# Точные категории[0]

**ПГА 2½◇1.** Пусть категория $\mathcal{E}$ имеет нулевой объект 0, а также ядра и коядра всех морфизмов[1]. Для произвольной стрелки $\varphi : X \to Y$ положим $\operatorname{im}\varphi \overset{\text{def}}{=} \ker\big(Y \to \operatorname{coker}\varphi\big)$ и $\operatorname{coim}\varphi \overset{\text{def}}{=} \operatorname{coker}\big(\ker\varphi \to X\big)$. Покажите, что $\varphi$ функториально раскладывается в композицию $X \to \operatorname{coim}\varphi \to \operatorname{im}\varphi \to Y$.

**Точные категории.** Будем называть категорию $\mathcal{E}$ *точной*, если она удовлетворяет условиям зад. ПГА 2½◇1 и канонический морфизм $\operatorname{coim}\varphi \to \operatorname{im}\varphi$ является изоморфизмом для всех $\varphi \in \operatorname{Mor}\mathcal{E}$. Композиция $\varphi\psi$ называется *точной*, если $\ker\varphi = \operatorname{im}\psi$. Всё дальнейшее относится к *произвольной* точной категории.

**ПГА 2½◇2.** Для коммутативной диаграммы с точными строками

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\xi"] & Y_1 \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\eta"] & Z_1 \arrow[d, "\zeta"] \\ X_2 \arrow[r, "\alpha_2"'] & Y_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & Z_2 \end{tikzcd}$$

покажите, что: **а)** если $\ker\alpha_1 = 0 = \ker\alpha_2$, то последовательность $0 \to \ker\xi \to \ker\eta \to \ker\zeta$ точна **б)** если $\operatorname{coker}\xi = \operatorname{coker}\beta_1 = \operatorname{coker}\beta_2 = 0$, то $\operatorname{coker}\eta \simeq \operatorname{coker}\zeta$, последовательность $X_2 \to \operatorname{im}\eta \to \operatorname{im}\zeta$ точна, $\operatorname{im}\zeta = \operatorname{coker}\big(\ker\eta \to Z_1\big)$, и $\operatorname{coker}\big(\ker\eta \to \ker\zeta\big) = 0$.

**ПГА 2½◇3.** Покажите, что коммутативная диаграмма с точными строками

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B_1 \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & D_1 \arrow[d, "\delta"] \\ A_2 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & C_2 \arrow[r] & D_2 \end{tikzcd}$$

при $\operatorname{coker}\alpha = 0$ функториально производит точную последовательность $\ker\beta \to \ker\gamma \to \ker\delta$, а при $\ker\delta = 0$ — точную последовательность $\operatorname{coker}\alpha \to \operatorname{coker}\beta \to \operatorname{coker}\gamma$.

**ПГА 2½◇4.** Покажите, что любая композиция $\varphi\psi$ порождает длинную точную последовательность $0 \to \ker\psi \to \ker\varphi\psi \to \ker\varphi \to \operatorname{coker}\psi \to \operatorname{coker}\varphi\psi \to \operatorname{coker}\varphi \to 0$.

**ПГА 2½◇5.** В коммутативной диаграмме с точными строками и $\operatorname{coker}\alpha = 0 = \ker\varepsilon$

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B_1 \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & D_1 \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & E_1 \arrow[d, "\varepsilon"] \\ A_2 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & C_2 \arrow[r] & D_2 \arrow[r] & E_2 \end{tikzcd} \tag{1}$$

положим $K \overset{\text{def}}{=} \ker\big(C_1 \to D_2\big)$ и $\overline{K} \overset{\text{def}}{=} \operatorname{coker}\big(B_1 \to C_2\big)$. Постройте естественные **а)** эпиморфизм $K \twoheadrightarrow \ker\delta$ и мономорфизм $\operatorname{coker}\beta \hookrightarrow \overline{K}$ **б)** такую единственную стрелку $\partial : \ker\delta \to \operatorname{coker}\beta$, что композиции $K \to C_1 \to C_2 \to \overline{K}$ и $K \to \ker\delta \xrightarrow{\partial} \operatorname{coker}\beta \to \overline{K}$ совпадают **в)** длинную точную последовательность $\ker\beta \to \ker\gamma \to \ker\delta \to \operatorname{coker}\beta \to \operatorname{coker}\gamma \to \operatorname{coker}\delta$.

**ПГА 2½◇6.** Покажите, что в диаграмме (1) обратимость стрелок $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon$ влечёт обратимость $\gamma$.

**ПГА 2½◇7.** Для комплекса[2] $C : \cdots \xrightarrow{d^{i-1}} C^i \xrightarrow{d^i} C^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \cdots$ положим $Z^i \overset{\text{def}}{=} \ker d^i$, $\overline{Z}^i \overset{\text{def}}{=} \operatorname{coker} d^{i-1}$, $H^i \overset{\text{def}}{=} Z^i / \operatorname{im} d^{i-1}$. Убедитесь, что $d^n$ задаёт стрелку $\overline{Z}^n \to Z^{n+1}$, и для точной последовательности комплексов $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ постройте функториальную точную последовательность $H^n(A) \xrightarrow{H^n(\alpha)} H^n(B) \xrightarrow{H^n(\beta)} H^n(C) \xrightarrow{H^n(\delta^n)} H^{n+1}(A) \xrightarrow{H^{n+1}(\alpha)} H^{n+1}(B) \xrightarrow{H^{n+1}(\beta)} H^{n+1}(B)$.

---

[0]Подсказки ко всем задачам из этого листка можно найти в первой главе книги: *B. Iversen.* «Cohomology of sheaves».

[1]Т. е. (ко)уравнители стрелок $X \to Y$ и *нулевой* стрелки $X \to 0 \to Y$.

[2]Это значает, что $d^i d^{i-1} = 0$ при всех $i$.

Персональный табель ________________________________.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

**Листок № $2\frac{1}{2}$ (необязательный)**

| № | дата сдачи | имя и фамилия принявшего | подпись принявшего |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 2а | | | |
| б | | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |
| 5а | | | |
| б | | | |
| в | | | |
| 6 | | | |
| 7 | | | |