Зоология абелевых пучков на топологических пространствах.

все пучки в этом листке суть пучки абелевых групп

Терминология и обозначения. Пусть F — пучок на топологическом пространстве X. Через $s(x)$ обозначается класс сечения $s \in F(U)$ в слое F_x над точкой $x \in U$. *Носителем* пучка F (соотв. сечения $s \in F(U)$) называется множество $\operatorname{supp}(F) = \{x \in X \mid F_x \neq 0\}$ (соотв. множество $\operatorname{supp}(s) = \{x \in U \mid s(x) \neq 0\}$). Пучок F *допускает разложение единицы*, если для любого сечения $s \in F(U)$ над произвольным открытым $U \subset X$ и любого открытого покрытия $U = \bigcup W_\alpha$ найдутся такие сечения $s_\alpha \in F(U)$ с $\operatorname{supp}(s_\alpha) \subset W_\alpha$, что для каждой точки $x \in U$ лишь конечное число $s_\alpha(x) \neq 0$ и $\sum\limits_\alpha s_\alpha(x) = s(x)$ в F_x. Пучок F на X называется *вялым*, если ограничение $F(X) \to F(U)$ сюрьективно для любого открытого $U \subset X$, *мягким* — если слой F_Z над каждым замкнутым $Z \subset X$ состоит из ростков глобальных сечений, *тонким* — если для любых двух замкнутых подмножеств $Z_1, Z_2 \subset X$ существует эндоморфизм $F \to F$, тождественный на некотором открытом $U_1 \supset Z_1$ и нулевой на некотором открытом $U_2 \supset Z_2$.

ПГА4◇1. Покажите, что **а)** для точной тройки пучков $0 \to F \to G \to H \to 0$ с вялым F последовательность $0 \to F(U) \to G(U) \to H(U) \to 0$ точна над любым открытым $U \subset X$ и вялость G влечёт вялость H **б)** прямой образ вялого пучка вял **в)** вялый пучок мягок.

ПГА4◇2. Покажите, что сопоставление пучку F его *вялой оболочки Годемана* G_F с $G_F(U) \overset{\text{def}}{=} \prod\limits_{x \in U} F_x$ является точным функтором из пучков в вялые пучки.

ПГА4◇3. Для замкнутого вложения $\iota : Z \hookrightarrow X$ и пучка F на Z покажите, что **а)** в точке $x \in X$ слой $\left(\iota_* F\right)_x$ равен F_x при $x \in Z$ и нулю при $x \notin Z$ **б)** функтор ι_* точен и $\iota^*\iota_* F \simeq F$ **в)** $H^n(X, \iota_* F) \simeq$ $\simeq H^n(Z, F)$. **г)** Пусть $\varphi : E \to G$ — морфизм пучков на X, причём $\operatorname{supp}(G) \subset Z$. Покажите, что φ единственным образом пропускается через канонический морфизм $F \to \iota_*\iota^* F$.

ПГА4◇4. Для открытого вложения $j : U \hookrightarrow X$ покажите, что функтор j^* точен и $j^* j_* = \mathrm{Id}$.

ПГА4◇5. Пусть подмножества $Z_1, Z_2 \subset X$ замкнуты, а $U_1, U_2 \subset X$ открыты. Для любого пучка F на X постройте длинные *точные последовательности Майера – Виеториса*:

а) $\cdots \to H^p(Z_1 \cup Z_2, F) \to H^p(Z_1, F) \oplus H^p(Z_2, F) \to H^p(Z_1 \cap Z_2, F) \to H^{p+1}(Z_1 \cup Z_2, F) \to \cdots$

б) $\cdots \to H^p(U_1 \cap U_2, F) \to H^p(U_1, F) \oplus H^p(U_2, F) \to H^p(U_1 \cup U_2, F) \to H^{p+1}(U_1 \cap U_2, F) \to \cdots$.

ПГА4◇6. Пусть X локально компактно[1]. Покажите, что **а)** мягкость пучка равносильна тому, что для любого сечения s над любой открытой окрестностью U любого компакта $Z \subset X$ найдётся глобальное сечение t, совпадающее с s в слоях над всеми точками из некоторого открытого подмножества $W \subset X$, такого что $Z \subset W \subset U$ **б)** пучок модулей над мягким пучком колец мягок **в)** пучок непрерывных функций со значениями в $\mathbb{R}$ или в $\mathbb{C}$ мягок **г)** мягкий пучок допускает разложение единицы **д)** мягкость — локальное свойство[2].

ПГА4◇7. Пусть X паракомпакно[3]. Покажите, что **а)** тонкость F равносильна вялости пучка колец[4] $\mathcal{H}om(F, F)$, у которого $\mathcal{H}om(F, F)(U) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}(F|_U, F|_U)$ **б)** пучки колец непрерывных (соотв. гладких) функций на вещественном (гладком) многообразии тонкие **в)** тонкий пучок мягок **г)** в точной тройке пучков $0 \to F \to G \to H \to 0$ с мягким F мягкость G влечёт мягкость H и последовательность абелевых групп $0 \to F_Z \to G_Z \to H_Z \to 0$ точна над любым замкнутым $Z \subset X$ **д)** мягкий пучок допускает разложение единицы **е)** мягкость и тонкость локальны.

ПГА4◇8. Пусть F обладает разложением единицы. Покажите, что любое открытое покрытие X является F-ацикличным и выведите отсюда, что F ацикличен.

ПГА4◇9. Пусть X — гладкое вещественное n-мерное многообразие. Покажите, что: **а)** пучки дифференциальных p-форм $\Omega^p(X)$ ацикличны **б)** (пучковый) комплекс ДеРама $0 \to \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d}$ $\xrightarrow{d} \Omega^2 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^n \to 0$ является ацикличной резольвентой постоянного пучка $\mathbb{R}$.

[1] т. е. хаусдорфово и у каждой точки есть компактная окрестность

[2] Т. е. мягкость равносилна тому, что у любой точки есть окрестность, ограничение на которую мягко.

[3] Т. е. хаусдорфово и в любом открытом покрытии X есть локально конечное подпокрытие.

[4] проверьте, кстати, что это пучок

Персональный табель ______________________________________.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 4 (27.02.2017)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
в			
2			
3а			
б			
в			
г			
4			
5а			
б			
6а			
б			
в			
г			
д			
7а			
б			
в			
г			
д			
е			
8			
9а			
б			