

**Сопряжённые функторы, точные функторы и копределы.**

ПГА2♦1. Предпучки  $F : \mathcal{C}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{D}$  и  $G : \mathcal{D}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{C}$  называются *левосопряжёнными* (соотв. *правосопряжёнными*), если имеется функториальная по  $C \in \text{Ob } \mathcal{C}$  и  $D \in \text{Ob } \mathcal{D}$  биекция

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(G(D), C) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D) \quad (\text{соотв. } \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(D)) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}}(D, F(C))).$$

Сформулируйте и докажите для таких функторов аналоги двух утверждений из зад. ПГА1♦8.

ПГА2♦2. Покажите, что функтор  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  сопряжён слева к функтору  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ , если и только если существуют такие естественные преобразования  $t : F \circ G \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$  и  $s : \text{Id}_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F$ , что композиции<sup>1</sup>  $F \xrightarrow{F \circ s} FGF \xrightarrow{t \circ F} F$  и  $G \xrightarrow{s \circ G} GFG \xrightarrow{G \circ t} G$  равны<sup>2</sup> тождественным эндоморфизмам функторов  $F$  и  $G$ .

ПГА2♦3. Покажите, что для козамкнутости категории  $\mathcal{C}$  достаточно существования в  $\mathcal{C}$  начального объекта, прямых копроизведений любых множеств объектов и коуравнителей любой пары стрелок с общим началом и концом.

ПГА2♦4. Пусть подмножество  $S$  в кольце<sup>3</sup>  $R$  с единицей таково, что  $1 \in S, s, t \in S \Rightarrow st \in S$  и выполнены условия *Оре*:  $(O_1) \forall \varrho \in R \forall s \in S \exists \lambda \in R \exists t \in S: \lambda s = t\varrho$   $(O_2) \forall \varphi, \psi \in R$  из  $\exists s \in S: \varphi s = \psi s$  следует, что  $\exists t \in S: t\varphi = t\psi$ . Превратим  $S$  в категорию, полагая  $\text{Hom}_S(s, t) \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda \in R \mid \lambda s = t\}$ , и определим функтор  $S \rightarrow \text{Mod-}R$ , отправляя объект  $s \in S$  в свободный правый  $R$ -модуль ранга один, базисный вектор в котором обозначим символом  $\left[\frac{1}{s}\right]$ , а стрелку  $\lambda \in \text{Hom}_S(s_1, s_2)$  – в гомоморфизм  $\left[\frac{1}{s_1}\right] \mapsto \left[\frac{1}{s_2}\right] \cdot \lambda$ . Покажите, что копредел этого функтора это *модуль левых дробей*  $S^{-1}R$  образованный классами пар  $s^{-1}\varrho$  по отношению  $s_1^{-1}\varrho_1 \sim s_2^{-1}\varrho_2$ , означающему существование таких  $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ , что  $\lambda_1 s_1 = \lambda_2 s_2 \in S$  и  $\lambda_1 \varrho_1 = \lambda_2 \varrho_2$ . Проверьте, что это отношение эквивалентности и задайте на  $S^{-1}R$  структуру кольца с единицей.

ПГА2♦5 (точные функторы). Функтор  $F : \mathcal{A}b \rightarrow \mathcal{A}b$  (соотв.  $\mathcal{A}b^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{A}b$ ) называется *точным слева*, если он переводит ядра (соотв. коядра) в ядра. Двойственным образом,  $F$  называется *точным справа*, если он переводит коядра (соотв. ядра) в коядра. Функтор называется *точным*, если он точен и справа и слева. Покажите, что: а) для фиксированной группы  $N \in \text{Ob } \mathcal{A}b$  функтор  $X \mapsto X \otimes_{\mathbb{Z}} N$  точен справа, и предъявите группу  $N$ , для которой он не точен слева б) для фиксированной фильтрующейся категории  $\mathcal{N}$  функтор  $\text{colim}_{\mathcal{N}} : \text{Fun}(\mathcal{N}, \mathcal{A}b) \rightarrow \mathcal{A}b$  точен<sup>4</sup>.

ПГА2♦6. Покажите, что точная последовательность  $0 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 0$  пучков абелевых групп на топологическом пространстве  $X$  точна, если и только если для каждой точки  $x \in X$  последовательность слоёв  $0 \rightarrow F_x \rightarrow G_x \rightarrow H_x \rightarrow 0$  точна в категории абелевых групп, и приведите пример, показывающий, что для предпучков это не так.

ПГА2♦7. Покажите что тавтологическое вложение категории пучков абелевых групп в категорию предпучков абелевых групп на топологическом пространстве является точным слева функтором, но, вообще говоря, не точно справа.

ПГА2♦8. Покажите, что функтор  $\Gamma : \mathcal{T}op(X) \rightarrow pSh(X)$  сопоставляющий непрерывному отображению  $E \rightarrow X$  пучок его локальных сечений, сопряжён справа функтору  $\mathcal{E} : pSh(X) \rightarrow \mathcal{T}op(X)$ , сопоставляющему предпучку множеств  $F$  на  $X$  его этальное пространство  $\mathcal{E}_F = \coprod_{x \in X} F_x$  со слабой топологией, в которой все сечения  $s : U \rightarrow \mathcal{E}_F, x \mapsto (\text{класс } s \text{ в } F_x)$ , непрерывны для всех  $s \in F(U)$  и всех  $U$ .

<sup>1</sup>Где  $(F \circ s)_X \stackrel{\text{def}}{=} F(s_X), (t \circ F)_X \stackrel{\text{def}}{=} t_{F(X)}$  и т. д.

<sup>2</sup>Именно равны, а не просто эквивалентны.

<sup>3</sup>Ассоциативном, но не обязательно коммутативном.

<sup>4</sup>Ядро и коядро естественного преобразования диаграмм  $f : X \rightarrow Y$  образованы, соответственно, ядрами и коядрами стрелок  $f_\nu : X_\nu \rightarrow Y_\nu, \nu \in \text{Ob } \mathcal{N}$ . Проверьте, что стрелки  $X(\mu \rightarrow \nu)$  и  $Y(\mu \rightarrow \nu)$  корректно задают гомоморфизмы этих групп, и эти гомоморфизмы образуют диаграммы  $\ker f : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{A}b$  и  $\text{coker } f : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{A}b$ .

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2			
3			
4			
5а			
б			
6			
7			
8			