Когомологическая размерность[0]

Соглашения и обозначения. Все топологические пространства в этом листке предполагаются *локально компактными*, а все пучки суть *пучки абелевых групп*. Пучок S на пространстве X называется *мягким* если для любого замкнутого подмножества $S \subset X$ ограничение сечений $H^0(X, S) \to S_Z$ сюрьективно. Для пучка F на X и непрерывного отображения $f : X \to Y$ *прямой образ с компактными носителями* $f_!F$ это предпучок на Y с сечениями $f_!F(U) = \{s \in F(f^{-1}(U)) \mid$ ограничение $f|_{\mathrm{supp}(s)} : \mathrm{supp}(s) \to U$ собственно$\}$. Минимальное $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, такое что $H^n_c(X, F) = 0$ для любого пучка F на X, называется *когомологической размерностью* пространства X и обозначается $\dim_c X$.

ПГА 6½◇1. Проверьте, что $f_!F \subset f_*F$ является подпучком пучка f_*F и сопоствление $F \mapsto f_!F$ является точным функтором.

ПГА 6½◇2. Пусть $\dim_c X \leqslant n$ и в точной последовательности пучков на X

$$0 \to F \to S^0 \to S^1 \to S^2 \to \cdots \to S^{n-1} \to Q \to 0$$

все пучки S^i мягкие. Докажите, что пучок Q тоже мягкий.

ПГА 6½◇3. Для любого **а)** открытого **б)** замкнутого подмножества $Y \subset X$ докажите неравенство $\dim_c Y \leqslant \dim_c X$.

ПГА 6½◇4. Пусть у каждой точки $x \in X$ имеется открытая окрестность $U \ni x$ с $\dim_c U \leqslant n$. Покажите, что $\dim_c X \leqslant n$.

ПГА 6½◇5. Докажите, что $\dim_c \mathbb{R}^n = n$.

ПГА 6½◇6. Докажите когомологическую конечномерность **а)** топологических многообразий **б)** геометрических реализаций конечномерных симплициальных множеств[1].

ПГА 6½◇7. Для непрерывного отображения $f : X \to Y$ локально компактных топологических пространств положим $R^i f_! F$ равным i-тому пучку когомологий комплекса

$$0 \to f_!C^0_F \to f_!C^1_F \to f_!C^2_F \to \cdots ,$$

где $C^\bullet_F$ это вялая резольвента Годемана пучка F. Покажите, что **а)** $R^0 f_! F = f_! F$ **б)** для любой точной тройки $0 \to E \to F \to G \to 0$ пучков на X возникает длинная точная последовательность

$$0 \to f_!E \to f_!F \to f_!G \to R^1 f_!E \to R^1 f_!F \to R^1 f_!G \to R^2 f_!E \to \cdots$$

пучков на Y **в)** для любой точки $y \in Y$ слой $R^i f_! F_y = H^i_c\big(f^{-1}(y), F|_{f^{-1}(y)}\big)$ **г)** вместо вялой резольвенты Годемана для вычисления $R^i f_! F$ годится любая мягкая резольвента пучка F **д)** если $\dim_c X \leqslant n$, то $R^i f_! F = 0$ для всех $i \geqslant n$ и всех непрерывных отображений $f : X \to Y$ в локально компактные Y **е)** для любого непрерывного отображения $g : Z \to X$ существует спектральная последовательность с $E_2^{p,q} = R^p f_! R^q g_! F \Rightarrow R^{p+q}(f \circ g)_! F$.

ПГА 6½◇8. Пучок L на X называется *плоским*, если функтор[2] $F \mapsto L \otimes F$ точен на категории пучков. Покажите, что у любого плоского пучка F на X имеется мягкая плоская резольвента.

ПГА 6½◇9. Покажите, что контравариантный функтор из категории пучков в абелевы группы представим , если и только если он переводит копределы в пределы.

[0]Подсказки ко всем задачам из этого листка можно найти в первой главе книги: *B. Iversen.* «Cohomology of sheaves».

[1]Симплициальное множество $X : \Delta^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ называется *конечномерным*, если существует $N \in \mathbb{N}$, такое что все симплексы размерности $\geqslant N$ в X вырождены.

[2]Сечения $L \otimes F(U) \overset{\mathrm{def}}{=} L(U) \otimes F(U)$ (тензорное произведение абелевых групп).

Персональный табель ________________________________.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № $6\frac{1}{2}$ (необязательный)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7а			
б			
в			
г			
д			
е			
8			
9			