^n$ в каждой точке $x \in X_1 \cap X_2$ выполняется неравенство $\dim_x(X_1 \cap X_2) \geqslant \dim_x(X_1) + \dim_x(X_2) - n$.

Доказательство. Пусть $\varphi_1 : X_1 \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ и $\varphi_2 : X_2 \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ — замкнутые вложения. Тогда $X_1 \cap X_2$ является прообразом диагонали $\Delta \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$ при отображении $\varphi_1 \times \varphi_2 : X_1 \times X_2 \hookrightarrow \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$. Внутри $X_1 \times X_2$ он задаётся n уравнениями $(\varphi_1 \times \varphi_2)^*(x_i) = (\varphi_1 \times \varphi_2)^*(y_i)$, которые являются поднятиями линейных уравнений $x_i = y_i$, задающих диагональ Δ в $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$. Остаётся применить сл. 17.9. □

Предложение 17.6
Если размерности неприводимых проективных многообразий $X_1, X_2 \subset \mathbb{P}_n$ удовлетворяют неравенству $\dim(X_1) + \dim(X_2) \geqslant n$, то $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$.

Доказательство. Пусть $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$. Рассмотрим в $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(V)$ аффинные конусы X_1', X_2'', которые заметаются одномерными векторными подпространствами в V, составляющими точки проективных многообразий X_1 и X_2. Эти конусы задаются теми же самыми уравнениями, что и многообразия X_1, X_2, только теперь эти уравнения рассматриваются как аффинные. Согласно предл. 17.5 $\dim_O(X_1' \cap X_2'') \geqslant \dim_O(X_1) + 1 + \dim_O(X_2) + 1 - n - 1 \geqslant 1$. Поэтому $X_1' \cap X_2''$ не исчерпывается точкой O. □

17.5.2. Размерности слоёв регулярных морфизмов. В алгебраической геометрии, в отличие от дифференциальной, размерность прообраза при регулярном отображении контролируется почти столь же жёстко, как в линейной алгебре.

Теорема 17.1
Для любого доминантного морфизма $\varphi : X \to Y$ неприводимых алгебраических многообразий в каждой точке $x \in X$ выполняется неравенство $\dim_x \varphi^{-1}(\varphi(x)) \geqslant \dim X - \dim Y$, и существует такое плотное открытое подмножество $U \subset Y$, что $\dim_x \varphi^{-1}(y) = \dim_x X - \dim_y Y$ для всех $y \in U$ и $x \in \varphi^{-1}(y)$.

Доказательство. Беря композицию φ с конечным сюрьективным морфизмом какой-нибудь аффинной карты $U \ni \varphi(x)$ на пространство $\mathbb{A}^m$ и заменяя X на $\varphi^{-1}(U)$, мы сводим первое утверждение теоремы к случаю $Y = \mathbb{A}^m = \operatorname{Spec_m} \Bbbk[u_1, \dots, u_m]$, $\varphi(x) = 0$. Заменяя X аффинной

[1] Последовательности функций с таким свойством называются *регулярными*

окрестностью точки x, мы можем считать X аффинным. В этом случае $\varphi^{-1}(0)$ является непустым пересечением m гиперповерхностей $V(\varphi^*(u_i)) \subset X$, и требуемое неравенство вытекает из сл. 17.9. В доказательстве второго утверждения мы также можем и будем считать оба многообразия аффинными, а морфизм φ — ограничением проекции $\pi : Y \times \mathbb{A}^m \twoheadrightarrow Y$ на замкнутое подмногообразие $X \subset Y \times \mathbb{A}^m$, как в упр. 16.16 на стр. 250. Мы собираемся применить к слоям этой проекции сл. 17.5. Для этого рассмотрим проективное замыкание $\overline{X} \subset Y \times \mathbb{P}_m$, выберем гиперплоскость $H \subset \mathbb{P}_m$ и точку $p \in \mathbb{P}_m \smallsetminus H$ так, чтобы сечение $Y \times \{p\} \subset Y \times \mathbb{P}_m$ не содержалось в $\overline{X}$. Тогда послойная проекция из p на H удовлетворяет условиям предл. 17.1 во всех слоях, располагающихся над открытым подмножеством $U \subset Y$, дополнительным к $\overline{\pi}\big((Y \times \{p\}) \cap \overline{X}\big)$, где $\overline{\pi} : Y \times \mathbb{P}_m \twoheadrightarrow Y$ — проекция вдоль $\mathbb{P}_m$. Таким образом, заменяя Y любым лежащим в U главным открытым подмножеством (которое, как и Y, тоже является аффинным алгебраическим многообразием), мы можем повторить рассуждения из сл. 17.5 одновременно во всех слоях проекции π. После конечного числа таких итераций мы получим конечный сюрьективный морфизм $\psi : X \twoheadrightarrow Y \times \mathbb{A}^n$, ограничение которого на каждый слой $\varphi^{-1}(y)$ является конечным сюрьективным морфизмом $\varphi^{-1}(y) \twoheadrightarrow \{y\} \times \mathbb{A}^n$. Конечность ψ влечёт равенство $n = \dim X - \dim Y$, а конечность его ограничений на слои — равенство $\dim_x \varphi^{-1}(y) = n$. $\square$

Следствие 17.10 (теорема Шевалле о полунепрерывности)
Для любого морфизма алгебраических многообразий $\varphi : X \to Y$ множества

$$X_k \overset{\text{def}}{=} \{\, x \in X \mid \dim_x \varphi^{-1}(\varphi(x)) \geqslant k \,\}$$

замкнуты в X при всех $k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Если $\dim Y = 0$, то теорема тривиально верна для всех X и k. Пусть теперь $\dim Y = m$ и для всех Y меньшей размерности теорема верна для всех X и k. Покажем, что она верна для Y. Можно считать X и Y неприводимыми. Если $k \leqslant \dim(X) - \dim(Y)$, то $X_k = X$ по теор. 17.1. Для $k > \dim(X) - \dim(Y)$ заменим Y на $Y' = Y \smallsetminus U$, где U взято из теор. 17.1, а X — на $X' = \varphi^{-1}(Y')$. Тогда $X_k \subset X'$, $\dim Y' < \dim Y$, и применимо индуктивное предположение. $\square$

Следствие 17.11
Для любого замкнутого морфизма $\varphi : X \to Y$ множество $Y_k \overset{\text{def}}{=} \{y \in Y \mid \dim \varphi^{-1}(y) \geqslant k\}$ замкнуто в Y при каждом $k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 17.2 (размерностный критерий неприводимости)
Если регулярный морфизм $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ сюрьективен, а все его слои неприводимы и имеют одинаковые размерности, то неприводимость Y влечёт неприводимость X.

Доказательство. Пусть $X = X_1 \cup X_2$ приводимо. Положим

$$Y_1 \overset{\text{def}}{=} \{y \in Y \mid \varphi^{-1}(y) \subset X_1\}\,, \quad Y_2 \overset{\text{def}}{=} \{y \in Y \mid \varphi^{-1}(y) \subset X_2\}\,.$$

Поскольку каждый слой φ, будучи неприводимым, целиком содержится либо в X_1, либо в X_2, мы заключаем, что $Y = Y_1 \cup Y_2$, причём оба подмножества Y_i отличны от Y, коль скоро оба подмножества X_i отличны от X. Так как Y_i совпадает с множеством таких точек в Y, над которыми слой отображения $\varphi|_{X_i} X_i \to Y$ достигает своей максимальной размерности, из сл. 17.11 вытекает, что Y_i замкнуто. Тем самым, приводимость X влечёт приводимость Y. $\square$

17.6. Размерности проективных многообразий. По предл. 17.6 всякое d-мерное неприводимое многообразие $X \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ пересекается со всеми проективными подпространствами $H \subset \mathbb{P}_n$ размерности $\dim H \geqslant n - d$. Покажем, что общее подпространство H размерности $\dim H < n - d$ не пересекается с X, и, тем самым, $\dim X$ можно охарактеризовать как наибольшее такое d, что X пересекается со всеми проективными подпространствами коразмерности d. Для этого рассмотрим грассманиан $\mathrm{Gr}(n-d, n+1) = \mathrm{Gr}(n-d, V)$, точками которого являются все $(n-d-1)$-мерные проективные подпространства $H \subset \mathbb{P}(V)$, и образуем многообразие инцидентности

$$\Gamma \overset{\text{def}}{=} \{(x, H) \in X \times \mathrm{Gr}(n-d, V) \mid x \in H\} \tag{17-10}$$

Упражнение 17.15. Убедитесь, что Γ является проективным алгебраическим многообразием.

Проекция $\pi_1 : \Gamma \twoheadrightarrow X$ сюрьективна: её слой над каждой точкой x состоит из всех проективных подпространств размерности $n-d-1$, проходящих через x, и изоморфен грассманиану $\mathrm{Gr}(n-d-1, n) = \mathrm{Gr}(n-d-1, V/\Bbbk x)$ всех векторных $(n-d-1)$-мерных подпространств в фактор пространстве $V/\Bbbk x$. По теор. 17.2 многообразие Γ неприводимо и имеет размерность $d + (n-d-1)(d+1) = (n-d)(d+1) - 1$. Образ $\pi_2(\Gamma) \subset \mathrm{Gr}(n-d, V)$ второй проекции $\pi_2 : \Gamma \to \mathrm{Gr}(n-d, V)$ состоит из всех $(n-d-1)$-мерных подпространств, пересекающих X. Это неприводимое замкнутое подмногообразие размерности, не превышающей $\dim \Gamma$ и, тем самым, строго меньшей, чем $\dim \mathrm{Gr}(n-d, V) = (n-d)(d+1)$. Поэтому множество не пересекающих X подпространств размерности $(n-d-1)$ содержит в себе открытое по Зарисскому плотное подмножество грассманиана $\mathrm{Gr}(n-d, V)$.

Соображения размерности позволяют сказать и больше. Повторяя предыдущее рассуждение для $(n-d)$-мерных подпространств H' вместо $(n-d-1)$-мерных, мы получим неприводимое проективное многообразие $\Gamma' \overset{\text{def}}{=} \{(x, H') \in X \times \mathrm{Gr}(n-d+1, V) \mid x \in H\}$ размерности $\dim X + \dim \mathrm{Gr}(n-d, n) = d + d(n-d) = d(n-d+1)$. Так как $X \cap H' \neq \varnothing$ для всех H', проекция $\pi_2 : \Gamma' \twoheadrightarrow \mathrm{Gr}(n-d+1, V)$ эпиморфна, и её общий слой[1] имеет по теор. 17.1 размерность $\dim \Gamma - \dim \mathrm{Gr}(n-d+1, n+1) = d(n-d+1) - (n-d+1)d = 0$. Это означает, что общая d-мерная плоскость H' пересекает X по конечному числу точек.

Беря одну из таких плоскостей H' и проводя внутри неё $(n-d-1)$-мерную плоскость H через одну из точек пересечения $p \in X \cap H'$, мы видим, что $H \cap X$ конечно и непусто. Это означает, что у проекции $\pi_2 : \Gamma \to \mathrm{Gr}(n-d, V)$ первого многообразия инцидентности (17-10) имеется нульмерный слой. Тем самым, минимальная размерность непустого слоя этой проекции нулевая, откуда по теор. 17.1 вытекает, что $\dim \pi_2(\Gamma) = \dim \Gamma = \dim \mathrm{Gr}(n-d, V) - 1$, т. е. пересекающие X подпространства размерности $(n-d-1)$ образуют неприводимую гиперповерхность[2] в грассманиане.

Упражнение 17.16. Выведите отсюда, что существует неприводимый многочлен от плюккеровых координат $(n-d-1)$-мерного подпространства в $\mathbb{P}_n$, обращение которого в нуль на данном подпространстве H равносильно тому, что $H \cap X \neq \varnothing$.

Проделанные рассуждения иллюстрируют стандартный метод подсчёта размерностей при помощи многообразий инцидентности, часто используемый в геометрии.

[1] Т. е. любой слой над точкой из некоего плотного открытого подмножества в грассманиане.

[2] Т. е. подмногообразие коразмерности 1.

Пример 17.10 (результант)
Фиксируем $d_0, d_1, \dots, d_n \in \mathbb{N}$ и обозначим через $\mathbb{P}_{N_i} = \mathbb{P}\left(S^{d_i}V^*\right)$ пространство проективных гиперповерхностей степени d_i в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$, как в n° 17.3 на стр. 260. Покажем, что результантное многообразие $\mathcal{R} = \{(S_0, S_1, \dots, S_n) \in \mathbb{P}_{N_0} \times \mathbb{P}_{N_1} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n} \mid \cap S_i \neq \varnothing\}$ системы из $(n+1)$ однородных полиномиальных уравнений на $n+1$ неизвестных, является неприводимой гиперповерхностью[1] в $\mathbb{P}_{N_0} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n}$. Для этого рассмотрим многообразие инцидентности

$$\Gamma \overset{\text{def}}{=} \{(S_1, \dots, S_n,\, p) \in \mathbb{P}_{N_0} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n} \times \mathbb{P}_n \mid p \in \cap S_i\}\,.$$

Упражнение 17.17. Убедитесь, что G является проективным алгебраическим многообразием.

Поскольку уравнение $f(p) = 0$ линейно по f, проективные гиперповерхности степени d_i, проходящие через заданную точку $p \in \mathbb{P}_n$, образуют гиперплоскость в пространстве $\mathbb{P}_{N_i}$. Поэтому проекция $\pi_2 : \Gamma \twoheadrightarrow \mathbb{P}_n$ сюрьективна, а все её слои являются произведениями проективных гиперплоскостей и имеют одинаковую размерность $\sum(N_i - 1) = \sum N_i - n - 1$. Поэтому Γ является неприводимым проективным многообразием размерности $\sum N_i - 1$.

Упражнение 17.18. Предъявите в $\mathbb{P}_n$ набор из $n+1$ гиперповерхностей S_i заданных степеней d_i, пересекающихся ровно в одной точке.

Из упражнения вытекает, что у проекции $\pi_1 : \Gamma \to \mathbb{P}_{N_0} \times \mathbb{P}_{N_1} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n}$ имеется нульмерный слой. Поэтому общий непустой слой тоже нульмерен, и $\dim \pi_1(\Gamma) = \dim \Gamma$. Тем самым, $\pi_1(\Gamma)$ является неприводимой гиперповерхностью в $\mathbb{P}_{N_0} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n}$.

Упражнение 17.19. Покажите, что всякое неприводимое подмногообразие коразмерности 1 в произведении проективных пространств задаётся неприводимым многочленом от однородных координат, однородным по координатам каждого из проективных пространств.

Пример 17.11 (прямые на поверхностях)
Множество всех поверхностей данной степени d в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ образует проективное пространство $\mathbb{P}_N = \mathbb{P}(S^dV^*)$ размерности $N = \frac{1}{6}(d+1)(d+2)(d+3) - 1$. Множество всех прямых в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ представляет собою грассманиан $\mathrm{Gr}(2,4) = \mathrm{Gr}(2,V)$, изоморфный гладкой четырёхмерной квадрике в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2V)$. Обозначим через $\Gamma \overset{\text{def}}{=} \{(S,\ell) \in \mathbb{P}_N \times \mathrm{Gr}(2,4) \mid \ell \subset S\}$ многообразие инцидентности между прямыми и поверхностями.

Упражнение 17.20. Убедитесь, что $\Gamma \subset \mathbb{P}_N \times \mathrm{Gr}(2,4)$ является проективным алгебраическим многообразием.

Покажем, что проекция $\pi_2 : \Gamma \twoheadrightarrow Q_P$ сюрьективна и все её слои являются проективными пространствами одинаковой размерности. Прямая ℓ, заданная уравнениями $x_0 = x_1 = 0$, лежит на поверхности $V(f)$, если и только если $f = x_2 \cdot g + x_3 \cdot h$ лежит в образе линейного отображения

$$\psi : S^{d-1}V^* \oplus S^{d-1}V^* \to S^dV^*\,,\ (g,h) \mapsto x_2g + x_3h\,,$$

который изоморфен фактору пространства $S^{d-1}V^* \oplus S^{d-1}V^*$ размерности $\frac{1}{3}d(d+1)(d+2)$ по подпространству $\ker\psi = \{(g,h) = (x_3q, -x_2q) \mid q \in S^{d-2}V^*\}$ размерности $\frac{1}{6}(d-1)d(d+1)$.

[1] Т. е. существует такой неприводимый многочлен от коэффициентов уравнений, что его обращение в нуль на наборе многочленов $f_0, f_1, \dots, f_n$ равносильно существованию ненулевого решения у системы полиномиальных уравнений $f_i(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$. Этот многочлен называется *результантом* рассматриваемой системы.

Поэтому содержащие ℓ поверхности составляют проективное пространство размерности

$$\frac{1}{6}\Big(\,2\,d(d+1)(d+2)-(d-1)d(d+1)\,\Big)-1=\frac{1}{6}\,d(d+1)(d+5)-1\,.$$

Мы заключаем, что Γ является неприводимым проективным многообразием размерности

$$\dim\Gamma=\frac{1}{6}\,d(d+1)(d+5)+3\,.$$

Проекция $\pi_1(\Gamma)\subset\mathbb{P}_N$ представляет собою множество поверхностей, содержащих хотя бы одну прямую. Из предыдущего вытекает, что это замкнутое неприводимое многообразие.

Упражнение 17.21. Для каждого $d\geqslant 3$ предъявите поверхность степени d в $\mathbb{P}_3$, содержащую конечное число прямых.

Из упражнения вытекает, что у проекции π_1 имеется непустой 0-мерный слой. Поэтому её общий непустой слой тоже нульмерен, и $\dim\pi_1(\Gamma)=\dim\Gamma$. Так как разность

$$N-\dim\Gamma=\frac{1}{6}\big((d+1)(d+2)(d+3)-d(d+1)(d+5)\big)-4=d-3\,,$$

мы заключаем, что на каждой кубической поверхности в $\mathbb{P}_3$ есть прямая, причём на общей кубической поверхности лежит конечное число прямых, а на общей поверхности степени не менее четырёх прямых вообще нет.

Задачи для самостоятельного решения к §17

Задача 17.1. Вычислите результант многочленов:

а) x^3-3x^2+2x+1 и $2x^2-x-1$ б) $2x^4-x^3+3$ и $3x^3-x^2+4$
в) $2x^3-3x^2-x+2$ и x^4-2x^2-3x+4 г*) круговых многочленов[1] Φ_n и Φ_m.

Задача 17.2. Исключите x из системы уравнений:

а) $x^2-xy+y^2-3=x^2y-xy^2-6=0$
б) $4x^2-7xy+y^2+13x-2y-3=9x^2-14xy+y^2+28x-4y-5=0$
в) $5x^2-6xy+5y^2-16=2x^2-xy+y^2-x-y-4=0\,.$

Задача 17.3 (дискриминант). *Дискриминантом* произвольного[2] многочлена

$$f(x)=a_n\prod\nolimits_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)$$

называется произведение $D(f)=a_n^{2n-2}\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2$. Выразите $D(f)$ через результант многочлена f и его производной f' и покажите, что $D(fg)=D(f)D(g)R_{f,g}^2$.

Задача 17.4. Вычислите дискриминанты многочленов: а) $\sum_{k=0}^{n}x^k$ б) $\sum_{k=0}^{n}x^k/k!$ в) x^n+a.

Задача 17.5. Обозначим через $G=\mathrm{Gr}(k+1,n+1)$ грассманиан $(k+1)$-мерных подпространств в $(n+1)$-мерном векторном пространстве V, а через $\mathcal{G}=\mathrm{Gr}\big(\binom{m+k}{k},\binom{m+n}{n}\big)$ — грассманиан

[1] См. n° 3.4.3 на стр. 53 части I.
[2] Ср. с прим. 8.8 на стр. 141 части I.

$\binom{m+k}{k}$-мерных подпространств в $\binom{m+n}{n}$-мерном векторном пространстве $S^m V$. Отображение Веронезе[1] $v_m : G \to \mathcal{G}$ сопоставляет подпространству $U \subset V$ подпространство $S^m U \subset S^m V$.

а) Покажите, что v_m — вложение, и его образ является замкнутым подмногообразием в $\mathcal{G}$.

б) Обозначим через $I_m(U) \subset S^m V^*$ пространство однородных многочленов степени m, тождественно зануляющихся на заданном $(k+1)$-мерном векторном подпространстве $U \subset V$. Найдите $\dim I_m(U)$.

Задача 17.6 (график рационального отображения). Графиком $\Gamma_\psi \subset X \times Y$ рационального отображения $\psi : X \dashrightarrow Y$, определённого на открытом плотном $U \subset X$, называется замыкание множества $\{(x, \psi(x)) \in X \times Y \mid x \in U\}$. Опишите график инволюции Кремоны из упр. 17.4 на стр. 258 и слои его проекций на сомножители.

Задача 17.7. Покажите, что изолированные точки слоёв регулярного морфизма $\varphi : X \to Y$ алгебраических многообразий заметают открытое (возможно пустое) подмножество в X.

Задача 17.8 (теорема Шевалле о конструктивности). Докажите, что образ регулярного морфизма алгебраических многообразий получается применением конечного числа операций пересечения, объединения и разности к конечному числу открытых и замкнутых подмножеств.

Задача 17.9. Покажите, что множество $(n-d)$-мерных проективных подпространств $H \subset \mathbb{P}(V)$, пересекающих произвольно заданное d-мерное проективное многообразие $X \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ по конечному множеству точек, является плотным открытым по Зарисскому подмножеством в параметризующем все $(n-d)$-мерные проективные подпространства в $\mathbb{P}(V)$ грассманиане $\mathrm{Gr}(n+1-d, V)$, и существует такое плотное открытое подмножество $U \subset \mathrm{Gr}(n+1-d, V)$, что максмальное количество точек пересечения X с $(n-d)$-мерными подпространствами достигается для всех подпространств из U.

Задача 17.10. Обозначим через $\mathcal{D}_k(m,n) \subset \mathbb{P}\big(\mathrm{Mat}_{m\times n}(\Bbbk)\big)$ проективное многообразие $m \times n$-матриц ранга $\leqslant k$. С помощью подходящего многообразия инцидентности $\Gamma = \{(L, M) \mid L \subset \ker M\}$, где L — подпространство, а M — матрица, покажите, что $\mathcal{D}_k(m,n)$ является неприводимым проективным многообразием и найдите его размерность.

Задача 17.11. Покажите, что множество поверхностей четвёртой степени в $\mathbb{P}_3$, на которых есть хоть одна прямая, образует неприводимую алгебраическую гиперповерхность в пространстве всех поверхностей четвёртой степени.

Задача 17.12. Покажите, что множество n-мерных проективных подпространств, лежащих на гладкой $(2n+1)$-мерной квадрике в $\mathbb{P}_{2n+2}$ (соотв. на гладкой $2n$-мерной квадрике в $\mathbb{P}_{2n+1}$) является неприводимым проективным многообразием (соотв. дизъюнктным объединением двух изоморфных друг другу проективных многообразий) и найдите размерности этих многообразий.

Задача 17.13. Покажите, что множество прямых, лежащих на гладкой квадрике в $\mathbb{P}_4$, является проективным алгебраическим многообразием, выясните, приводимо ли оно, и найдите его размерность.

Задача 17.14 (линейное соединение). Пусть $X, Y \subset \mathbb{P}(V)$ — алгебраические многообразия. Обозначим через $\mathcal{J}(X,Y) \subset \mathrm{Gr}(2,V)$ замыкание множества всех прямых (p,q) с $p \in X$, $q \in Y$ и $p \neq q$, а через $J(X,Y) \subset \mathbb{P}(V)$ — объединение в $\mathbb{P}(V)$ всех прямых ℓ из $\mathcal{J}(X,Y)$. Покажите, что

[1] При $k = 0$ получается вложение Веронезе $\mathbb{P}(V) \hookrightarrow \mathbb{P}(S^m V)$ из прим. 6.5 на стр. 90.

а) $J(X,Y)$ — замкнутое подмногообразие[1] в $\mathbb{P}(V)$

б) если X и Y неприводимы и $X \cap Y = \varnothing$, то $\mathcal{J}(X,Y)$ и $J(X,Y)$ тоже неприводимы, и найдите размерности этих многообразий.

Задача 17.15 (многообразие секущих). Пусть $X \subset \mathbb{P}(V)$ неприводимо. Обозначим через $\mathcal{S}(X) \subset \mathrm{Gr}(2,V)$ замыкание множества всех прямых (p,q) с $p,q \in X$ и $p \neq q$, а через $S(X) \subset \mathbb{P}(V)$ — объединение в $\mathbb{P}(V)$ всех прямых ℓ из $\mathcal{S}(X)$. Покажите, что

а) $\mathcal{S}(X)$ неприводимо и $\dim \mathcal{S}(X) = 2\dim X$

б) $S(X)$ неприводимо и $\dim S(X) \leqslant 2\dim X + 1$

в) если X — не содержащаяся в двумерной плоскости кривая, то $\dim S(X) = 3$

г) многообразие секущих кривой Веронезе[2]. в $\mathbb{P}_3$ является неприводимой поверхностью. Найдите степень этой поверхности и покажите, что для каждой не лежащей на кривой точки p существует ровно одна секущая, проходящая через p.

Задача 17.16. Покажите, что рациональные нормальные кривые[3] в $\mathbb{P}_n$ образуют открытое по Зарисскому подмножество неприводимого проективного многообразия, и найдите размерность этого многообразия.

---

[1] Оно называется *линейным соединением* многообразий X и Y, ср. с n° 13.4.6 на стр. 245 и теор. 17.8 на стр. 322 части I.

[2] См. прим. 6.5 на стр. 90.

[3] См. зад. 13.29 на стр. 254 части I.

§18. Алгебраические расширения полей

18.1. Конечные расширения. Пусть $\Bbbk \subset \mathbb{F}$ — два поля. Если $\mathbb{F}$ конечномерно как векторное пространство над $\Bbbk$, поле $\mathbb{F}$ называется *конечным расширением* поля $\Bbbk$, а размерность векторного пространства $\mathbb{F}$ над $\Bbbk$ называется *степенью* этого расширения и обозначается $\deg \mathbb{F}/\Bbbk$ или $[\mathbb{F} : \Bbbk]$.

Упражнение 18.1. Пусть расширения $\Bbbk \subset \mathbb{K} \subset \mathbb{F}$ конечны и $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{F}$ составляют базис $\mathbb{F}$ как векторного пространства над $\mathbb{K}$, а $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{K}$ — базис $\mathbb{K}$ над $\Bbbk$. Покажите, что mn произведений $f_i t_j$ образуют базис $\mathbb{F}$ над $\Bbbk$, откуда $\deg \mathbb{F}/\Bbbk = \deg \mathbb{F}/\mathbb{K} \cdot \deg \mathbb{K}/\Bbbk$.

Замечание 18.1. Если $\Bbbk$-алгебра A конечномерна как векторное пространство над $\Bbbk$, то каждый элемент $\xi \in A$ алгебраичен[1] над $\Bbbk$, ибо бесконечное множество целых неотрицательных степеней ξ^k линейно зависимо. Так как минимальный многочлен любого элемента $\xi \in A$ над полем $\Bbbk$ можно сделать приведённым, алгебра A цела[2] над $\Bbbk$. Если в A нет делителей нуля, то A является полем по предл. 15.2 на стр. 231. С другой стороны, любое конечно порождённое как $\Bbbk$-алгебра поле $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ является по сл. 15.2 на стр. 235 конечным расширением поля $\Bbbk$. В частности, любая конечно порождённая $\Bbbk$-подалгебра $\Bbbk[a_1, \dots, a_m]$ любого поля $\mathbb{F} \supset \Bbbk$ конечной степени над $\Bbbk$ тоже является полем конечной степени над $\Bbbk$, причём эта степень делит $\deg \mathbb{F}/\Bbbk$ по упр. 18.1.

18.1.1. Примитивные расширения. Для любого отличного от константы неприводимого многочлена $f \in \Bbbk[x]$ алгебра $\Bbbk[x]/(f)$ не имеет делителей нуля и n-мерна над $\Bbbk$. Поэтому она является полем. Элементы этого поля однозначно записываются в виде $b_0 + b_1\vartheta + \ldots + b_{n-1}\vartheta^{n-1}$, где $b_i \in \Bbbk$, а класс $\vartheta = [x]_f$ является корнем многочлена f. Поле $\Bbbk[x]/(f)$ называется *примитивным* расширением поля $\Bbbk$, полученным *присоединением* к полю $\Bbbk$ корня ϑ неприводимого многочлена f. В теор. 3.2 на стр. 49 части I мы видели, что для любого многочлена $f \in \Bbbk[x]$ можно последовательными примитивными расширениями получить из поля $\Bbbk$ такое поле $\mathbb{F} \supset \Bbbk$, над которым многочлен f полностью разложится в произведение линейных множителей.

Пример 18.1 (кубические расширения)

Пусть $f = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 \in \Bbbk[x]$ неприводим над $\Bbbk$. Примитивное расширение $\mathbb{K} = \Bbbk[x]/(f)$ имеет степень 3 над $\Bbbk$ и его элементы однозначно записываются в виде $b_0 + b_1\vartheta + b_2\vartheta^2$, где $b_i \in \Bbbk$, а $\vartheta \in \mathbb{K}$ означает класс $[x]_f$. Такие записи перемножаются и складываются по стандартным правилам раскрытия скобок с учётом соотношения $f(\vartheta) = 0$.

Упражнение 18.2. Пусть $\Bbbk = \mathbb{Q}$ и $f(x) = x^3 + x + 1$. Запишите $(1 + 2\vartheta)^{-1}$ и $(1 + \vartheta + \vartheta^2)^{-1}$ в виде $b_0 + b_1\vartheta + b_2\vartheta^2$.

Так как $f(\vartheta) = 0$, многочлен $f(x)$ раскладывается в $\mathbb{K}[x]$ в произведение $f(x) = (x - \vartheta)\, q(x)$, где $q(x) = x^2 + c_1x + c_2 \in \mathbb{K}[x]$ либо приводим над $\mathbb{K}$, и тогда существуют такие $\vartheta_1, \vartheta_2 \in \mathbb{K}$, что

$$q(x) = (x - \vartheta_1)(x - \vartheta_2)\,, \tag{18-1}$$

либо неприводим, и тогда разложение (18-1) имеет место над полем $\mathbb{L} = \mathbb{K}[x]/(q)$, степень которого над $\Bbbk$ равна 6. Чтобы выяснить, какой из этих двух случаев имеет место, заметим, что *дискриминант*[3]

$$D(f) = (\vartheta - \vartheta_1)^2(\vartheta - \vartheta_2)^2(\vartheta_1 - \vartheta_2)^2 = q^2(\vartheta) \cdot D(q)\,, \tag{18-2}$$

[1] См. n° 15.3 на стр. 235.

[2] См. n° 15.1 на стр. 230.

[3] См. прим. 8.8 на стр. 141 части I.

будучи симметрическим многочленом от корней, является многочленом от коэффициентов f и лежит в $\Bbbk$.

Упражнение 18.3. Убедитесь, что $D(x^2 + px + q) = p^2 - 4q$, а $D(x^3 + px + q) = -4\,p^3 - 27\,q^2$.

Приводимость q в $\mathbb{K}[x]$ равносильна тому, что $D(q) = (\vartheta_1 - \vartheta_2)^2$ является квадратом в $\mathbb{K}$. Согласно (18-2), это эквивалентно тому, что квадратом в $\mathbb{K}$ является $D(f)$. Но если $D(f) = \delta^2$ квадрат в $\mathbb{K}$, то он квадрат и в $\Bbbk$, так как в противном случае многочлен $g(x) = x^2 - D(f)$ был бы неприводим над $\Bbbk$, и квадратичное расширение $\Bbbk[x]/(g)$ поля $\Bbbk$ вкладывалось бы в $\mathbb{K}$ по правилу

$$[h]_g \mapsto h(\delta) \in \mathbb{K}\,,$$

что невозможно по упр. 18.1, ибо $\deg \mathbb{K}/\Bbbk = 3$. Мы заключаем, что неприводимый кубический многочлен $f \in \Bbbk[x]$ полностью разлагается на линейные множители над кубическим расширением $\Bbbk[x]/(f)$ если и только если $D(f)$ квадрат в $\Bbbk$.

Лемма 18.1
Любое конечное расширение $\mathbb{F} \supset \Bbbk$ можно получить в качестве верхнего этажа башни

$$\Bbbk = \mathbb{L}_0 \subset \mathbb{L}_1 \subset \ldots \subset \mathbb{L}_{k-1} \subset \mathbb{L}_k = \mathbb{F} \tag{18-3}$$

примитивных расширений $\mathbb{L}_i = \mathbb{L}_{i-1}[x]/(f_i)$, где $f_i \in \mathbb{L}_{i-1}[x]$ неприводим над $\mathbb{L}_{i-1}$.

Доказательство. Пусть поле $\mathbb{L}_i \subset \mathbb{F}$ уже построено. Если $\mathbb{L}_i \neq \mathbb{F}$, возьмём в качестве $f_{i+1} \in \mathbb{L}_i[x]$ минимальный многочлен любого элемента $\vartheta \in \mathbb{F} \smallsetminus \mathbb{L}_i$ над полем $\mathbb{L}_i$ и вложим примитивное расширение $\mathbb{L}_i[x]/(f)$ в поле $\mathbb{F}$ по правилу $[x]_f \mapsto \vartheta$. Обозначим через $\mathbb{L}_{i+1} \supsetneq \mathbb{L}_i$ образ этого вложения. Поскольку степень поля $\mathbb{F}$ над $\mathbb{L}_{i+1}$ строго меньше, чем над $\mathbb{L}_i$, через конечное число шагов оно исчерпается. $\square$

18.1.2. Сепарабельность. Напомню[1], что многочлен $f \in \Bbbk[x]$ называется *сепарабельным*, если у него нет кратных корней ни в каком расширении поля $\Bbbk$, что равносильно равенству $\text{нод}(f, f') = 1$, проверяемому при помощи алгоритма Евклида над самим полем $\Bbbk$. Алгебраическое расширение[2] $\mathbb{F} \supset \Bbbk$ называется *сепарабельным*, если минимальный над $\Bbbk$ многочлен $\mu_\vartheta \in \Bbbk[x]$ любого элемента $\vartheta \in \mathbb{F} \smallsetminus \Bbbk$ сепарабелен. В прим. 3.6 на стр. 50 части I мы видели, что все примитивные расширения простых полей $\mathbb{F}_p$ и любого поля характеристики нуль сепарабельны.

Упражнение 18.4. Пусть $\Bbbk = \mathbb{F}_p(t)$. Покажите что многочлен $f(x) = x^p - t \in \Bbbk[x]$ неприводим над $\Bbbk$ и несепарабелен.

Пример 18.2 (корни из единицы)
Корни уравнения $x^n = 1$ в произвольном поле $\Bbbk$ образуют конечную мультипликативную подгруппу, которая обозначается $\boldsymbol{\mu}_n(\Bbbk)$ и называется *группой корней n-й степени из единицы* поля $\Bbbk$. Как и всякая конечная мультипликативная подгруппа в поле, группа $\boldsymbol{\mu}_n(\Bbbk)$ циклическая[3]. Если её порядок равен n, то говорят, что поле $\Bbbk$ *содержит все* $\sqrt[n]{1}$, и буде это так, образующие группы $\boldsymbol{\mu}_n(\Bbbk) \simeq \mathbb{Z}/(n)$ называются *первообразными корнями* степени n из единицы. Всего имеется $\varphi(n)$ первообразных корней, и если $\zeta \in \Bbbk$ — один из них, все степени ζ^m с $0 \leqslant m \leqslant n-1$ различны. Поэтому следующие три условия эквивалентны:

[1]См. n° 3.3.4 на стр. 50 части I.
[2]В том числе бесконечное.
[3]См. сл. 3.3 на стр. 56 части I.

- поле $\Bbbk$ допускает расширение, содержащее все $\sqrt[n]{1}$
- многочлен $x^n - 1$ сепарабелен над $\Bbbk$
- $\operatorname{char}(\Bbbk) \nmid n$.

При их выполнении каждый многочлен $f(x) = x^n - a$ с ненулевым $a \in \Bbbk$ сепарабелен, так как $f'(x) = nx^{n-1}$ имеет единственный корень нуль, не являющийся корнем f.

Теорема 18.1 (теорема о примитивном элементе)
Всякое конечное сепарабельное расширение $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ примитивно, т. е. имеет вид $\mathbb{K} = \Bbbk[x]/(f)$, где $f \in \Bbbk[x]$ — неприводимый многочлен степени $\deg \mathbb{K}/\Bbbk$.

Доказательство. Если поле $\Bbbk$ конечно, то поле $\mathbb{K}$ тоже конечно его мультипликативная группа $\mathbb{K}^\times$ циклическая[1]. Пусть $\vartheta \in \mathbb{K}$ — её образующая. Тогда[2] $\mathbb{K} = \Bbbk[\vartheta]$.

Всюду далее мы считаем поле $\Bbbk$ бесконечным. Индукция по длине башни из лем. 18.1 сводит теорему к случаю, когда поле $\mathbb{K} = \Bbbk[\alpha, \beta] \supset \Bbbk[\alpha] \supset \Bbbk$ является башней двух примитивных расширений. Как $\Bbbk$-алгебра такое поле $\mathbb{K}$ порождается над $\Bbbk$ двумя сепарабельными алгебраическими элементами α, β. Подберём $t \in \Bbbk^\times$ так, чтобы подалгебра $\Bbbk[\vartheta] \subset \mathbb{K}$, порождённая над $\Bbbk$ элементом $\vartheta = \alpha + t\beta$, совпала с $\mathbb{K}$. При любом t элемент ϑ алгебраичен над $\Bbbk$, и алгебра $\Bbbk[\vartheta]$ является полем. Достаточно добиться того, чтобы оно содержало элемент β: тогда и $\alpha = \vartheta - t\beta$ тоже будет в нём лежать. Обозначим через $f_\alpha(x)$ и $f_\beta(x)$ минимальные многочлены элементов α и β над полем $\Bbbk$. Элемент β является общим корнем многочлена $f_\beta(x) \in \Bbbk[x]$ и многочлена $g(x) = f_\alpha(\vartheta - tx)$, коэффициенты которого лежат в зависящем от параметра t поле $\Bbbk[\vartheta]$. Рассмотрим любое поле $\mathbb{F} \supset \mathbb{K}$, над которым f_α и f_β, а с ними и g, полностью разлагаются на линейные множители. Если t таков, что β является единственным общим корнем многочленов f_β и g в поле $\mathbb{F}$, то выразив $(x - \beta) = \text{нод}(f_\beta, g)$ через многочлены f_β и g по алгоритму Евклида, мы получим искомое представление элемента β в виде рациональной функции от лежащих в $\Bbbk[\vartheta]$ коэффициентов этих многочленов. Остаётся найти такое t.

Пусть $\deg f_\alpha = m$, $\deg f_\beta = \deg g = k$. Обозначим через $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ и $\beta_1, \dots, \beta_k$ корни многочленов f_α и f_β в $\mathbb{F}$, считая, что $\alpha = \alpha_1$ и $\beta = \beta_1$. Тогда корни g суть $(\vartheta - \alpha_i)/t = \beta_1 + (\alpha_1 - \alpha_i)/t$, где $1 \leqslant i \leqslant m$. Мы хотим, чтобы

$$\beta_j \neq \beta_1 + (\alpha_1 - \alpha_i)/t \tag{18-4}$$

при всех i, j кроме $i = j = 1$. В силу сепарабельности элемента α разности $\alpha_1 - \alpha_i \neq 0$ при $i \neq 1$. Поэтому каждое неравенство (18-4), в котором $i \neq 1$, запрещает ровно одно значение $t = (\beta_j - \beta_1)/(\alpha_1 - \alpha_i)$. При $i = 1$ запреты (18-4) требуют, чтобы $\beta_1 \neq \beta_j$ при $j \neq 1$, что обеспечивается сепарабельностью β. Тем самым, исключается лишь конечное множество значений t, что доказывает теорему для бесконечного поля $\Bbbk$. □

Следствие 18.1
Если поле $\mathbb{K}$ является сепарабельным алгебраическим расширением поля $\Bbbk$ и степени всех его элементов[3] ограничены, то $\mathbb{K}$ конечно над $\Bbbk$, и $\deg \mathbb{K}/\Bbbk = \max_{\vartheta \in \mathbb{K}} \deg_{\Bbbk} \vartheta$.

---

[1] См. сл. 3.3 на стр. 56.

[2] Хотя это рассуждение не использует сепарабельности поля $\Bbbk$ напрямую, из результатов прим. 3.6 на стр. 50 части I вытекает, что каждое конечное поле сепарабельно над своим простым подполем.

[3] Напомню, что *степенью* алгебраического элемента называется степень его минимального многочлена.

Доказательство. Если $\beta \in \mathbb{K}$ не лежит в примитивном расширении $\Bbbk[\alpha] \supset \Bbbk$, порождённом каким-либо другим элементом $\alpha \in \mathbb{K}$, то $[\Bbbk[\alpha, \beta] : \Bbbk] > \deg_{\Bbbk} \alpha$, и степень примитивного элемента поля $\Bbbk[\alpha, \beta]$ строго больше $\deg \alpha$. Поэтому подполе в $\mathbb{K}$, порождённое элементом максимальной степени, совпадает со всем $\mathbb{K}$. □

18.2. Продолжение гомоморфизмов. Поскольку у полей нет ненулевых собственных идеалов, все ненулевые гомоморфизмы полей в кольца инъективны. Каждое вложение полей $\varphi : \Bbbk \hookrightarrow \mathbb{F}$ продолжается до вложения колец многочленов $\Bbbk[x] \hookrightarrow \mathbb{F}[x]$, переводящего многочлен $f \in \Bbbk[x]$ в многочлен $f^{\varphi} \in \mathbb{F}[x]$, получающийся из $f \in \Bbbk[x]$ применением φ к каждому коэффициенту f.

Лемма 18.2

Пусть $\mathbb{K} = \Bbbk[x]/(f)$ — примитивное расширение поля $\Bbbk$ степени $d = \deg f = [\mathbb{K} : \Bbbk]$, и $\varphi : \Bbbk \hookrightarrow \mathbb{F}$ — любое вложение $\Bbbk$ в произвольное поле. Вложения $\widetilde{\varphi} : \mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{F}$, совпадающие с φ на подполе $\Bbbk \subset \mathbb{K}$, находятся в канонической биекции с корнями многочлена f^{φ} в поле $\mathbb{F}$. В частности, таких вложений не более d, и их ровно d если и только если многочлен f^{φ} полностью раскладывается над $\mathbb{F}$ в произведение d попарно разных линейных множителей.

Доказательство. Каждый элемент $\alpha \in \mathbb{F}$ задаёт гомоморфизм $\varphi_{\alpha} : \Bbbk[x] \to \mathbb{F}$, $g(x) \mapsto g^{\varphi}(\alpha)$. Если α является корнем многочлена $f^{\varphi} \in \mathbb{F}[x]$, то $f \in \ker \varphi_{\alpha}$, и φ_{α} корректно факторизуется до вложения полей $\widetilde{\varphi}_{\alpha} : \Bbbk[x]/(f) \hookrightarrow \mathbb{F}$, переводящего примитивный элемент $\vartheta = [x]_f$ поля $\mathbb{K}$ в $\alpha \in \mathbb{F}$. При этом разные корни $\alpha \neq \beta$ задают разные вложения $\widetilde{\varphi}_{\alpha} \neq \widetilde{\varphi}_{\beta}$. С другой стороны, любое вложение $\widetilde{\varphi} : \mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{F}$, совпадающее с φ на подполе $\Bbbk \subset \mathbb{K}$, переводит ϑ в некоторый корень многочлена f^{φ}, так как $f^{\varphi}\big(\widetilde{\varphi}(\vartheta)\big) = \widetilde{\varphi}\big(f(\vartheta)\big) = \varphi(0) = 0$. Поэтому $\widetilde{\varphi}$ совпадает с одним из вложений $\widetilde{\varphi}_{\alpha}$. □

Лемма 18.3

Пусть алгебраическое расширение[1] $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ и вложение $\varphi : \Bbbk \hookrightarrow \mathbb{F}$ таковы, что для любого элемента $\vartheta \in \mathbb{K}$ с минимальным над $\Bbbk$ многочленом $\mu_{\vartheta} \in \Bbbk[x]$ многочлен $\mu_{\vartheta}^{\varphi} \in \mathbb{F}[x]$ полностью раскладывается в $\mathbb{F}[x]$ на линейные множители. Тогда для любого элемента $\vartheta \in \mathbb{K}$ и любого корня $\xi \in \mathbb{F}$ многочлена $\mu_{\vartheta}^{\varphi}$ существует такое совпадающее с φ на подполе $\Bbbk$ вложение $\widetilde{\varphi} : \mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{F}$, что $\widetilde{\varphi}(\vartheta) = \xi$.

Доказательство. По лем. 18.2 вложение $\varphi : \Bbbk \hookrightarrow \mathbb{F}$ продолжается до вложения $\varphi_{\xi} : \Bbbk[\vartheta] \hookrightarrow \mathbb{F}$, переводящего ϑ в ξ. Множество всех продолжений $\psi : \mathbb{L} \hookrightarrow \mathbb{F}$ отображения φ_{ξ} на всевозможные подполя $\Bbbk[\vartheta] \subseteq \mathbb{L} \subseteq \mathbb{K}$ непусто, ибо содержит φ_{ξ}, и частично упорядочено отношением $(\mathbb{L}'', \psi'') \geqslant (\mathbb{L}', \psi')$, означающим, что $\mathbb{L}'' \supseteq \mathbb{L}'$ и $\psi''|_{\mathbb{L}'} = \psi'$.

Упражнение 18.5. Убедитесь, что это полный чум[2].

Покажем, что его максимальный элемент $\psi : \mathbb{L} \hookrightarrow \mathbb{F}$ имеет область определения $\mathbb{L} = \mathbb{K}$. Если имеется элемент $\vartheta \in \mathbb{K} \smallsetminus \mathbb{L}$, то его минимальный многочлен $\mu_{\vartheta} \in \Bbbk[x]$ над полем $\Bbbk$ делится в $\mathbb{L}[x]$ на его минимальный многочлен $\mu_{\vartheta,\mathbb{L}}$ над полем $\mathbb{L}$. Коль скоро многочлен $\mu_{\vartheta}^{\varphi}$ полностью раскладывается в $\mathbb{F}[x]$ на линейные множители, его делитель $\mu_{\vartheta,\mathbb{L}}^{\varphi}$ тоже обладает этим свойством. Поэтому к примитивному расширению $\mathbb{L} \subset \mathbb{L}[\vartheta]$ применима лем. 18.2, и вложение ψ продолжается на строго большее подполе $\mathbb{L}[\vartheta] = \mathbb{L}[x]/(\mu_{\vartheta,\mathbb{L}})$. □

[1] Не обязательно конечное.

[2] См. опр. 1.3 на стр. 20 части I.

Предложение 18.1
Если расширение $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ конечно, то вложение полей $\varphi : \Bbbk \hookrightarrow \mathbb{F}$ продолжается до вложения $\psi : \mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{F}$ не более, чем $[\mathbb{K} : \Bbbk]$ различными способами. Наличие ровно $[\mathbb{K} : \Bbbk]$ продолжений равносильно тому, что расширение $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ сепарабельно и образ $\mu_\vartheta^\varphi \in \mathbb{F}[x]$ минимального над $\Bbbk$ многочлена $\mu_\vartheta \in \Bbbk[x]$ любого элемента $\vartheta \in \mathbb{K}$ полностью раскладывается в $\mathbb{F}[x]$ на линейные множители.

Доказательство. Разложим $\mathbb{K}$ в башню (18-3) примитивных расширений

$$\Bbbk = \mathbb{L}_0 \subset \mathbb{L}_1 \subset \ldots \subset \mathbb{L}_{k-1} \subset \mathbb{L}_k = \mathbb{F}, \tag{18-5}$$

где $\mathbb{L}_i = \mathbb{L}_{i-1}[\vartheta_i] \simeq \mathbb{L}_{i-1}[x]/(f_i)$ и многочлен $f_i \in \mathbb{L}_{i-1}[x]$ является минимальным над $\mathbb{L}_{i-1}$ многочленом элемента $\vartheta_i \in \mathbb{L}_i \smallsetminus \mathbb{L}_{i-1}$. Ограничения продолжающего φ вложения $\psi : \mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{F}$ на подполя $\mathbb{L}_i \subset \mathbb{K}$ образуют цепочку последовательно продолжающих друг друга вложений $\psi_i : \mathbb{L}_i \hookrightarrow \mathbb{F}$. Так как по лем. 18.2 каждый шаг этой цепочки можно осуществить не более, чем $\deg f_i = [\mathbb{L}_i : \mathbb{L}_{i-1}]$ способами, продолжающих φ вложений ψ имеется не более $\prod_i [\mathbb{L}_i : \mathbb{L}_{i-1}] = [\mathbb{K} : \Bbbk]$, и их будет ровно столько если и только если каждый многочлен f_i^φ имеет $\deg f_i$ различных корней в поле $\mathbb{F}$. Поскольку башню (18-5) можно начать присоединением любого элемента $\vartheta = \vartheta_1 \in \mathbb{K}$, из наличия $[\mathbb{K} : \Bbbk]$ продолжений вытекает, что образ μ_ϑ^φ минимального многочлена μ_ϑ любого элемента $\vartheta \in \mathbb{K}$ раскладывается над $\mathbb{F}$ в произведение $\deg \mu_\vartheta$ различных линейных множителей. В частности, μ_ϑ сепарабелен. Наоборот, если все элементы $\vartheta \in \mathbb{K}$ сепарабельны, а образы μ_ϑ^φ их минимальных многочленов полностью раскладываются над $\mathbb{F}$ на линейные множители, то эти множители будут различны, и в любой цепочке (18-5) каждый многочлен f_i, будучи делителем многочлена μ_{ϑ_i} в кольце $\mathbb{L}_{i-1}[x]$, переведётся вложением $\psi_{i-1} : \mathbb{L}_{i-1} \hookrightarrow \mathbb{F}$ в многочлен, полностью разлагающийся над $\mathbb{F}$ в произведение попарно различных линейных множителей. Поэтому вложение $\varphi : \Bbbk \hookrightarrow \mathbb{F}$ будет продолжаться вдоль такой цепочки ровно $[\mathbb{K} : \Bbbk]$ способами. □

Упражнение 18.6. Пусть в условиях предл. 18.1 поле $\mathbb{K}$ как алгебра над $\Bbbk$ порождается элементами $\xi_1, \ldots, \xi_m$. Покажите, что наличие ровно $[\mathbb{K} : \Bbbk]$ продолжений равносильно тому, что каждый элемент ξ_ν сепарабелен и его минимальный многочлен полностью раскладывается в $\mathbb{F}[x]$ на линейные множители.

Предложение 18.2
Если поле $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ алгебраично[1] над $\Bbbk$, то любое вложение $\varphi : \mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{K}$, тождественное на подполе $\Bbbk$, является автоморфизмом поля $\mathbb{K}$.

Доказательство. Достаточно убедиться, что $\varphi(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$. Пусть $\vartheta \in \mathbb{K}$ имеет над $\Bbbk$ минимальный многочлен $f \in \Bbbk[x]$. Вложение φ переводит корни многочлена f в корни многочлена f. Поэтому $\varphi^m\vartheta = \varphi^n\vartheta$ для некоторых $m > n$, где $\varphi^k = \varphi \circ \ldots \circ \varphi$ означает k-кратную итерацию вложения $\varphi : \mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{K}$. Из инъективности φ вытекает, что $\vartheta = \varphi^{m-n}\vartheta \in \operatorname{im}\varphi$. □

18.3. Поле разложения и алгебраическое замыкание. В этом разделе мы установим существование у любого поля $\Bbbk$ некоторых специальных расширений, единственных с точностью до неканонических изоморфизмов, тождественно действующих на $\Bbbk$.

[1] Но не обязательно конечно.

Определение 18.1 (поле разложения)
Поле $\mathbb{L}_f \supset \Bbbk$ называется *полем разложения* многочлена $f \in \Bbbk[x]$, если f полностью раскладывается в $\mathbb{L}_f[x]$ на линейные множители, и для любого расширения $\mathbb{F} \supset \Bbbk$, в котором f полностью раскладывается на линейные множители, существует вложение $\mathbb{L}_f \hookrightarrow \mathbb{F}$, тождественное на подполе $\Bbbk$.

Пример 18.3 (поле разложения кубического многочлена)
В прим. 18.1 на стр. 274 мы видели, что полем разложения неприводимого кубического многочлена $f \in \Bbbk[x]$, дискриминант $D(f)$ которого является квадратом в $\Bbbk$, служит примитивное кубическое расширение $\mathbb{K} = \Bbbk[x]/(f)$, а если $D(f)$ не квадрат в $\Bbbk$, то полем разложения является его квадратичное расширение $\mathbb{K}[\sqrt{D(f)}]$, имеющее степень 6 над $\Bbbk$.

Теорема 18.2
У любого многочлена $f \in \Bbbk[x]$ есть поле разложения $\mathbb{L}_f$, и между любыми двумя полями разложения многочлена f имеется (не канонический) изоморфизм, тождественно действующий на подполе $\Bbbk$.

Доказательство. Рассмотрим любое конечное расширение $\mathbb{F} \supset \Bbbk$, в котором f полностью раскладывается на линейные множители[1], и обозначим через $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{F}$ корни f, а через $\mathbb{L}_f$ — наименьшее подполе в $\mathbb{F}$, содержащее $\Bbbk$ и все эти корни. Поле $\mathbb{L}_f$ раскладывается в башню (18-3) примитивных расширений

$$\Bbbk = \mathbb{L}_0 \subset \mathbb{L}_1 \subset \dots \subset \mathbb{L}_{k-1} \subset \mathbb{L}_k = \mathbb{L}_f\,, \tag{18-6}$$

на каждом этаже которой присоединяется какой-нибудь элемент[2] $\vartheta \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$. Если поле $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ таково, что f полностью раскладывается над ним на линейные множители, то включение $\Bbbk \subset \mathbb{K}$ продолжается вдоль башни (18-6) до тождественного на $\Bbbk$ вложения $\mathbb{L}_f \hookrightarrow \mathbb{K}$ по лем. 18.3: минимальный многочлен каждого присоединяемого элемента ϑ, будучи делителем многочлена f, полностью раскладываются над $\mathbb{K}$ на линейные множители. Тем самым, $\mathbb{L}_f$ является полем разложения. Для любого другого поля разложения $\mathbb{L}'_f$ имеются вложения $\varphi : \mathbb{L}_f \hookrightarrow \mathbb{L}'_f$ и $\varphi' : \mathbb{L}'_f \hookrightarrow \mathbb{L}_f$. По предл. 18.2 обе композиции $\varphi \circ \varphi'$ и $\varphi' \circ \varphi$ биективны. Поэтому каждое из вложений является изоморфизмом. □

Пример 18.4 (классификация конечных полей)
Каждое конечное поле $\mathbb{F}$ характеристики p является конечным расширением своего простого подполя $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$ и состоит из $q = p^n$ элементов, где $n = [\mathbb{F} : \mathbb{F}_p]$. Так как ненулевые элементы поля $\mathbb{F}$ образуют конечную мультипликативную группу порядка $q - 1$, все они удовлетворяют уравнению $x^{q-1} = 1$. Следовательно, элементы поля $\mathbb{F}$ суть q различных корней многочлена $f(x) = x^q - x \in \mathbb{F}_p[x]$, сепарабельного, поскольку $f' = 1$. Таким образом, поле $\mathbb{F}$ является полем разложения многочлена f и единственно с точностью до (не канонического) изоморфизма.

Определение 18.2 (алгебраическое замыкание)
Алгебраическое над $\Bbbk$ алгебраически замкнутое поле $\overline{\Bbbk} \supset \Bbbk$ называется *алгебраическим замыканием поля* $\Bbbk$.

[1] См. ?? на стр. ??.

[2] Отметим, что число k этажей башни может оказаться меньше, чем число корней m многочлена f, поскольку присоединение очередного корня может привести к автоматическому присоединению ещё нескольких.

Упражнение 18.7. Покажите, что любое конечное расширение $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ допускает тождественное на $\Bbbk$ вложение в любое алгебраическое замыкание $\overline{\Bbbk}$ поля $\Bbbk$.

Теорема 18.3
У каждого поля $\Bbbk$ есть алгебраическое замыкание, и между любыми двумя алгебраическими замыканиями поля $\Bbbk$ имеется (не канонический) изоморфизм, тождественно действующий на подполе $\Bbbk$.

Доказательство. Для любых двух алгебраических замыканий $\mathbb{L}'$, $\mathbb{L}''$ поля $\Bbbk$ включение $\Bbbk \subset \mathbb{L}'$ продолжается до тождественного на $\Bbbk$ вложения $\varphi' : \mathbb{L}' \hookrightarrow \mathbb{L}''$. Симметричным образом имеется тождественное на $\Bbbk$ вложение $\varphi'' : \mathbb{L}'' \hookrightarrow \mathbb{L}'$. По предл. 18.2 композиции $\varphi' \circ \varphi''$ и $\varphi'' \circ \varphi'$ биективны. Поэтому φ' и φ'' тоже биективны, и $\mathbb{L}' \simeq \mathbb{L}''$. Существование алгебраического замыкания устанавливается в несколько итераций. Пусть поле $\Bbbk$ содержится в алгебраически замкнутом поле $\mathbb{K}$. Тогда множество $\overline{\Bbbk}$ алгебраичных над $\Bbbk$ элементов поля $\mathbb{K}$ является полем по предл. 15.2 на стр. 231. Любой многочлен из $\overline{\Bbbk}[x] \subset \mathbb{K}[x]$ имеет корень ϑ в $\mathbb{K}$. Поскольку ϑ алгебраичен над $\overline{\Bbbk}$, он алгебраичен и над $\Bbbk$, а значит, лежит в $\overline{\Bbbk}$. Тем самым, поле $\overline{\Bbbk}$ алгебраически замкнуто и является алгебраическим замыканием поля $\Bbbk$. Остаётся убедиться в наличии какого-нибудь алгебраически замкнутого поля $\mathbb{K} \supset \Bbbk$.

Сначала построим поле $\mathbb{F}_1 \supset \Bbbk$, над которым каждый многочлен $f \in \Bbbk[x]$ полностью разлагается на линейные множители. Для этого рассмотрим множество $\mathcal{L}$, элементами которого являются следующие наборы данных: (1) линейно упорядоченное множество многочленов $L \subset \Bbbk[x]$ (2) множество таких занумерованных многочленами $f \in L$ полей $\mathbb{L}_f(L) \supset \Bbbk$, что f полностью разлагается на линейные множители над $\mathbb{L}_f(L)$ и $\mathbb{L}_f(L) \subseteq \mathbb{L}_g(L)$ при $f \leqslant g$. Введём на $\mathcal{L}$ частичный порядок, полагая $L_1 \leqslant L_2$ если $L_1 \subseteq L_2$ с сохранением порядка и $\mathbb{L}_f(L_1) = \mathbb{L}_f(L_2)$ для всех $f \in L_1$.

Упражнение 18.8. Убедитесь, что $\mathcal{L}$ является непустым полным чумом.

По лемме Цорна[1] в $\mathcal{L}$ имеется максимальный элемент L. Если существует отличный от константы многочлен $h \notin L$, то множество L можно увеличить, добавив к нему h в качестве максимального элемента и положив $\mathbb{L}_h$ равным полю разложения многочлена h над полем $\bigcup_{f\in L} \mathbb{L}_f$. Таким образом, множество многочленов L содержит все многочлены положительной степени, и все они полностью разлагаются на линейные множители над полем $\mathbb{F}_1 = \bigcup_{f\in L} \mathbb{L}_f$, что и требовалось.

Заменяя $\Bbbk$ на $\mathbb{F}_1$ и повторяя процедуру, получаем бесконечную цепочку вложенных полей $\Bbbk = \mathbb{F}_0 \subset \mathbb{F}_1 \subset \mathbb{F}_2 \subset \dots$, в которой каждый многочлен из $\mathbb{F}_i[x]$ полностью разлагается на множители над полем $\mathbb{F}_{i+1}$. Поле $\mathbb{K} = \bigcup_i \mathbb{F}_i$ алгебраически замкнуто и содержит $\Bbbk$. □

Следствие 18.2
В любой башне конечных расширений $\mathbb{L}_1 \subset \mathbb{L}_2 \subset \mathbb{L}_3$ расширение $\mathbb{L}_1 \subset \mathbb{L}_3$ сепарабельно если и только если сепарабельны оба расширения $\mathbb{L}_1 \subset \mathbb{L}_2$ и $\mathbb{L}_2 \subset \mathbb{L}_3$.

Доказательство. Если поле $\mathbb{L}_3$ сепарабельно над $\mathbb{L}_1$, то сепарабельно и его подполе $\mathbb{L}_2$. Так как минимальный многочлен над $\mathbb{L}_2$ любого элемента $\vartheta \in \mathbb{L}_3$ делит сепарабельный минимальный многочлен элемента ϑ над $\mathbb{L}_1$, то $\mathbb{L}_3$ сепарабельно над $\mathbb{L}_2$. Наоборот, если оба расширения $\mathbb{L}_1 \subset \mathbb{L}_2$ и $\mathbb{L}_2 \subset \mathbb{L}_3$ сепарабельны, то по предл. 18.1 тождественное вложение $\mathbb{L}_1$ в алгебраическое

[1] См. сл. 1.1 на стр. 20 части I.

замыкание $\overline{\mathbb{L}}_1$ допускает ровно $\deg \mathbb{L}_2 \,/\, \mathbb{L}_1$ продолжений до вложения $\mathbb{L}_2 \hookrightarrow \overline{\mathbb{L}}_1$, и каждое из них ровно $\deg \mathbb{L}_3 \,/\, \mathbb{L}_2$ способами продолжается до вложения $\mathbb{L}_3 \hookrightarrow \overline{\mathbb{L}}_1$, так что всего имеется $\deg \mathbb{L}_2/\mathbb{L}_1 \cdot \deg \mathbb{L}_3/\mathbb{L}_2 = \deg \mathbb{L}_3/\mathbb{L}_1$ продолжений тождественного вложения $\mathbb{L}_1 \hookrightarrow \overline{\mathbb{L}}_1$ до вложения $\mathbb{L}_3 \hookrightarrow \overline{\mathbb{L}}_1$, что по предл. 18.1 означает сепарабельность расширения $\mathbb{L}_1 \subset \mathbb{L}_3$. □

18.4. Нормальные расширения. Алгебраическое расширение $\Bbbk \subset \mathbb{K}$ называется *нормальным*, если любой неприводимый над $\Bbbk$ многочлен $f \in \Bbbk[x]$, имеющий корень в $\mathbb{K}$, полностью разлагается в $\mathbb{K}[x]$ на линейные множители.

Упражнение 18.9. Покажите, что неприводимый над $\Bbbk$ приведённый многочлен $f \in \Bbbk[x]$, имеющий корень ϑ в алгебраическом расширении $\mathbb{K} \supset \Bbbk$, является минимальным многочленом элемента ϑ над $\Bbbk$.

Таким образом, нормальность алгебраического расширения $\Bbbk \subset \mathbb{K}$ равносильна тому, что минимальный любого элемента $\vartheta \in \mathbb{K}$ над $\Bbbk$ полностью раскладывается в $\mathbb{K}[x]$ на линейные множители.

Упражнение 18.10. Убедитесь, что любое квадратичное расширение нормально.

Лемма 18.4
Фиксируем произвольное алгебраическое замыкание $\overline{\Bbbk}$ поля $\Bbbk$. Алгебраическое расширение $\Bbbk \subset \mathbb{K}$ нормально тогда и только тогда, когда образы всех тождественных на $\Bbbk$ вложений $\mathbb{K} \hookrightarrow \overline{\Bbbk}$ совпадают друг с другом.

Доказательство. По лем. 18.3 на стр. 277 существует тождественное на подполе $\Bbbk$ вложение $\mathbb{K} \hookrightarrow \overline{\Bbbk}$. Поэтому мы можем считать, что $\Bbbk \subset \mathbb{K} \subset \overline{\Bbbk}$. Любое тождественное на $\Bbbk$ вложение $\psi : \mathbb{K} \hookrightarrow \overline{\Bbbk}$ переводит каждый элемент $\vartheta \in \mathbb{K}$ в один из корней его минимального над полем $\Bbbk$ многочлена $\mu_\vartheta \in \Bbbk[x]$. Если все эти корни лежат в $\mathbb{K}$, то $\psi(\mathbb{K}) \subset \mathbb{K}$. Наоборот, по лем. 18.3 для каждого корня ξ минимального многочлена $\mu_\vartheta \in \Bbbk[x]$ любого элемента $\vartheta \in \mathbb{K}$ имеется такое вложение $\psi_{\vartheta,\xi} : \mathbb{K} \hookrightarrow \overline{\Bbbk}$, что $\psi_{\vartheta,\xi}(\vartheta) = \xi$. Если образы всех этих вложений лежат в $\mathbb{K}$, то все корни минимальных многочленов элементов поля $\mathbb{K}$ лежат в $\mathbb{K}$. □

Лемма 18.5
Пусть в башне алгебраических расширений $\Bbbk \subset \mathbb{L} \subset \mathbb{K}$ поле $\mathbb{K}$ нормально над $\Bbbk$. Тогда $\mathbb{K}$ нормально и над $\mathbb{L}$, а вот $\mathbb{L}$ нормально над $\Bbbk$ если и только если образ любого тождественного на $\Bbbk$ вложения $\mathbb{L} \hookrightarrow \mathbb{K}$ совпадает с $\mathbb{L}$.

Доказательство. Минимальный над $\mathbb{L}$ многочлен любого элемента $\vartheta \in \mathbb{K}$ делит в $\mathbb{L}[x]$ минимальный многочлен элемента ϑ над $\Bbbk$, и если в $\mathbb{K}[x]$ второй из них полностью раскладывается на линейные множители, то и первый раскладывается. Поэтому $\mathbb{K}$ нормально над $\mathbb{L}$. Второе утверждение вытекает из лем. 18.4: фиксируем алгебраическое замыкание $\overline{\Bbbk} \supset \mathbb{K} \supset \mathbb{L} \supset \Bbbk$ и заметим, что образы всех вложений $\mathbb{L} \hookrightarrow \overline{\Bbbk}$ лежат в $\mathbb{K}$, поскольку каждое такое вложение продолжается до вложения $\mathbb{K} \hookrightarrow \overline{\Bbbk}$, образ которого совпадает с $\mathbb{K}$. □

Предостережение 18.1. Башня $\mathbb{F} \supset \mathbb{L} \supset \Bbbk$ нормальных расширений $\mathbb{F} \supset \mathbb{L}$ и $\mathbb{L} \supset \Bbbk$ может не быть нормальным расширением. Например, расширение $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}] = \mathbb{Q}[x]\,/\,(x^4 - 2)$ раскладывается в башню квадратичных расширений $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \subset \mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]$, каждое из которых нормально по упр. 18.10, однако само нормальным не является, так как четыре его вложения в алгебраическое замыкание $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ переводят примитивный элемент $\vartheta = x \pmod{x^4 - 2}$ поля

$\mathbb{Q}[x]/(x^4-2)$ в четыре разных комплексных корня $\pm\sqrt[4]{2} \in \mathbb{R}$ и $\pm i\sqrt[4]{2} \notin \mathbb{R}$ из двойки, и образами этих вложений являются два разных подполя в $\mathbb{C}$ — одно из них содержится оба вещественных корня и содержится в $\mathbb{R}$, а другое содержит оба мнимых корня и не содержится в $\mathbb{R}$.

Предложение 18.3
Конечное расширение $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ нормально если и только если $\mathbb{K}$ является полем разложения некоторого многочлена[1] $f \in \Bbbk[x]$.

Доказательство. Пусть нормальное над $\Bbbk$ поле $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ порождается как алгебра над $\Bbbk$ элементами $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, и пусть $f_i \in \Bbbk[x]$ — минимальный многочлен элемента α_i над полем $\Bbbk$. Тогда многочлен $f = \prod f_i$ полностью раскладывается над $\mathbb{K}$ на линейные множители, и по упр. 18.6 поле $\mathbb{K}$ вкладывается в любое другое поле, над которым f полностью раскладывается на линейные множители. Следовательно, $\mathbb{K}$ является полем разложения многочлена f. Наоборот, если $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ является полем разложения некоторого многочлена $f \in \Bbbk[x]$, то любое тождественное на подполе $\Bbbk$ вложение $\mathbb{K}$ в фиксированное алгебраическое замыкание $\overline{\Bbbk}$ является изоморфизмом $\mathbb{K}$ на подполе $\Bbbk[\alpha_1, \dots, \alpha_k] \subset \overline{\Bbbk}$, порождённое всеми корнями $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ многочлена f в $\overline{\Bbbk}$. Поэтому $\mathbb{K}$ нормально по лем. 18.4. □

18.4.1. Композиты. Зафиксируем алгебраическое замыкание $\overline{\Bbbk}$ поля $\Bbbk$. Для любого набора содержащих $\Bbbk$ и содержащихся в $\overline{\Bbbk}$ полей $\mathbb{K}_1, \dots, \mathbb{K}_m$ наименьшее подполе в $\overline{\Bbbk}$, которое содержит все поля $\mathbb{K}_\nu$, называется *композитом* этих полей и обозначается $\mathbb{K}_1 \dots \mathbb{K}_m$. Иначе композит можно описать как пересечение всех подполей в $\overline{\Bbbk}$, содержащих каждое из полей $\mathbb{K}_i$, или как $\Bbbk$-линейную оболочку всевозможных произведений $\vartheta_1 \dots \vartheta_m$, где $\vartheta_i \in \mathbb{K}_i$ для каждого i.

Предложение 18.4
Пусть поля $\mathbb{F}$ и $\mathbb{K}$ содержат $\Bbbk$ и содержатся в $\overline{\Bbbk}$. Если поле $\mathbb{K}$ нормально (соотв. сепарабельно) над $\Bbbk$, то композит $\mathbb{F}\mathbb{K}$ нормален (соотв. сепарабелен) над $\mathbb{F}$.

Доказательство. Поскольку базис поля $\mathbb{K}$ как векторного пространства над $\mathbb{F} \cap \mathbb{K}$ является одновременно и базисом композита $\mathbb{F}\mathbb{K}$ как векторного пространства над $\mathbb{F}$, имеется равенство степеней $[\mathbb{F}\mathbb{K} : \mathbb{F}] = [\mathbb{K} : \mathbb{F} \cap \mathbb{K}]$. Так как любое тождественное на $\mathbb{F} \cap \mathbb{K}$ вложение $\mathbb{K} \hookrightarrow \overline{\Bbbk}$ продолжается по $\mathbb{F}$-линейности до тождественного на $\mathbb{F}$ вложения $\mathbb{K}\mathbb{F} \hookrightarrow \overline{\Bbbk}$, между первыми и вторыми вложениями имеется каноническая биекция. Если $\mathbb{K}$ сепарабельно над $\Bbbk$, то по сл. 18.2 на стр. 280 оба расширения башни $\Bbbk \subset \mathbb{F} \cap \mathbb{K} \subset \mathbb{K}$ сепарабельны, и по предл. 18.1 на стр. 278 имеется $[\mathbb{K} : \mathbb{F} \cap \mathbb{K}]$ тождественных на $\mathbb{F} \cap \mathbb{K}$ вложений $\mathbb{K} \hookrightarrow \overline{\Bbbk}$. Поэтому тождественных на $\mathbb{F}$ вложений $\mathbb{K}\mathbb{F} \hookrightarrow \overline{\Bbbk}$ тоже имеется $[\mathbb{K} : \mathbb{F} \cap \mathbb{K}] = [\mathbb{F}\mathbb{K} : \mathbb{F}]$, что по той же предл. 18.1 означает сепарабельность $\mathbb{F}\mathbb{K}$ над $\mathbb{F}$. Если поле $\mathbb{K}$ нормально над $\Bbbk$, то по лем. 18.4 на стр. 281 образы всех вложений $\mathbb{K} \hookrightarrow \overline{\Bbbk}$ совпадают с $\mathbb{K}$. Поэтому образы всех $\mathbb{F}$-линейных вложений $\mathbb{K}\mathbb{F} \hookrightarrow \overline{\Bbbk}$ совпадают с $\mathbb{K}\mathbb{F}$, что по лем. 18.4 означает нормальность $\mathbb{K}\mathbb{F}$ над $\mathbb{F}$. □

Теорема 18.4 (нормальное замыкание)
Для любого конечного сепарабельного расширения $\mathbb{F} \supset \Bbbk$ существует нормальное и сепарабельное над $\Bbbk$ поле $\mathbb{K} \supset \mathbb{F}$, которое вкладывается над $\mathbb{F}$ в любое другое нормальное и сепарабельное над $\Bbbk$ поле $\mathbb{K}' \supset \mathbb{F}$. Все такие поля[2] конечны над $\Bbbk$ и (не канонически) изоморфны друг другу над $\Bbbk$.

[1] Возможно приводимого над $\Bbbk$.

[2] Они называются *нормальными замыканиями* сепарабельного расширения $\mathbb{F} \supset \Bbbk$.

Доказательство. Зафиксируем алгебраическое замыкание $\overline{\Bbbk} \supset \Bbbk$ и возьмём в качестве $\mathbb{K}$ композит образов всех $n = \deg \mathbb{F}/\Bbbk$ различных вложений $\mathbb{F} \hookrightarrow \overline{\Bbbk}$. Тогда $\deg \mathbb{K}/\mathbb{F} \leqslant n$, и $\mathbb{F}$ нормально и сепарабельно как над $\mathbb{F}$, так и над $\Bbbk$, а любое вложение $\mathbb{F}$ в любое нормальное сепарабельное расширение $\mathbb{K}' \supset \Bbbk$ продолжается до вложения $\mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{K}'$. □

18.5. Автоморфизмы полей и соответствие Галуа. Автоморфизмы поля $\mathbb{K}$, тождественно действующие на его подполе $\Bbbk \subset \mathbb{K}$, называются *автоморфизмами* $\mathbb{K}$ *над* $\Bbbk$. Все такие автоморфизмы образуют группу $\operatorname{Aut}_{\Bbbk} \mathbb{K} \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi : \mathbb{K} \xrightarrow{\sim} \mathbb{K} \mid \varphi(t) = t \;\; \forall\, t \in \Bbbk\}$. Так как каждый автоморфизм поля $\mathbb{K}$ над $\Bbbk$ является продолжением включения $\Bbbk \subset \mathbb{K}$ на расширение $\mathbb{K} \supset \Bbbk$, порядок группы автоморфизмов конечного расширения $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ удовлетворяет неравенству $|\operatorname{Aut}_{\Bbbk} \mathbb{K}| \leqslant \deg \mathbb{K}/\Bbbk$ из предл. 18.1 на стр. 278. Конечные расширения, для которых это неравенство превращается в равенство, называются *расширениями Галуа*. Из предл. 18.1 вытекает, что конечное расширение является расширением Галуа если и только если оно нормально и сепарабельно. Группа автоморфизмов расширения Галуа $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ называется *группой Галуа* и обозначается

$$\operatorname{Gal} \mathbb{K}/\Bbbk \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Aut}_{\Bbbk} \mathbb{K}\,.$$

Для любой группы G автоморфизмов поля $\mathbb{K}$ элементы $t \in \mathbb{K}$, неподвижные относительно всех преобразований из G, образуют в $\mathbb{K}$ подполе $\mathbb{K}^G \stackrel{\text{def}}{=} \{t \in \mathbb{K} \mid \forall \varphi \in G \;\; \varphi(t) = t\}$, которое называется *полем инвариантов группы* G. Отметим, что $\mathbb{K}^G$ содержит простое подполе поля $\mathbb{K}$, изоморфное $\mathbb{Q}$, когда $\operatorname{char}(\Bbbk) = 0$, или $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$, когда $\operatorname{char}(\Bbbk) = p > 0$.

Теорема 18.5
Для любой конечной группы G автоморфизмов произвольного поля $\mathbb{K}$ расширение $\mathbb{K} \supset \mathbb{K}^G$ является расширением Галуа степени $|G|$, и $\operatorname{Aut}_{\mathbb{K}^G} \mathbb{K} = G$.

Доказательство. Пусть элементы $\vartheta_1, \dots, \vartheta_m \in \mathbb{K}$ попарно различны и составляют G-орбиту элемента $\vartheta = \vartheta_1 \in \mathbb{K}$. Многочлен $f_\vartheta(x) = (x - \vartheta_1) \dots (x - \vartheta_m)$ имеет коэффициенты в $\mathbb{K}^G$ и неприводим над $\mathbb{K}^G$, поскольку группа G переводит в себя множество корней любого многочлена положительной степени из $\mathbb{K}^G[x]$ и не может транзитивно действовать на корнях произведения двух таких многочленов. Тем самым, f_ϑ является минимальным многочленом элемента ϑ над полем $\mathbb{K}^G$. Так как f_ϑ полностью разлагается над $\mathbb{K}$ в произведение попарно различных линейных множителей, расширение $\mathbb{K}^G \subset \mathbb{K}$ алгебраично, нормально и сепарабельно, причём степень над $\mathbb{K}^G$ любого элемента $\vartheta \in \mathbb{K}$ не выше $|G|$. По сл. 18.1 на стр. 276 расширение $\mathbb{K}^G \subset \mathbb{K}$ конечно и $\deg \mathbb{K}/\mathbb{K}^G \leqslant |G|$. С другой стороны, $|G| \leqslant \left|\operatorname{Aut}_{\mathbb{K}^G} \mathbb{K}\right| \leqslant \deg \mathbb{K}/\mathbb{K}^G$. Поэтому все написанные неравенства являются равенствами, и $G = \operatorname{Aut}_{\mathbb{K}^G} \mathbb{K}$. □

Следствие 18.3
Для любого конечного расширения полей $\Bbbk \subset \mathbb{K}$ и любой подгруппы $G \subset \operatorname{Aut}_{\Bbbk} \mathbb{K}$ равенства $\mathbb{K}^G = \Bbbk$ и $|G| = \deg \mathbb{K}/\Bbbk$ эквивалентны друг другу, и в случае их выполнения $G = \operatorname{Aut}_{\Bbbk} \mathbb{K}$.

Доказательство. Это вытекает из установленного в теор. 18.5 равенства $\deg \mathbb{K}/\mathbb{K}^G = |G|$. □

Пример 18.5 (поле инвариантов группы треугольника)
Рассмотрим проективную прямую $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\Bbbk^2)$ над произвольным полем $\Bbbk$. Группа треугольника $G = S_3$ действует на ней дробно линейными преобразованиями, переставляющими точки $0 = (0 : 1)$, $1 = (1 : 1)$, $\infty = (1 : 0)$. Тождественное преобразование, циклы $\tau = |0, 1, \infty\rangle$,

$\tau^{-1} = |\infty, 1, 0\rangle$ и транспозиции $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_\infty$, оставляющие на месте точки $0, 1, \infty$ соответственно, преобразуют аффинную координату $t = t_0/t_1$ по формулам:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Id} : t \mapsto t & \tau : t \mapsto 1/(1-t) & \tau^{-1} : t \mapsto (t-1)/t \\ \sigma_0 : t \mapsto t/(t-1) & \sigma_1 : t \mapsto 1/t & \sigma_\infty : t \mapsto 1-t\,. \end{array} \tag{18-7}$$

Эти шесть замен переменной задают действие группы G на поле $\mathbb{K} = \Bbbk(t)$ рациональных функций по правилу $g : \varphi(t) \mapsto \varphi(g^{-1}(t))$. Поле инвариантов $\mathbb{K}^G$ этого действия состоит из функций $\varphi(t)$, не меняющихся при подстановках (18-7). Согласно теор. 18.5, расширение $\mathbb{K}^G \subset \mathbb{K}$ является расширением Галуа степени 6. Опишем поле $\mathbb{K}^G$ явно. Если рациональная функция $\psi(t) = p(t)/q(t)$ G-инвариантна, то любая рациональная функция от ψ тоже G-инвариантна. Такие функции образуют подполе $\Bbbk(\psi) \subset \mathbb{K}^G$, и функция $t \in \mathbb{K}$ является корнем многочлена $\psi \cdot q(x) - p(x)$ с коэффициентами в этом подполе. Поэтому $\dim_{\Bbbk(\psi)} \mathbb{K} \leqslant \max(\deg p, \deg q)$. Так как левая часть неравенства делится на $\dim_{\mathbb{K}^G} \mathbb{K} = 6$, мы заключаем, что $\max(\deg p, \deg q) \geqslant 6$, где равенство означает, что $\mathbb{K}^G = \Bbbk(\psi)$. Инвариантную функцию ψ с $\deg p = \deg q = 6$ нетрудно построить из геометрических соображений. Рассмотрим однородный многочлен $f(t_0, t_1)$ без кратных неприводимых множителей, нули которого на $\mathbb{P}_1$ образуют одну G-орбиту. Подстановки (18-7) переводят его в многочлен с тем же множеством нулей, т. е. умножают на константы: $f(g^{-1}t) = \lambda(g)\cdot f(t)$, где $\lambda : G \to \Bbbk^\times$, $g \mapsto \lambda(g)$, является одномерным характером группы G, коих имеется ровно два: тривиальный и знаковый. Поэтому f либо инвариантен относительно всех постановок (18-7), либо сохраняется поворотами и меняет знак при отражениях. Из трёхточечной орбиты $\{0, 1, \infty\}$ таким образом получается знакопеременный многочлен $p = t_0t_1(t_0 - t_1)$, квадрат которого G-инвариантен, а из двухточечной, образованной собственными векторами поворотов[1] — G-инвариантный многочлен $q = t_0^2 - t_0t_1 + t_1^2$. Минимальный лоранов моном полной степени нуль[2] по $(t_0 : t_1)$, который можно соорудить из p^2 и q, это

$$\psi(t) = \frac{p^2}{q^3} = \frac{t_0^2t_1^2\left(t_0 - t_1\right)^2}{\left(t_0^2 - t_0t_1 + t_1^2\right)^3} = \frac{t^2(t-1)^2}{(t^2 - t + 1)^3}$$

так как это отношение многочленов степени $\leqslant 6$, поле инвариантов $\mathbb{K}^G = \Bbbk(\psi)$.

Упражнение 18.11. Убедитесь прямым вычислением, что замены (18-7) не меняют $\psi(t)$.

Пример 18.6 (автоморфизмы и вложения конечных полей)
Пусть $q = p^n$, где $p \in \mathbb{N}$ — простое. Поскольку расширение $\mathbb{F}_p \subset \mathbb{F}_q$ нормально и сепарабельно[3], $\left|\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_q\right| = [\mathbb{F}_q : \mathbb{F}_p] = n$. Итерации $F_p^0 = \mathrm{Id}, F_p, F_p^2, \dots, F_p^{n-1}$ автоморфизма Фробениуса $F_p : \vartheta \mapsto \vartheta^p$ различны, так как равенство $F_p^k = F_p^m$ означает, что все p^n элементов поля $\mathbb{F}_q$ являются корнями многочлена $x^{p^k} - x^{p^m}$, что невозможно при $k, m < n$. Поэтому $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_q$ — циклическая группа порядка n, порождённая F_p. Для каждого $k|n$ подгруппа $G_k \subset \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_q$, порождённая автоморфизмом F_p^k, имеет порядок n/k, а её неподвижные точки суть корни многочлена $x^{p^k} - x$. Поэтому $\mathbb{F}_q^{G_k} = \mathbb{F}_{p^k} \subset \mathbb{F}_{p^n}$ является полем разложения многочлена $x^{p^k} - x$,

[1] Отметим, что сами точки могут быть и не определены над полем $\Bbbk$, но *инвариантный* многочлен, корнями которого они являются, лежит в $\Bbbk[t_0, t_1]$.

[2] А именно они являются рациональными функциями от $t = t_0/t_1$.

[3] См. прим. 18.4 на стр. 279.

и $G_k \simeq \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_{p^k}} \mathbb{F}_{p^n}$. Любое вложение $\mathbb{F}_{p^k} \hookrightarrow \mathbb{F}_{p^n}$ является изоморфизмом на подполе $\mathbb{F}_q^{G_k}$, ибо переводит элементы $\mathbb{F}_{p^k}$ в корни многочлена $x^{p^k} - x$. Всего таких вложений имеется k, и они образуют одну орбиту группы $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_{p^k}$.

Упражнение 18.12. Покажите, что в $\mathbb{F}_p[x]$ многочлен $x^{p^n} - x$ является произведением всех неприводимых над $\mathbb{F}_p$ приведённых многочленов, степени которых делят n.

Теорема 18.6 (соответствие Галуа)

Для любого конечного расширения Галуа $\Bbbk \subset \mathbb{K}$ с группой Галуа $G = \mathrm{Aut}_{\Bbbk} \mathbb{K}$ отображение, сопоставляющее подгруппе $H \subseteq G$ её поле инвариантов $\mathbb{K}^H \subseteq \mathbb{K}$, и отображение, сопоставляющее содержащему $\Bbbk$ подполю $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{K}$ подгруппу $\mathrm{Aut}_{\mathbb{L}} \mathbb{K} \subseteq G$, являются взаимно обратными биекциями[1] между множеством подгрупп $H \subseteq G$ и множеством таких полей $\mathbb{L}$, что $\Bbbk \subseteq \mathbb{L} \subseteq \mathbb{K}$. При этом нормальные подгруппы $H \trianglelefteq G$ взаимно однозначно соответствуют содержащимся в $\mathbb{K}$ расширениям Галуа $\mathbb{L} \supseteq \Bbbk$, и в этом случае $\mathrm{Gal}\, \mathbb{L}/\Bbbk \simeq G/H$.

Доказательство. Для любого такого поля $\mathbb{L}$, что $\Bbbk \subseteq \mathbb{L} \subseteq \mathbb{K}$, расширение $\mathbb{L} \subset \mathbb{K}$ нормально по лем. 18.5 на стр. 281 и сепарабельно по сл. 18.2 на стр. 280. Тем самым, оно является расширением Галуа с группой Галуа $H = \mathrm{Aut}_{\mathbb{L}} \mathbb{K}$, причём $|H| = \deg \mathbb{K}/\mathbb{L}$. Очевидно, что H является подгруппой в G. По сл. 18.3 на стр. 283 её поле инвариантов $K^H = \mathbb{L}$. Наоборот, для любой подгруппы $H \subseteq G$ расширение $\mathbb{K}^H \subseteq \mathbb{K}$ является по теор. 18.5 на стр. 283 расширением Галуа с группой Галуа H. Это доказывает утверждение о биекции. Для доказательства второго утверждения рассмотрим действие группы $G = \mathrm{Gal}\, \mathbb{K}/\Bbbk$ на содержащихся в $\mathbb{K}$ подполях $\mathbb{L} \supset \Bbbk$. По уже доказанному, централизатор $C_{\mathbb{L}} \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in G \mid g|_{\mathbb{L}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{L}}\} = \mathrm{Aut}_{\mathbb{L}} \mathbb{K}$ каждого такого поля $\mathbb{L}$ совпадает с подгруппой $H \subseteq G$, соответствующей по Галуа полю $\mathbb{L}$. Поскольку расширение $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ нормально и сепарабельно, любое тождественное на $\Bbbk$ вложение $\varphi : \mathbb{L} \hookrightarrow \mathbb{K}$ продолжается до автоморфизма $g : \mathbb{K} \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}$ над $\Bbbk$. Тем самым, $\varphi(\mathbb{L}) = g(\mathbb{L})$ для некоторого $g \in G$, и централизатор поля $\varphi(\mathbb{L})$ в G сопряжён подгруппе H: $C_{\varphi(\mathbb{L})} = C_{g(\mathbb{L})} = gC_{\mathbb{L}}g^{-1} = gHg^{-1}$. Согласно лем. 18.5 на стр. 281 и сл. 18.2 на стр. 280 расширение $\mathbb{L} \supset \Bbbk$ всегда сепарабельно, а нормально если и только если $\varphi(\mathbb{L}) = \mathbb{L}$ для всех тождественных на $\Bbbk$ вложений $\varphi : \mathbb{L} \hookrightarrow \mathbb{K}$. Последнее равносильно тому, что все подгруппы, сопряжённые с H, совпадают с H, т. е. нормальности H. В этом случае группа $\mathrm{Gal}\, \mathbb{K}/\Bbbk$ переводит $\mathbb{L}$ в себя, и возникает сюрьективный гомоморфизм $\mathrm{Gal}\, \mathbb{K}/\Bbbk \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}\, \mathbb{L}/\Bbbk$ с ядром $\mathrm{Gal}\, \mathbb{K}/\mathbb{L}$. Таким образом, $\mathrm{Gal}\, \mathbb{L}/\Bbbk = \big(\mathrm{Gal}\, \mathbb{K}/\Bbbk\big)/\big(\mathrm{Gal}\, \mathbb{K}/\mathbb{L}\big)$. □

Упражнение 18.13. Убедитесь, что соответствие Галуа оборачивает включения:

$$H \subset K \subset \mathrm{Gal}\, \mathbb{K}/\Bbbk \iff \mathbb{K}^H \supset \mathbb{K}^K \supset \Bbbk$$

и что пересечению подгрупп $H_1 \cap H_2$ отвечает композит $\mathbb{K}_1\mathbb{K}_2$ соответствующих им полей $\mathbb{K}_1 = \mathbb{K}^{H_1}$ и $\mathbb{K}_2 = \mathbb{K}^{H_2}$, а пересечению $\mathbb{K}_1 \cap \mathbb{K}_2$ — наименьшая подгруппа в G, содержащая H_1 и H_2.

[1] Ср. с прим. 14.4 на стр. 208.

Задачи для самостоятельного решения к §18

Задача 18.1. Найдите минимальный многочлен числа $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ над $\mathbb{Q}$.

Задача 18.2. Верно ли, что а) $\cos 36^\circ \in \mathbb{Q}(\sin 36^\circ)$ б) $\sin 36^\circ \in \mathbb{Q}(\cos 36^\circ)$?

Задача 18.3. Совпадает ли поле $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{-1})$ с полем а) $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ б) $\mathbb{Q}(\sqrt{-1}+\sqrt{2})$?

Задача 18.4. Являются ли расширениями Галуа поля $\mathbb{Q}$ следующие поля: а) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ б) $\mathbb{Q}(\omega+\sqrt[3]{2})$, где $\omega^2+\omega+1=0$ в) поле разложения многочлена x^7-5? Если да, то найдите их группы Галуа над $\mathbb{Q}$.

Задача 18.5. Опишите все подполя каждого из полей предыдущей задачи и выясните, какие из них изоморфны друг другу, и какие из них являются расширениями Галуа поля $\mathbb{Q}$.

Задача 18.6. Найдите размерность $\mathbb{Q}$-линейной оболочки вещественных чисел

$$1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{6},\ \sqrt{10},\ \sqrt{15},\ \sqrt{30}\,.$$

Задача 18.7. Найдите степень над $\mathbb{Q}$ поля разложения многочлена а) x^4-2 б) x^p-a, где $p\in\mathbb{N}$ простое и $a\in\mathbb{Q}$ не является p-той степенью.

Задача 18.8. Покажите, что в любом конечном расширении Галуа $\mathbb{F}\supset\Bbbk$ с группой $G=\operatorname{Gal}\mathbb{F}/\Bbbk$ есть элемент, G-орбита которого является базисом векторного пространства $\mathbb{F}$ над $\Bbbk$.

Задача 18.9. Покажите, что для любого отличного от константы многочлена $f\in\mathbb{Z}[x]$ существует бесконечно много таких простых $p\in\mathbb{N}$, что f имеет корень в поле $\mathbb{F}_p$.

Задача 18.10. Покажите, что в $\mathbb{F}_p[x]$ многочлен $x^{p^n}-x$ является произведением всех неприводимых над $\mathbb{F}_p$ приведённых многочленов, степени которых делят n.

Задача 18.11. Покажите, что в результате присоединения к $\mathbb{F}_p$ всех примитивных корней из единицы всех отличных от p простых степеней получится алгебраическое замыкание $\overline{\mathbb{F}}_p$.

Задача 18.12. Пусть $p\in\mathbb{N}$ — простое, $q=p^n$, и $a\in\mathbb{F}_p^{\times}$. Покажите, что многочлен x^p-x-a неприводим в $\mathbb{F}_q[x]$ если и только если $p\nmid n$.

Задача 18.13. При каких n многочлен $x^{2n}+x^n+1$ неприводим в $\mathbb{F}_2[x]$?

Задача 18.14. Пусть $n\not\equiv 2 \pmod 3$. Приводим ли в $\mathbb{Q}[x]$ многочлен а) x^n-x+1 б) x^n+x+1?

Задача 18.15. Группа диэдра D_n действует на проективной прямой $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ и на поле рациональных функций $\mathbb{C}(x)$ по правилам $\tau: x\mapsto e^{\frac{2\pi i}{n}}x$, $\sigma: x\mapsto x^{-1}$. Опишите поле инвариантов $\mathbb{C}(x)^{D_n}$.

Задача 18.16 (формы Клейна). Отождествим $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ с единичной сферой $S^2\subset\mathbb{R}^3$ так, что стандартная карта $U_0=\mathbb{C}\hookrightarrow\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ задаётся проекцией на сферу из её полюса $(0,0,1)$ экваториальной плоскости $z=0$, отождествлённой с полем $\mathbb{C}$ по правилу $x+iy\mapsto(x,y,0)$, а стандартная карта $U_1=\mathbb{C}\hookrightarrow\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ — проекцией из полюса $(0,0,-1)$ той же экваториальной плоскости $z=0$, но отождествлённой с полем $\mathbb{C}$ по правилу $x+iy\mapsto(x,-y,0)$. Убедитесь, что точки $u=x_0+iy_0\in U_0$ и $w=x_1+iy_1\in U_1$ отвечают одной и той же точке сферы S^2, если и только если $uw=1$ в поле $\mathbb{C}$. Ведём на $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})=S^2$ однородные координаты $(t_0:t_1)=(u:1)=(1:w)$ и обозначим через $\varphi,\psi,\chi\in\mathbb{C}[t_0:t_1]$ однородные многочлены, корнями которых в $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})=S^2$ являются соответственно проекции из центра сферы на её поверхность вершин, середин рёбер и центров граней вписанного в эту сферу правильного многогранника M, коим далее будет тетраэдр, куб или додекаэдр. Записывая степени многочленов нижними индексами, рассмотрим однородные многочлены $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}[t_0 : t_1]$, которые выражаются через φ, ψ, χ по формулам

для тетраэдра	$\alpha_6 \overset{\text{def}}{=} \psi_6$	$\beta_8 \overset{\text{def}}{=} \varphi_4\chi_4$	$\gamma_{12} \overset{\text{def}}{=} \varphi_4^3$
для куба	$\alpha_8 \overset{\text{def}}{=} \varphi_8$	$\beta_{12} \overset{\text{def}}{=} \chi_6^2$	$\gamma_{18} \overset{\text{def}}{=} \chi_6\psi_{12}$
для додекаэдра	$\alpha_{12} \overset{\text{def}}{=} \chi_{12}$	$\beta_{20} \overset{\text{def}}{=} \varphi_{20}$	$\gamma_{30} \overset{\text{def}}{=} \psi_{30}$.

а) Убедитесь, что собственная группа G вращений многогранника M действует на $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ линейными преобразованиями однородных координат $(t_0 : t_1)$, что задаёт действия G на кольце $\mathbb{C}[t_0, t_1]$ и поле $\mathbb{C}(u)$ рациональных функций от $u = t_0/t_1$.

б) Покажите, что многочлены $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}[t_0, t_1]$ инвариантны относительно этого действия и опишите поле инвариантов $\mathbb{C}(u)^G$.

в*) Докажите, что кольцо инвариантов $\mathbb{C}[t_0, t_1]^G \simeq \mathbb{C}[\alpha, \beta, \gamma]/(f)$, где $f = \alpha_6^4 + \beta_8^3 + \gamma_{12}^2$ для тетраэдра, $f = \alpha_8^3\beta_{12} + \beta_{12}^3 + \gamma_{18}^2$ для куба и $f = \alpha_{12}^5 + \beta_{20}^3 + \gamma_{30}^2$ для додекаэдра.

Задача 18.17. Опишите поле инвариантов действия на $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$ а) группы S_n перестановками переменных б) её подгруппы, порождённой циклом длины n в) циклической группы, порождённой гомотетией $x_\nu \mapsto e^{2\pi i/n}x_\nu$.

Задача 18.18. Пусть $G = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$, а её подгруппы $P \subset G$ и $N \subset P$ состоят из преобразований $t \mapsto at + b$ с $a \neq 0$ и $t \mapsto t + b$ соответственно. Покажите, что

а) $\mathbb{F}_q(t)^N = \mathbb{F}_q(t^q - t)$ б) $\mathbb{F}_q(t)^P = \mathbb{F}_q\big((t^q - t)^{q-1}\big)$

в) $\mathbb{F}_q(t)^G = \mathbb{F}_q\left((t^{q^2} - t)^{q+1}/(t^q - t)^{q^2+1}\right)$.

Задача 18.19. Пусть $\operatorname{char} \Bbbk = p$, а элементы x и y алгебраически независимы над $\Bbbk$. Найдите степень $[\Bbbk(x, y) : \Bbbk(x^p, y^p)]$ и покажите, что существует бесконечное множество таких полей $\mathbb{F}$, что $\Bbbk(x^p, y^p) \subset \mathbb{F} \subset \Bbbk(x, y)$.

Задача 18.20. Покажите, что целое замыкание нётерова нормального кольца A с полем частных K в любом конечном расширении $L \supset K$ конечно порождено как A-модуль.

Задача 18.21 (норма и след). Характеристический многочлен, след и определитель оператора умножения на элемент $\vartheta \in \mathbb{K}$ в конечном расширении $\mathbb{K} \supset \Bbbk$, обозначаются соответственно через $\chi_{\mathbb{K}/\Bbbk}(\vartheta; x) \in \Bbbk[x]$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}/\Bbbk}(\vartheta)$ и $N_{\mathbb{K}/\Bbbk}(\vartheta) \in \Bbbk$ и называются *характеристическим многочленом*, *следом* и *нормой* элемента ϑ над полем $\Bbbk$. Покажите, что для расширения Галуа $\Bbbk \subset \mathbb{K}$ с группой Галуа $G = \mathrm{Aut}_{\Bbbk}\,\mathbb{K}$ выполняются равенства

а) $\chi_{\mathbb{K}/\Bbbk}(\vartheta; x) = \prod_{g\in G}(x - g\vartheta)$ б) $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}/\Bbbk}(\vartheta) = \sum_{g\in G} g\vartheta$ в) $N_{\mathbb{K}/\Bbbk}(\vartheta) = \prod_{g\in G} g\vartheta$.

Задача 18.22. В обозначениях предыдущей задачи покажите, что

а) линейная форма $\vartheta \mapsto \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}/\Bbbk}(\vartheta)$ тождественно зануляется если и только если расширение $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ *чисто несепарабельно*, т. е. каждый элемент $\vartheta \in \mathbb{K} \smallsetminus \Bbbk$ не сепарабелен над $\Bbbk$.

б) если расширение $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ сепарабельно, то симметричная билинейная форма $(\vartheta_1, \vartheta_2) = \mathrm{Sp}_{K/\Bbbk}(\vartheta_1\vartheta_2)$ невырождена.

§19. Группы Галуа

19.1. Построения циркулем и линейкой. Отождествим ориентированную евклидову плоскость с полем $\mathbb{C}$, указав на ней точки 0 и 1. Традиционный набор школьных задач на построение:

Упражнение 19.1. Даны точки $0,\ 1,\ a,\ b \in \mathbb{C}$. Циркулем и линейкой постройте в $\mathbb{C}$ точки $a \pm b$, a/b, ab и $\sqrt{a}$.

показывает, что каждая точка ζ любого подполя $\mathbb{L} \subset \mathbb{C}$, которое можно получить последовательными квадратичными расширениями поля $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} = \mathbb{L}_0 \subset \mathbb{L}_1 \subset \ldots \subset \mathbb{L}_m = \mathbb{L}\,,\ \text{где } \mathbb{L}_{i+1} = \mathbb{L}_i\big[\sqrt{a_i}\big] \text{ и } a_i \in \mathbb{L}_i \smallsetminus \mathbb{L}_i^2\,, \tag{19-1}$$

может быть построена циркулем и линейкой. Покажем, что верно и обратное: если число $\zeta \in \mathbb{C}$ строится при помощи циркуля и линейки, отправляясь от заданных точек 0 и 1, то оно лежит в таком подполе $\mathbb{L} \subset \mathbb{C}$, к которому ведёт башня квадратичных расширений вида (19-1), причём каждое из полей $\mathbb{L}_i$ этой башни переводятся в себя комплексным сопряжением $z \mapsto \overline{z}$.

Построение числа ζ распадается на элементарные шаги, каждый из которых по уже построенным точкам $a,\ b,\ c,\ d$ строит новую точку p, являющуюся пересечением либо прямых (ab) и (cd), либо прямой (ab) и проходящей через d окружности с центром в c, либо проходящих через b и d окружностей с центрами в a и c соответственно, в ситуации, когда эти точки пересечения существуют. Положим $\mathbb{L}_1 = \mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$ и будем по индукции считать, что $a,\ b,\ c,\ d$ лежат в поле $\mathbb{L}_i$ из башни (19-1), причём комплексное сопряжение переводит поле $\mathbb{L}_i$ в себя. Последнее условие гарантирует, что вместе с каждым числом $\mathbb{L}_i$ содержит его вещественную и мнимую части. Число $(ab) \cap (cd)$ находится по правилу Крамера и тоже лежит в $\mathbb{L}_i$. Для отыскания пары чисел, возникающих при пересечении проходящей через d окружности S с центром c и прямой (ab) или проходящей через b окружностью с центром a следует подставить в задающее S уравнение $(z-c)(\overline{z}-\overline{c}) = (d-c)(\overline{d}-\overline{c})$ зависящую от параметра t точку $z = a + (b-a)\,t$, которая пробегает прямую (ab) или проходящую через b окружность с центром в a, когда t пробегает, соответственно, вещественную прямую $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ или единичную окружность $\mathrm{U}_1 \subset \mathbb{C}$. Так как в первом случае $\overline{t} = t$, а во втором $\overline{t} = t^{-1}$, мы получим на t квадратное уравнение с коэффициентами из $\mathbb{L}_i$ и вещественным дискриминантом $D \in \mathbb{L}_i \cap \mathbb{R}$.

Упражнение 19.2. Убедитесь в этом, явно выписав эти уравнения в обоих случаях.

Корни этого уравнения лежат либо в поле $\mathbb{L}_i$, либо в квадратичном расширении $\mathbb{L}_{i+1} = \mathbb{L}_i[\sqrt{D}]$, которое переводится комплексным сопряжением в себя. Искомые точки пересечения получаются подстановкой этих корней вместо t в параметрическое представление $a + (b-a)\,t$ прямой или окружности, а значит, лежат в $\mathbb{L}_{i+1}$, что воспроизводит предположение индукции.

Предложение 19.1

Конечное расширение Галуа $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ тогда и только тогда содержится в поле $\mathbb{L} \supset \Bbbk$, которое можно получить последовательными квадратичными расширениями поля $\Bbbk$:

$$\Bbbk = \mathbb{L}_0 \subset \mathbb{L}_1 \subset \ldots \subset \mathbb{L}_m = \mathbb{L}\,,\ \text{где } \mathbb{L}_{i+1} = \mathbb{L}_i\big[\sqrt{a_i}\big] \text{ и } a_i \in \mathbb{L}_i \smallsetminus \mathbb{L}_i^2\,, \tag{19-2}$$

когда $[\mathbb{K} : \Bbbk] = 2^n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть $\mathbb{K}$ содержится в башне (19-2). Из мультипликативности степени вытекает, что $[\mathbb{L} : \Bbbk] = 2^m$, а значит и $[\mathbb{K} : \Bbbk]$, будучи делителем $[\mathbb{L} : \Bbbk]$, тоже является степенью двойки. Наоборот, если $[\mathbb{K} : \Bbbk] = |\mathrm{Gal}\,\mathbb{K}/\Bbbk| = 2^n$, то группа Галуа $G = \mathrm{Gal}\,\mathbb{K}/\Bbbk$ является 2-группой, и её ряд Жордана – Гёльдера[1] $G = G_0 \rhd G_1 \rhd \ldots \rhd G_n = \{e\}$ имеет композиционные факторы $G_i/G_{i+1} \simeq \mathbb{Z}/(2)$ при всех i. Соответствие Галуа[2] сопоставляет этой башне подгрупп башню квадратичных расширений $\Bbbk = \mathbb{L}_0 \subset \mathbb{L}_1 \subset \ldots \subset \mathbb{L}_n = \mathbb{K}$, где $\mathbb{L}_i = \mathbb{K}^{G_i}$. □

Теорема 19.1

Корень неприводимого многочлена $f \in \mathbb{Q}[x]$ может быть построен в $\mathbb{C}$ циркулем и линейкой исходя из точек $0,\ 1 \in \mathbb{C}$ если и только если степень поля разложения f над $\mathbb{Q}$ является степенью двойки, и в этом случае все корни многочлена f строятся циркулем и линейкой.

Доказательство. Поле разложения $\mathbb{K}$ многочлена f над $\mathbb{Q}$ является расширением Галуа. Если $\deg \mathbb{K}/\mathbb{Q} = 2^m$, то поле $\mathbb{K}$ можно получить из $\mathbb{Q}$ последовательными квадратичными расширениями, как мы видели в доказательстве предл. 19.1 выше. Поэтому все числа из поля $\mathbb{K}$ можно построить циркулем и линейкой. Наоборот, пусть у многочлена f имеется корень $\vartheta \in \mathbb{C}$, который можно построить циркулем и линейкой. Тогда примитивное расширение $\mathbb{Q}[\vartheta] \subset \mathbb{C}$ содержится в некотором расширении $\mathbb{L}$ вида (19-1). Автоморфизм поля $\mathbb{K}$, переводящий корень ϑ в другой корень ϑ' многочлена f переводит подполе $\mathbb{Q}[\vartheta] \subset \mathbb{C}$ в подполе $\mathbb{Q}[\vartheta'] \subset \mathbb{C}$. Получающееся таким образом вложение полей $\psi : \mathbb{Q}[\vartheta] \hookrightarrow \mathbb{C}, \vartheta \mapsto \vartheta'$, продолжается до вложения $\widetilde{\psi} : \mathbb{L} \hookrightarrow \mathbb{C}$, совпадающего с ψ на подполе $\mathbb{Q}[\vartheta] \subset \mathbb{L}$ и переводящего башню (19-1) в башню

$$\mathbb{Q} = \mathbb{L}_0 \subset \mathbb{L}'_1 \subset \ldots \subset \mathbb{L}'_m = \mathbb{L}'\,, \tag{19-3}$$

в которой $\mathbb{L}'_{i+1} = \mathbb{L}'_i\left[\sqrt{a'_i}\right]$, где $a'_i = \widetilde{\psi}(a_i) \in \mathbb{L}'_i \smallsetminus \left(\mathbb{L}'_i\right)^2$. Так как $\vartheta' \in \mathbb{L}'$, корень ϑ' тоже строится циркулем и линейкой. Композит $\mathbb{L}\mathbb{L}'$ содержит оба корня ϑ, ϑ' и также является башней квадратичных расширений, поскольку получается последовательным присоединением к $\mathbb{L}$ чисел $a'_1, \ldots, a'_m$, степени которых над соответствующими подполями $\mathbb{L}$, $\mathbb{L}\mathbb{L}'_1$, … , $\mathbb{L}\mathbb{L}'_{m-1}$ не превышают двойки. Продолжая по индукции, мы построим башню квадратичных раширений, содержащую все корни многочлена f, а значит и его поле разложения $\mathbb{K}$. По предл. 19.1 степень $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$ в этом случае является степенью двойки, что и утверждалось. □

Следствие 19.1

Если число $\zeta \in \mathbb{C}$ строится циркулем и линейкой по данным точкам 0 и 1, то оно алгебраично над $\mathbb{Q}$ и его степень над $\mathbb{Q}$ является степенью двойки.

Доказательство. Примитивное расширение $\mathbb{Q}[\zeta]$ содержится в поле разложения минимального многочлена числа ζ, поэтому степень этого расширения над $\mathbb{Q}$ делит степень поля разложения минимального многочлена. □

Пример 19.1 (трисекция угла, удвоение куба и правильный семиугольник)

Угол $\pi/3$ нельзя разделить на три равные части циркулем и линейкой, поскольку такая возможность влечёт возможность построения циркулем и линейкой числа $\cos(\pi/9)$, имеющего над $\mathbb{Q}$ степень 3.

Упражнение 19.3. Убедитесь, что $\cos(\pi/9)$ является корнем неприводимого над $\mathbb{Q}$ многочлена $8\,x^3 - 6\,x - 1$.

---

[1] См. n° 19.4 на стр. 353 части I.

[2] См. теор. 18.6 на стр. 285.

По той же причине циркулем и линейкой нельзя построить сторону куба, объём которого вдвое больше объёма единичного куба: это равносильно построению корня неприводимого над $\mathbb{Q}$ многочлена $x^3 - 2$. Правильный семиугольник тоже нельзя построить циркулем и линейкой: такое построение позволяло бы построить первообразный корень $\sqrt[7]{1} = e^{2\pi i/7}$, минимальный многочлен которого[1] $\Phi_7(x) = (x^7 - 1)/(x - 1)$ имеет степень 6.

19.1.1. Влияние побочных иррациональностей. Задачу о построении циркулем и линейкой можно расширить, считая что в начале построения даны не только точки 0, 1, но и некоторые другие точки $\zeta_1, \dots, \zeta_n \in \mathbb{C}$. Поскольку все точки порождённого этими числами поля $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \subset \mathbb{C}$ строятся циркулем и линейкой, можно считать, что дополнительно заданные точки образуют подполе[2] $\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$, элементы которого принято называть *побочными иррациональностями*. Всё сказанное выше сохраняет силу после замены поля $\mathbb{Q}$ полем $\mathbb{F}$. А именно, если даны все точки поля $\mathbb{F}$, то число $\zeta \in \mathbb{C}$ строится циркулем и линейкой если и только если оно содержится в конечной башне последовательных квадратичных расширений поля $\mathbb{F}$, и это равносильно тому, что ζ алгебраично над $\mathbb{F}$ и степень поля разложения его минимального многочлена над $\mathbb{F}$ является степенью двойки. В частности, для этого необходимо, чтобы степень самого минимального многочлена тоже была степенью двойки.

Упражнение 19.4. Докажите все эти утверждения.

В самом общем виде взятие композита с произвольным полем побочных иррациональностей действует на расширение Галуа следующим образом.

Предложение 19.2 (теорема о побочных иррациональностях)
Пусть поля $\mathbb{F}, \mathbb{K} \supset \Bbbk$ содержатся в некотором общем алгебраически замкнутом поле $\mathbb{L}$ и расширение $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ является конечным расширением Галуа. Тогда $\mathbb{F}\mathbb{K} \supset \mathbb{F}$ также является конечным расширением Галуа, и его группа Галуа изоморфна подгруппе $H_{\mathbb{F}\cap\mathbb{K}} \subset \operatorname{Gal} \mathbb{K}/\Bbbk$, отвечающей при соответствии Галуа промежуточному подполю $\Bbbk \subset \mathbb{F} \cap \mathbb{K} \subset \mathbb{K}$.

Доказательство. По предл. 18.3 поле $\mathbb{K}$ является полем разложения некого сепарабельного многочлена $f \in \Bbbk[x]$ и порождается как $\Bbbk$-алгебра его корнями $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n \in \mathbb{L}$. Они же порождают $\mathbb{F}\mathbb{K}$ как алгебру над $\mathbb{F}$. По предл. 18.4 расширение $\mathbb{F}\mathbb{K} \supset \mathbb{F}$ нормально и сепарабельно, т. е. является конечным расширением Галуа. Тем самым, $\mathbb{F}\mathbb{K}$ является полем разложения f над $\mathbb{F}$. Автоморфизмы $\mathbb{K}$ над $\Bbbk$ и $\mathbb{F}\mathbb{K}$ над $\mathbb{F}$ оставляют многочлен f на месте и переводят множество его корней в себя, причём каждый автоморфизм однозначно определяется своим действием на корни. Это позволяет рассматривать обе группы $\operatorname{Gal} \mathbb{K} / \Bbbk$ и $\operatorname{Gal} \mathbb{F}\mathbb{K} / \mathbb{F}$ как подгруппы в S_n: группа $\operatorname{Gal} \mathbb{K} / \Bbbk$ состоит из всех перестановок корней $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$, которые продолжаются до автоморфизма порождённой ими $\Bbbk$-алгебры $\mathbb{K} = \Bbbk[\vartheta_1, \dots, \vartheta_n]$, а группа $\operatorname{Gal} \mathbb{F}\mathbb{K} / \mathbb{F}$ — из перестановок, продолжающихся до автоморфизма $\mathbb{F}$-алгебры $\mathbb{F}\mathbb{K} = \mathbb{F}[\vartheta_1, \dots, \vartheta_n]$. Так как $\Bbbk \subset \mathbb{F}$, вторая группа содержится в первой и состоит в точности из всех $\mathbb{F}$-линейных преобразований $g : \Bbbk[\vartheta_1, \dots, \vartheta_n] \to \Bbbk[\vartheta_1, \dots, \vartheta_n]$ из группы $\operatorname{Gal} \mathbb{K}/\Bbbk$. Но $\mathbb{F}$-линейность оператора g в точности и означает, что g оставляет на месте подполе $\mathbb{F} \cap \mathbb{K}$. □

19.2. Группы многочленов. Согласно предл. 18.3, поле разложения $\mathbb{L}_f$ любого сепарабельного многочлена $f \in \Bbbk[x]$ является расширением Галуа поля $\Bbbk$. Его группа Галуа над $\Bbbk$ обозначается

[1] Напомню, что круговой многочлен $\Phi_p(x)$ при простом p неприводим по критерию Эйзенштейна.
[2] Не обязательно алгебраическое над $\mathbb{Q}$.

через Gal $f/\mathbb{k}$ и называется *группой Галуа многочлена* f над $\mathbb{k}$. Так как коэффициенты f инвариантны относительно действия группы Галуа, возникает каноническое действие группы Gal $f/\mathbb{k}$ на корнях $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$ многочлена f, и поскольку поле $\mathbb{L}_f$ как алгебра над $\mathbb{k}$ порождается этими корнями, каждый автоморфизм из группы Галуа однозначно определяется своим действием на корнях, т. е. группа Галуа *канонически вложена* в группу перестановок корней. Перестановка корней лежит в группе Галуа тогда и только тогда, когда она сохраняет все полиномиальные соотношения между корнями. Формализуется это следующим образом.

Зафиксируем алгебраическое замыкание $\overline{\mathbb{k}} \supset \mathbb{k}$. Поле разложения $\mathbb{L}_f \subset \overline{\mathbb{k}}$ является образом гомоморфизма вычисления

$$\mathrm{ev}_{\vartheta_1,\dots,\vartheta_n} : \mathbb{k}[t_1, \dots, t_n] \to \overline{\mathbb{k}}, \quad \psi \mapsto \psi(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n), \tag{19-4}$$

ядро которого $I_{\mathbb{k}}(\vartheta) \stackrel{\text{def}}{=} \ker \mathrm{ev}_{\vartheta_1,\dots,\vartheta_n}$ является идеалом всех полиномиальных соотношений между корнями многочлена f, т. е. состоит из всех многочленов $\psi \in \mathbb{k}[t_1, \dots, t_n]$, равных нулю в точке $\vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_n) \in \mathbb{A}^n\big(\overline{\mathbb{k}}\big)$. Перестановка переменных $g : t_i \mapsto t_{g(i)}$ корректно факторизуется до эндоморфизма алгебры $\mathbb{L}_f = \mathbb{k}[t_1, \dots, t_n] \,/\, I_{\mathbb{k}}(\vartheta)$ если и только если она переводит идеал $I_{\mathbb{k}}(\vartheta)$ себя, т. е. для любого $\psi \in I_{\mathbb{k}}(\vartheta)$ многочлен $\psi^g(t_1, \dots, t_n) \stackrel{\text{def}}{=} \psi(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)})$ тоже лежит в $I_{\mathbb{k}}(\vartheta)$. Тем самым, группа Галуа многочлена f имеет вид

$$\operatorname{Gal} f/\mathbb{k} \simeq \{g \in S_n \mid \forall \psi \in I_{\mathbb{k}}(\vartheta)\ \psi^g \in I_{\mathbb{k}}(\vartheta)\} \tag{19-5}$$

Именно так изначально и определял группу многочлена сам Галуа.

Замечание 19.1. Задаваемое формулой (19-5) вложение группы Галуа Gal f в стандартную симметрическую группу $S_n = \operatorname{Aut}\{1, \dots, n\}$ не является каноническим и *зависит* от выбора нумерации корней ϑ_i многочлена f.

Предложение 19.3
Аффинное алгебраическое многообразие $V(I_{\mathbb{k}}(\vartheta)) \subset \mathbb{A}^n(\overline{\mathbb{k}})$ представляет собою набор из

$$m = [\mathbb{L}_f : \mathbb{k}] = |\operatorname{Gal} f/\mathbb{k}|$$

различных точек $\vartheta_g = (\vartheta_{g(1)}, \dots, \vartheta_{g(n)})$, где $g \in \operatorname{Gal} f/\mathbb{k}$, образующих одну орбиту действия группы $\operatorname{Gal} f/\mathbb{k} \subset S_n$ на пространстве $\mathbb{A}^n$ перестановками координат.

Доказательство. Пусть $f = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$. По теореме Виета

$$e_i(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n) = (-1)^i a_i,$$

где $e_i \in \mathbb{k}[t_1, \dots, t_n]$ — элементарный симметрический многочлен. Тем самым, для каждого i

$$e_i(t_1, \dots, t_n) - (-1)^i a_i \in I_{\mathbb{k}}(\vartheta).$$

Если точка $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in V\left(I_{\mathbb{k}}(\vartheta)\right)$, то $e_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (-1)^i a_i$, откуда

$$(x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_n) = f(x) = (x - \vartheta_1) \ldots (x - \vartheta_n),$$

т. е. $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\vartheta_{g(1)}, \dots, \vartheta_{g(n)})$ для некоторой перестановки $g \in S_n$. Если g не лежит в группе Gal $f/\mathbb{k}$, то найдётся такой многочлен $\psi \in I_{\mathbb{k}}(\vartheta)$, что $\psi^g \notin I_{\mathbb{k}}(\vartheta)$, и тогда

$$\psi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \psi(\vartheta_{g(1)}, \dots, \vartheta_{g(n)}) = \psi^g(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n) \neq 0,$$

что невозможно для точки $a \in V\left(I_{\Bbbk}(\vartheta)\right)$. Мы заключаем, что координаты каждой точки $a \in \in V\left(I_{\Bbbk}(\vartheta)\right)$ получаются из координат точки ϑ перестановкой из группы Галуа многочлена f. Наоборот, для любой перестановки $g \in \operatorname{Gal} f/\Bbbk$ и всех $\psi \in I_{\Bbbk}(\vartheta)$

$$\psi(\vartheta_{g(1)}, \dots, \vartheta_{g(n)}) = \psi^g(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n) = 0\,,$$

так как $\psi^g \in I_{\Bbbk}(\vartheta)$. Поэтому все точки из $\operatorname{Gal} f/\Bbbk$-орбиты точки ϑ лежат в $V(I_{\Bbbk}(\vartheta))$. □

Упражнение 19.5. Покажите, что сепарабельный многочлен $f \in \Bbbk[x]$ неприводим если и только если группа $\operatorname{Gal} f/\Bbbk$ транзитивно действует на его корнях.

19.2.1. Резольвента Галуа. Обозначим через $\mathbb{L}_f \supset \Bbbk$ поле разложения многочлена

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \in \Bbbk[x]\,,$$

а через $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$ — корни f в $\mathbb{L}_f$, и рассмотрим однородную линейную форму

$$\psi = \vartheta_1 t_1 + \ldots + \vartheta_n t_n \in \mathbb{L}_f[t_1, \dots, t_n]\,. \tag{19-6}$$

Однородный многочлен $F(t_1, \dots, t_n) = \prod_{\sigma \in S_n} \psi^\sigma = \prod_{\sigma \in S_n} (\vartheta_1 t_{\sigma(1)} + \ldots + \vartheta_n t_{\sigma(n)})$ степени $n!$ называется *резольвентой Галуа* многочлена f. Группируя вместе сомножители, отвечающие перестановкам σ из одного смежного класса подгруппы $G = \operatorname{Gal} f/\Bbbk \subset S_n$, перепишем F в виде

$$F\left(t_1, \dots, t_n\right) = \prod_{h \in S_n/G} F_h\left(t_1, \dots, t_n\right)\,, \tag{19-7}$$

где

$$\begin{aligned} F_h\left(t_1, \dots, t_n\right) &= \prod_{g \in G} \left(\vartheta_1 t_{hg(1)} + \ \dots\ + \vartheta_n t_{hg(n)}\right) = \\ &= \prod_{g \in G} \left(\vartheta_{g^{-1}(1)} t_{h(1)} + \ \dots\ + \vartheta_{g^{-1}(n)} t_{h(n)}\right) = \prod_{g \in G} g\left(\psi^h\right)\,. \end{aligned} \tag{19-8}$$

В последнем произведении $\psi^h \in \mathbb{L}_f[t_1, \dots, t_n]$ означает линейную форму, полученную из формы ψ перестановкой $h \in S_n$ переменных $t_1, \dots, t_n$, а $g(\psi^h)$ означает результат применения к *коэффициентам* этой формы автоморфизма $g : \mathbb{L}_f \xrightarrow{\sim} \mathbb{L}_f$ из группы Галуа $G = \operatorname{Aut}_{\Bbbk} \mathbb{L}_f$. Так как все линейные формы $g\left(\psi^h\right)$ в произведении (19-8) различны и составляют одну орбиту группы Галуа, каждый многочлен F_h имеет коэффициенты в поле $\Bbbk$ и неприводим над $\Bbbk$. Мы заключаем, что $F \in \Bbbk[t_1, \dots, t_n]$, и формула (19-7) представляет собою разложение многочлена F на неприводимые множители в $\Bbbk[t_1, \dots, t_n]$. Неприводимые многочлены F_h образуют орбиту многочлена F_e при действии симметрической группы S_n на кольце $\Bbbk[t_1, \dots, t_n]$ перестановками переменных, и группа Галуа $G = \operatorname{Gal} f/\Bbbk$ изоморфна стабилизатору многочлена F_e и сопряжена стабилизатору любого из многочленов F_h. Суммируем сказанное так:

Предложение 19.4

Перестановки переменных $t_1, \dots, t_n$, переводящие в себя какой-нибудь неприводимый делитель резольвенты Галуа многочлена f в кольце $\Bbbk[t_1, \dots, t_n]$, образуют в S_n подгруппу, изоморфную $\operatorname{Gal} f/\Bbbk$. □

19.2.2. Редукция коэффициентов. Пусть теперь поле $\Bbbk = \mathbb{Q}$ и многочлен

$$f = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \in \mathbb{Z}[x]\,.$$

Обозначим через $\overline{f} = x^n + \overline{a}_1x^{n-1} + \ldots + \overline{a}_n \in \mathbb{F}_p[x]$, где $\overline{a}_i = a_i \pmod{p}$, редукцию f по простому модулю $p \in \mathbb{N}$.

Теорема 19.2
Если многочлен $\overline{f} \in \mathbb{F}_p[x]$ сепарабелен, то имеется вложение групп $\mathrm{Gal}\,\overline{f}/\mathbb{F}_p \hookrightarrow \mathrm{Gal}\,f/\mathbb{Q}$.

Доказательство. Корни $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ многочлена f в его поле разложения $\mathbb{L}_f$ целы над $\mathbb{Z}$. Поэтому коэффициенты формы $\psi = \vartheta_1t_1 + \ldots + \vartheta_nt_n$ из (19-6), а с ними и коэффициенты всех многочленов F_h из разложения (19-7), лежат в кольце целых $\mathcal{O} \subset \mathbb{L}_f$. Так как коэффициенты каждого многочлена F_h инвариантны относительно $\mathrm{Gal}\,\mathbb{L}_f/\mathbb{Q}$, они лежат в $\mathbb{Q} \cap \mathcal{O} = \mathbb{Z}$, т. е. разложение (19-7) имеет место в $\mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]$. Приводя его по модулю p, получаем в $\mathbb{F}_p[t_1, \ldots, t_n]$ равенство

$$\overline{F}(t_1, \ldots, t_n) = \prod_{h \in S_n/G} \overline{F}_h(t_1, \ldots, t_n) \tag{19-9}$$

Обозначим через $\overline{\vartheta}_i = \vartheta_i \pmod{p}$ классы корней ϑ_i в $\mathbb{F}_p$-алгебре $A \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}/(p)$. В $A[t]$ многочлен $\overline{f}(x) = \prod(x - \overline{\vartheta}_i)$ полностью раскладывается на линейные множители, и все они различны в силу сепарабельности $\overline{f}$ над $\mathbb{F}_p$.

Упражнение 19.6. Убедитесь, что $\mathbb{F}_p$-подалгебра в A, порождённая $\overline{\vartheta}_1, \ldots, \overline{\vartheta}_n$, является полем разложения многочлена $\overline{f}$ над $\mathbb{F}_p$.

Стало быть, многочлен $\overline{F} \in \mathbb{F}_p[t_1, \ldots, t_n]$ является резольвентой Галуа многочлена $\overline{f} \in \mathbb{F}_p[x]$ над $\mathbb{F}_p$. По предл. 19.4 группу Галуа $\mathrm{Gal}\,\overline{f}/\mathbb{F}_p$ можно вложить в группу перестановок переменных t_i, как стабилизатор какого-нибудь неприводимого делителя многочлена $\overline{F}$ в $\mathbb{F}_p[t_1, \ldots, t_n]$. Зафиксируем такой делитель P, и пусть он приходит из разложения на неприводимые множители над полем $\mathbb{F}_p$ редукции $\overline{F}_h$ неприводимого делителя F_h многочлена F в кольце $\mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]$. Отождествим $\mathrm{Gal}\,f/\mathbb{Q}$ с группой перестановок переменных, переводящих F_h в себя. Поскольку каждая не лежащая в $\mathrm{Gal}\,f/\mathbb{Q}$ перестановка из S_n переводит F_h в другой неприводимый множитель $F_{h'} \neq F_h$ многочлена F, она не может оставлять на месте многочлен P, являющийся делителем $\overline{F}_h$. Следовательно $\mathrm{Gal}\,\overline{f}/\mathbb{F}_p \subset \mathrm{Gal}\,f/\mathbb{Q}$. □

Следствие 19.2
Пусть редукция по модулю p неприводимого приведённого многочлена $f \in \mathbb{Z}[x]$ распадается в произведение неприводимых над $\mathbb{F}_p$ многочленов $q_1, \ldots, q_m$ степеней $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_m$. Тогда группа Галуа $\mathrm{Gal}\,f/\mathbb{Q}$ содержит перестановку циклового типа λ.

Доказательство. Поле разложения многочлена $\overline{f}$ над $\mathbb{F}_p$ конечно, и его группа Галуа над $\mathbb{F}_p$ циклическая[1]. Так как она транзитивно действует на корнях каждого из неприводимых многочленов q_i, образующий элемент группы $\mathrm{Gal}\,\overline{f}/\mathbb{F}_p$ осуществляет перестановку корней многочлена $\overline{f}$ циклового типа λ. По теор. 19.2 эта перестановка содержится и в $\mathrm{Gal}\,f/\mathbb{Q}$. □

[1] См. прим. 18.6 на стр. 284.

Пример 19.2 (многочлен с группой S_5)
Вычислим группу Галуа многочлена $f(x) = x^5 - x - 1$ над $\mathbb{Q}$. Для этого разложим его на неприводимые множители над $\mathbb{F}_2$ и над $\mathbb{F}_3$. В нетривиальном разложении степень одного из неприводимых множителей $\leqslant 2$, и произведение всех неприводимых приведённых многочленов степеней 1 и 2 в $\mathbb{F}_p[x]$ равно[1] $x^{p^2} - x$. При помощи алгоритма Евклида убеждаемся, что над $\mathbb{F}_2$

$$\text{нод}(x^5 - x - 1,\ x^4 - x) = x^2 + x + 1$$

и разложение на неприводимые имеет вид $\overline{f} = (x^2 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1)$, тогда как над полем $\mathbb{F}_3$ $\text{нод}(x^5 - x - 1,\ x^9 - x) = 1$, и значит, $\overline{f}$ неприводим. По сл. 19.2 группа $\operatorname{Gal} f/\mathbb{Q}$ содержит цикл длины 5 и перестановку циклового типа $(3, 2)$. Возводя последнюю в куб, заключаем, что группа Галуа содержит транспозицию. Так как цикл максимальной длины и транспозиция порождают всю симметрическую группу, $\operatorname{Gal} f/\mathbb{Q} \simeq S_5$. Из теор. 19.5, которую мы докажем на стр. 298 ниже, вытекает, что корни многочлена $x^5 - x - 1$ не выражаются через рациональные числа при помощи четырёх арифметических операций и извлечения корней произвольных степеней.

19.3. Группы круговых полей. Расширение $\mathbb{Q}[\zeta_n] \supset \mathbb{Q}$, порождённое как алгебра над $\mathbb{Q}$ примитивным корнем n-той степени из единицы $\zeta_n \overset{\text{def}}{=} e^{2\pi i/n} \in \mathbb{C}$, называется n-тым *круговым*[2] полем. Оно содержит циклическую мультипликативную группу $\boldsymbol{\mu}_n \subset \mathbb{Q}[\zeta_n]$ корней n-той степени из единицы и является полем разложения сепарабельного многочлена $x^n - 1$. Поэтому круговое поле является расширением Галуа поля $\mathbb{Q}$, а каждый автоморфизм $\sigma \in \operatorname{Gal}\mathbb{Q}[\zeta_n]/\mathbb{Q}$ переводит образующую ζ_n группы $\boldsymbol{\mu}_n$ в образующую группы $\boldsymbol{\mu}_n$, т. е. действует по правилу $\sigma : \zeta_n \mapsto \zeta_n^{m(\sigma)}$, где $m(\sigma) \in (\mathbb{Z}/(n))^\times$ обратим в кольце вычетов $\mathbb{Z}/(n)$. Это задаёт гомоморфное вложение группы Галуа кругового поля в мультипликативную группу обратимых элементов кольца вычетов:

$$\operatorname{Gal}\mathbb{Q}[\zeta_n]/\mathbb{Q} \hookrightarrow \big(\mathbb{Z}/(n)\big)^\times, \quad \sigma \mapsto m(\sigma). \tag{19-10}$$

Поскольку множество $R_n \overset{\text{def}}{=} \{\zeta_n^m \mid \text{нод}(n, m) = 1\} \subset \boldsymbol{\mu}_n$ всех первообразных корней степени n из единицы переводится группой $\operatorname{Gal}\mathbb{Q}[\zeta_n]/\mathbb{Q}$ в себя, *n-тый круговой многочлен*

$$\Phi_n(x) \overset{\text{def}}{=} \prod\nolimits_{\xi \in R_n} (x - \xi)$$

инвариантен относительно группы Галуа, и значит, лежит в $\mathbb{Q}[x]$. Будучи полиномами от корней многочлена $x^n - 1$, все коэффициенты многочлена $\Phi_n(x)$ целы над $\mathbb{Z}$, и тем самым $\Phi_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Так, $\Phi_2(x) = x + 1$, $\Phi_3(x) = (x - \omega)(x - \omega^2) = x^2 + x + 1$, $\Phi_4(x) = (x - i)(x + i) = x^2 + 1$, $\Phi_5(x) = (x^5 - 1)/(x - 1) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, $\Phi_6(x) = (z - \zeta_6)(x - \zeta_6^{-1}) = x^2 - x + 1$ и т. д. Круговое поле $\mathbb{Q}[\zeta_n]$ является полем разложения кругового многочлена Φ_n и $\operatorname{Gal}\mathbb{Q}[\zeta_n]/\mathbb{Q} = \operatorname{Gal}\Phi_n/\mathbb{Q}$.

19.3.1. Элементы Фробениуса. При простом $p \nmid n$ многочлен $x^n - 1$ сепарабелен над $\mathbb{F}_p$. Редукция $\overline{\Phi}_n$ многочлена Φ_n по модулю p тоже сепарабельна над $\mathbb{F}_p$, т. к. $\overline{\Phi}_n$ делит $x^n - 1$. Поэтому сопоставление $\xi \mapsto \overline{\xi} = \xi \pmod p \in \mathcal{O}/(p)$ задаёт биекцию между множеством $R_n \subset \mathcal{O} \subset \mathbb{Q}[\zeta_n] \subset \mathbb{C}$ комплексных первообразных корней и множеством корней многочлена $\overline{\Phi}_n$ в его поле разложения над $\mathbb{F}_p$, которое порождается этими корнями как алгебра над $\mathbb{F}_p$ и является конечным расширением Галуа поля $\mathbb{F}_p$ с циклической группой Галуа, порождённой

[1] См. упр. 18.12 на стр. 285.
[2] Или *циклотомическим*.

автоморфизмом Фробениуса[1] $\overline{\xi} \mapsto \overline{\xi}^p$. По теор. 19.2 в группе Галуа $\operatorname{Gal} \Phi_n / \mathbb{Q}$ имеется такая перестановка комплексных первообразных корней $\sigma \in \operatorname{Aut} R_n$, что $\overline{\sigma(\xi)} = \overline{\xi}^p$. Мы заключаем, что автоморфизм мультипликативной группы $\boldsymbol{\mu}_n \subset \mathbb{Q}[\zeta_n]$, заданный правилом

$$F_p : \boldsymbol{\mu}_n \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{\mu}_n\,, \quad \xi \mapsto \xi^p\,, \tag{19-11}$$

продолжается до автоморфизма кругового поля $\mathbb{Q}[\zeta_n]$ над $\mathbb{Q}$. Он называется *p-элементом Фробениуса* в группе Галуа кругового поля.

Применяя к корню $\zeta_n \in R_n$ автоморфизмы F_p со всевозможными простыми $p \nmid n$, а также их итерации, можно получить все первообразные корни: любой из них имеет вид ζ_n^m для некоторого $m = p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}$, взаимно простого с n, и равен $F_{p_1}^{m_1} \dots F_{p_k}^{m_k} \zeta_n$. Мы заключаем, что группа Галуа кругового многочлена транзитивно действует на его корнях.

Предложение 19.5

Многочлен Φ_n неприводим над $\mathbb{Q}$ и является минимальным многочленом первообразного корня ζ_n над $\mathbb{Q}$, а вложение (19-10) является изоморфизмом групп, т. е. $\operatorname{Gal} \Phi_n \simeq \mathbb{Z}/(n)^{\times}$. В частности, $[\mathbb{Q}[\zeta_n] : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$, где φ — функция Эйлера.

Доказательство. Если бы многочлен Φ_n был приводим над $\mathbb{Q}$, его группа Галуа переводила бы множество корней каждого неприводимого множителя в себя и не могла бы транзитивно действовать на корнях многочлена Φ_n. Из транзитивности действия группы $\operatorname{Gal} \Phi_n$ на корнях вытекает неравенство $|\operatorname{Gal} \Phi_n| \geqslant \deg \Phi_n = \varphi(n) = |(\mathbb{Z}/(n))^{\times}|$, гарантирующее сюрьективность вложения (19-10). □

Пример 19.3 (Гауссова сумма)

При простом $p > 2$ любая мультипликативная подгруппа $H \subset \mathbb{F}_p^{\times}$ индекса 2 содержит все ненулевые квадраты поля $\mathbb{F}_p$, ибо в $\mathbb{F}_p^{\times}/H \simeq \{\pm 1\}$ выполняется равенство $\xi^2 H = \xi H \cdot \xi H = H$. Поэтому такая подгруппа единственна и является группой ненулевых квадратов. Прообразу этой группы при изоморфизме $m : \operatorname{Gal} \Phi_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_p^{\times}$ из форм. (19-10) на стр. 294 соответствует по Галуа единственное содержащееся в круговом поле $\mathbb{Q}[\zeta_p]$ квадратичное расширение $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$. Оно порождается над $\mathbb{Q}$ числом[2]

$$\vartheta = \sum_{\substack{\sigma \in \operatorname{Gal} \Phi_p : \\ m(\sigma) \in \mathbb{F}_p^{\times 2}}} \sigma(\zeta_p) - \sum_{\substack{\sigma \in \operatorname{Gal} \Phi_p : \\ m(\sigma) \notin \mathbb{F}_p^{\times 2}}} \sigma(\zeta_p) = \sum_{m=1}^{p-1} \left[\frac{m}{p}\right] \cdot \zeta_p^m\,, \tag{19-12}$$

которое инвариантно относительно подгруппы квадратов в $\operatorname{Gal} \Phi_p$ и меняет знак под действием автоморфизмов кругового поля, не являющихся квадратами. Правая часть формулы (19-12) называется *Гауссовой суммой*.

Упражнение 19.7. Покажите, что $\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p} \in \mathbb{Q}[\zeta_p]$ для всех простых $p > 2$, и явно выразите этот квадратный корень через корни p-той степени из единицы.

[1] См. прим. 18.6 на стр. 284 и доказательство сл. 19.2 на стр. 293.

[2] Напомню, что *символ Лежандра–Якоби* $\left[\dfrac{m}{p}\right] \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{если } m \pmod p = 0 \\ 1 & \text{если } m \pmod p \in \mathbb{F}_p^2 \smallsetminus 0 \\ -1 & \text{если } m \pmod p \notin \mathbb{F}_p^2. \end{cases}$

19.4. Циклические расширения. Элемент ζ произвольного поля $\Bbbk$ называется *примитивным* или *первообразным* корнем степени m из единицы, если $\zeta^m = 1$ и $\zeta^i \neq 1$ при всех $0 < i < m$. Если поле $\Bbbk$ содержит такой корень ζ, то циклическая мультипликативная группа корней уравнения $x^m = 1$ в поле $\Bbbk$ имеет порядок m и порождается элементом ζ, а множество образующих этой группы есть множество всех примитивных корней из единицы степени m. В частности, многочлен $x^m - 1$ в этом случае сепарабелен. Поэтому m не делится на $\mathrm{char}(\Bbbk)$, и все многочлены $x^d - a \in \Bbbk[x]$ степени $d|m$ тоже сепарабельны. Мы продолжим обозначать циклическую мультипликативную группу корней m-той степени из единицы через $\boldsymbol{\mu}_m \subset \Bbbk^\times$, и обозначим через $\Bbbk^{\times s}$ мультипликативную группу s-тых степеней ненулевых элементов поля $\Bbbk$.

Теорема 19.3

Пусть $a \in \Bbbk^\times$ и в поле $\Bbbk$ имеется примитивный корень степени m из единицы. Группа Галуа $G = \mathrm{Gal}\, f/\Bbbk$ двучлена $f(x) = x^m - a$ циклическая, её порядок $n = |G|$ делит m, а разложение f на неприводимые множители в $\Bbbk[x]$ имеет вид $f = h_1 \dots h_k$, где $k = m/n$, а $h_i(x) = x^n - b_i$, и в этом случае $a \in \Bbbk^{\times k}$. В частности, неприводимость f равносильна равенству $|G| = m$, а также тому, что $\Bbbk$-алгебра $\Bbbk[x]/(f)$ является полем разложения двучлена f.

Доказательство. Фиксируем алгебраическое замыкание $\overline{\Bbbk}$ и какой-нибудь корень $\alpha \in \overline{\Bbbk}$ двучлена f. Тогда корни двучлена f в поле $\overline{\Bbbk}$ имеют вид $\xi\alpha$, где $\xi \in \boldsymbol{\mu}_m$. Если $g \in G$ переводит α в $\zeta_g\alpha$, то и на все остальные корни g действует умножением на ζ_g, ибо

$$g(\xi\alpha) = \xi g(\alpha) = \xi\zeta_g\alpha = \zeta_g\xi\alpha\,.$$

Таким образом возникает инъективный гомоморфизмом групп

$$G \hookrightarrow \boldsymbol{\mu}_m\,, \quad g \mapsto \zeta_g = g(\alpha)/\alpha\,, \tag{19-13}$$

позволяющий рассматривать $G \subset \boldsymbol{\mu}_m$ как подгруппу в $\boldsymbol{\mu}_m$. Так как группа $\boldsymbol{\mu}_m$ циклическая порядка m, группа G тоже циклическая порядка $n|m$ и порождается некоторым примитивным корнем η степени n из единицы. Смежные классы $G\xi \subset \boldsymbol{\mu}_m$ биективно соответствуют орбитам действия группы Галуа на корнях f, и каждая орбита задаёт неприводимый множитель

$$f_\xi(x) \overset{\text{def}}{=} \prod_{\nu=0}^{n-1}(x - \eta^\nu\xi\alpha)$$

двучлена f в $\Bbbk[x]$.

Упражнение 19.8. Покажите, что $f_\xi(x) = x^n - \xi^n\alpha^n$.

Таким образом, разложение f на неприводимые множители в $\Bbbk[x]$ имеет вид

$$x^m - a = \prod_{\xi\in\boldsymbol{\mu}_m/G} \left(x^n - b_\xi\right)\,,$$

где $b_\xi = \xi^n\alpha^n \in \Bbbk$. Полагая $\xi = 1$, заключаем, что $b_1 = \alpha^n \in \Bbbk$, откуда свободный член двучлена f имеет вид $a = \prod_{\xi\in\boldsymbol{\mu}_m/G}\xi^n\alpha^n = \alpha^m = b_1^k \in \Bbbk^{\times k}$, где $k = m/n$.

Упражнение 19.9. Убедитесь, что $\prod_{\xi\in\boldsymbol{\mu}_m/G}\xi^n = 1$.

Неприводимость f, с одной стороны, равносильна равенству $n = m$, которое в свою очередь означает, что вложение (19-13) является изоморфизмом, а с другой стороны — тому, что алгебра

$\Bbbk[x]/(f)$ является полем, которое вместе с $\alpha = x \pmod f$ содержит и все остальные m корней $\xi\alpha$, где ξ пробегает $\boldsymbol{\mu}_m \subset \Bbbk$, двучлена f. □

Упражнение 19.10. В условиях теор. 19.3 покажите, что поля разложения двучленов $x^m - a$ и $x^m - b$ в $\overline{\Bbbk}$ совпадают если и только если $a = b^r c^m$, где $c \in \Bbbk$, $r \in \mathbb{Z}$ и нод$(r, m) = 1$.

Определение 19.1

Расширение Галуа $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ называется *циклическим степени* m, если $\operatorname{Gal} \mathbb{K}/\Bbbk$ является циклической группой m-того порядка.

Теорема 19.4

Всякое циклическое расширение степени m любого поля $\Bbbk$, содержащего первообразный корень m-той степени из единицы, является полем разложения неприводимого двучлена $x^m - a$ с $a \in \Bbbk$.

Доказательство. Пусть группа Галуа $G = \operatorname{Gal} \mathbb{K}/\Bbbk$ циклического расширения $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ порождена автоморфизмом $\sigma \in \operatorname{Aut}_{\Bbbk} \mathbb{K}$ порядка m. Фиксируем какой-нибудь первообразный корень m-той степени из единицы $\zeta \in \Bbbk$ и рассмотрим $\Bbbk$-линейный эндоморфизм поля $\mathbb{K}$

$$L_{\zeta,\sigma} \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{p-1} \zeta^i \sigma^i : \vartheta \mapsto \sum_{i=0}^{p-1} \zeta^i \sigma^i(\vartheta)\,.$$

Поскольку автоморфизмы $\sigma^0 = \mathrm{Id}$, σ, σ^2, … , σ^{m-1} являются различными мультипликативными характерами[1] абелевой группы $\mathbb{K}^\times$ над полем $\mathbb{K}$, они линейно независимы в пространстве функций[2] $\mathbb{K}^\times \to \mathbb{K}$. Поэтому эндоморфизм $L_{\zeta,\sigma}$ ненулевой.

Упражнение 19.11. Убедитесь, что $\sigma L_{\zeta,\sigma} = \zeta^{-1} L_{\zeta,\sigma}$.

Равенство $\left(\sigma - \zeta^{-1}\right) L_{\zeta,\sigma} = 0$ означает, что образ оператора $L_{\zeta,\sigma}$ состоит из собственных векторов оператора σ с собственным значением ζ^{-1}. Тем самым, в $\mathbb{K}$ имеется такое ненулевое α, что $\sigma(\alpha) = \zeta^{-1}\alpha$. Галуа-орбита числа α состоит из m различных чисел $\sigma^i(\alpha) = \zeta^{-i}\alpha$, $0 \leqslant i \leqslant m-1$, являющихся корнями двучлена $f(x) = x^m - \alpha^m$, свободный член которого $a = \alpha^m$ лежит в $\Bbbk$, так как он инвариантен относительно группы Галуа: $\sigma(\alpha^m) = \sigma(\alpha)^m = \zeta^{-m}\alpha^m = \alpha^m$. Так как корни двучлена f образуют одну Галуа-орбиту, он неприводим, а поскольку все они лежат в $\Bbbk[\alpha]$, это примитивное расширение является полем разложения f. Так как $\Bbbk[\alpha] \subset \mathbb{K}$ и оба поля имеют степень m над $\Bbbk$, включение является равенством. □

Упражнение 19.12* (изоморфизм Куммера). Для каждого элемента $a \in \Bbbk^\times/\Bbbk^{\times m}$ зафиксируем некоторый корень $\alpha = \sqrt[m]{a} \in \overline{\Bbbk}$ и сопоставим каждому автоморфизму $\sigma \in \operatorname{Gal} \overline{\Bbbk}/\Bbbk$ корень из единицы $\zeta_\sigma = \sigma(\alpha)/\alpha \in \boldsymbol{\mu}_m$. Покажите, что таким образом корректно задаётся изоморфизм групп $\Bbbk^\times/\Bbbk^{\times m} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(\operatorname{Gal} \overline{\Bbbk}/\Bbbk, \boldsymbol{\mu}_m)$.

19.5. Разрешимые расширения. Конечная группа G называется *разрешимой*, если все её композиционные факторы Жордана – Гёльдера[3] являются простыми циклическими группами. Из

[1] См. n° 9.5 на стр. 140.

[2] См. цитированный выше n° 9.5 на стр. 140, в частности упр. 9.19.

[3] См. n° 19.4 на стр. 353 части I. Эквивалентные определения разрешимости были в зад. 19.13 на стр. 362 части I.

предл. 19.5 и предл. 19.6 на стр. 356 части I вытекает, что для разрешимости группы G достаточно существования убывающей цепочки подгрупп

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_m = \{e\}\,, \tag{19-14}$$

в которой $G_i \triangleright G_{i+1}$ и все факторы G_i / G_{i+1} абелевы.

Упражнение 19.13. Убедитесь в этом, а также в том, что все подгруппы и факторы разрешимой группы G разрешимы, и наоборот, разрешимость нормальной подгруппы $H \triangleleft G$ и фактора G/H влекут разрешимость G.

Конечное расширение Галуа поля характеристики нуль называется *разрешимым*, если разрешима его группа Галуа.

Теорема 19.5
Пусть[1] $\operatorname{char}(\Bbbk) = 0$ и один из корней неприводимого многочлена $f \in \Bbbk[x]$ выражается через элементы поля $\Bbbk$ посредством четырёх арифметических действий и извлечений корней произвольных степеней. Тогда группа $\operatorname{Gal} f/\Bbbk$ разрешима, и все корни f выражаются в радикалах через элементы поля $\Bbbk$.

Доказательство. Зафиксируем алгебраическое замыкание $\overline{\Bbbk} \supset \Bbbk$. Если корень $\alpha \in \overline{\Bbbk}$ многочлена f выражается в радикалах, то он лежит в подполе $\mathbb{L} \subset \overline{\Bbbk}$, к которому ведёт башня примитивных расширений

$$\Bbbk = \mathbb{L}_0 \subset \mathbb{L}_1 \subset \ldots \subset \mathbb{L}_m = \mathbb{L} \tag{19-15}$$

вида $\mathbb{L}_{i+1} = \mathbb{L}_i[x]/(x^{k_i} - a_i)$, где $a_i \in \mathbb{L}_i$. Для доказательства теоремы достаточно вложить поле $\mathbb{L}$ в поле $\mathbb{L}' \supset \Bbbk$, являющееся расширением Галуа с разрешимой группой $\operatorname{Gal}\mathbb{L}'/\Bbbk$. Тогда поле разложения $\mathbb{K}$ многочлена f будет нормальным над $\Bbbk$ подполем в $\mathbb{L}'$, и его группа Галуа $\operatorname{Gal}\mathbb{K}/\Bbbk = (\operatorname{Gal}\mathbb{L}'/\Bbbk)/(\operatorname{Gal}\mathbb{L}'/\mathbb{K})$, будучи фактором разрешимой группы, тоже будет разрешима. Для построения $\mathbb{L}'$ расширим башню (19-15) до башни $\Bbbk \subset \mathbb{L}'_0 \subset \mathbb{L}'_1 \subset \ldots \subset \mathbb{L}'_m = \mathbb{L}'$, в которой $\mathbb{L}_i \subset \mathbb{L}'_i$ и все $\mathbb{L}'_i$ являются расширениями Галуа поля $\Bbbk$. В качестве $\mathbb{L}'_0$ возьмём поле разложения многочлена $x^N - 1$ с таким N, чтобы в $\mathbb{L}'_0$ содержались первообразные корни из единицы всех степеней k_i, являющихся показателями радикалов в формуле для α. Далее действуем по индукции: если $\mathbb{L}'_i$ уже построено, то в качестве $\mathbb{L}'_{i+1}$ возьмём поле разложения многочлена $\prod_{\sigma\in\operatorname{Gal}\mathbb{L}'_i/\Bbbk}(x^{k_i} - \sigma(a_i))$ над полем $\mathbb{L}'_i$. Так как коэффициенты этого многочлена инвариантны относительно группы $\operatorname{Gal}\mathbb{L}'_i/\Bbbk$, они лежат в $\Bbbk$, и $\mathbb{L}'_{i+1} \supset \Bbbk$ является расширением Галуа, содержащим поле $\mathbb{L}_{i+1} = \mathbb{L}_i[x]/(x^{k_i} - a_i)$. Поле $\mathbb{L}'_{i+1}$ получается из поля $\mathbb{L}'_i$ цепочкой последовательных переходов к полям разложения двучленов вида $x^n - a$ с $a \in \mathbb{L}'_i$. По теор. 19.3 все такие переходы являются расширениями Галуа с циклическими группами Галуа. Согласно предл. 19.5 и предл. 18.4 первый шаг нашего построения — переход от $\Bbbk$ к $\mathbb{L}'_0$ — также является расширением Галуа с абелевой группой Галуа. Таким образом, поле $\mathbb{L}'$ можно получить из $\Bbbk$ последовательными абелевым расширением Галуа, и его группа $\operatorname{Gal}\mathbb{L}'/\Bbbk$ разрешима. □

Пример 19.4 (общее уравнение степени n и теорема Абеля)
Зафиксируем произвольное поле $\mathbb{F}$. Многочлен

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \in \mathbb{F}(a_1, \ldots, a_n)[x]\,, \tag{19-16}$$

[1] Требование $\operatorname{char}(\Bbbk) = 0$ можно ослабить до требования, чтобы $\operatorname{char}(\Bbbk)$ не делила ни один из показателей радикалов, участвующих в формуле для вычисления корня. Приводимое доказательство в этом случае тоже работает.

рассматриваемый над полем $\Bbbk = \mathbb{F}(a_1, \dots, a_n)$ рациональных функций от n алгебраически независимых переменных $a_1, \dots, a_n$ с коэффициентами в $\mathbb{F}$, называется *общим*, поскольку придавая его коэффициентам конкретные значения из поля $\mathbb{F}$, можно получить любой «конкретный» многочлен $f \in \mathbb{F}[x]$. В частности, если имеется формула, выражающая корни общего многочлена (19-16) через элементы поля $\Bbbk = \mathbb{F}(a_1, \dots, a_n)$ в радикалах[1], то она позволяет единообразно решить в радикалах все уравнения n-той степени с коэффициентами из $\mathbb{F}$. Из прим. 19.2 на стр. 294 следует, что над полем $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ такой формулы нет. Чтобы проанализировать наличие такой формулы над произвольным полем $\mathbb{F}$, вычислим группу $\operatorname{Gal} f/\Bbbk$. Обозначим через $t_1, \dots, t_n$ корни f в его поле разложения $\mathbb{K} \supset \Bbbk$. Поскольку $\mathbb{K}$ алгебраично над $\Bbbk$, его базис трансцендентности над $\mathbb{F}$ можно выбрать согласно сл. 15.5 из элементов $t_1, \dots, t_n$, порождающих $\mathbb{K}$ как $\mathbb{F}$-алгебру[2]. Так как $\operatorname{tr} \deg_{\mathbb{F}} \mathbb{K} \geqslant n$, базисом трансцендентности $\mathbb{K}$ над $\mathbb{F}$ является весь набор $t_1, \dots, t_n$. В частности, $t_1, \dots, t_n$ алгебраически независимы над $\mathbb{F}$ и различны, многочлен f сепарабелен, а $\mathbb{K} = \mathbb{F}(t_1, \dots, t_n)$ является расширением Галуа поля $\Bbbk = \mathbb{F}(a_1, \dots, a_n)$. Поскольку любая перестановка независимых переменных продолжается до автоморфизма поля рациональных функций, группа $\operatorname{Gal} \mathbb{K}/\Bbbk = S_n$, степень $[\mathbb{K} : \Bbbk] = n!$ и поле инвариантов $\mathbb{F}(t_1, \dots, t_n)^{S_n} = \mathbb{F}(a_1, \dots, a_n)$. Так как при $n \geqslant 5$ подгруппа $A_n \lhd S_n$ проста[3], группа S_n не разрешима, а значит, общее уравнение степени $n \geqslant 5$ не разрешимо в радикалах ни над каким полем $\mathbb{F}$. Этот результат известен как *теорема Абеля*[4].

Упражнение 19.14. Покажите, что поле инвариантов $\mathbb{K}^{A_n}$ подгруппы $A_n \lhd S_n$ является квадратичным расширением поля $\Bbbk$ элементом $\sqrt{D(f)} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n}(t_i - t_j)$.

Замечание 19.2. Отсутствие «общей» формулы для решения в радикалах полиномиального уравнения n-той степени не запрещает существования «конкетных» уравнений, корни которых выражаются через коэффициенты уравнения в радикалах.

Теорема 19.6
Пусть[5] $\operatorname{char}(\Bbbk) = 0$ и $f \in \Bbbk[x]$ приведён и неприводим. Если группа $\operatorname{Gal} f/\Bbbk$ разрешима, то все корни многочлена f выражаются через элементы поля $\Bbbk$ посредством четырёх арифметических действий и извлечения корней.

Доказательство. Обозначим через $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ поле разложения многочлена f, а через $\mathbb{L} \supset \Bbbk$ результат присоединения к $\Bbbk$ первообразного корня степени $n = |\operatorname{Gal} \mathbb{K}/\Bbbk|$ из единицы. Все элементы поля $\mathbb{L}$ выражаются в радикалах через элементы поля $\Bbbk$. По предл. 19.2 на стр. 290 расширение $\mathbb{L}\mathbb{K} \supset \mathbb{L}$ является расширением Галуа, и его группа Галуа G является подгруппой разрешимой группы $\operatorname{Gal} \mathbb{K}/\Bbbk$. Поэтому G тоже разрешима и имеет фильтрацию $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_m = \{e\}$ с простыми циклическими факторами $G_i/G_{i+1} \simeq \mathbb{Z}/(p_i)$. Тем самым, поле $\mathbb{L}\mathbb{K}$ получается из $\mathbb{L}$ последовательными циклическими расширениями Галуа. По теор. 19.4 каждое такое расширение

[1] Как это делает, например, школьная формула $x_\pm = (p \pm \sqrt{p^2 - 4q})/2$ для решения «общего» квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

[2] По теореме Виета a_i являются полиномами от t_i.

[3] См. теор. 19.2 на стр. 352 части I.

[4] Сам Абель доказал эту теорему для поля $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ с привлечением комплексного анализа.

[5] Требование $\operatorname{char}(\Bbbk) = 0$ можно ослабить до требования, чтобы $\operatorname{char}(\Bbbk)$ не совпадала с порядком никакого композиционного фактора Жордана – Гёльдера группы Галуа многочлена f. Приводимое доказательство в этом случае тоже работает.

заключается в присоединении радикала. Поэтому все элементы поля $\mathbb{L}\mathbb{K}$ выражаются в радикалах через элементы поля $\Bbbk$. $\square$

Задачи для самостоятельного решения к §19

Задача 19.1. Пусть $f \in \Bbbk[x]$ неприводим, и $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$. Покажите, что $D(f) \in \Bbbk^2$ если и только если группа $\operatorname{Gal} f/\Bbbk$ осуществляет лишь чётные перестановки корней многочлена f.

Задача 19.2. Найдите группы Галуа над $\mathbb{Q}$ многочленов а) $x^3 - 3x + 1$ б) $x^3 + 2x + 1$ в) $x^4 + 1$ г) $x^4 + x^2 + 1$ д) $x^4 - 5x^2 + 6$ е) $x^4 + 2x^2 + x + 3$ ж) $x^4 + x^2 + x + 1$.

Задача 19.3. Найдите группу Галуа многочлена $x^3 - x - 1$ над полем $\mathbb{Q}[\sqrt{-23}]$.

Задача 19.4. Предъявите неприводимый многочлен $f \in \mathbb{Z}[x]$ степени 6 с группой Галуа S_6 над полем $\mathbb{Q}$.

Задача 19.5. При каких n примитивный корень $\sqrt[n]{1}$ имеет степень 2 над $\mathbb{Q}$?

Задача 19.6. Какие корни из единицы содержатся в поле $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$?

Задача 19.7. Выразите $\sqrt[5]{1}$ через квадратные корни, а $\sqrt{13}$ — через $\sqrt[13]{1}$.

Задача 19.8 (построение Гаусса). Объясните, как построить циркулем и линейкой правильный 17-угольник.

Задача 19.9. Может ли конечное расширение поля $\mathbb{Q}$ содержать бесконечно много корней из единицы?

Задача 19.10. Покажите, что при любом простом $p \in \mathbb{N}$ и любом $a \in \mathbb{Q} \smallsetminus \mathbb{Q}^5$ группа Галуа многочлена $x^p - a$ над $\mathbb{Q}$ изоморфна группе $\operatorname{Aff}_1(\mathbb{F}_p)$ аффинных преобразований прямой $\mathbb{A}^1(\mathbb{F}_p)$.

Задача 19.11. Покажите, что $\mathbb{Q}[\sqrt{p}] \subset \mathbb{Q}[\sqrt[4p]{1}]$ при простом $p \equiv 3 \pmod 4$.

Задача 19.12. Покажите, что каждое квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$ содержится в каком-нибудь круговом поле.

Задача 19.13 (квадратичная взаимность). Для простых $p, q > 2$ положим

$$q_* = (-1)^{\frac{q-1}{2}} q\,, \quad \mathbb{K} = \mathbb{Q}[x]/(x^2 - q_*)$$

и обозначим через $\mathcal{O} \subset \mathbb{K}$ целое замыкание кольца $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Q}$-алгебре $\mathbb{K}$, а через $[z]_p$ — класс элемента z в факторе по главному идеалу (p).

а) Докажите эквивалентность следующих трёх условий: (1) $[q_*]_p \in \mathbb{F}_p^2$ (2) $\mathcal{O}/(p) = \mathbb{F}_p \oplus \mathbb{F}_p$ (3) автоморфизм Фробениуса $F_p : \vartheta \mapsto \vartheta^p$ тождественно действует на $\mathcal{O}/(p)$.

б) Опишите кольцо $\mathcal{O}/(p)$ и действие на нём автоморфизма Фробениуса в случае, когда предыдущие условия не выполнены.

в) Постройте такое вложение $\mathbb{Q}$-алгебр $\mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{Q}[\sqrt[q]{1}] \subset \mathbb{C}$, что эндоморфизм $z \mapsto z^p$ мультипликативной группы $\mathbb{C}^\times$ переводит кольцо целых $\mathcal{O} \subset \mathbb{K}$ в себя, а его приведение по модулю (p) действует на $\mathcal{O}/(p)$ так же, как F_p.

г) Получите явное выражение $\sqrt{q_*}$ через корни q-той степени из единицы и выясните, как действует на него эндоморфизм из предыдущего пункта.

д) Докажите *квадратичный закон взаимности*[1]: $\left[\frac{p}{q}\right] \cdot \left[\frac{q}{p}\right] = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$.

Задача 19.14. Зафиксируем какое-нибудь алгебраическое замыкание $\mathbb{F}$ поля $\mathbb{Q}$ и обозначим через $\Bbbk \subset \mathbb{F}$ максимальное по включению подполе, не содержащее $\sqrt[3]{5}$. Есть ли у поля $\Bbbk$ конечные расширения с нециклической группой Галуа?

[1] Ср. с прим. 19.3 на стр. 295.

Предметный указатель

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 1.1. Пусть нод$(m,n)=d$. Значение $\varphi([a]_m,[b]_n)$ любого $\mathbb{Z}$-билинейного отображения

$$\varphi:\ \mathbb{Z}/(m)\times\mathbb{Z}/(m)\to W \tag{19-17}$$

зависит только от классов $[a]_d,[b]_d\in\mathbb{Z}/(d)$, т. е. имеет вид $\varphi([a]_m,[b]_n)=\varphi([a]_d,[b]_d)$, так как все кратные d числа выражаются в виде $xm+yn$ с $x,y\in\mathbb{Z}$, и

$$\begin{aligned}
&\varphi([a+k_1d]_m,[b+k_2d]_n)=\\
&\quad=\varphi([a+x_1m+y_1n]_m,[b+x_2m+y_2n]_n)=\varphi([a]_m+n[y_1]_m,[b]_n+m[x_1]_n)=\\
&\quad=\varphi([a]_m,[b]_n)+n\varphi([y_1]_m,[b]_n)+m\varphi([a]_m,[x_1]_n)+mn\varphi([y_1]_m,[x_1]_n)=\\
&\quad=\varphi([a]_m,[b]_n)+\varphi([y_1]_m,[nb]_n)+\varphi([ma]_m,[x_1]_n)+\varphi([my_1]_m,[nx_1]_n)=\\
&\quad=\varphi([a]_m,[b]_n)+\varphi([y_1]_m,[0]_n)+\varphi([0]_m,[x_1]_n)+\varphi([0]_m,[0]_n)=\varphi([a]_m,[b]_n)\,.
\end{aligned}$$

Из этого вытекает, что $\mathbb{Z}$-билинейное отображение

$$\tau:\ \mathbb{Z}/(m)\times\mathbb{Z}/(m)\to\mathbb{Z}/(d)\,,\quad ([a]_m,[b]_n)\mapsto[ab]_d$$

универсально. Действительно, для любого $\mathbb{Z}$-билинейного отображения (19-17) линейное отображение $\widetilde{\varphi}:\ \mathbb{Z}/(d)\to W$ со свойством $\varphi=\widetilde{\varphi}\circ\tau$ должно действовать по правилу $[c]_d\mapsto\varphi(1,[c]_d)$, и это правило действительно задаёт такое линейное отображение $\widetilde{\varphi}$, что

$$\widetilde{\varphi}([ab]_d)=\varphi(1,[ab]_d)=a\varphi(1,[b]_d)=\varphi([a]_d,[b]_d)=\varphi([a]_m,[b]_n)\,.$$

Более короткое, но техничное рассуждение см. в прим. 1.6 на стр. 16.

Упр. 1.2. Покажите, что билинейное отображение $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$, $(x,y)\mapsto xy$, универсально, вдохновляясь тем, что $\varphi(a/b,c/d)=\varphi(ab/b,c/bd)=\varphi(1,ac/bd)$ для любого $\mathbb{Z}$-билинейного отображения $\varphi:\ \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\rightrightarrows W$.

Упр. 1.4. В силу биективности отображения Сегре, соотношения инцидентности между прямыми на квадрике Сегре такие же, как между координатными прямыми на $\mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_1$. Так как всякая проходящая через заданную точку p прямая, целиком лежащая на квадрике Сегре S, лежит в пересечении $S\cap T_pS$ квадрики S с её касательной плоскостью в точке p, и плоская коника $S\cap T_pS$ полностью исчерпывается парой пересекающихся в точке p прямых из разных семейств, никаких других прямых на S нет.

Упр. 1.5. $(x+iy)(1\otimes u+i\otimes v)=x\otimes u-y\otimes v+ix\otimes v+iy\otimes u=1\otimes(xu-yv)+i\otimes(xv+yu)$.

Упр. 2.1. $\overline{\beta_{\mathbb{C}}(u_1+iw_1,u_2+iw_2)}=\big(\beta(u_1,u_2)-\beta(w_1,w_2)\big)-i\left(\beta(u_1,w_2)+\beta(w_1,u_2)\right)=\beta_{\mathbb{C}}(u_1-iw_1,u_2-iw_2)=\beta_{\mathbb{C}}(\overline{v}_1,\overline{v}_2)$.

Упр. 2.2. $\overline{\beta\mathrm{H}(u_1+iw_1,u_2+iw_2)}=\big(\beta(u_1,u_2)+\beta(w_1,w_2)\big)+i\left(\beta(u_1,w_2)-\beta(w_1,u_2)\right)=\beta\mathrm{H}(u_1-iv_1,u_2-iv_2)$.

Упр. 2.4. Первое очевидно, второе вытекает из симметричности g и кососимметричности ω, третье — из положительности формы g.

Упр. 2.5. В вещественном базисе пространства V над $\mathbb{R}$ изометричность оператора F равносильна соотношению $F^tBF=B$ на матрицу оператора F и матрицу Грама B формы β. Поскольку этот же базис является базисом пространства $V_{\mathbb{C}}$ над $\mathbb{C}$ и оператор $F_{\mathbb{C}}$ и форма β имеют в нём те же самые матрицы F, B, то же соотношение $F^tBF = B$ влечёт изометричность оператора $F_\mathbb{C}$ по отношению к форме $\beta_\mathbb{C}$.

Упр. 2.6. $\omega_\mathbb{C}(w_1, w_2) = \omega_\mathbb{C}(I_\mathbb{C}w_1, I_\mathbb{C}w_2) = \omega_\mathbb{C}(\pm iw_1, \pm iw_2) = -\omega_\mathbb{C}(w_1, w_2)$ при $w_1, w_2 \in U_\pm$, откуда $g_\mathbb{C}(w_1, w_2) = 0$.

Упр. 3.2. Стандартная эрмитова структура[1] на пространстве $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, рассматриваемом как n^2-мерное комплексное координатное пространство, сопоставляет паре матриц $X = (x_{ij})$, $Y = (y_{ij})$ число $(A, B) \overset{\text{def}}{=} \sum_{ij} a_{ij}\overline{b}_{ij} = \operatorname{tr} AB^\times$, где $B^\times = (b_{ij}^\times) = \overline{B}^t$ имеет $b_{ij}^\times = \overline{b}_{ji}$. Так как унитарная матрица U имеет $U^\times = U^{-1}$, её эрмитова длина $\sqrt{(U, U)} = \sqrt{n}$. Тем самым, группа U_n ограничена. Она замкнута в силу того, что задаётся системой квадратных уравнений на матричные элементы, возникающей из матричного равенства $U^t\overline{U} = E$. Диагональная матрица D с диагональными элементами вида $e^{i\vartheta}$ соединяется с единичной матрицей E гладким путём $\gamma : [0, 1] \to \mathrm{U}_n$, образ которого состоит из диагональных матриц того же вида с $\vartheta \to 0$. Поскольку произвольная унитарная матрица F записывается как $F = CDC^{-1}$ для некоторого $C \in \mathrm{U}_n$, путь $t \mapsto C \cdot \gamma(t) \cdot C^{-1}$ целиком лежит в U_n и соединяет F с E.

Упр. 3.3. Числа $\pm a$ с учётом их кратностей суть все корни характеристического многочлена χ_f оператора f.

Упр. 3.4. Пусть $p : W \to W$ проектирует пространство W на подпространство $U \subset W$ вдоль его ортогонального дополнения $U^\perp$. Поскольку $p^\times p^\times = (pp)^\times = \mathrm{Id}^\times = \mathrm{Id}$, оператор $p^\times$ тоже является проектором. Так как $\ker p^\times = (\operatorname{im} p)^\perp = U^\perp$, а $\operatorname{im} p^\times = (\ker p)^\perp = U$, оператор $p^\times$ тоже проектирует W на U вдоль $U^\perp$. Второе объяснение: в ортонормальном базисе, согласованном с разложением $W = U \oplus U^\perp$, проектор p имеет диагональную матрицу из нулей и единиц, а значит, самосопряжён по сл. 3.2 на стр. 44.

Упр. 3.6. Из равенств $(u + v, u + v) = (u, u) + 2(u, v) + o(|u|)$ и $(f(u + v), f(u + v)) = (fu, fu) + 2(fu, fv) + o(|u|)$ вытекает, что $(u, u)'v = 2(u, v)$ и $(Fu, Fu)'v = 2(Fu, Fv) = 2(F^\times Fu, v)$. Согласно правилу дифференцирования дробей, условие $\varphi'(u) = 0$ означает тогда, что для любого $v \in V$ выполняется равенство $2(f^\times fu, v)(u, u) - 2(fu, fu)(u, v) = 0$. Поэтому

$$f^\times fu = u \cdot (fu, fu)/(u, u)\,,$$

т. е. вектор u является собственным для оператора $f^\times f$ с собственным числом

$$(fu, fu)/(u, u) = (f^\times fu, u)/(u, u)\,.$$

Упр. 3.7. Правило $\|f\| \overset{\text{def}}{=} \max_{\|w\|=1} \|fw\| = \max_{w \neq 0} \|fw\|/\|w\|$ задаёт на овеществлении пространства $\mathrm{End}_\mathbb{C}(W)$ *норму*[2]: положительность и однородность очевидны, неравенство треугольника вытекает из эрмитова неравенства треугольника[3]:

$$\|f + g\| = \max_{\|w\|=1} \|fw + gw\| \leqslant \max_{\|w\|=1} \big(\|fw\| + \|gw\|\big) \leqslant$$
$$\leqslant \max_{\|w\|=1} \|fw\| + \max_{\|w\|=1} \|gw\| = \|f\| + \|g\|\,.$$

[1] См. прим. 2.2 на стр. 25.

[2] Нормой на вещественном векторном пространстве V называется такая функция $V \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, $v \mapsto \|v\|$, что $\|v\| > 0$ для $v \neq 0$, выполняется неравенство треугольника: $\|u+w\| \leqslant \|u\|+\|w\|$ для всех $u, w \in V$, и $\|xv\| = |x|\cdot\|v\|$ для всех $x \in \mathbb{R}$, $v \in V$. Каждая норма определяет на V метрику, и метрическая топология, задаваемая такой метрикой на конечномерном векторном пространстве V не зависит от выбора нормы. Подробности см. в лекции http://82.204.189.191/ps/stud/geom_ru/1617/lec_08.pdf.

[3] См. сл. 3.1 на стр. 38.

Эта норма удовлетворяет неравенству

$$\|fg\| = \max_{w\neq 0}\frac{\|fgw\|}{\|w\|} = \max_{gw\neq 0}\left(\frac{\|fgw\|}{\|gw\|}\cdot\frac{\|gw\|}{\|w\|}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \max_{gw\neq 0}\frac{\|fgw\|}{\|gw\|}\cdot\max_{w\neq 0}\frac{\|gw\|}{\|w\|} \leqslant \max_{v\neq 0}\frac{\|fv\|}{\|v\|}\cdot\|g\| = \|f\|\cdot\|g\|\,,$$

которое вместе с неравенством треугольника позволяет мажорировать норму остатка экспоненциального ряда $e^f = \sum_{m\geqslant 0} f^m/m!$ сходящейся геометрической прогрессией также, как это делается в начальном курсе анализа для экспонент действительных чисел, и дословно те же рассуждения с заменой модуля действительного числа на норму оператора показывают, что экспоненциальный ряд абсолютно сходится всюду на пространстве линейных операторов и задаёт дифференцируемую функцию $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W) \to \mathrm{GL}(W)$, $x \mapsto e^x$, производная которой в точке $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$ — это линейный оператор e^f.

Упр. 4.1. Ненулевые элементы матриц Грама исчерпываются произведениями

$$\langle\, E_{ij}\,,\, E_{ji}\,\rangle = (E_{ij}, E_{ij}) = 1/2\,, \quad \text{где} \quad 1\leqslant i,j\leqslant 2\,,$$
$$\widetilde{\det}(E_{11},E_{22}) = \widetilde{\det}(E_{22},E_{11}) = 1 \quad \text{и} \quad \widetilde{\det}(E_{12},E_{21}) = \widetilde{\det}(E_{21},E_{12}) = -1\,.$$

Упр. 4.2. Для невырожденной матрицы C выполняется равенство $C^\vee = \det(C)\,C^{-1}$. Поэтому для таких матриц $(AB)^\vee = \det(AB)(AB)^{-1} = \det(A)\det(B)\,B^{-1}A^{-1} = B^\vee A^\vee$. Так как пары невырожденных матриц всюду плотны в пространстве всех пар матриц, четыре квадратичных соотношения с целыми коэффициентами на матричные элементы, закодированные в матричном равенстве $(AB)^\vee = B^\vee A^\vee$, тождественно выполняются для всех матриц.

Упр. 4.7. Это сразу следует из форм. (4-7) на стр. 54.

Упр. 4.8. Если $q^2 = 1$, то $\|q\|^2 = 1$ и $q^* = q^{-1} = q$, откуда $q \in \mathbb{R}$.

Упр. 4.10. Пусть $|G| = 2^n$. При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть $n > 1$ и $g \in G$ имеет порядок 2^k. Если $k < n$, то по индукции в циклической 2-подгруппе, порождённой g, есть элемент порядка 2. Если $k = n$, то $g^{2^{n-1}}$ имеет порядок 2.

Упр. 4.12. Так как $\boldsymbol{l}$ пропорционален $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k} \in \Pi_q \cap 1^\perp$ и $\|\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\| = \sqrt{3}$, мы заключаем, что $q = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{l}$.

Упр. 4.13. Изоморфизм $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \xrightarrow{\sim} T$ является композицией изоморфизма $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq A_4$, задаваемого тавтологическим действием группы $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$ на четырёх точках проективной прямой $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_3) = \{(1:0),(0:1),(1:1),(1:-1)\}$, и изоморфизма $A_4 \xrightarrow{\sim} T$, сопоставляющего чётной перестановке вершин тетраэдра осуществляющее её вращение. В упр. 19.11 на стр. 351 части I мы видели, что при факторизации по $\pm E$ коммутант $\mathrm{SL}_2'(\mathbb{F}_3) \simeq Q_8 = \{\pm E,\, \pm I,\, \pm J,\, \pm K\}$, где

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\,,\quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\,,\quad K = \begin{pmatrix} -1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\,,$$

переходит в группу Клейна $V_4 \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$, осуществляющую независимые транспозиции двух пар точек на $\mathbb{P}_1$. Матрицы

$$\pm\frac{1}{2}(E+I+J+K) = \mp(E+I+J+K) = \mp\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} : (0:1)\mapsto(1:1)\mapsto(1:-1)$$

$$\pm\frac{1}{2}(E+I+J-K) = \mp(E+I+J-K) = \pm\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix} : (1:0)\mapsto(0:1)\mapsto(1:1)$$

$$\pm\frac{1}{2}(E+I-J+K) = \mp(E+I-J+K) = \pm\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} : (1:0)\mapsto(1:-1)\mapsto(0:1)$$

$$\pm\frac{1}{2}(E-I+J+K) = \mp(E-I+J+K) = \mp\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} : (1:0)\mapsto(1:1)\mapsto(1:-1)$$

переходят в четыре 3-цикла, оставляющие на месте четыре разные точки на $\mathbb{P}_1$:

$$(1:0),\quad (1:-1),\quad (1:1),\quad (0:1)$$

соответственно. Четыре обратные к ним матрицы перейдут в четыре обратных 3-цикла.

Упр. 4.15. Обозначим сторону икосаэдра через a. Гипотенуза прямоугольного треугольника в левом верхнем углу квадрата на рис. 4◇3 на стр. 61 равна высоте правильного треугольника со стороной a, а его катеты равны $1-a/2$ и 1, откуда $a^2+2a-4=0$ и $a=\sqrt{5}-1$. Точка $N = \boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}a/2 = \boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}\vartheta^{-1}$ удалена от центра куба на расстояние $\sqrt{1+a^2/4} = \sqrt{1+\vartheta^{-2}} = \vartheta/\sqrt{1+\vartheta^2}$.

Упр. 4.17. При $\boldsymbol{n}\neq\boldsymbol{m}$ операторы $I'_{\boldsymbol{m}}, I'_{\boldsymbol{n}}$ по разному действуют на 1, как и операторы $I'_{\boldsymbol{m}}, I''_{\boldsymbol{n}}$, а также операторы $I'_{\boldsymbol{m}}, I''_{\boldsymbol{n}}$ с $\boldsymbol{m}\neq\boldsymbol{n}$. Операторы $I'_{\boldsymbol{n}}, I''_{\boldsymbol{n}}$ по разному действуют на ортогональные $\boldsymbol{n}$ чисто мнимые кватернионы длины 1

Упр. 5.1. Это делается дословно также, как в предл. 1.2 на стр. 8.

Упр. 5.2. Выберем базис E в $U\cap W$, дополним его множествами E' и E'' до базисов в U и W соответственно, и зафиксируем в V базис вида $E\sqcup E'\sqcup E''\sqcup E'''$. Пространство $U^{\otimes n}\cap W^{\otimes n}$ состоит из линейных комбинаций тензорных мономов, составленных из базисных векторов, лежащих в E, и стало быть, совпадает с $(U\cap W)^{\otimes n}$.

Упр. 5.3. Для любых $x,y\in I$ произведение $(a+x)(b+y) = ab+(ay+xb+xy)\cong ab \pmod{I}$. Обратите внимание, что для только левых или только правых идеалов это может быть неверно.

Упр. 5.4. Каждое линейное отображение $f : V\to A$ в коммутативную $\Bbbk$-алгебру A однозначно поднимается по универсальному свойству тензорной алгебры до гомоморфизма алгебр $\tilde f : TV\to A$ по формуле $\tilde f(v_1\otimes\ldots\otimes v_n) = f(v_1)\ldots f(v_n)$. Так как в коммутативной алгебре $f(u)f(w) = f(w)f(u)$ для всех $u,w\in V$, гомоморфизм $\tilde f$ аннулирует все разности $u\otimes w - w\otimes u$ и пропускается через факторизацию $TV\twoheadrightarrow T/\mathcal{J}_{\mathrm{com}}\simeq SV$. Это доказывает выполнение универсального свойства. То, что SV и ι однозначно им определяются, устанавливается дословно так же, как в предл. 1.2 на стр. 8.

Упр. 5.5. Дословно те же аргументы, что и для тензорного произведения, см. предл. 1.2 на стр. 8.

Упр. 5.6. Ответ: $\binom{n+d-1}{d-1}$. Это число решений уравнения $m_1+\ldots+m_d = n$ в неотрицательных целых числах $m_1,\ldots,m_d$.

Упр. 5.7. Для любого конечного набора векторов в $\Bbbk^n$ (над любым полем $\Bbbk$) существует многочлен, принимающий на этих векторах любые наперёд заданные значения. Многочлен x^p-x задаёт тождественно нулевую функцию на прямой над полем $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$.

Упр. 5.8. Форма α меняет знак при транспозиции любых двух аргументов, поскольку

$$0 = \alpha(\dots,(v+w),\dots,(v+w),\dots) = \alpha(\dots,v,\dots,w,\dots) + \alpha(\dots,w,\dots,v,\dots)\,.$$

Упр. 5.9. Дословно те же аргументы, что и в предл. 1.2 на стр. 8.

Упр. 5.10. Отправляя линейную форму $\xi : \Lambda^n V \to \Bbbk$ в её композицию с антикоммутативным умножением $\alpha_n : V\times\ldots\times V \to \Lambda^n V$, мы получаем линейное отображение $(\Lambda^n V)^* \to \mathrm{Alt}^n(V,\Bbbk)$, являющееся изоморфизмом в силу универсального свойства α_n.

Упр. 5.11. Стабилизатор каждого слагаемого состоит из $\prod_{e\in E} m(e)!$ перестановок одинаковых базисных векторов между собою.

Упр. 5.12. Так как сопряжение $\mathrm{Ad}_g : S_n \xrightarrow{\sim} S_n$, $h \mapsto ghg^{-1}$, является биекцией и $\mathrm{sgn}(ghg^{-1}) = \mathrm{sgn}(g)$, мы заключаем, что

$$\begin{aligned}\mathrm{sym}_n \circ g &= \Big(\frac{1}{n!}\sum\nolimits_{h\in S_n} h\Big)\,g = \Big(\frac{1}{n!}\sum\nolimits_{h\in S_n} ghg^{-1}\Big)\,g = \\ &= \frac{1}{n!}\sum\nolimits_{h\in S_n} gh = g\,\Big(\frac{1}{n!}\sum\nolimits_{h\in S_n} h\Big) = g\circ \mathrm{sym}_n\,, \\ \mathrm{alt}_n \circ g &= \Big(\frac{1}{n!}\sum\nolimits_{h\in S_n} \mathrm{sgn}(h)\,h\Big) g = \Big(\frac{1}{n!}\sum\nolimits_{h\in S_n} \mathrm{sgn}(h)\,ghg^{-1}\Big)\,g = \\ &= \frac{1}{n!}\sum\nolimits_{h\in S_n} \mathrm{sgn}(h)\,gh = g\,\Big(\frac{1}{n!}\sum\nolimits_{h\in S_n} \mathrm{sgn}(h)\,h\Big) = g\circ \mathrm{alt}_n\,.\end{aligned}$$

Упр. 5.13. Выберем в V базис $e_1,\dots,e_d$. Покажите, что $(d^3-d)/3$ коммутаторов $[[e_i,e_j],e_k]$, где $i<j$ и $i\leqslant k$, составляют базис векторного подпространства $\mathrm{Lie}^3\,V \subset V^{\otimes 3}$. Затем убедитесь в том, что линейная оболочка S^3-орбиты каждого коммутатора $c=[u,[v,w]]$ является двумерным векторным пространством, на котором группа S^3 действует как группа треугольника с вершинами в c, τc, $\tau^2 c$, и у этого действия нет инвариантных одномерных подпространств. Из этого вытекает, что линейные оболочки S^3-орбит двух коммутаторов c_1 и c_2 либо совпадают, либо имеют нулевое пересечение. Выведите отсюда, что сумма S^3-орбит базисных коммутаторов $[[e_i,e_j],e_k]$ прямая и совпадает с $\mathrm{Lie}^3\,V \oplus \tau\,\mathrm{Lie}^3\,V$. Так как последняя сумма содержится в $\mathrm{im}\,\pi_\Delta$ и $\dim\mathrm{im}\,\pi_\Delta = d^3 - \dim\mathrm{Sym}^3\,V - \dim\mathrm{Alt}^3\,V = 2(d^3-d)/3$, это включение является равенством.

Упр. 5.14. Для каждого $v\in V$ отображение $\mathrm{ad}_v : TV \to TV$, $x\mapsto [v,x] = v\otimes x - x\otimes v$ действует на тензорные произведения по *правилу Лейбница*:

$$\begin{aligned}&\mathrm{ad}_v(x\otimes y) = v\otimes x\otimes y - x\otimes y\otimes v = \\ &\qquad = v\otimes x\otimes y - x\otimes v\otimes y + x\otimes v\otimes y - x\otimes y\otimes v = \mathrm{ad}_v(x)\otimes y + x\otimes \mathrm{ad}_v(y)\,.\end{aligned}$$

Поэтому и на коммутаторы оно тоже действует по правилу Лейбница:

$$\begin{aligned}&\mathrm{ad}_v([x,y]) = \mathrm{ad}_v(x\otimes y - y\otimes x) = \mathrm{ad}_v(x\otimes y) - \mathrm{ad}_v(y\otimes x) = \\ &\qquad = \mathrm{ad}_v(x)\otimes y + x\otimes \mathrm{ad}_v(y) - \mathrm{ad}_v(y)\otimes x - y\otimes \mathrm{ad}_v(x) = [\mathrm{ad}_v(x),y] + [x,\mathrm{ad}_v(y)]\,.\end{aligned}$$

В силу знакопеременности коммутаторов, это равенство переписывается как

$$[v,[x,y]] = [[v,x],y] + [x,[v,y]] = -[y,[v,x]] - [x,[y,v]]\,,$$

а это и есть тождество Якоби $[v,[x,y]] + [y,[v,x]] + [x,[y,v]] = 0$.

Упр. 6.1. См. идущее следом предл. 6.1.

Упр. 6.2. Переговорите рассуждения из прим. 1.2 на стр. 9.

Упр. 6.3. Пусть все тензоры вида $v^{\otimes n}$ с $f(v) \neq 0$ лежат в гиперплоскости $\operatorname{Ann}\psi$, где ψ — линейная форма на $\operatorname{Sym}^n(V)$. Функция $g(v) = \psi(v^{\otimes})$ является однородным многочленом степени n на V. По условию, многочлен fg тождественно зануляется на V. Тем самым, он нулевой, откуда $g = 0$, так как $f \neq 0$. Тем самым $\psi(v^{\otimes}) = 0$ для всех $v \in V$, что противоречит предл. 6.2.

Упр. 6.4. Первое вытекает из равенств $\mathrm{pl}_u\mathrm{pl}_w f(v) = \tilde{f}\left(u, w, v^{n-1}\right) = \mathrm{pl}_w\mathrm{pl}_u f(v)$. Вторая формула трилинейна по v, f, g, и её достаточно проверить для $v = e_i$, $f = x_1^{m_1}! \dots x_d^{m_d}$, $g = x_1^{k_1} \dots x_d^{k_d}$.

Упр. 6.5. Если $g(x) = \tilde{f}(q^{n-k}, x^k)$, то $\widetilde{g}(q^{k-m}, x^m) = \tilde{f}(q^{n-m}, x^m)$ при всех $m < k$.

Упр. 6.6. Разложите $\det X$ по i-й строке и продифференцируйте.

Упр. 6.8. Пусть x_0, x_1 составляют базис в V^*, в качестве базиса в S^nV^* возьмём одночлены $\binom{n}{k}x_0^k x_1^{n-k}$, где $0 \leqslant k \leqslant n$, и обозначим через $(a_0 : a_1 : \dots : a_n)$ однородные координаты на $P_n = \mathbb{P}(S^nV^*)$ в этом базисе. Вложение Веронезе

$$v_{1,n} \colon \mathbb{P}(V^*) \hookrightarrow \mathbb{P}(S^nV^*)\,, \quad \vartheta_0 x_0 + t_1 x_1 \mapsto \sum_k t_0^k t_1^{n-k}\binom{n}{k} x_0^k x_1^{n-k}$$

переводит точку $p = (p_0 : p_1) \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(V^*)$ внутрь гиперплоскости, заданной уравнением $\vartheta_0 a_0 + \vartheta_1 a_1 + \dots + \vartheta_n a_n = 0$, где $\vartheta_i \in \Bbbk$, если и только если p является корнем ненулевого однородного многочлена $\vartheta_0 t_0^n + \vartheta_1 t_0^{n-1} t_1 + \dots + \vartheta_n t_1^n$, имеющего не более n различных корней на $\mathbb{P}_1$.

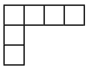
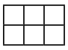
Упр. 6.10. Выберем в V базис $e_1, \dots, e_n$. Если в разложении ω по базисным мономам есть моном, не содержащий вектора e_i, то $e_i\omega \neq 0$.

Упр. 6.13. Билинейность и невырожденность очевидны, симметричность вытекает из того, что однородные грассмановы многочлены степени два коммутируют друг с другом. Ненулевые элементы матрицы Грама исчерпываются $q_{12,34} = q_{14,23} = 1$, $q_{13,24} = -1$ и симметричными им.

Упр. 7.3. Поскольку Δ_δ обращается в нуль при подстановке $x_i = x_j$, он делится в кольце $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ на $(x_i - x_j)$. Так как каждая из разностей $(x_i - x_j)$ неприводима, f делится на $\prod_{i<j}(x_i - x_j)$. Сравнивая лексикографически старшие мономы в этом произведении и в Δ_δ, заключаем, что частное равно 1.

Упр. 7.4. В правом нижнем углу матрицы $\left(h_{\lambda_i + j - i}\right)$, начиная с позиции $(m+1, m+1)$, где m — высота диаграммы λ, будет стоять верхняя унитреугольная матрица, левее которой все элементы в строках будут нулевые.

Упр. 8.1. Устойчивое паросочетание между i-м и $(i+1)$-м столбцом устанавливается так: последовательно перебираем шарики в $(i+1)$-ом столбце двигаясь снизу вверх и назначаем очередному шарику ***ш*** партнёром самый верхний шар i-го столбца, лежащий строго ниже ***ш*** и ещё не назначенный никому партнёром, а если таких шаров нет, объявляем ***ш*** свободным. После того, как все шары $(i+1)$-го столбца разделены на свободные и имеющие партнёров, все шары i-го столбца, не являющиеся ничьими партнёрами, тоже объявляются свободными. Операция L_i перемещает на одну клетку влево самый верхний свободный шар $(i+1)$-го столбца или ничего не делает, если свободных шаров в $(i+1)$-ом столбце нет. Операция R_i перемещает на одну клетку вправо самый нижний свободный шар i-го столбца или ничего не делает, если в i-ом столбце нет свободных шаров.

Упр. 8.3. Диаграммы  и  несравнимы по отношению $\trianglerighteq$.

Упр. 8.4. $s_{(1)} \cdot s_{(1,1)} = s_{(2,1)} + s_{(1,1,1)} = s_{(1,1)} \cdot s_{(1)}$

Упр. 8.5. Для вычисления $s_\lambda \cdot e_k$ к диаграмме λ надо дописать k клеток и заполнить их без повторений числами от 1 до k. Попадание двух таких клеток в одну строку противоречит либо табличному ограничению, либо ограничению Яманучи. Для вычисления $s_\lambda \cdot h_k$ к диаграмме λ надо дописать k клеток, заполненных единицами. Попадание двух таких клеток в один столбец противоречит табличному ограничению.

Упр. 9.1. Для всех $w \in W$ и $u \in U$ вектор $f(w + u) = fw + fu$ лежит в том же классе, что и fw, поскольку $fu \in U$.

Упр. 9.3. Верхней гранью цепи из $\mathcal{S}'$ является объединение всех модулей цепи.

Упр. 9.4. Пусть $w = u + v$. Тогда $fw = fu + fv$ и $fv \in V$. Поэтому $\pi(fw) = fu = f\pi(w)$.

Упр. 9.5. Пусть $\pi(S) \neq 0$ для простого подмодуля $U \subset W$. Поскольку $f\pi(s) = \pi(fs) \in \pi(S)$ для всех $f \in R$ и $s \in S$, подпространство $\pi(S)$ является R-подмодулем. Для любого R-подмодуля $M \subset \pi(S)$ пересечение

$$S \cap \pi^{-1}(M) = \{s \in S \mid \pi(s) \in M\}$$

является R-подмодулем в S: если $\pi(s) \in M$, то $\pi(fs) = f\pi(s) \in M$ для всех $f \in R$ и $s \in S$. Так как в S нет ненулевых собственных подмодулей, их нет и в $\pi(S)$.

Упр. 9.6. Верхней гранью цепи из $\mathcal{S}$ является объединение или, что то же самое, прямая сумма всех модулей цепи.

Упр. 9.7. (а) и (б) проверяются непосредственно; (в) проверяется так: если $\varphi(v) = 0$, то $\varphi(fv) = f\varphi(v) = f(0) = 0$ для всех $f \in R$, а если $v = \varphi(u)$, то $fv = f\varphi(u) = \varphi(fu)$ для всех $g \in R$; (г) фактически было доказано в упр. 9.5.

Упр. 9.9. $\varphi\psi = \sum_{\alpha,\beta} \iota_\alpha \varphi_{\alpha\beta} \pi_\beta \circ \sum_{\mu,\nu} \iota_\mu \varphi_{\mu\nu} \pi_\nu = \sum_{\alpha,\nu} \iota_\alpha p_{\alpha\nu} \pi_\nu$, где $p_{\alpha\nu} = \sum_\eta \varphi_{\alpha\eta} \psi_{\eta\nu}$, так как

$$\pi_\beta \iota_\mu = \begin{cases} \mathrm{Id}_{V_\eta} & \text{если } \beta = \mu = \eta \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Упр. 9.10. Из равенства $\mathrm{Ass}(R) = \mathrm{End}(V)$ вытекает, что A_R действует транзитивно на ненулевых векторах пространства V, т. е. A_R-орбита любого ненулевого вектора совпадает со всем пространством V.

Упр. 9.14. Поскольку правило $g : \varphi \mapsto g\varphi g^{-1}$ линейно по φ, его достаточно проверять только на разложимых $\varphi = \xi \otimes w$ с $\xi \in U^*$, $w \in W$. По определению

$$\varrho^* \otimes \lambda(g) : \xi \otimes w \mapsto \varrho(g^{-1})^* \xi \otimes \lambda(g) w = (\xi \circ g^{-1}) \otimes (gw).$$

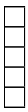
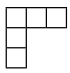
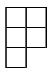
Этот оператор переводит $u \in U$ в $\xi(g^{-1}u) \cdot gw = g\left(\xi(g^{-1}u) \cdot w\right) = g \circ (\xi \otimes w) \circ g^{-1}(u)$.

Упр. 9.19. Пусть множество различных гомоморфизмов $\psi_\nu : G \to \Bbbk^*$ линейно зависимо. Рассмотрим линейную зависимость $\lambda_1\psi_1 + \ldots + \lambda_n\psi_n = 0$ с минимально возможным числом слагаемых и какой-нибудь элемент $h \in G$, на котором $\psi_1(h) \neq \psi_2(h)$. Поскольку для каждого $g \in G$ выполняется равенство $\sum_i \lambda_i \psi_i(h) \psi_i(g) = \sum_i \lambda_i \psi_i(hg) = 0$, имеется ещё одно линейное соотношение между функциями ψ_i с коэффициентами $\lambda_i\,\psi_i(h)$. Деля все коэффициенты на $\psi_1(h)$ и вычитая из первой зависимости, получаем линейную зависимость между ψ_i с нулевым коэффициентом при ψ_1 и ненулевым коэффициентом при ψ_2. Она нетривиальна и содержит меньше слагаемых. Противоречие.

Упр. 10.6. Диагонали двумерных граней куба являются рёбрами двух центрально симметричных тетраэдров. Движения куба, осуществляющие чётную перестановку диагоналей, переводят каждый из этих двух тетраэдров в себя, осуществляя чётные перестановки их вершин. Каждое движение куба, осуществляющее нечётную перестановку его диагоналей, переводит тетраэдры друг в друга. Тензорное произведение такого движения со знаковым представлением есть ни что иное, как его композиция с центральной симметрией. Такая композиция переводит каждый из двух тетраэдров в себя и осуществляет нечётную перестановку их вершин.

Упр. 10.10. Поскольку каждый оператор $g \in G$ диагонализуем, в V существует базис $e_1, \dots, e_d$ из собственных векторов оператора g. Обозначим их собственные числа через $x_1, \dots, x_n$. Тогда базисы из мономов $e_1^{m_1} \dots e_d^{m_d}$ и грассмановых мономов $e_1 \wedge \dots \wedge e_i, n$ в пространствах $S^n V$ и $\Lambda^n V$ будут собственными для операторов $S^n g$ и $\Lambda^n g$ соответственно, и их собственными числами будут всевозможные мономы $x_1^{m_1} \dots x_d^{m_d}$ с $m_1 + \dots + m_d = n$ и всевозможные полилинейные мономы $x_{i_1} \dots x_{i_n}$, откуда $\operatorname{tr} S^n g = h_n(x_1, \dots, x_d)$ и $\operatorname{tr} \Lambda^n g = e_n(x_1, \dots, x_d)$. С другой стороны, $\det(1 + tg) = \prod_i (1 + t x_i) = E(t)$ и $\det(1 - tg)^{-1} = 1/E(-t) = H(t)$ суть производящие функции для многочленов[1] e_n и h_n.

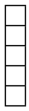
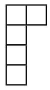
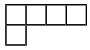
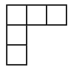
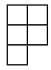
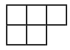
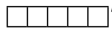
Упр. 10.11. Группа A_5 имеет два трёхмерных неприводимых представления вращениями икосаэдра (отличающиеся на композицию с внешним автоморфизмом A_5, который задаётся сопряжением любой транспозицией внутри S_5) и четырёхмерное представление вращениями симплекса. Полная таблица неприводимые характеров A_5 такова:

классы				(12345)	(21345)
число элементов	1	20	15	12	12
значения характеров:					
тривиальный	1	1	1	1	1
икосаэдр-1	3	0	-1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
икосаэдр-2	3	0	-1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
симплициальный	4	1	0	-1	-1
пятимерный	5	-1	1	0	0

Группа S_5 имеет знаковое одномерное представление sgn и симплициальное представление Δ. Представления $\operatorname{sgn} \otimes \Delta$ и $\Lambda^2 \Delta$ тоже неприводимы, а $S^2 \Delta = \operatorname{sgn} \oplus \Delta \oplus \zeta$, где ζ — неприводимое пятимерное представление, которое геометрически описывается как действие $S_5 \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ на пространстве функций на $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_5)$ с нулевой суммой значений (изоморфизм $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5) \xrightarrow{\sim} S_5$

[1]См. n° 7.2 на стр. 104 и n° 7.3 на стр. 105.

описан в зад. 20.4 на стр. 384 части I). Ответ:

классы							′
число элементов	1	10	30	20	15	20	24
значения характеров:							
тривиальный	1	1	1	1	1	1	1
знаковый α	1	-1	-1	1	1	-1	1
симплициальный ϑ	4	2	0	1	0	-1	-1
четырёхмерный $\vartheta \otimes \alpha$	4	-2	0	1	0	1	-1
шестимерный $\Lambda^2\vartheta$	6	0	0	0	-2	0	1
пятимерный $\zeta \subset S^2\vartheta$	5	1	-1	-1	1	1	0
пятимерный $\zeta \otimes \alpha$	5	-1	1	-1	1	-1	0

Упр. 10.12. Выберите в $U \otimes W$ базис, согласованный с этим прямым разложением и рассмотрите соответствующий ему базис из мономов m-й степени.

Упр. 10.14. Каноническое отображение B-модулей $B \otimes_A A \to B$, ассоциированное с вложением A-модулей $A \hookrightarrow B$, является изоморфизмом для любого расширения $A \subset B$ ассоциативных алгебр с единицами.

Упр. 10.18. Зафиксируем систему представителей $\{g_1, \dots, g_r\}$ смежных классов G/H. Тогда $G = g_1H \sqcup \dots \sqcup g_rH = Hg_1^{-1} \sqcup \dots \sqcup Hg_r^{-1}$, и каждый H-инвариантный оператор $\varphi : \Bbbk[G] \to V$ однозначно задаётся указанием s векторов $v_\nu = \varphi\left(g_\nu^{-1}\right) \in V$ ибо действует на остальные базисные векторы по правилу $\varphi\left(hg_\nu^{-1}\right) = hv_\nu$. Поэтому

$$\dim \mathrm{Hom}_H(\Bbbk[G], V) = [G : H] \cdot \dim V = \dim \Bbbk[G] \otimes_{\Bbbk[H]} V .$$

Преобразование Фурье от H-инвариантного оператора $\varphi : g_\nu^{-1} \mapsto v_\nu$ равно

$$\frac{1}{|G|} \sum\nolimits_{g \in G} g^{-1} \otimes_{\Bbbk[H]} \varphi(g) = \frac{1}{|G|} \sum\nolimits_\nu \sum\nolimits_{h \in H} g_\nu h^{-1} \otimes_{\Bbbk[H]} \varphi\left(hg_\nu^{-1}\right) = \frac{|H|}{|G|} \sum\nolimits_\nu g_\nu v_\nu \in \bigoplus\nolimits_\nu g_\nu V$$

и зануляется только когда все $v_\nu = 0$.

Упр. 11.2. Примените сл. 11.1 на стр. 165 к перестановке g^{-1}.

Упр. 11.3. Аналогом равенства (11-6) и лем. 11.2 является равенство $\mathrm{sgn}(q)qs'_Tp = s'_T$, справедливое для всех $p \in R_T$, $q \in C_T$, и утверждение о том, что пространство

$$E'_T = \{f \in \mathbb{C}[S_n] \mid \forall p \in R_T\ \forall q \in C_T\ \ \mathrm{sgn}(q)qfp = f\}$$

одномерно и порождается симметризатором s'_T. Последнее доказывается при помощи упр. 11.2 дословно также, как лем. 11.2. Дополнением к лем. 11.4 на стр. 166 является равенство $s'_T\mathbb{C}[S_n]\,s'_U = 0$, справедливое при $\lambda(T) > \lambda(U)$ и непосредственно вытекающее из оригинальной лем. 11.4. Утверждения из лем. 11.3 и теор. 11.1 на стр. 166, как и их доказательства, сохраняют силу после замены s на s'.

Упр. 11.5. Будем писать $T \succ_a U$, если $T \succ U$, и наибольшее из чисел, стоящих в заполнениях T и U в разных клетках, равно a. Если $T \succ_a U$ и $U \succ_b W$, то $T \succ_a W$ при $a \geqslant b$ и $T \succ_b W$ при $a \leqslant b$.

Упр. 11.6. Для всех $q \in R_T$ и $p \in C_U$ выполнено строгое неравенство $pU > qT$. По лем. 11.1 существует транспозиция $\tau \in R_U \cap C_T$, и вычисление (11-13) показывает, что $c_T\{U\} = 0$.

Упр. 11.9. Вычисление аналогично вычислению определителя Вандермонда: в кольце многочленов $\mathbb{Z}[\eta_1, \dots, \eta_n]$ определитель делится на каждую из разностей $\eta_i - \eta_j$, а значит, и на $\prod_{i<j}(\eta_i - \eta_j)$. Сравнение лексикографически старших мономов показывает, что частное равно 1.

Упр. 11.10. Индукцией по количеству столбцов покажите, что произведение длин крюков любой диаграммы λ равно $\prod_i \eta_i! / \prod_{i<j}(\eta_i - \eta_j)$, где $\eta = \lambda + \delta$, и воспользуйтесь формулой Фробениуса. Индуктивный переход основан на том, что длина крюка i-той сверху клетки первого столбца равна $\eta_i - n + \ell$, где ℓ — число строк в диаграмме.

Упр. 12.2. Это вытекает из равенств

$$(E + tX)^t(E + tX) = E + t(X^t + X) + \text{члены, делящиеся на } t^2, ,$$
$$(E + tX)^t J(E + tX) = J + t(X^t J + JX) + \text{члены, делящиеся на } t^2, .$$

Упр. 12.3. Отображение $\mathrm{Ad}\colon\ \mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}(\mathrm{Mat}_n)$ является композицией отображения

$$\varphi\colon\ \mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n\,, \quad F \mapsto (F, F^{-1})$$

и $\psi\colon\ \mathrm{Mat}_n \times \mathrm{Mat}_n \to \mathrm{End}(\mathrm{Mat}_n)$, сопоставляющего паре матриц (X, Y) оператор $Z \mapsto XZY$. Поскольку $(E + X)Z(E + Y) = Z + XZ + ZY + o(X, Y)$, дифференциал

$$D_{(E,E)}\psi\colon\ \mathrm{Mat}_n \times \mathrm{Mat}_n \to \mathrm{End}(\mathrm{Mat}_n)$$

переводит пару матриц (X, Y) в оператор $Z \mapsto XZ + ZY$. Отображение φ является прямой суммой тождественного отображения $\mathrm{Id}_{\mathrm{GL}_n}$ с тождественным дифференциалом и отображения обращения $\iota\colon\ \mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_n$, $F \mapsto F^{-1}$, и $D_E\varphi(X) = (X, D_E\iota(X))$. Композиция $\mu\varphi$ отображения φ с отображением умножения $\mu\colon\ \mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_n$, $(F, G) \mapsto FG$, тождественно отображает GL_n в единицу и имеет нулевой дифференциал. Поскольку $(E+X)(E+Y) = E+X+Y+o(X, Y)$, дифференциал $D_{(E,E)}\mu\colon\ \mathrm{Mat}_n \times \mathrm{Mat}_n \to \mathrm{Mat}_n$ переводит (X, Y) в $X + Y$. Мы заключаем, что $X + D_E\iota(X) = 0$, откуда $D_E\varphi(X) = (X, -X)$. Тем самым, $D_E\,\mathrm{Ad} = D_{(E,E)}\psi \circ D_E\varphi$ переводит матрицу X в оператор $Z \mapsto XZ - ZX$.

Упр. 12.5. Модифицируйте доказательство предл. 1.1 на стр. 8.

Упр. 12.6. Это вытекает из универсального свойства тензорной алгебры[1] и наложенных соотношений.

Упр. 12.9. Первое утверждение является следствием тождества Якоби, второе достаточно проверять на разложимых тензорах.

Упр. 12.11. Если $V = \Bbbk\, e_1 \oplus \ldots \oplus \Bbbk\, e_n$, то $\overline{\Bbbk} \otimes V \simeq \overline{\Bbbk}\, e_1 \oplus \ldots \oplus \overline{\Bbbk}\, e_n$ в силу канонического изоморфизма дистрибутивности из предл. 1.7 на стр. 12.

Упр. 13.1. Транзитивность очевидна, рефлексивность — взять $\xi = \mathrm{Id}$, кососимметричность: в силу возможности сокращать слева (соотв. справа), равенства $\varphi = \psi\xi = \varphi\xi'\xi$ (соотв. $\varphi = \xi\psi = \xi\xi'\psi$) влекут $\xi'\xi = \mathrm{Id}$ (соотв. $\xi\xi' = \mathrm{Id}$), а равенства $\psi = \varphi\xi' = \psi\xi\xi'$ (соотв. $\psi = \varphi\xi' = \psi\xi\xi'$) влекут $\xi\xi' = \mathrm{Id}$ (соотв. $\xi\xi' = \mathrm{Id}$)

[1]См. предл. 5.1 на стр. 67.

Упр. 13.5. Типичный ответ: «$\ln|x| + C$, где C — произвольная константа» *неверен*[1]. На самом деле деле C является сечением *постоянного пучка* $\mathbb{R}^{\sim}$ над несвязным открытым множеством $\mathbb{R} \smallsetminus 0$.

Упр. 13.11. Элементу $a \in F(A)$ отвечает естественное преобразование

$$f_X : \operatorname{Hom}(A, X) \to F(X),$$

посылающее стрелку $\varphi : A \to X$ в значение отображения $F(\varphi) : F(A) \to F(X)$ на элементе a. Обратное отображение сопоставляет естественному преобразованию f_* значение отображения $f_A : h^A(A) \to F(A)$ на элементе $\mathrm{Id}_A \in h^A(A)$. Проверяется это с помощью построенной по произвольной стрелке $\varphi : A \to X$ диаграммы

$$\begin{tikzcd} h^A(A) = \operatorname{Hom}(A, A) \arrow[r, "h^A(\varphi)"] \arrow[d, "f_A"'] & \operatorname{Hom}(A, X) = h^A(X) \arrow[d, "f_X"] \\ F(A) \arrow[r, "F(\varphi)"] & F(X), \end{tikzcd} \tag{19-18}$$

верхняя строка которой переводит Id_A в φ, так что $f_X(\varphi) = F(\varphi)\big(f_A(\mathrm{Id}_A)\big)$.

Упр. 14.8. Это следует из лем. 1.1 на стр. 12.

Упр. 14.11. Отображения $\operatorname{Hom}_{\mathcal{Mod}\text{-}B}(B, Y) \to Y$, $\varphi \mapsto \varphi(1)$, и $Y \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{Mod}\text{-}B}(B, Y) \to Y$, $y \mapsto (\varphi : b \mapsto yb)$, являются взаимно обратными A-линейными справа изоморфизмами.

Упр. 14.13. Отображения $x \otimes_B b \mapsto xb$ и $x \mapsto x \otimes \otimes_B 1$ являются взаимно обратными A-линейными справа изоморфизмами между $X \otimes_B B$ и X.

Упр. 14.15. Непрерывному отображению $f : |X| \to Y$ из $\operatorname{Hom}_{\mathcal{Top}}(|X|, Y)$ биективно соответствует естественное по $[n] \in \operatorname{Ob}\varDelta$ преобразование $f_n : X_n \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{Top}}(\varDelta^n, Y)$ из $\operatorname{Hom}_{p\mathcal{Sh}}(X, S(Y))$, сопоставляющее точке $x \in X_n$ композицию

$$f \circ \iota|_{x \times \varDelta^n} : \varDelta^n \to |X| \to Y,$$

где $\iota|_{x \times \varDelta^n} : \varDelta^n \to |X|$ это ограничение отображения факторизации[2]

$$\iota : \bigsqcup_{n \geqslant 0} X_n \times \varDelta^n \to |X|$$

на правильный симплекс $\{x\} \times \varDelta^n \subset X_n \times \varDelta^n$ (убедитесь, что f_n функториально зависит от комбинаторного симплекса $[n]$). Обратная биекция сопоставляет естественному по $[n] \in \operatorname{Ob}\varDelta$ набору отображений $f_n : X_n \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{Top}}(\varDelta^n, Y)$ отображение $|X| \to Y$, переводящее класс точки $(x, s) \in X_n \times \varDelta^n$ по модулю соотношений $(X(\varphi)x, s) = (x, \varphi s)$ в значение непрерывного отображения $f_n(x) : \varDelta^n \to Y$ в точке $s \in \varDelta^n$ (убедитесь, что это значение не зависит от выбора представителя (x, s) в его классе эквивалентности). Естественное преобразование $t_Y : |S(Y)| \to Y$ переводит класс пары

$$(g : \varDelta^n \to Y, t \in \varDelta^n) \in S_n(Y) \times \varDelta^n = \operatorname{Hom}_{\mathcal{Top}}(\varDelta^n, Y) \times \varDelta^n,$$

[1] И в былые годы абитуриентам мехмата случалось получать за такой ответ двойку на устном вступительном экзамене по математике.

[2] Непрерывного в силу определения фактор топологии.

представляющей точку из фактор пространства $|S(Y)|$, геометрической реализации симплициального множества $S(Y)$, в точку $g(t) \in Y$ (убедитесь, что отображение t_Y корректно определено, непрерывно и функториально по топологическому пространству Y). Действие естественного преобразования $s_X : X \to S(|X|)$ над комбинаторным симплексом $[n] \in \operatorname{Ob} \varDelta$ переводит точку $x \in X_n$ в сингулярный симплекс

$$\iota|_{x \times \varDelta^n} : \varDelta^n \to |X|$$

топологического пространства $|X|$ (убедитесь, что он функториален по $[n] \in \operatorname{Ob} \varDelta$ и предпучку $F \in \operatorname{Ob} \mathcal{F}un(\varDelta^{\mathrm{op}}, \mathcal{S}et)$).

Упр. 14.17. Начальное множество и начальное топологическое пространство пусты, конечное множество и конечное топологическое пространство это одна точка. Начальный и конечный объекты категории групп это единичная группа[1]. В категориях абелевых групп, коммутативных колец и модулей начальный и конечный объект это нуль.

Упр. 14.18. В категории групп нулевым объектом является единичная группа. В категориях абелевых групп, коммутативных колец и модулей нулевой объект это нулевая абелева группа.

Упр. 14.22. В $\mathcal{S}et$ и $\mathcal{T}op$ копредел диаграммы

$$A \xleftarrow{\varphi} C \xrightarrow{\psi} B \tag{19-19}$$

является фактором дизъюнктного объединения $A \sqcup B$ по наименьшему отношению эквивалентности, содержащему все пары $(\varphi(c), \psi(c))$, где $c \in C$. Амальмагама $A *_C B$ в категории групп является фактором свободного произведения[2] $A * B$ по наименьшей нормальной подгруппе, содержащей все произведения $\varphi(c)\psi(c)^{-1}$, где $c \in C$. В категории коммутативных колец диаграмма (19-19) наделяет A и B структурами -модулей, и копроизведение $A \otimes B$ это тензорное произведение K-модулей, в котором умножение разложимых тензоров происходит покомпонентно: $(a_1 \otimes_K b_1) \cdot (a_2 \otimes_K b_2) = (a_1 a_2) \otimes_K (b_1 b_2)$. В категории $\mathcal{M}od_K$ копроизведение является фактором прямой суммы $A \oplus B$, по подмодулю, порождённому векторами $(\varphi(c), -\psi(c))$, где $c \in C$.

Упр. 14.26. Применяя первое условие Оре[3] к произвольным элементам $s = s_1$ и $\varrho = s_2$ из S получаем ведущие из s_1 и s_2 стрелки λ и t с общим концом $\lambda s_1 = t s_2 \in S$. Применяя второе условие Оре[4] к паре стрелок $\varphi, \psi \in \operatorname{Hom}_S(s, s')$, где $s' = \varphi s = \psi s$, получаем такую стрелку $t \in \operatorname{Hom}_S(s', ts')$, что $t\varphi = t\psi$.

Упр. 14.27. Так как по предыдущему упр. 14.26 категория S фильтрующаяся, у дробей $s_1^{-1}\varrho_1$ и $s_2^{-1}\varrho_2$ есть общий знаменатель $t = \lambda_1 s_1 = \lambda_2 s_2 \in S$ с $\lambda_1, \lambda_2 \in R$. Тогда $s_1^{-1}\varrho_1 + s_2^{-1}\varrho_2 = t^{-1}(\lambda_1\varrho_1 + \lambda_2\varrho_2)$.

Упр. 15.1. Будучи подмодулем в поле, модуль $\mathcal{O}_K$ не имеет кручения и, стало быть, свободен. Его ранг не выше d, поскольку любые $d+1$ векторов из $\mathcal{O}_K$ линейно зависимы над $\mathbb{Q}$, а значит, и над $\mathbb{Z}$. С другой стороны, подходящие натуральные кратности любых d базисных векторов пространства K дают линейно независимую над $\mathbb{Q}$ систему векторов в $\mathcal{O}_K$. Поэтому ранг $\mathcal{O}_K$ не меньше d. Всякий базис модуля $\mathcal{O}_K$ над $\mathbb{Z}$ одновременно является базисом K над $\mathbb{Q}$, и в таком

[1] Т. е. группа, состоящая только из единичного элемента.
[2] См. прим. 13.15 на стр. 201.
[3] См. формулу (LO_1) на стр. 220.
[4] См. формулу (LO_2) на стр. 220.

базисе оператор умножения на любой элемент $\zeta \in \mathcal{O}_K$ записывается целочисленной матрицей, ибо умножение на ζ переводит $\mathcal{O}_K$ в себя.

Упр. 15.2. Если $\mathbb{Q}[\sqrt{d_1}] \simeq \mathbb{Q}[\sqrt{d_2}]$, то $d_2 = (a + b\sqrt{d_1})^2 = a^2 + d_1 b^2 + 2ab\sqrt{d_1}$ для некоторых $a, b \in \mathbb{Q}$, откуда $ab = 0$ и $a^2 + d_1 b^2 = d_2$, что возможно только при $a = 0$, $b = 1$, $d_1 = d_2$.

Упр. 16.1. Если $a^n = 0$ и $b^m = 0$, то $(a+b)^{m+n-1} = 0$ и $(ca)^n = 0$ для всех c.

Упр. 16.4. Поскольку формула для произведения разложимых тензоров билинейна, она корректно распространяется по линейности на неразложимые тензоры. Универсальные отображения $A \xrightarrow{\alpha} A \otimes B \xleftarrow{\beta} B$ действуют по правилам $\alpha(a) = a \otimes 1$ и $\beta(b) = 1 \otimes b$. Их универсальные свойства вытекают из универсальных свойств тензорного произведения: если заданы гомоморфизмы алгебр с единицами $\varphi : A \to C$ и $\psi : B \to C$, то отображение $A \times B \to C$, $(a, b) \mapsto \varphi(a) \cdot \psi(b)$, билинейно, а значит, однозначно пропускается через тензорное произведение $A \otimes B$.

Упр. 16.5. Первые три равенства и включения $V(I) \cup V(J) \subset V(I \cap J) \subset V(IJ) \subset V(I) \cup V(J)$ очевидны из определений.

Упр. 16.6. Если $V(f) = X$, то $f \in I(X)$, и значит, $f = 0$ в $\Bbbk[X] = \Bbbk[x_1, \dots, x_n]/I(X)$. Если $V(f) = \varnothing$, то множество нулей идеала $J \subset \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$, порождённого идеалом $I(X)$ и многочленом f пусто, и из слабой теоремы о нулях вытекает, что $1 \equiv sf \pmod{I(X)}$ для некоторого $s \in \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$, т. е. f обратим в $\Bbbk[X]$.

Упр. 16.7. $Y = (Y \cap Z) \cup \overline{Y \smallsetminus Z}$, где по условию $Y \cap Z \neq Y$.

Упр. 16.8. Иначе $X = (X \smallsetminus U) \cup V(f - g)$.

Упр. 16.11. Если $V = \cup W_i$ и $\xi_i \in V^*$ — такие ненулевые линейные формы, что $W_i \subseteq \operatorname{Ann} \xi_i$, то ненулевой многочлен $f = \prod \xi_i$ тождественно зануляется на $\mathbb{A}(V)$.

Упр. 16.12. Используйте покрытие $U = \bigcup \mathcal{D}(x_i)$ и предл. 16.4.

Упр. 16.13. Каждое пересечение $I \cap I(X_i)$ является собственным векторным подпространством в I, поскольку включение $I \subset I(X_\nu)$ означало бы, что $X_\nu \subset \bigcup_{i \neq j}(X_i \cap X_j)$, а это в силу непроводимости X_ν влечёт включение $X_\nu \subset X_i \cap X_j$ для некоторых $i \neq j$, что невозможно, т. к. ни одна из неприводимых компонент не содержится в другой. Если все неделители нуля в I лежат в собственном подпространстве, то I оказывается объединением конечного числа собственных подпространств.

Упр. 16.14. Элемент прямого произведения не делит нуль если и только если каждая из его компонент не делит нуль: $S^{-1}_{K_1 \times \ldots \times K_k} = S^{-1}_{K_1} \times S^{-1}_{K_2} \times \cdots \times S^{-1}_{K_k}$.

Упр. 16.16. Пусть $A = \Bbbk[X]$, $B = \Bbbk[Y]$. Вложение $\varphi^* : B \hookrightarrow A$ задаёт на A структуру конечно порождённой B-алгебры, т. е. представляет A в виде $A \simeq B[x_1, \dots, x_m]/J$, что и утверждается.

Упр. 17.1. Если $x_i x_j \neq 0$, то $t_{j,\nu} = x_\nu / x_j = (x_\nu : x_i)/(x_j : x_i) = t_{i,\nu}/t_{i,j}$ (при $\nu = i$ надо считать $t_{i,i} = 1$). Поэтому $\varphi^*_{ji} : t_{j,\nu} \mapsto t_{i,\nu}/t_{i,j}$. Обратный к φ^*_{ji} гомоморфизм $\Bbbk\left[\mathcal{D}\left(t_{i,j}\right)\right] \to \Bbbk\left[\mathcal{D}\left(t_{j,i}\right)\right]$ действует по той же формуле $t^{(i)}_j \mapsto 1/t^{(j)}_i$, $t_{i,\nu} \mapsto t_{j,\nu}/t_{j,i}$.

Упр. 17.2. Элементы $k \times m$-матрицы $(\varphi_I t)^{-1}_J \varphi_I t$ являются рациональными функциями от элементов матрицы t со знаменателями $\det(\varphi_I t)_J$. Так как они регулярны в $\mathcal{D}(\det(\varphi_I t)_J)$, отображение φ_{JI}, переводящее эту матрицу в её $k \times (m-k)$-подматрицу, образованную столбцами с не лежащими в J номерами, регулярно. Обратное отображение задаётся аналогичной формулой $t \mapsto ((\varphi_J t)^{-1}_I \varphi_J t)_{\bar{I}}$.

Упр. 17.3. Это следует из определения локальной регулярной функции и зам. 16.2. на стр. 248.

Упр. 17.4. Отображение $\varkappa$ можно задать формулой $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1)$, из которой видно, что оно не определено только в точках $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$, $(0 : 0 : 1)$ и образ $\varkappa$ тоже равен дополнению до этих трёх точек.

Упр. 17.5. В обозначениях из прим. 17.1 на стр. 254 пересечение множества нулей однородного многочлена $\overline{f}(x_0, x_1, \dots , x_n)$ со стандартной картой $U_i \subset \mathbb{P}_n$ задаётся в аффинных координатах t_i карты U_i полиномиальным уравнением $\overline{f}(t_{i,0}, \dots , t_{i,i-1}, 1, t_{i,i+1}, \dots , t_{i,n}) = 0$.

Упр. 17.11. Подставляя $x_i = t_i + p_ix_n$, где $1 \leqslant i \leqslant n - 1$, в соотношение $f(x_1, \dots , x_n) = 0$ получаем на x_n полиномиальное уравнение степени d с коэффициентами из $\Bbbk[t_1, \dots , t_{n-1}]$. Его старший коэффициент при x_n^d равен $f_d(p_1, \dots , p_{n-1}, 1)$ и является ненулевой константой из поля $\Bbbk$. Деля на него, получаем уравнение целой зависимости для x_n над $\Bbbk[t_1, \dots , t_{n-1}]$. Все остальные x_i целы над $\Bbbk[t_1, \dots , t_{n-1}, x_n]$, ибо удовлетворяют уравнениям $x_i - (t_i + p_ix_n) = 0$.

Упр. 17.13. Пусть $X_1, X_2 \subset X$ — два замкнутых неприводимых подмножества и $U \subset X$ — открытое множество, такое что оба пересечения $X_1 \cap U$, $X_2 \cap U$ непусты. Тогда $X_1 = X_2 \iff X_1 \cap U = X_2 \cap U$, поскольку $X_i = \overline{X_i \cap U}$.

Упр. 17.14. Докажите, что произведение конечных сюрьекций $X \to \mathbb{A}^n$, $Y \to \mathbb{A}^m$ является конечной сюрьекцией $X \times Y \to \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$.

Упр. 17.15. Выберите в H какой-нибудь базис, запишите координаты векторов этого базиса и координаты точки p по строкам $(n - d + 1) \times (n + 1)$-матрицы. Условие $p \in H$ означает, что ранг этой матрицы равен $n - d$. Зануление всех миноров порядка $n - d + 1$ является системой билинейных уравнений на плюккеровы координаты[1] подпространства H и однородные координаты точки p.

Упр. 17.17. $\varGamma$ задаётся однородными по всем f_i и p уравнениями $f_0(p) = f_1(p) = \ldots = f_n(p) = 0$.

Упр. 17.18. Возьмите $n+1$ гиперплоскостей, пересекающихся в одной точке, и возведите задающие их линейные формы в подходящие степени.

Упр. 17.20. Вложим $\mathrm{Gr}(2, 4)$ в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\varLambda^2V)$ по Плюккеру. Прямая (ab) лежит на поверхности $V(f)$, если и только если многочлен f тождественно зануляется на линейной оболочке векторов a и b, которая является образом свёртки $V^* \to V$ с бивектором $a \wedge b$. Убедитесь, что условие тождественного по $\xi \in V^*$ зануления функции $\xi \mapsto f(\xi \llcorner (a \wedge b))$ записывается системой однородных полиномиальных уравнений на коэффициенты f и плюккеровы координаты бивектора $a \wedge b$.

Упр. 18.7. Это вытекает из лем. 18.3.

Упр. 18.12. Корни многочлена $x^{p^n} - x$ распадаются на орбиты группы $G = \mathrm{Aut}\,\mathbb{F}_{p^n} \simeq \mathbb{Z}/(n)$. Длина m каждой орбиты $\alpha_1, \dots , \alpha_m$ делит n, а произведение $\prod(x - \alpha_i)$ по всем элементам G-орбиты является неприводимым приведённым многочленом с коэффициентами из $\mathbb{F}_p = \mathbb{F}_{p^n}^G$. Поскольку многочлен $x^{p^n} - x$ сепарабелен, его разложение на простые множители в $\mathbb{F}_p[x]$ имеет вид произведения попарно различных приведённых неприводимых многочленов, степени которых делят n. С другой стороны, неприводимый приведённый многочлен $g \in \mathbb{F}_p[x]$ степени m делит $x^{p^n} - x$ тогда и только тогда, когда он имеет корень в поле разложения $\mathbb{F}_{p^n}$ многочлена $x^{p^n} - x$. Это равносильно наличию вложения $\mathbb{F}_p[x]/(g) = \mathbb{F}_{p^m}$ в $\mathbb{F}_{p^n}$, т. е. тому, что $m|n$.

Упр. 19.1. Поскольку четыре арифметических действия над комплексными числами и извлечение из них квадратных корней полностью сводятся к этим пяти операциям над вещественными и

[1] Напомню, что плюккеровыми координатами подпространства являются старшие миноры матрицы, составленной из координат какого-нибудь базиса в этом подпространстве.

мнимыми частями, можно предполагать числа a и b вещественными. В этом случае $a \pm b$ строятся непосредственно, a/b и ab — при помощи подобия или теоремы Фалеса (для этого и требуется отрезок длины 1), а $\sqrt{a} = \sqrt{1 \cdot a}$ — при помощи теоремы о среднем геометрическом в прямоугольном треугольнике (для этого и также требуется отрезок длины 1).

Упр. 19.2. При пересечении окружности и прямой получается вещественный трёхчлен

$$(b-a)(\overline{b}-\overline{a})\,t^2 + \big((b-a)(\overline{a}-\overline{c}) + (a-c)(\overline{b}-\overline{a})\big)\,t + (b-a)(\overline{b}-\overline{a}) - (d-c)(\overline{d}-\overline{c})\,,$$

при пересечении двух окружностей — трёхчлен $\alpha t^2 + \beta t + \overline{\alpha} = 0$, у которого $\alpha = (b-a)(\overline{a}-\overline{c})$, а $\beta = (b-a)(\overline{b}-\overline{a}) + (a-c)(\overline{a}-\overline{c}) - (d-c)(\overline{d}-\overline{c}) \in \mathbb{R}$.

Упр. 19.3. Воспользуйтесь равенством $\cos(3\varphi) = 4\cos\varphi - 3\cos^2\varphi$ при $\varphi = \pi/9$ и убедитесь, что у многочлена $8x^3 - 6x - 1$ нет рациональных корней.

Упр. 19.5. Пусть корни $\{\vartheta_1, \dots, \vartheta_k\} \subset \{\vartheta_1, \dots, \vartheta_n\}$ образуют орбиту группы Галуа. Тогда коэффициенты многочлена $g(x) = (x-\vartheta_1)\dots(x-\vartheta_k)$ инвариантны относительно действия группы Галуа, и значит, $g \in \Bbbk[x]$. Таким образом, многочлен f является произведением многочленов g, отвечающих орбитам действия группы Галуа $\mathrm{Gal}\, f/\Bbbk$ на корнях f. С другой стороны, группа Галуа переводит в себя множество корней любого многочлена с коэффициентами из $\Bbbk$ и, тем самым, не может транзитивно действовать на корнях приводимого в $\Bbbk[x]$ многочлена f.

Упр. 19.6. Поле разложения $\mathbb{L}_{\overline{f}}$ многочлена $\overline{f}$ над $\mathbb{F}_p$ является башней примитивных расширений $\mathbb{F}_p = \mathbb{L}_0 \subset \mathbb{L}_1 \subset \ldots \subset \mathbb{L}_m = \mathbb{L}_{\overline{f}}$, на каждом этаже которой происходит присоединение одного из корней ϑ многочлена $\overline{f}$. Так как $\overline{f}$ полностью распадается в $A[t]$ в произведение различных линейных множителей, тавтологическое вложение $\mathbb{F}_p \hookrightarrow A$ продолжается вдоль башни до гомоморфизма $\mathbb{F}_p$-алгебр $\mathbb{L}_{\overline{f}} \to A$, который инъективен, ибо $\mathbb{L}_{\overline{f}}$ — поле, и имеет образом $\mathbb{F}_p$-подалгебру, порождённую корнями многочлена $\overline{f}$ в A.

Упр. 19.7. Подставляя $t = 1$ в $1 + t + \ldots + t^{p-1} = \Phi_p(t) = \prod_{k=1}^{p-1}(t-\zeta^k)$, где $\zeta = e^{2\pi i/p}$, получаем

$$p = \prod_{k=1}^{(p-1)/2}(1-\zeta^k)(1-\zeta^{-k}) = \prod_{k=1}^{(p-1)/2}(-\zeta^{-k})\cdot(1-\zeta^k)^2 = (-1)^{(p-1)/2}\alpha^2\beta^2\,,$$

где $\beta = \prod_{k=1}^{(p-1)/2}(1-\zeta^k)$, $\alpha = \zeta^m$, а $2m \equiv -\sum_{k=1}^{(p-1)/2} k = (1-p^2)/8 \pmod p$.

Упр. 19.8. $e_i(\eta^0, \dots, \eta^{n-1}) = 0$ при $i \neq 0, n$, так как $\prod_{\nu=0}^{n-1}\left(x - \eta^\nu\right) = x^n - 1$. Поэтому при $i \neq 0, n$

$$e_i(\eta^0\xi\alpha, \dots, \eta^{n-1}\xi\alpha) = \xi^i\alpha^i e_i(\eta^0, \dots, \eta^{n-1}) = 0\,,$$

т. е. f_ξ содержит лишь старший член x^n и свободный член $-\xi^n\alpha^n$.

Упр. 19.9. Так как произведение всех элементов конечной группы равно единице, $\prod_{\xi \in \mu_m/G}\xi \in G$, и порядок этого элемента делит $|G| = n$.

Упр. 19.13. Используя теорему о строении конечно порождённых абелевых групп[1] и упр. 19.19 на стр. 356 части I убедитесь, что у каждой абелевой группы есть композиционный ряд с циклическими факторами. Потом при помощи предл. 19.6 на стр. 356 части I и индукции по длине цепочки (19-14) соедините композиционные ряды абелевых факторов G_i/G_{i+1} в композиционный ряд группы G. Второе утверждение вытекает из предл. 19.5 на стр. 355, третье — из предл. 19.6 на стр. 356 части I.

[1] См. **??** на стр. **??** части I.