Сечения с компактными носителями.

Соглашения и обозначения. Все пучки в этом листке суть пучки абелевых групп, а все топологические пространства локально компактны. Непрерывное отображение называется *собственным*, если прообраз любого компакта компактен. Подмножество $W \subset X$ называется *локально замкнутым*, если у каждой точки $w \in W$ есть такая открытая окрестность $U \ni w$ в X, что $U \cap W$ замкнуто в U в индуцированной с X топологии на U. Для пучка F на X элементы абелевой группы $H^0_c(X,F) \overset{\text{def}}{=} \{s \in F(X) \mid \operatorname{supp}(s) \text{ компактен}\}$ называются *глобальными сечениями с компактными носителями*.

ПГА6◇1. Для непрерывного отображения $f : X \to Y$ и пучка F на X зададим на Y подпредпучок $f_!F \subset f_*F$ правилом $f_!F(U) \overset{\text{def}}{=} \{s \in F(f^{-1}U) \mid \text{отображение } f|_{\operatorname{supp}(s)} : \operatorname{supp}(s) \to U \text{ собственно}\}$. Покажите, что: а) $f_!F$ является пучком б) если f — вложение замкнутого подмножества, то $f_! = f_*$ в) функтор $f_! : \mathcal{S}h(X) \to \mathcal{S}h(Y)$, $F \mapsto f_!F$, точен слева г) $\forall\, y \in Y$ слой $f_!F_y \simeq H^0_c\left(f^{-1}(y), F|_{f^{-1}(y)}\right)$.

ПГА6◇2. Пусть $f : W \hookrightarrow X$ — вложение локально замкнутого подмножества и F — пучок на W. Покажите, что: а) слой $f_!F_x = F_x$ при $x \in W$ и нулевой при $x \notin W$ б) функтор $f_!$ точен в) $f^*f_! = \mathrm{Id}_{\mathcal{S}h(W)}$ г) функторы $f_!$ и f^* являются квазиобратными друг другу эквивалентностями между категорией $\mathcal{S}h(W)$ и полной подкатегорией в $\mathcal{S}h(X)$, состоящей из пучков с нулевыми слоями во всех точках $X \smallsetminus W$.

ПГА6◇3. В условиях зад. ПГА6◇2 для пучка G на X положим $G^W(U) \overset{\text{def}}{=} \{s \in F(U) \mid \operatorname{supp}(s) \subset W\}$ и $h^!G \overset{\text{def}}{=} h^*G^W$. Покажите, что а) G^W — пучок на X с нулевыми слоями во всех точках $X \smallsetminus W$ б) функтор $f^!$ сопряжён *справа* функтору $f_!$ и точен слева в) если W открыто в X, то $h^! = h^*$ г) если W замкнуто в X, то $h^!h_* = \mathrm{Id}_{\mathcal{S}h(W)}$.

ПГА6◇4. Пусть $i : Z \hookrightarrow X$ и $j : U \hookrightarrow X$ — вложения дополнительных друг к другу замкнутого и открытого множеств, так что $U = X \smallsetminus Z$. Постройте для любого пучка F на X функториальную точную тройку пучков $0 \to j_!j^*F \to F \to i_*i^*F \to 0$ на X.

ПГА6◇5. Для непрерывного отображения $f : X \to Y$ и локально замкнутого вложения $h : W \hookrightarrow Y$ обозначим через g локально замкнутое вложение $g : f^{-1}(W) \hookrightarrow X$. Постройте изоморфизм функторов $f_*h^! \simeq g_!f^*$.

ПГА6◇6. Пусть в точной тройке $0 \to F \to G \to H \to 0$ пучков на X пучок F мягок, а отображение $f : X \to Y$ непрерывно. Покажите, что а) пучок $f_!F$ мягок, а последовательности б) пучков $0 \to f_!F \to f_!G \to f_!H \to 0$ в) абелевых групп $0 \to H^0_c(X,F) \to H^0_c(X,G) \to H^0_c(X,H) \to 0$ обе точны.

ПГА6◇7. Определим высший прямой образ с компактным носителем $R^qf_!F$ пучка F на X при непрерывном отображении $f : X \to Y$ как q-тый пучок когомологий комплекса $0 \to f_!C^0_F \to$ $\to f_!C^1_F \to f_!C^2_F \to \cdots$ пучков на Y, полученного применением функтора $f_!$ к вялой резольвенте Годемана $C^\bullet_F$ пучка F на X (в частности, $H^q_c(X,F) \overset{\text{def}}{=} R^qc_!F$, где $c : X \to \mathrm{pt}$ постоянное отображение в точку). Покажите, что а) точная тройка пучков на X порождает длинную точную последовательность высших прямых образов на Y б) в определении $R^qf_!F$ вместо вялой резольвенты Годемана можно взять любой комплекс пучков $G^\bullet$ на X, имеющий единственный ненулевой пучок когомологий $H^0(G^\bullet) \simeq F$ и такой что $R^qf_!G^p = 0$ при $q > 0$ для всех p в) имеется спектральная последовательность Лере с $E_2^{p,q} = H^p_c(Y, R^qf_!F)$, сходящаяся к $H^{p+q}_c(X,F)$.

ПГА6◇8. Обозначим через $\dim_c X$ наименьшее такое n, что $H^n_c(X,F) = 0$ для любого пучка F на X. Покажите, что а) если в точной последовательности пучков $0 \to F \to S^0 \to S^1 \to \cdots \to S^{n-1} \to$ $\to S^n \to 0$ все пучки S^k с $0 \leqslant k \leqslant n-1$ мягкие, то и пучок S^n тоже мягкий б) $\dim_c \mathbb{R}^n = n$ в) $\dim_c W \leqslant \dim_c X$ для любого локально замкнутого $W \subset X$ г) если у каждой точки $x \in X$ есть открытая окрестность U с $\dim_c U \leqslant n$, то и $\dim_c X \leqslant n$ д) $R^qf_!F = 0$ при $q > \dim_c X$ для любого непрерывного отображения $f : X \to Y$ и любого пучка F на X.

Персональный табель ______________________________________.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 6 (27.03.2017)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
в			
г			
2а			
б			
в			
г			
3а			
б			
в			
г			
4			
5			
6а			
б			
в			
7а			
б			
в			
8а			
б			
в			
г			
д			