А. Л. Городенцев*

Пучки и сопутствующая гомологическая алгебра

Вводный курс

Это записки лекций, которые я читаю на факультете математики НИУ ВШЭ в весеннем семестре 2016/17 учебного года. Упражнения, встречающиеся в тексте существенны для его понимания и обычно используются в дальнейшем. Некоторые из них снабжены указаниями в конце книги.

Москва, 2017

* e-mail:gorod@itep.ru , http://gorod.bogomolov-lab.ru/

Оглавление

§1. Категории и функторы

1.1. Категории. Категория $\mathcal{C}$ — это *класс*[1] объектов, обозначаемый $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, в котором для каждой упорядоченной пары объектов $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ задано *множество* морфизмов

$$\mathrm{Hom}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)\,.$$

Морфизмы из X в Y удобно представлять себе в виде стрелок $\varphi : X \to Y$. Для разных пар объектов эти множества стрелок не пересекаются. Объединение всех стрелок категории $\mathcal{C}$ обозначается $\mathrm{Mor}\,\mathcal{C} = \bigsqcup_{X,Y\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ и тоже является классом, а не множеством. Для каждой тройки объектов $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ имеется отображение композиции[2] $\mathrm{Hom}(Y,Z) \times \mathrm{Hom}(X,Y) \to \mathrm{Hom}(X,Z)$, $(\varphi,\psi) \mapsto \varphi \circ \psi$ $(= \varphi\psi)$, ассоциативное в том смысле, что $(\chi \circ \varphi) \circ \psi = \chi \circ (\varphi \circ \psi)$ всякий раз, когда эти композиции определены. Наконец, у каждого объекта $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ есть *тождественный морфизм* $\mathrm{Id}_X \in \mathrm{Hom}(X,X)$, который для любых стрелок $\varphi : X \to Y$ и $\psi : Z \to X$ удовлетворяет условиям[3] $\varphi \circ \mathrm{Id}_X = \varphi$ и $\mathrm{Id}_X \circ \psi = \psi$. Подкатегория $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ — это категория, все объекты, стрелки и композиции которой наследуются из $\mathcal{C}$. Подкатегория $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ называется *полной*, если $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ для любых $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$. Категория $\mathcal{C}$ называется *малой*, если $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ это *множество*, а не больший класс. В этом случае $\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ тоже является множеством.

Пример 1.1 (категории, не являющиеся малыми)
Часто возникающие в примерах категории, *не* являющиеся малыми — это категория $\mathcal{S}et$ всех множеств и всех отображений, категория $\mathcal{T}op$ топологических пространств и непрерывных отображений, категория $\mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ векторных пространств над полем $\Bbbk$ и $\Bbbk$-линейных отображений и её полная подкатегория $\mathcal{vec}_{\Bbbk}$ конечномерных пространств, категории R-$\mathcal{M}od$ и $\mathcal{M}od$-R левых и правых модулей над кольцом R и R-линейных отображений и их полные подкатегории R-$\mathcal{mod}$ и $\mathcal{mod}$-R конечно представимых[4] модулей, категория $\mathcal{A}b = \mathbb{Z}$-$\mathcal{M}od$ абелевых групп и их гомоморфизмов, категория $\mathcal{G}rp$ всех групп и групповых гомоморфизмов, категория $\mathcal{C}mr$ коммутативных колец с единицей и гомоморфизмов, переводящих единицу в единицу, и т. п.

Пример 1.2 (чумы и топологии)
Каждое частично упорядоченное множество M это малая категория, объекты которой суть элементы $m \in M$, стрелки суть неравенства:

$$\mathrm{Hom}_M(n,m) = \begin{cases} \text{одноэлементное множество, когда } n \leqslant m, \\ \varnothing \text{ в остальных случаях}\,, \end{cases}$$

[1] Не хотелось бы вдаваться в точную формализацию этого термина (содержательную в той же мере, как формализация арифметики и теории множеств, изучаемые в стандартном курсе математической логики). Для наших нужд достаточно, что такая формализация существует и позволяет говорить, например, о «категории множеств», объекты которой, по понятным причинам, множества не образуют.

[2] Значок композиции «$\circ$», как и знак умножения, принято опускать, когда ясно, о чём речь.

[3] Выкладка $\mathrm{Id}' = \mathrm{Id}' \circ \mathrm{Id}'' = \mathrm{Id}''$ показывает, что тождественный морфизм единствен.

[4] Модуль называется *конечно представимым*, если он изоморфен фактору свободного модуля конечного ранга по конечно порождённому подмодулю.

а композиция стрелок $k \leqslant \ell$ и $\ell \leqslant n$ это стрелка $k \leqslant n$. Ассоциативность композиции и наличие тождественных морфизмов означают, соответственно, транзитивность и рефлексивность частичного порядка. Важным примером категории-чума является категория $\mathcal{U}(X)$ всех открытых подмножеств топологического пространства X, стрелками в которой являются включения:

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{U}(X)}(U, W) = \begin{cases} \text{вложение } U \hookrightarrow W, \text{ если } U \subseteq W \\ \text{пустое множество, когда } U \not\subseteq W. \end{cases}$$

Пример 1.3 (малые категории и ассоциативные алгебры)
Всякую ассоциативную алгебру A с единицей $e \in A$ можно рассматривать как малую категорию с одним объектом e и множеством стрелок $\operatorname{Hom}(e, e) = A$, композиция на котором задаётся умножением в этой алгебре. Наоборот, со всякой малой категорией $\mathcal{C}$ и коммутативным кольцом K можно связать *алгебру стрелок* $K[\mathcal{C}]$, состоящую из формальных конечных линейных комбинаций стрелок категории $\mathcal{C}$ с коэффициентами в K. Условимся для заданного множества M обозначать через $K \otimes M$ свободный K-модуль с базисом M, образованный всеми конечными формальными линейными комбинациями элементов множества M с коэффициентами из K. Тогда

$$K[\mathcal{C}] \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{X, Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}} K \otimes \operatorname{Hom}(X, Y) = \left\{ \sum x_i \varphi_i \;\middle|\; x_i \in K\,,\ \varphi_i \in \operatorname{Mor}(\mathcal{C}) \right\}.$$

Умножение стрелок в алгебре $K[\mathcal{C}]$ определяется их композицией в категории $\mathcal{C}$

$$\varphi\psi \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \varphi \circ \psi & \text{если конец } \psi \text{ совпадает с началом } \varphi \\ 0 & \text{во всех прочих случаях} \end{cases}$$

и по дистрибутивности распространяется на произвольные конечные линейные комбинации стрелок. Алгебру $K[\mathcal{C}]$ можно представлять себе как алгебру финитных квадратных матриц[1], строки и столбцы которых занумерованы объектами категории, и в каждой клетке (Y, X) стоят элементы из своего K-модуля $K \otimes \operatorname{Hom}(X, Y)$. Эта алгебра, вообще говоря, некоммутативна и без единицы, однако, для всякого $f \in K[\mathcal{C}]$ существует идемпотент $e_f = e_f^2$ со свойствами $e_f \circ f = f \circ e_f = f$. В качестве такового можно взять сумму тождественных эндоморфизмов Id_X всех объектов X, служащих началами или концами стрелок, линейной комбинацией которых является стрелка f.

1.1.1. Мономорфизмы, эпиморфизмы и изоморфизмы. Стрелка φ в категории $\mathcal{C}$ называется *мономорфизмом*[2] (соотв. *эпиморфизмом*[3]), если на неё можно сокращать слева (соотв. справа), т. е. когда $\varphi\alpha = \varphi\beta \Rightarrow \alpha = \beta$ (соотв. $\alpha\varphi = \beta\varphi \Rightarrow \alpha = \beta$). По умолчанию мы используем стрелки $\hookrightarrow$ для обозначения мономорфизмов, и стрелки $\twoheadrightarrow$ для эпиморфизмов. Стрелка $\varphi : X \to Y$ называется *изоморфизмом* (или *обратимой* стрелкой) и обозначается $\xrightarrow{\sim}$, если существует такая стрелка $\psi : Y \to X$, что $\varphi\psi = \operatorname{Id}_Y$ и $\psi\varphi = \operatorname{Id}_X$. В этой ситуации объекты X и Y называются *изоморфными*, а морфизмы φ и ψ — *обратными* друг к другу.

[1]Возможно, бесконечного размера, но с конечным числом ненулевых элементов.
[2]А также *вложением* или *инъективным* морфизмом.
[3]А также *наложением* или *сюрьективным* морфизмом.

Определение 1.1 (подобъекты и фактор объекты)
Класс эквивалентности инъективной стрелки с концом в X по модулю её умножения справа на обратимые стрелки называется *подобъектом* объекта X, а класс эквивалентности сюрьективной стрелки с началом в X по модулю левого умножения на обратимые стрелки — *фактор объектом* объекта X. Категория называется *умеренно мощной*[1], если подобъекты любого её объекта образуют множество. Все категории из прим. 1.3 умеренно мощны.

Упражнение 1.1 (частичный порядок на под- и фактор объектах). Проверьте, что отношение $\varphi \subseteq \psi$, означающее, что существует такая стрелка ξ, что $\varphi = \psi\xi$, задаёт частичный порядок на множестве подобъектов, а отношение $\varphi \geqslant \psi$, означающее наличие такой стрелки ξ, что $\varphi = \xi\psi$, задаёт частичный порядок на множестве фактор объектов.

Пример 1.4 (конечные упорядоченные множества и комбинаторные симплексы)
Обозначим через Δ_{big} категорию, объектами которой являются конечные упорядоченные множества X, а морфизмами — сохраняющие порядок[2] отображения. Категория Δ_{big} не является малой[3], но содержит полную малую подкатегорию $\Delta \subset \Delta_{\mathrm{big}}$, объектами которой являются конечные подмножества в $\mathbb{Z}$ вида

$$[n] \overset{\text{def}}{=} \{0,\, 1,\, \dots\, ,\, n\}\,, \quad n \geqslant 0\,, \tag{1-1}$$

со стандартным порядком. Множество (1-1) называется n-мерным *комбинаторным симплексом*, а категория Δ — *симплициальной категорией*. Для любого $X \in \operatorname{Ob}\Delta_{\mathrm{big}}$ имеется *единственный* изоморфизм $n_X : X \xrightarrow{\sim} [n]$ с *единственным* $[n] \in \operatorname{Ob}\Delta$, а именно нумерация элементов X в порядке возрастания.

Упражнение 1.2. Сколько всего стрелок в множестве $\operatorname{Hom}_\Delta([n],[m])$? Сколько среди них инъективных? Сколько сюрьективных? Покажите, что алгебра стрелок $\mathbb{Z}[\Delta]$, как абстрактная ассоциативная алгебра, порождается стрелками

$$e_n = \mathrm{Id}_{[n]} \qquad \text{(тождественное отображение)} \tag{1-2}$$

$$\partial_n^{(i)} : [n-1] \hookrightarrow [n] \qquad \text{(вложение, образ которого не содержит } i\text{)} \tag{1-3}$$

$$s_n^{(i)} : [n] \twoheadrightarrow [n-1] \qquad \text{(наложение, склеивающее } i \text{ с } (i+1)\text{)} \tag{1-4}$$

и опишите образующие идеала соотношений между этими стрелками.

1.1.2. Обращение стрелок. С каждой категорией $\mathcal{C}$ связана *противоположная* категория $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ с теми же объектами, но с обращённым направлением всех стрелок:

$$\operatorname{Ob}\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} = \operatorname{Ob}\mathcal{C}\,, \quad \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}}(X,Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)\,, \quad \varphi^{\mathrm{opp}} \circ \psi^{\mathrm{opp}} = (\psi \circ \varphi)^{\mathrm{opp}}\,.$$

На языке алгебр такое обращение стрелок означает переход от алгебры $C = K[\mathcal{C}]$ к противоположной алгебре C^{opp} из тех же элементов, но с происходящим в противоположном порядке умножением. Мономорфизмы и подобъекты категории $\mathcal{C}$ являются эпиморфизмами и фактор объектами категории $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ и наоборот.

[1]По-английски: *well powered*.
[2]Т. е. такие отображения $\varphi : X \to Y$, что $x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) \leqslant \varphi(x_2)$ для всех $x_1, x_2 \in X$.
[3]По упомянутым выше логическим причинам, см. сноску на стр. 3.

1.2. Функторы. Функтор[1] $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{D}$ это отображение $\operatorname{Ob}\mathcal{C} \to \operatorname{Ob}\mathcal{D}$, $X \mapsto F(X)$, и набор таких отображений[2]

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y)), \quad \varphi \mapsto F(\varphi), \tag{1-5}$$

что $F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$ для всех $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ и $F(\varphi\circ\psi) = F(\varphi)\circ F(\psi)$ всякий раз, когда композиция $\varphi \circ \psi$ определена. На языке ассоциативных алгебр функторы суть *гомоморфизмы* одной алгебры стрелок в другую. Если все отображения (1-5) сюрьективны, функтор F называется *полным*[3]. Образ такого функтора является полной подкатегорией. Если все отображения (1-5) инъективны, функтор F называется *строгим*[4]. Такой функтор задаёт вложение алгебр стрелок. Полные строгие функторы называют *вполне строгими*.

Простейшие функторы — это *тождественный функтор* $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, тождественно действующий на объектах и морфизмах, и *забывающие функторы*, действующие из какой-либо категории множеств с дополнительной структурой[5], морфизмы в которой суть сохраняющие эту структуру отображения множеств, в категорию $\mathcal{S}et$ всех множеств — такие функторы просто забывают о структуре. Забывающий функтор не строг, если имеются различные морфизмы структур, одинаково действующие на подлежащих множествах, и не полон, если не всякое отображение множеств сохраняет рассматриваемую структуру.

Пример 1.5 (геометрическая реализация комбинаторных симплексов)
Зададим функтор $\Delta \to \mathcal{T}op$ из категории комбинаторных симплексов в категорию топологических пространств, сопоставляя n-мерному комбинаторному симплексу $[n]$ стандартный n-мерный симплекс[6]

$$\Delta^n = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum x_\nu = 1\,,\ x_\nu \geqslant 0 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}, \tag{1-6}$$

а стрелке $\varphi : [n] \to [m]$ — единственное аффинное отображение $\varphi_* : \Delta^n \to \Delta^m$, действующее на базисные векторы по правилу $e_\nu \mapsto e_{\varphi(\nu)}$. Это строгий, но не полный функтор. Образующие элементы (1-3) и (1-4) алгебры стрелок категории Δ переводятся этим функтором, соответственно, во *вложение i-той грани* $\Delta^{(n-1)} \hookrightarrow \Delta^n$ и в *вырождение вдоль i-того ребра*[7] $\Delta^n \twoheadrightarrow \Delta^{(n-1)}$.

1.2.1. Предпучки. Функтор $F : \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{D}$ называется *контравариантным функтором* из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{D}$ или *предпучком* объектов категории $\mathcal{D}$ на категории $\mathcal{C}$. Такой функтор оборачивает композицию: $F(\varphi \circ \psi) = F(\psi) \circ F(\varphi)$ и на языке ассоциативных алгебр является *антигомоморфизмом* алгебр стрелок.

[1] Иногда вместо «функтор» говорят *ковариантный функтор*.
[2] По одному отображению для каждой упорядоченной пары объектов $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$.
[3] По-английски: *full*.
[4] По-английски: *faithful*.
[5] Например, геометрической — такой, как топология или структура гладкого многообразия, или алгебраической — такой, как структура группы, кольца или модуля.
[6] Т. е. выпуклую оболочку концов стандартных базисных векторов $e_0, e_1, \dots, e_n$ в $\mathbb{R}^{n+1}$.
[7] Т. е. в проекцию симплекса на грань вдоль ребра, соединяющего i-тую вершину с $(i+1)$-й.

Пример 1.6 (триангулированные пространства)
Обозначим через $\Delta_{\mathrm{s}} \subset \Delta$ неполную подкатегорию, объектами которой тоже являются комбинаторные симплексы, $\mathrm{Ob}\,\Delta_{\mathrm{s}} = \mathrm{Ob}\,\Delta$, но в качестве морфизмов допускаются только *строго возрастающие*[1] отображения. Категория Δ_{s} называется *полусимплициальной категорией*.

Упражнение 1.3. Убедитесь, что алгебра стрелок $K[\Delta_{\mathrm{s}}]$ порождается тождественными стрелками $e_n = \mathrm{Id}_{[n]}$ и отображениями вложения граней $\partial_n^{(i)}$ из (1-3).

Предпучок множеств $X : \Delta_{\mathrm{s}}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ на полусимплициальной категории Δ_{s} называется *полусимплициальным множеством* и является ни чем иным, как комбинаторным описанием *триангулированного топологического пространства* $|X|$, которое называется *геометрической реализацией* полусимплициального множества X. В самом деле, функтор X задаёт для каждого целого неотрицательного n множество $X_n = X([n])$, точки которого следует воспринимать как дизъюнктный набор n-мерных симплексов (1-6), из коих будет склеиваться пространство $|X|$. Стрелки $\varphi : [n] \to [m]$ в категории Δ_{s} биективно соответствуют n-мерным граням m-мерного симплекса Δ^m, и отображение $X(\varphi) : X_m \to X_n$, которое функтор X сопоставляет стрелке φ, задаёт *правило склейки*: оно указывает данному m-мерному симплексу $x \in X_m$, какой именно n-мерный симплекс $X(\varphi)x \in X_n$ надлежит приклеить к нему в качестве φ-той n-мерной грани.

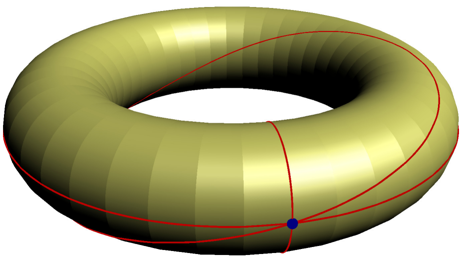

Рис. 1⋄1. Триангуляция тора.

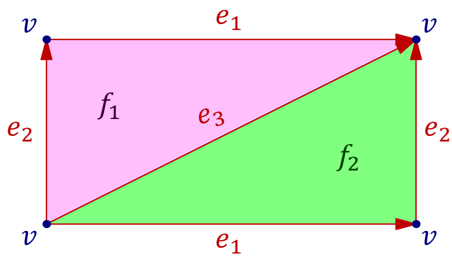

Рис. 1⋄2. Симплексы триангуляции.

Так, на рис. 1⋄1 показана стандартная триангуляция двумерного тора, склеенного из прямоугольника, изображённого на рис. 1⋄2. Эта триангуляция состоит из одного 0-мерного симплекса, в который склеятся все вершины прямоугольника, трёх 1-мерных симплексов, в которые склеятся, соответственно, две горизонтальных стороны, две вертикальных стороны, и диагональ прямоугольника, а также пары 2-мерных симплексов, на которые прямоугольник разрезается диагональю. Направления стрелок на рис. 1⋄2 соответствуют неравенствам между вершинами симплексов. Вертикальные рёбра e_2 с рис. 1⋄2 изображаются на рис. 1⋄1 меридианом тора, а горизонтальные рёбра e_1 — экватором тора. Соответствующее полусимплициальное множество X имеет $X_0 = \{v\}$, $X_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$, $X_2 = \{f_1, f_2\}$, и $X_i = \varnothing$ для всех $i \geqslant 3$, а

[1] Т. е. сохраняющие порядок и инъективные.

отображения склейки $X(\varphi)$ действуют по правилам

$$\begin{gathered} X(\partial_1^0) = X(\partial_1^1) : X_1 \to X_0 , \quad e_i \mapsto v \text{ для всех } i = 1,2,3 \\ X(\partial_2^0) : X_2 \to X_1 , \quad f_1 \mapsto e_1 , \, f_2 \mapsto e_2 , \\ X(\partial_2^1) : X_2 \to X_1 , \quad f_1 \mapsto e_3 , \, f_2 \mapsto e_3 , \\ X(\partial_2^2) : X_2 \to X_1 , \quad f_1 \mapsto e_2 , \, f_2 \mapsto e_1 . \end{gathered}$$

Упражнение 1.4. Существует ли триангуляция окружности S^1 а) тремя 0-мерными и тремя 1-мерным симплексами[1] б) одним 0-мерным и одним 1-мерным симплексом, а также триангуляция двумерной сферы S^2 в) четырьмя 0-мерными, шестью 1-мерными и четырьмя 2-мерным симплексами г) двумя 0-мерными, одним 1-мерным и одним 2-мерным симплексом Если да, задайте все отображения $X(\varphi)$ явно, если нет, объясните почему.

Пример 1.7 (симплициальные множества)
Предпучок множеств $X : \Delta^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ на всей симплициальной категории называется *симплициальным множеством*. Из симплициального множества X также можно изготовить топологическое пространство $|X|$, склеив стандартные правильные симплексы Δ^n_x, биективно сопоставленные точкам $x \in X_n$, согласно отображениям

$$\varphi^* \overset{\text{def}}{=} X(\varphi) : X_m \to X_n ,$$

предусмотренным функтором X для всех неубывающих отображений $\varphi : [n] \to [m]$ категории Δ. А именно, для каждого $x \in X_m$ надо приклеить каждую точку s симплекса $\Delta^n_{\varphi^*(x)}$, отвечающего элементу $\varphi^*(x) \in X_n$, к точке $\varphi_*(s)$ симплекса Δ^m_x, отвечающего элементу $x \in X_m$, где через $\varphi_* : \Delta^n \to \Delta^m$ обозначено аффинное отображение, переводящее вершины симплекса Δ^n в вершины симплекса Δ^m посредством морфизма φ. Результат такой склейки формально описывается как фактор пространство дизъюнктного объединения[2] $\bigsqcup\limits_{n\geqslant 0} X_n \times \Delta^n$ по наименьшему отношению эквивалентности, содержащему отождествления $(\varphi^* x, s) \simeq (x, \varphi_* s)$ для всех точек $x \in X_m$, $s \in \Delta^n$ и стрелок $\varphi : [n] \to [m]$.

Если стрелка $\varphi : [n] \to [m]$ является композицией наложения $\sigma : [n] \twoheadrightarrow [k]$ и вложения $\delta : [k] \hookrightarrow [m]$, то каждый n-мерный симплекс Δ^n_z, лежащий в образе φ^* и помеченный точкой $z = \sigma^* y = \sigma^* \delta^* x$, вклеится в пространство $|X|$ в виде k-мерного симплекса $\Delta^k_y = \sigma_* \Delta^n_z$, полученного из Δ^n_z аффинно линейной проекцией $\sigma_* : \Delta^n \twoheadrightarrow \Delta^k$. При этом он окажется δ-той k-мерной гранью m-мерного симплекса Δ^m_x. Таким образом, каждый симплекс $z \in X_n$, лежащий в образе отображения σ^*, отвечающего какой-нибудь стрелке $\sigma : [n] \to [k]$ с $k < n$, виден в итоговом пространстве $|X|$ как симплекс меньшей, чем n размерности. Такие симплексы называются *вырожденными*. Их использование позволяет описывать более общие клеточные структуры, чем

[1] Т. е. можно ли получить окружность в качестве геометричекой реализации полусимплициального множества X, у которого X_0 и X_1 состоят из трёх элементов, а все остальные X_i пусты

[2] В котором множества X_n рассматриваются с *дискретной*, а симплексы $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ со стандартной топологией объемлющего вещественного аффинного пространства.

стандартные триангуляции. Однако платой за это является громоздкость такого описания: для любого функтора $X : \Delta^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ каждое из множеств X_n обязано быть непустым.

Например, n-мерная сфера S^n гомеоморфна топологическому фактору стандартного n-мерного симплекса по его границе[1] $S^n \simeq \Delta^n/\partial\Delta^n$. Этот гомеоморфизм задаёт на сфере S^n клеточную структуру, состоящую из одной 0-нульмерной вершины, в которую склеится граница симплекса, и одной n-мерной клетки, в которую превратится весь симплекс. Она описывается предпучком $X : \Delta^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$, у которого при всех k множество $X_k = X([k])$ получается из множества $\mathrm{Hom}_{\Delta}([k],[n])$ отождествлением всех неэпиморфных отображений в один элемент, а правило склейки $\varphi^* : X_m \to X_k$, отвечающее неубывающему отображению $\varphi : [k] \to [m]$, переводит класс стрелки $\zeta : [m] \to [n]$ в класс стрелки $\zeta\varphi : [k] \to [n]$.

Упражнение 1.5. Убедитесь, что это описание корректно задаёт предпучок X с геометрической реализацией $|X| \simeq S^n$ и найдите количество элементов в каждом множестве X_k, $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Пример 1.8 (предпучки и пучки на топологических пространствах)
Исторически, термин «предпучок» впервые возник в контексте категории $\mathcal{C} = \mathcal{U}(X)$ всех открытых подмножеств $U \subset X$ заданного топологического пространства X. Предпучок $F : \mathcal{U}(X)^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{D}$ сопоставляет каждому открытому множеству $U \subset X$ объект $F(U) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$, который называется *сечениями* предпучка F над U. В зависимости от категории $\mathcal{D}$ сечения могут образовывать множество, кольцо, алгебру, векторное или топологическое пространство и т. п. Морфизм $F(W) \to F(U)$, отвечающий включению $U \subset W$, называется *ограничением сечений*, определённых над W, на подмножество U, а результат его применения к сечению $s \in F(W)$ обозначается через $s|_U$. Вот несколько типичных примеров таких предпучков:

1) предпучок Γ_E локальных сечений непрерывного отображения $p : E \to X$ имеет в качестве $\Gamma_E(U)$ множество таких непрерывных отображений $s : U \to E$, что[2] $p \circ s = \mathrm{Id}_U$, а его отображения ограничения — это обычные ограничения сечений с большего подмножества на меньшее

2) беря в предыдущем примере в качестве отображения проекцию $p : X \times Y \to X$, получаем предпучок локальных непрерывных отображений $\mathcal{C}^0(X,Y)$ пространства X в пространство Y, имеющий в качестве сечений над $U \subset X$ непрерывные отображения $s : U \to Y$

3) дальнейшими специализациями являются так называемые *структурные предпучки* $\mathcal{O}_X$: предпучок дифференцируемых функций $X \to \mathbb{R}$ на гладком вещественном многообразии X, предпучок локальных голоморфных функций $X \to \mathbb{C}$ на комплексно аналитическом многообразии X, предпучок локальных рациональных функций $X \to \Bbbk$ на алгебраическом многообразии X над полем $\Bbbk$ и т. п. (все они являются предпучками алгебр над соответствующим полем)

[1] Т. е. склеивании всех точек границы в одну. Например, двумерная сфера S^2 получается таким способом из треугольника.

[2] Это требование означает, что каждая точка $x \in U$ отображается в слой $p^{-1}(x)$ над нею.

4) постоянный *предпучок* S имеет в качестве $S(U)$ одно и то же фиксированное множество S для всех $U \subset X$, и все его отображения ограничения — тождественные морфизмы Id_S.

Предпучок F называется *пучком*, если для любого семейства открытых подмножеств U_i и любого набора таких локальных сечений $s_i \in F(U_i)$, что $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ при всех i, j, существует единственное такое сечение $s \in F(\bigcup_i U_i)$, что $s|_{U_i} = s_i$ при всех i. В случае, когда имеется не более одного такого сечения (но может не быть и ни одного), предпучок F называется *отделимым*.

Упражнение 1.6. Убедитесь в том, что категории пучков и отделимых предпучков являются полными подкатегориями в категории всех предпучков $pSh(X)$.

Все предпучки (1) – (4) отделимы, и только последний из них — постоянный *предпучок* — не является пучком, поскольку для покрытия дизъюнктного объединения $W = U_1 \sqcup U_2$ множествами U_1, U_2 не всякая пара констант $s_i \in S(U_i)$ является ограничением одной константы $s \in S(W)$. Тем не менее наряду с постоянным предпучком в природе имеется и

5) постоянный *пучок* $S^\sim$, у которого $S^\sim(U)$ это *непрерывные* отображения $U \to S$ в множество S, рассматриваемое с *дискретной* топологией, или — что то же самое — *локально* постоянные функции со значениями в S.

Упражнение 1.7. Опишите первообразные действительной функции $1/x$.

1.2.2. Функторы Hom. С каждым объектом $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ любой категории $\mathcal{C}$ связаны функтор $h^X : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, переводящий объект Y в множество морфизмов

$$h^X(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}(X, Y),$$

а стрелку $\varphi : Y_1 \to Y_2$ в отображение $\varphi_* : \mathrm{Hom}(X, Y_1) \to \mathrm{Hom}(X, Y_2)$ левого умножения на φ : $\varphi_*(\psi) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi \circ \psi$, и предпучок $h_X : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, переводящий объект Y в множество морфизмов

$$h_X(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}(Y, X),$$

а стрелку $\varphi : Y_1 \to Y_2$ в отображение $\varphi^* : \mathrm{Hom}(Y_2, X) \to \mathrm{Hom}(Y_1, X)$ правого умножения на φ : $\varphi^*(\psi) \stackrel{\text{def}}{=} \psi \circ \varphi$.

Например, предпучок $h_{[n]} : \Delta_s \to \mathcal{S}et$ на полусимплициальной категории Δ_s задаёт стандартную триангуляцию стандартного n-мерного симплекса: множество её k-мерных симплексов $h_{[n]}([k]) = \mathrm{Hom}([k], [m])$ это в точности множество всех k-мерных граней. Предпучок $h_U : \mathcal{U}(X) \to \mathcal{S}et$ на топологическом пространстве X имеет ровно одно сечение над всеми $W \subseteq U$ и пустое множество сечений над любым $W \nsubseteq U$. Вот ещё несколько примеров.

Пример 1.9 (двойственность в категории векторных пространств)
Предпучок $h_{\Bbbk} : \mathcal{V}ec_{\Bbbk}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ сопоставляет векторному пространству V двойственное векторное пространство $h_{\Bbbk}(V) = \mathrm{Hom}(V, \Bbbk) = V^*$, а линейному отображению $\varphi : V \to W$ — двойственное отображение $\varphi^* : W^* \to V^*$, переводящее линейную форму $\xi : W \to \Bbbk$ в линейную форму $\xi \circ \varphi : V \to \Bbbk$.

Пример 1.10 (двойственность конечных упорядоченных множеств)
Это комбинаторная версия предыдущего примера. Обозначим через через ∇_{big} категорию конечных упорядоченных множеств из не менее двух элементов, морфизмами в которой являются неубывающие отображения, переводящие минимальный элемент в минимальный, а максимальный — в максимальный[1]. Тавтологическое включение $\nabla_{\text{big}} \hookrightarrow \varDelta_{\text{big}}$ является строгим, но не полным функтором. Предпучки

$$h_{[1]} : \varDelta_{\text{big}}^{\text{opp}} \to \nabla_{\text{big}} \quad \text{и} \quad h_{[1]} : \nabla_{\text{big}}^{\text{opp}} \to \varDelta_{\text{big}}$$

переводят упорядоченные множества $X \in \operatorname{Ob} \varDelta_{\text{big}}$ и $Y \in \operatorname{Ob} \nabla_{\text{big}}$ в множества

$$X^* \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}_{\varDelta_{\text{big}}}(X, [1]) \quad \text{и} \quad Y^* \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}_{\nabla_{\text{big}}}(Y, [1]),$$

порядок на которых задаётся поточечным сравнением значений:

$$\varphi \leqslant \psi, \quad \text{если } \varphi(x) \leqslant \psi(x) \text{ для всех } x.$$

Стрелка $\varphi : Z_1 \to Z_2$ переводится обоими функторами в морфизм правого умножения $\varphi^* : \operatorname{Hom}(Z_2, [1]) \to \operatorname{Hom}(Z_1, [1])$, $\xi \mapsto \xi \circ \varphi$.

Иначе можно сказать, что множество Z^* это множество «дедекиндовых сечений» множества Z, т. е. множество таких разбиений $Z = Z_0 \sqcup Z_1$, что $z_0 < z_1$ для всех $z_0 \in Z_0$, $z_1 \in X_1$, и оба множества Z_i должны быть непусты, когда $Z \in \operatorname{Ob} \nabla_{\text{big}}$, или одно из них может быть пусто, когда $Z \in \operatorname{Ob} \varDelta_{\text{big}}$. Обратите внимание, что сечения ведут себя *контра*вариантно по отношению к морфизмам: при наличии неубывающего отображения $Z_1 \to Z_2$ разбиение второго множества Z_2 индуцирует разбиение на Z_1, но не наоборот.

1.3. Естественные преобразования. Для пары функторов $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *естественным* (или *функториальным*) *преобразованием* F в G называется такое занумерованное объектами $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ семейство стрелок $f_X : F(X) \to G(X)$ в категории $\mathcal{D}$, что для любой стрелки $\varphi : X \to Y$ из $\mathcal{C}$ возникающая в категории $\mathcal{D}$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(\varphi)"] \arrow[d, "f_X"'] & F(Y) \arrow[d, "f_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(\varphi)"'] & G(Y) \end{tikzcd} \tag{1-7}$$

коммутативна. На языке алгебр, гомоморфизм $F : K[\mathcal{C}] \to K[\mathcal{D}]$ наделяет алгебру $K[\mathcal{D}]$ структурой модуля над алгеброй $K[\mathcal{C}]$, в которой умножение элемента $b \in K[\mathcal{D}]$ на элемент $a \in K[\mathcal{C}]$ определяется правилом $a \cdot b \stackrel{\text{def}}{=} F(a) \cdot b$. Пара функторов F, G задаёт на алгебре $K[\mathcal{D}]$ две различных структуры $K[\mathcal{C}]$-модуля, и естественное преобразование $f : F \to G$ это $K[\mathcal{C}]$-линейный гомоморфизм между этими модулями: для любого $\varphi \in K[\mathcal{C}]$ действие на $K[\mathcal{D}]$ операторов $F(\varphi)$ и $G(\varphi)$ удовлетворяет соотношению $f \circ F(\varphi) = G(\varphi) \circ f$.

[1]Отметим, что минимальный и максимальный элементы различны.

Пример 1.11 (категория функторов)
Функторы из малой категории $\mathcal{C}$ в произвольную категорию $\mathcal{D}$ образуют категорию $\mathcal{F}un(\mathcal{C},\mathcal{D})$, объектами которой являются функторы $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, а морфизмами — естественные преобразования $f : F \to G$. Для малой категории $\mathcal{C}$ мы будем обозначать категорию предпучков $\mathcal{F}un(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}},\mathcal{D})$ через $p\mathcal{S}h(\mathcal{C},\mathcal{D})$. Опущенная буква $\mathcal{D}$ в этой записи по умолчанию означает, что $\mathcal{D} = \mathcal{S}et$, т. е. $p\mathcal{S}h(\mathcal{C}) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{F}un(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}},\mathcal{S}et)$.

Упражнение 1.8. Проверьте, что описанное в n° 1.2.2 сопоставление $X \mapsto h_X$ задаёт функтор $\mathcal{C} \to p\mathcal{S}h(\mathcal{C})$, а сопоставление $X \mapsto h^X$ — предпучок $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{F}un(\mathcal{C},\mathcal{S}et)$.

1.3.1. Эквивалентности категорий. Категории $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ называются *эквивалентными*, если между ними есть такие функторы $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, что композиция GF естественно изоморфна тождественному функтору $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$, а композиция FG естественно изоморфна $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$, т. е. имеются естественные по $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ преобразования

$$GF(X) \simeq X \quad \text{и} \quad FG(Y) \simeq Y\,, \tag{1-8}$$

являющиеся для всех X и Y изоморфизмами в категориях $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ соответственно. Такие функторы F и G называются *квазиобратными* друг другу *эквивалентностями категорий*. Подчеркнём, что наличие изоморфизмов (1-8) не означает равенств $FG = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ или $GF = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$: объекты $GF(X)$ и X могут быть различны, как и объекты $FG(Y)$ и Y.

Пример 1.12 (выбор базиса)
Обозначим через $vec_{\Bbbk}$ категорию конечномерных векторных пространств над полем $\Bbbk$, а через $\mathcal{C} \subset vec_{\Bbbk}$ — её малую полную подкатегорию со счётным множеством объектов, коими являются *координатные* пространства $\Bbbk^n$, где $n \geqslant 0$ и $\Bbbk^0 = \{0\}$. Зафиксируем в каждом пространстве $V \in \mathrm{Ob}\,vec_{\Bbbk}$ какой-нибудь базис, т. е. выберем для каждого $V \in \mathrm{Ob}\,vec_{\Bbbk}$ изоморфизм[1]

$$f_V : V \simeq \Bbbk^{\dim(V)}\,, \tag{1-9}$$

причём для всех координатных пространств $\Bbbk^n$ положим $f_{\Bbbk^n} = \mathrm{Id}_{\Bbbk^n}$. Рассмотрим функтор $F : vec_{\Bbbk} \to \mathcal{C}$, переводящий векторное пространство V в координатное пространство $\Bbbk^{\dim V}$, а стрелку $\varphi : V \to W$ — в стрелку $F(\varphi) = f_W \circ \varphi \circ f_V^{-1}$, которую можно воспринимать как матрицу оператора φ в выбранных базисах пространств V и W. Покажем, что F является эквивалентностью категорий, квазиобратной к тавтологическому вложению $G : \mathcal{C} \hookrightarrow vec$. По построению мы имеем точное равенство[2] $FG = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$. Противоположная композиция $GF : vec \to vec$ принимает значения в несопоставимой с vec по мощности малой подкатегории $\mathcal{C} \subset vec$. Однако изоморфизмы (1-9) задают естественное преобразование из Id_{vec} в GF, т. к. в силу определения действия функтора F на стрелки все диаграммы (1-7) коммутативны:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Id}_{vec}(V) = V \arrow[r, "\varphi=\mathrm{Id}_{vec}(\varphi)"] \arrow[d, "f_V"'] & W = \mathrm{Id}_{vec}(W) \arrow[d, "f_W"] \\
GF(V) = \Bbbk^{\dim V} \arrow[r, "GF(\varphi)=f_W\circ\varphi\circ f_V^{-1}"] & \Bbbk^{\dim W} = GF(W)
\end{tikzcd}$$

Тем самым, тождественный функтор Id_{vec} естественно изоморфен композиции GF.

[1] Переводящий выбранный базис в стандартный базис в $\Bbbk^n$.
[2] А не просто изоморфизм функторов.

Упражнение 1.9. Покажите, что категория Δ_{big} канонически эквивалентна симплициалной подкатегории $\Delta \subset \Delta_{\text{big}}$ (см. прим. 1.4 на стр. 5).

Лемма 1.1
Функтор $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ тогда и только тогда задаёт эквивалентность категорий, когда он вполне строг[1] и каждый объект $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{D}$ изоморфен объекту вида $G(X)$ для некоторого (зависящего от Y) объекта[2] $X = X(Y) \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$.

Доказательство. Пусть для каждого $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{D}$ указаны $X = X(Y) \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ и изоморфизм $f_Y : Y \xrightarrow{\sim} G(X)$, причём когда $Y = G(X)$, мы положим $f_{G(X)} = \operatorname{Id}_{G(X)}$. Зададим функтор $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ на объектах правилом $F(Y) = X(Y)$, а для стрелки $\varphi : Y_1 \to Y_2$ положим $F(\varphi)$ равным такой стрелке[3] $\psi : X(Y_1) \to X(Y_2)$, что $G(\psi) = f_{Y_2} \circ \varphi \circ f_{Y_1}^{-1}$. Тогда $FG = \operatorname{Id}_{\mathcal{C}}$ и для любой стрелки $\varphi : Y_1 \to Y_2$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Id}_{\mathcal{D}}(Y_1) = Y_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f_{Y_1}"'] & Y_2 = \operatorname{Id}_{\mathcal{D}}(Y_2) \arrow[d, "f_{Y_2}"] \\
GF(Y_1) = X_1 \arrow[r, "GF(\varphi)=G(\psi)"] & X_2 = GF(Y_2)\,.
\end{tikzcd}$$

Таким образом, $f_Y : Y \xrightarrow{\sim} G(X) = GF(Y)$ задают естественный изоморфизм тождественного функтора $\operatorname{Id}_{\mathcal{D}}$ с композицией GF. □

Упражнение 1.10. Покажите, что функторы дуализации из прим. 1.9 и прим. 1.10 являются квазиобратными самим себе антиэквивалентностями категорий.

1.4. Представимые функторы. Предпучок $F : \mathcal{C}^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$, естественно изоморфный предпучку h_X для некоторого $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$, называется *представимым*, и X в этом случае называют *представляющим объектом* предпучка F. Двойственным образом, ковариантный функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ называется *копредставимым*, если он естественно изоморфен функтору h^X для некоторого $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$, именуемого в этом случае *копредставляющим объектом* функтора F.

Упражнение 1.11. Убедитесь, что тензорное произведение конечномерных векторных пространств $U \otimes V$ копредставляет функтор $\mathcal{V}ec \to \mathcal{S}et$, сопоставляющий векторному пространству W множество билинейных отображений $U \times V \to W$.

Множество $X_n = X([n])$ всех n-мерных симплексов триангулированного топологического пространства $X : \Delta_{\text{s}}^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$ можно описать как множество всех *симплициальных* отображений $\Delta^n \to X$ из стандартным образом триангулированного n-мерного симплекса $\Delta^n = h_{[n]}$ в триангулированное пространство X, т. е. как множество естественных преобразований $\operatorname{Hom}_{p\mathcal{S}h(\Delta_{\text{s}})}\left(h_{[n]}, X\right)$. Прямым обобщением этого наблюдения является

[1] Т. е. все отображения $G : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X), G(Y))$ являются изоморфизмами.

[2] Функторы G, обладающие этим свойством, называются *по существу сюрьективными* (по-английски *essentially surjective*).

[3] Поскольку $G : \operatorname{Hom}(X_1, X_2) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(G(X_1), G(X_2))$ является изоморфизмом, стрелка ψ существует и единственна

Лемма 1.2 (лемма Ионеды 1)
Для любого предпучка множеств $F : \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ на произвольной категории $\mathcal{C}$ имеется функториальная по $F \in p\mathcal{S}h(\mathcal{C})$ и по $A \in \mathcal{C}$ биекция $F(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(\mathcal{C})}(h_A, F)$, переводящая элемент $a \in F(A)$ в естественное преобразование

$$f_X : \mathrm{Hom}(X, A) \to F(X)\,, \tag{1-10}$$

которое посылает стрелку $\varphi : X \to A$ в значение отображения $F(\varphi) : F(A) \to F(X)$ на элементе a. Обратная биекция сопоставляет каждому естественному преобразованию (1-10) значение отображения $f_A : h_A(A) \to F(A)$ на элементе $\mathrm{Id}_A \in h_A(A)$.

Доказательство. Для любого естественного преобразования (1-10), любого объекта $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и любой стрелки $\varphi : X \to A$ мы имеем коммутативную диаграмму (1-7)

$$\begin{tikzcd} h_A(A) = \mathrm{Hom}(A, A) \arrow[r, "h_A(\varphi)"] \arrow[d, "f_A"'] & \mathrm{Hom}(X, A) = h_A(X) \arrow[d, "f_X"] \\ F(A) \arrow[r, "F(\varphi)"] & F(X)\,, \end{tikzcd} \tag{1-11}$$

верхняя строка которой переводит Id_A в φ, так что $f_X(\varphi) = F(\varphi)\big(f_A(\mathrm{Id}_A)\big)$. Это означает, что естественное преобразование $f : h_A \to F$ однозначно восстанавливается по элементу $a = f_A(\mathrm{Id}_A) \in F(A)$. Каждому элементу $a \in F(A)$ при этом отвечает преобразование (1-10), переводящее $\varphi \in \mathrm{Hom}(X, A)$ в $f_X(\varphi) = F(\varphi)(a) \in F(X)$, естественное, поскольку для любой стрелки $\psi : Y \to X$ и всех $\varphi \in h_A(X)$ имеем $f_Y\left(h_A(\psi)\varphi\right) = f_Y(\varphi\psi) = F(\varphi\psi)a = F(\psi)F(\varphi)a = F(\psi)\left(f_X(\varphi)\right)$, т. е. $f_Y \circ h_A(\psi) = F(\psi) \circ f_X$ как отображения $h_A(X) \to F(Y)$. □

Упражнение 1.12 (лемма Ионеды 2). Для ковариантного функтора $F : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ постройте функториальную по F и $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ биекцию $F(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{C},\mathcal{S}et)}(h^A, F)$.

Следствие 1.1
Функторы $X \mapsto h_X$ и $X \mapsto h^X$ задают вполне строгие ковариантное и контравариантное вложения категории $\mathcal{C}$ в категории предпучков и ковариантных функторов соответственно. Иными словами, имеются функториальные по $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ изоморфизмы $\mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(\mathcal{C})}(h_A, h_B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{C})}(h^A, h^B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$.

Доказательство. Применяем леммы Ионеды к функторам $F = h_B$ и $F = h^B$. □

Следствие 1.2
Если объект $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, копредставляющий функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ (соотв. представляющий предпучок $F : \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$) существует, то он единствен с точностью до канонического изоморфизма.

Доказательство. Если имеются два таких объекта A, B, что $F = h^A = h^B$ (соотв. $F = h_A = h_B$), то тождественному естественному преобразованию $\mathrm{Id}_F : F \to F$ отвечает по сл. 1.1 изоморфизм $B \xrightarrow{\sim} A$ (соотв. $A \xrightarrow{\sim} B$). □

1.4.1. Описание объектов универсальными свойствами. При помощи сл. 1.2 можно пытаться переносить в произвольную категорию $\mathcal{C}$ естественные[1] операции над множествами, имеющиеся в категории $\mathcal{S}et$. А именно, будем называть результатом применения такой операции к набору объектов $X_i \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ представляющий объект X предпучка $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$, переводящего каждый объект $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ в результат применения этой операции к множествам $\operatorname{Hom}(Y, X_i)$ в категории $\mathcal{S}et$. Разумеется, такое неявное описание не даёт никаких гарантий *существования* определяемого объекта, т. к. рассматриваемый функтор может оказаться непредставимым. Однако, если он представим, то представляющий объект X, во-первых, автоматически обладает некоторыми «универсальными свойствами», а во-вторых, единствен с точностью до *единственного* изоморфизма, сохраняющего эти свойства. Вдобавок, у каждой такого рода конструкции есть двойственная версия, получающаяся из предыдущей обращением стрелок и объявляющая результатом теоретико множественной операции над объектами $X_i \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ копредставляющий объект ковариантного функтора $\mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, переводящего $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ в результат применения операции к множествам $\operatorname{Hom}(X_i, Y)$.

Пример 1.13 (произведение $A \times B$)
Определим *произведение* $A \times B$ объектов $A, B \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ произвольной категории $\mathcal{C}$ как объект, представляющий предпучок $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$, $Y \mapsto \operatorname{Hom}(Y, A) \times \operatorname{Hom}(Y, B)$. Если произведение существует, то имеется функториальный по Y изоморфизм

$$\beta_Y : \operatorname{Hom}(Y, A \times B) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(Y, A) \times \operatorname{Hom}(Y, B)\,.$$

Полагая в нём $Y = A \times B$, получаем пару стрелок

$$A \xleftarrow{\pi_A} A \times B \xrightarrow{\pi_B} B\,, \tag{1-12}$$

изображающих элемент $\beta_{A\times B}(\operatorname{Id}_{A\times B}) \in \operatorname{Hom}(A \times B, A) \times \operatorname{Hom}(A \times B, B)$. Пара стрелок (1-12) универсальна в том смысле, что для любой пары стрелок

$$A \xleftarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} B\,, \quad (\varphi, \psi) \in \operatorname{Hom}(Y, A) \times \operatorname{Hom}(Y, B)\,, \tag{1-13}$$

существует единственная стрелка $\varphi \times \psi : Y \to A \times B$, такая что $\beta_Y(\varphi \times \psi) = (\varphi, \psi)$. Коммутативная диаграмма[2]

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}(A \times B, A \times B) \arrow[r, "h_{A\times B}(\varphi\times\psi)"] \arrow[d, "\beta_{A\times B}"'] & \operatorname{Hom}(Y, A \times B) \arrow[d, "\beta_Y"] \\ \operatorname{Hom}(A \times B, A) \times \operatorname{Hom}(A \times B, B) \arrow[r, "h_A(\varphi\times\psi)\times h_B(\varphi\times\psi)"] & \operatorname{Hom}(Y, A) \times \operatorname{Hom}(Y, B)\,, \end{tikzcd}$$

верхняя горизонтальная стрелка которой переводит $\operatorname{Id}_{A\times B}$ в $\varphi\times\psi$, а композиция нижней и левой стрелок действуют на $\operatorname{Id}_{A\times B}$ как

$$\operatorname{Id}_{A\times B} \xmapsto{\beta_{A\times B}} (\pi_A, \pi_B) \xmapsto{h_A(\varphi\times\psi)\times h_B(\varphi\times\psi)} \big(\pi_A \circ (\varphi \times \psi), \pi_B \circ (\varphi \times \psi)\big)\,,$$

[1] Т. е. функториальные по всем участвующим множествам.
[2] Ср. с использованной в доказательстве леммы Ионеды диаграммой из форм. (1-11) на стр. 14

показывает, что равенство $\beta_Y(\varphi\times\psi) = (\varphi,\psi)$ равносильно равенствам $\varphi = \pi_A\circ(\varphi\times\psi)$ и $\psi = \pi_B\circ(\varphi\times\psi)$.

Упражнение 1.13. Пусть диаграмма $A \xleftarrow{\pi'_A} C \xrightarrow{\pi'_B} B$ тоже универсальна в том смысле, что для любой пары стрелок (1-13) существует единственная такая стрелка $Y \to C$, композиции которой с π'_A и π'_B равны φ и π соответственно. Убедитесь, что существует единственный изоморфизм $\gamma : C \xrightarrow{\sim} A\times B$, такой что $\pi_A\circ\gamma = \pi'_A$ и $\pi_B\circ\gamma = \pi'_B$. Покажите также, что любая пара стрелок

$$\alpha : A_1 \to A_2\,,\quad \beta : B_1 \to B_2$$

задаёт единственный морфизм $\alpha\times\beta : A_1\times B_1 \to A_2\times B_2$, такой что $\alpha\circ\pi_A = (\alpha\times\beta)\circ\alpha$ и $\beta\circ\pi_B = (\alpha\times\beta)\circ\beta$.

В категории множеств произведение $A\times B = \{(a,b)\mid a\in A,\ b\in B\}$. Снабжённое слабейшей топологией, в которой π_A и π_B непрерывны, это множество задаёт произведение и в категории топологических пространств. Снабжённое покомпонентными операциями, оно же является произведением групп, колец и модулей над кольцами.

Пример 1.14 (копроизведение $A\otimes B$)
Двойственным образом, копроизведение $A\otimes B$ объектов $A,B\in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ произвольной категории $\mathcal{C}$ определяется как объект, копредставляющий ковариантный функтор

$$Y \mapsto \operatorname{Hom}(A,Y)\times\operatorname{Hom}(B,Y)$$

из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{S}et$. Обращая все стрелки в предыдущем примере, мы можем охарактеризовать копроизведение как объект, включающийся в диаграмму

$$A \xrightarrow{\iota_A} A\otimes B \xleftarrow{\iota_B} B\ ,$$

универсальную в том смысле, что для любой пары стрелок в $\mathcal{C}$

$$A \xrightarrow{\varphi} Y \xleftarrow{\psi} B$$

имеется единственный морфизм $\varphi\otimes\psi : A\otimes B \to Y$, такой что $\varphi = (\varphi\otimes\psi)\circ\iota_A$ и $\psi = (\varphi\otimes\psi)\circ\iota_B$.

Упражнение 1.14. Убедитесь, что если такая универсальная диаграмма существует, то она единственна с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного со стрелками ι_A, ι_B, и что любая пара стрелок $\alpha : A_1\to A_2$, $\beta : B_1 \to B_2$ задаёт единственный такой морфизм $\alpha\otimes\beta : A_1\otimes B_1 \to A_2\otimes B_2$, что $\iota_A\circ\alpha = (\alpha\otimes\beta)\circ\alpha$.

Копроизведение в категории множеств и топологических пространств это дизъюнктное объединение $A\otimes B = A\sqcup B$. В категории групп это свободное произведение групп[1]

[1] Т. е. фактор свободной группы, порождённой дизъюнктным объединением $A\sqcup B$, по наименьшей нормальной подгруппе соотношений, позволяющих заменять пару соседних лежащих в одной группе букв их произведением. К примеру, $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}\simeq\mathbb{F}_2$ это свободная (некоммутативная) группа с двумя образующими.

$A \otimes B = A * B$. В категории модулей над кольцом[1] копроизведение совпадает с произведением и равно прямой сумме модулей $A \otimes B = A \times B = A \oplus B$. В категории коммутативных колец с единицей копроизведение $A \otimes B$ это тензорное произведение колец[2].

Пример 1.15 (свободные модули)
Обозначим через R-$\mathcal{M}od$ категорию левых модулей над фиксированным кольцом R. Для любого множества $E \in \operatorname{Ob} \mathcal{S}et$ ковариантный функтор

$$R\text{-}\mathcal{M}od \to \mathcal{S}et\,, \quad M \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{S}et}(E, M)\,,$$

копредставим *свободным* R-модулем с базисом E. Мы будем обозначать такой свободный модуль через $R \otimes E$. По определению, он состоит из формальных линейных комбинаций $\sum\limits_{e \in E} x_e e$ элементов множества E с коэффициентами $x_e \in R$, лишь конечное число из которых отлично от нуля.

Упражнение 1.15. Установите функториальный по M и E изоморфизм

$$\operatorname{Hom}_{R\text{-}\mathcal{M}od}(R \otimes E, M) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{S}et}(E, M)\,. \tag{1-14}$$

[1] В частности, в категории $\mathcal{A}b$ абелевых групп.

[2] Т. е. тензорное произведение подлежащих абелевых групп, как модулей над $\mathbb{Z}$, с покомпонентным умножением: $(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 \cdot a_2) \otimes (b_1 \cdot b_2)$.

§2. Сопряжённые функторы и (ко)пределы

2.1. Сопряжённые функторы. Если функторы $\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$ между категориями $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ связаны функториальным по $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ и $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ изоморфизмом

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))\,, \tag{2-1}$$

то F называется *левым сопряжённым* функтором к G, а G — *правым сопряжённым* к F. С каждой парой сопряжённых функторов связаны естественные преобразования

$$t : F \circ G \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \quad \text{и} \quad s : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F\,. \tag{2-2}$$

Стрелка $t_Y : FG(Y) \to Y$, задающая действие преобразования t над $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$, является образом элемента $\mathrm{Id}_{G(Y)}$ при изоморфизме (2-1), написанном для $X = G(Y)$:

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(FG(Y), Y) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(G(Y), G(Y)) \ni \mathrm{Id}_{G(Y)}\,.$$

Двойственным образом, стрелка $s_X : X \to GF(X)$ получается из $\mathrm{Id}_{F(X)}$ при изоморфизме (2-1), написанном для $Y = F(X)$:

$$\mathrm{Id}_{F(X)} \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(X)) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GF(X))\,.$$

Пример 2.1 (продолжение прим. 1.15 про свободные модули)
Изоморфизм из форм. (1-14) на стр. 17 означает, что функтор

$$F : \mathcal{S}et \to R\text{-}\mathcal{M}od\,, \quad E \mapsto R \otimes E\,,$$

сопоставляющий произвольному множеству E свободный левый R-модуль с базисом E, сопряжён слева к забывающему функтору $G : R\text{-}\mathcal{M}od \to \mathcal{S}et$, переводящему модуль в множество его элементов, т. е. $\operatorname{Hom}_{R\text{-}\mathcal{M}od}(R \otimes E, M) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{S}et}\big(E, G(M)\big)$ функториально по модулю M и множеству E. Естественное преобразование

$$s_E : E \hookrightarrow G(A \otimes E)$$

вкладывает E в качестве множества базисных векторов в множество всех векторов свободного модуля $R \otimes E$. Естественное преобразование

$$t_M : R \otimes G(M) \twoheadrightarrow M$$

это R-линейный эпиморфизм огромного свободного модуля, базисом которого служит множество всех векторов модуля M, на модуль M. Он переводит каждый базисный вектор m в элемент $m \in M$, а формальную линейную комбинацию базисных векторов — в результат её вычисления внутри модуля M. Так, при $M = R = \mathbb{R}$ векторное пространство $\mathbb{R} \otimes G(\mathbb{R})$ изоморфно пространству всех функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с конечным носителем, а преобразование $t_{\mathbb{R}}$ сопоставляет такой функции вещественное число, равное сумме всех её (ненулевых) значений.

Предложение 2.1
Для существования левого сопряжённого функтора $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ к данному функтору $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ функтор

$$h_G^X : \mathcal{D} \to \mathcal{S}et\,, \quad Y \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X, G(Y)\big)\,, \tag{2-3}$$

был копредставим, и в этом случае $F(X)$ является его копредставляющим объектом.

Доказательство. Необходимость очевидна из определений. Докажем достаточность. Пусть для каждого $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ функтор (2-3) представляется объектом $F(X)$, т. е. имеется естественный изоморфизм функторов $f^X : h^{F(X)} \xrightarrow{\sim} h_G^X$. Чтобы продолжить соответствие $X \mapsto F(X)$ до функтора $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ заметим, что морфизм $\varphi : X_1 \to X_2$ задаёт естественное преобразование $\varphi^* : h_G^{X_2} \to h_G^{X_1}$ заключающееся в правом умножении на φ: стрелка $\psi : X_2 \to G(Y)$ переходит в $\psi\varphi : X_1 \to G(Y)$. Из леммы Ионеды вытекает[1], что композиция естественных преобразований $\left(f^{X_1}\right)^{-1} \circ \varphi^* \circ f^{X_2} : h^{F(X_2)} \to h^{F(X_1)}$ задаётся правым умножением на единственную стрелку $F(X_1) \to F(X_2)$, которую мы и объявим образом $F(\varphi)$ стрелки φ под действием функтора F. Прямо по построению мы получаем функториальный по X изоморфизм $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$. □

Упражнение 2.1. Докажите двойственное утверждение: для существования правого сопряжённого функтора G к функтору $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{D}$ был представим предпучок $h_Y^G : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, переводящий $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ в $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y)$, и $G(X)$ в этом случае его и представляет.

Предложение 2.2
Функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ тогда и только тогда сопряжён слева к функтору $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, когда существуют такие естественные преобразования $t : F \circ G \to \operatorname{Id}_{\mathcal{D}}$ и $s : \operatorname{Id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F$, что композиции $F \xrightarrow{F \circ s} FGF \xrightarrow{t \circ F} F$ и $G \xrightarrow{s \circ G} GFG \xrightarrow{G \circ t} G$ являются тождественными эндоморфизмами функторов F и G.

Доказательство. Если имеются функториальные по X и Y изоморфизмы

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(X), Y\big) \arrow[rr, bend left, "\varrho"] & & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X, G(Y)\big) \arrow[ll, bend left, "\lambda"] \end{tikzcd} \tag{2-4}$$

то для любой стрелки $\varphi : X_1 \to X_2$ в $\mathcal{C}$ и любого Y из $\mathcal{D}$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X_1), Y) & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, G(Y)) \arrow[l, "\lambda", "\sim"'] \\ \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X_2), Y) \arrow[u, "F(\varphi)^*"] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_2, G(Y)) \arrow[l, "\lambda", "\sim"'] \arrow[u, "\varphi^*"'] \end{tikzcd}$$

вертикальные стрелки которой задаются правым умножением на $F(\varphi)$ и на φ соответственно. Рисуя это для $Y = F(X)$ и морфизма $\varphi = s_X : X \to GF(X)$, который задаёт

[1] См. сл. 1.1 на стр. 14.

действие над объектом X естественного преобразования $s : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to GF$ из форм. (2-2) на стр. 18, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(X)) & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GF(X)) \arrow[l, "\lambda"', "\sim"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FGF(X), F(X)) \arrow[u, "F(s_X)^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GF(X), GF(X)) \arrow[l, "\lambda"', "\sim"] \arrow[u, "s_X^*"']
\end{tikzcd}$$

верхняя стрелка λ которой переводит s_X в $\mathrm{Id}_{F(X)}$, а нижняя стрелка λ переводит $\mathrm{Id}_{GF(X)}$ в морфизм $t_{F(X)} : FGF(X) \to F(X)$, задающий действие второго естественного преобразования $t : FG \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ из формулы (2-2) над объектом $F(X)$. Таким образом,

$$\mathrm{Id}_{F(X)} = \lambda(s_X) = \lambda s_X^* \left(\mathrm{Id}_{GF(X)}\right) = F(s_X)^* \lambda \left(\mathrm{Id}_{GF(X)}\right) = F(s_X)^* \left(t_{F(X)}\right) = t_{F(X)} \circ F(s_X),$$

а это и значит, что композиция $F \xrightarrow{F \circ s} FGF \xrightarrow{t \circ F} F$ задаёт тождественное преобразование функтора F. Проверка того, что $G \xrightarrow{s \circ G} GFG \xrightarrow{G \circ t} G$ совпадает с Id_G полностью симметрична. Наоборот, если имеются преобразования $s : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to GF$ и $t : FG \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$, зададим в (2-4) действие λ и ϱ на стрелки $\varphi : F(X) \to Y$ и $\psi : X \to G(Y)$ правилами:

$$\varrho(\varphi) = G(\varphi) \circ s_X \quad \text{и} \quad \lambda(\psi) = t_Y \circ F(\psi),$$

в правых частях которых стоят сквозные отображения вдоль стрелок

$$X \xrightarrow{s_X} GF(X) \xrightarrow{G(\varphi)} G(Y) \quad \text{и} \quad F(X) \xrightarrow{F(\psi)} FG(Y) \xrightarrow{t_Y} Y.$$

Композиция $\lambda\varrho(\varphi) = t_Y \circ FG(\varphi) \circ F(s_X) : F(X) \to Y$ представляет собою путь из левого нижнего угла в правый верхний на диаграмме

$$\begin{tikzcd}
 & F(X) \arrow[rr, "\varphi"] & & Y \\
F(X) \arrow[ur, equal, "\mathrm{Id}_{F(X)}"] \arrow[rr, "F(s_X)"] & & FGF(X) \arrow[ul, "t_{F(X)}"'] \arrow[rr, "FG(\varphi)"] & & FG(Y) \arrow[ul, "t_Y"']
\end{tikzcd}$$

правый параллелограмм которой коммутативен в силу естественности преобразования t, а левый треугольник — в силу равенства $F \xrightarrow{F \circ s} FGF \xrightarrow{t \circ F} F$ и Id_F. Поэтому $\lambda\varrho(\varphi) = \varphi$. Равенство $\varrho\lambda(\psi) = \psi$ проверяется симметричным образом. □

2.2. Тензорные произведения и Hom. Пусть R — произвольное кольцо с единицей. Тензорным произведением $M \underset{R}{\otimes} N$ правого R-модуля M на левый R-модуль N называется фактор тензорного произведения абелевых групп[1] $M \otimes N$ по подгруппе, порождённой всевозможными разностями

$$(mx) \otimes n - m \otimes (xn), \quad \text{где} \quad m \in M,\ x \in R,\ n \in N.$$

[1]Или, что то же самое, $\mathbb{Z}$-модулей.

Это абелева группа, на которой кольцо R никак не действует, но в которой выполняются соотношения $(mx)\underset{R}{\otimes} n = m\underset{R}{\otimes}(xn)$. Тензорное умножение на фиксированный левый R-модуль N задаёт функтор из категории правых R-модулей в абелевы группы

$$\mathcal{M}od\text{-}R \to \mathcal{A}b\,, \quad X \mapsto X\underset{R}{\otimes} N\,,$$

переводящий стрелку $\varphi : X_1 \to X_2$ в стрелку $\varphi \otimes 1 : m\underset{R}{\otimes} n \mapsto \varphi(m)\underset{R}{\otimes} n$. Если левый R-модуль N одновременно является правым модулем над ещё одним кольцом S с единицей и правое действие S коммутирует с левым действием R (такие N называются *R-S бимодулями*), функтор тензорного умножения на N отображает $\mathcal{M}od\text{-}R$ в $\mathcal{M}od\text{-}S$: кольцо S действует на $M\otimes N$ справа по правилу $(m\otimes n)y = m\otimes(ny)$. С другой стороны, имеется функтор $h^N : \mathcal{M}od\text{-}S \to \mathcal{A}b\,, Y \mapsto \mathrm{Hom}_S(N,Y)\,$, который принимает значения в $\mathcal{M}od\text{-}R$: правое действие $x \in R$ на $\mathrm{Hom}_S(N,Y)$ переводит S-линейную справа стрелку $\varphi : N \to Y$ в стрелку $\varphi x : n \mapsto \varphi(xn)$ (так что выполняется равенство $(\varphi x)n = \varphi(xn)$).

Предложение 2.3
Тензорное умножение на R-S-бимодуль N сопряжено слева функтору h^N, т. е. имеется естественный по $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}od\text{-}R$ и $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}od\text{-}S$ изоморфизм абелевых групп

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}\big(X\underset{R}{\otimes} N, Y\big) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}R}\big(X, \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(N,Y)\big)\,. \tag{2-5}$$

Доказательство. Отображение из левой части (2-5) в правую сопоставляет S-линейному справа гомоморфизму $\varphi : X\underset{R}{\otimes} N \to Y$ зависящее от $x \in X$ семейство гомоморфизмов $\varphi_x : N \to Y, n \mapsto \varphi(x\otimes n)$. Каждый из них S-линеен справа:

$$\varphi_x(ns) = \varphi(x\underset{R}{\otimes} ns) = \varphi(x\underset{R}{\otimes} n)s = \varphi_x(n)s\,,$$

а сопоставление $x \mapsto \varphi_x$, как отображение $X \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(N,Y)\,$, R-линейно справа:

$$\varphi_{xr} n = \varphi(xr\underset{R}{\otimes} n) = \varphi(x\underset{R}{\otimes} rn) = \varphi_x(rn) = (\varphi_x r)n\,.$$

Обратное отображение из правой части (2-5) в левую переводит семейство S-линейных справа гомоморфизмов $\varphi_x : N \to Y$, которые R-линейно справа зависят от $x \in X$, в S-линейный справа гомоморфизм $\varphi : x\underset{R}{\otimes} n \mapsto \psi_x(n)\,$. □

Упражнение 2.2. Явно опишите естественные преобразования

$$t_Y : \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(N,Y)\underset{R}{\otimes} N \to Y \quad \text{и} \quad s_X : X \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}\big(N, X\underset{R}{\otimes} N\big)\,.$$

Пример 2.2 (индуцирование и коиндуцирование)
Если кольцо A содержится в кольце B и у них общая единица, каждый правый B-модуль X одновременно является и правым A-модулем, что задаёт *функтор ограничения*

$$\mathrm{res} : \mathcal{M}od\text{-}B \to \mathcal{M}od\text{-}A\,. \tag{2-6}$$

Рассматривая B как B-A бимодуль и беря в предл. 2.3 $S = A$, а $N = R = B$, получим в качестве правого A-модуля $X \underset{B}{\otimes} B \simeq \operatorname{res} X$ ограничение A-модуля X и функториальный по B-модулю X и A-модулю Y изоморфизм

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}A}(\operatorname{res} X, Y) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}B}\big(X, \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}A}(B, Y)\big)\,.$$

Правый B-модуль $\operatorname{coind} Y \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}A}(B, Y)$ называется *коиндуцированным* с A-модуля Y. Функтор коиндуцирования $\operatorname{coind} : \mathcal{M}od\text{-}A \to \mathcal{M}od\text{-}B$ сопряжён справа к функтору ограничения.

Упражнение 2.3. Явно опишите естественные преобразования

$$t_Y : \operatorname{Hom}_A(B, Y) \to Y \quad \text{и} \quad s_X : X \to \operatorname{Hom}_A(B, X)\,.$$

Рассматривая B как A-B бимодуль и полагая в предл. 2.3 $S = N = B$, а $R = A$, получим в качестве правого A-модуля $\operatorname{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}B}(B, Y) \simeq \operatorname{res} Y$ ограничение B-модуля Y, и функториальный по A-модулю X и B-модулю Y изоморфизм

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}B}(X \underset{A}{\otimes} B, Y) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}A}(X, \operatorname{res} Y)\,.$$

Правый B-модуль $\operatorname{ind} X \stackrel{\text{def}}{=} X \underset{A}{\otimes} B$ называется *индуцированным* с A-модуля X. Функтор индуцирования $\operatorname{ind} : \mathcal{M}od\text{-}A \to \mathcal{M}od\text{-}B$ сопряжён слева к функтору ограничения.

Упражнение 2.4. Явно опишите естественные преобразования

$$\lambda_Y : Y \underset{A}{\otimes} B \to Y \quad \text{и} \quad \varrho_X : X \to X \underset{A}{\otimes} B\,.$$

В ситуации, когда $A = \Bbbk[H]$ и $B = \Bbbk[G]$ являются групповыми алгебрами (с коэффициентами в поле $\Bbbk$) конечной группы G и её подгруппы H, мы получаем известные из начального курса алгебры функторы (ко)индуцирования линейных представлений[1] (над полем $\Bbbk$) группы G с представлений её подгруппы H.

Пример 2.3 (сингулярные симплексы)
Свяжем с топологическим пространством Y симплициальное множество его *сингулярных симплексов* $S(Y) : \Delta^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$, которое сопоставляет комбинаторному симплексу $[n] \in \operatorname{Ob} \Delta$ множество $S_n(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}op}(\Delta^n, Y) = h_Y(\Delta^n)$ всех непрерывных отображений правильного n-мерного симплекса $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ в Y, а неубывающему отображению $\varphi : [n] \to [m]$ — правое умножение $f \mapsto f \circ \varphi^*$ на аффинное отображение $\varphi^* : \Delta^m \to \Delta^n$, действие которого на вершины симплекса совпадает с φ. Возникающий таким образом функтор $S : \mathcal{T}op \to p\mathcal{S}h(\Delta)$ сопряжён справа функтору геометрической реализации $p\mathcal{S}h(\Delta) \to \mathcal{T}op$, $X \mapsto |X|$, из прим. 1.7 на стр. 8, т. е. имеется естественный по симплициальному множеству $X : \Delta^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$ и топологическому пространству Y изоморфизм

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}op}(|X|, Y) \simeq \operatorname{Hom}_{p\mathcal{S}h}(X, S(Y))\,, \tag{2-7}$$

[1] В этом случае функторы индуцирования и коиндуцирования изоморфны.

который является категорным аналогом изоморфизма из форм. (2-5) на стр. 21, установленного выше для модулей над кольцами. В самом деле, функтор геометрической реализации вкладывает категорию Δ в категорию $\mathcal{T}op$ в виде дизъюнктного набора $D = \bigsqcup\limits_{n\geqslant 0} \Delta^n$ правильных симплексов, на котором имеется левое действие стрелок φ категории Δ аффинными отображениями φ_*, а также коммутирующее с ним правое действие стрелок категории $\mathcal{T}op$, непрерывно отображающих D в произвольные топологические пространства. С другой стороны, как множество сингулярных симплексов $S(Y)(\Delta) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(D, Y)$ любого топологического пространства Y, так и множество $X(\Delta) = \bigsqcup_{n\geqslant 0} X_n$ являются правыми модулями над симплициальной категорией Δ в том смысле, что на обоих множествах имеется правое[1] действие стрелок категории Δ. Геометрическая реализация $|X|$ симплициального множества X, т. е. фактор дизъюнктного объединения $\bigsqcup_{n\geqslant 0} X_n \times \Delta^n$ по соотношениям $(x\varphi, s) = (x, \varphi s)$, является прямым аналогом тензорного произведения $X \underset{\Delta}{\otimes} D$. Таким образом, изоморфизм (2-7) имеет вид

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}\big(X \underset{\Delta}{\otimes} D, Y\big) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}\Delta}\big(X, \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(D, Y)\big)\,, \tag{2-8}$$

ничем не отличающийся от изоморфизма (2-5) со стр. 21.

Упражнение 2.5. Явно постройте взаимно обратные изоморфизмы между левой и правой частями формулы (2-8) и опишите естественные преобразования[2]

$$t_Y : |S(Y)| \to Y \quad \text{и} \quad s_X : X \to S\big(|X|\big)\,.$$

2.3. Пределы диаграмм. Любую малую категорию $\mathcal{N}$ можно воспринимать как диаграмму, вершинами которой служат объекты, а стрелками — морфизмы категории $\mathcal{N}$. Функторы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ реализуют эту диаграмму в категории $\mathcal{C}$ в том смысле, что указывают объекты $X_\nu = X(\nu)$, занумерованные множеством $\mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$, а также стрелки $X(\nu \to \mu) : X_\nu \to X_\mu$, занумерованные множеством $\mathrm{Mor}\,\mathcal{N}$. Поэтому такие функторы часто называют *диаграммами* вида $\mathcal{N}$ в категории $\mathcal{C}$. Диаграммы образуют категорию $\mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})$ с естественными преобразованиями функторов в качестве морф измов. Каждый объект $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ задаёт *постоянную диаграмму* $\overline{Y}$, в которой все объекты $\overline{Y}_\nu = Y$, а все стрелки $\overline{Y}(\nu \to \mu) = \mathrm{Id}_Y$. Со всякой диаграммой $X \in \mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})$ связан предпучок множеств $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$, $Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(\overline{Y}, X)$. Если он представим, т. е. существует такой объект $L \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, что имеется естественный по $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, L) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(\overline{Y}, X)\,, \tag{2-9}$$

то представляющий объект L называют *пределом*[3] диаграммы X и пишут $L = \lim X$. Двойственным образом, объект $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, копредставляющий ассоциированный с диаграммой X ковариантный функтор $\mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, $Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(X, \overline{Y})$, называется

---

[1] Т. е. оборачивающее композицию.

[2] Первое является непрерывным отображением топологических пространств, второе — естественным преобразованием функторов $\Delta^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$, переводящих комбинаторный симплекс $[n]$ в множества X_n и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}\big(\Delta^n, |X|\big)$ соответственно.

[3] Или *проективным* пределом.

копределом[1] диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ и обозначается $C = \operatorname{colim} X$. С копределом C связана функториальная по $Y \in \mathcal{C}$ биекция

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C, Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(X, \overline{Y})\,. \tag{2-10}$$

Как и все (ко) представляющие объекты, (ко) пределы однозначно характеризуются своими «универсальными свойствами». Полагая $Y = L$ в формуле (2-9), мы получаем естественное преобразование $\pi : \overline{L} \to X$, соответствующее тождественному эндоморфизму Id_L и представляющее собою набор стрелок $\pi_\nu : L \to X_\nu$, которые коммутируют со всеми стрелками диаграммы X и универсальны в том смысле, что для любого коммутирующего со всеми стрелками диаграммы X набора стрелок $\psi_\nu : Y \to X_\nu$, выпущенных из произвольного объекта $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$, существует единственный морфизм $\alpha : Y \to \lim X$, такой что $\psi_\nu = \pi_\nu \circ \alpha$ для всех ν.

Двойственным образом, в копредел $C = \operatorname{colim} X$ диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ ведёт канонический набор таких коммутирующих со всеми стрелками диаграммы X морфизмов $\iota_\nu : X_\nu \to C$, что для любых перестановочных со всеми стрелками диаграммы X морфизмов $\psi_\nu : X_\nu \to Y$ в произвольный объект $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ существует единственный морфизм $\beta : \operatorname{colim} X_\nu \to Y$, такой что $\psi_\nu = \beta \circ \iota_\nu$ для всех ν.

Упражнение 2.6. Проверьте, что универсальные свойства задают предел и копредел однозначно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного со всеми каноническими стрелками π_ν и ι_ν соответственно.

Пример 2.4 (начальный, конечный и нулевой объекты)
Простейшая диаграмма — пустая. Её предел Fin называется *конечным*, а копредел Or — *начальным* объектами категории. Эти объекты однозначно с точностью до единственного изоморфизма определяются тем, что для любого $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ есть единственная стрелка $X \to \mathrm{Fin}$ и единственная стрелка $\mathrm{Or} \to X$.

Упражнение 2.7. Укажите начальный и конечный объекты в категориях множеств, топологических пространств, абелевых групп, всех групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным кольцом.

Если в категории имеется как начальный, так и конечный объект, причём они вдобавок ещё и равны друг другу, объект $0 \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Fin} = \mathrm{Or}$ называется *нулевым*. Морфизм $X \to Y$ в категории с нулевым объектом называется *нулевым*, если он разлагается[2] в композицию $X \to 0 \to Y$.

Упражнение 2.8. Какие категории из упр. 2.7 обладают нулевым объектом?

Пример 2.5 (прямые (ко) произведения)
Малая категория $\mathcal{N}$ называется *дискретной*, если все её морфизмы исчерпываются тождественными морфизмами Id_ν с $\nu \in \operatorname{Ob} \mathcal{N}$. Соответствующие *дискретные диаграммы* $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ — это семейства объектов X_ν без стрелок между ними. Пределы и копределы таких диаграмм называются *прямыми произведениями* и *копроизведениями* и обозначаются, соответственно, через $\prod\limits_\nu X_\nu$ и $\coprod\limits_\nu X_\nu$. Когда индексов всего два,

[1] Или *инъективным* пределом.
[2] Обратите внимание, что если такое разложение существует, то оно единственно.

мы получаем прямые (ко) произведения двух объектов из прим. 1.13 и прим. 1.14 на стр. 16. Очевидная индукция показывает, что для существования всех конечных прямых (ко) произведений достаточно существования прямых (ко) произведений любых двух объектов.

Пример 2.6 ((ко) уравнители)
(Ко)предел диаграммы вида $X \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightrightarrows}} Y$ называется *(ко)уравнителем*[1] стрелок φ и ψ.

В категории множеств уравнитель представляет собою множество решений уравнения $\varphi(x) = \psi(x)$ на $x \in X$ или, более научно, прообраз диагонали $\Delta_Y \subset Y \times Y$ при каноническом отображении $\varphi \times \psi : X \to Y \times Y$. Коуравнитель является фактором множества Y по наименьшему отношению эквивалентности[2] $R \subset Y \times Y$, содержащему образ отображения $\varphi \times \psi$, т. е. все отождествления $\varphi(x) = \psi(x)$ с $x \in X$.

Упражнение 2.9. Проверьте это и постройте (ко) уравнители любой пары стрелок в категориях топологических пространств, абелевых групп, произвольных групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным коммутативным кольцом.

Например, (ко) ядро гомоморфизма $f : A \to B$ в категории $\mathcal{Ab}$ абелевых групп это (ко) уравнитель f и нулевого морфизма. Интуитивно, уравнители позволяют задавать «подобъекты» при помощи «уравнений», а коуравнители — «фактор объекты» при помощи «соотношений».

Пример 2.7 (послойные произведения)
Предел диаграммы вида

$$X \xrightarrow{\xi} B \xleftarrow{\eta} Y$$

называется *послойным*[3] *произведением* и обозначается $X \underset{B}{\times} Y$. Он включается в коммутативный *декартов квадрат*

$$\begin{tikzcd} X \underset{B}{\times} Y \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \arrow[d, "\eta"] \\ X \arrow[r, "\xi"] & B \end{tikzcd} \tag{2-11}$$

---

[1]По-английски *(co)equalizer*.

[2]Напомним, что *отношение эквивалентности* на Y это подмножество $R \subset Y \times Y$, которое *рефлексивно* (содержит диагональ Δ_Y), *симметрично* (переходит в себя при транспозиции сомножителей) и *транзитивно* (т. е. $(y_1, y_2), (y_2.y_3) \in R \Rightarrow (y_1, y_3) \in R$). Пересечение отношений эквивалентности является отношением эквивалентности. Поэтому любое подмножество $S \subset Y \times Y$ содержится в единственном минимальном по включению отношении эквивалентности R_S, которое называется *порождённым* подмножеством S. Всякое отображение $\xi : Y \to Z$ определяет отношение эквивалентности $R_\xi = \{(y_1, y_2) \mid \xi(y_1) = \xi(y_2)\}$ на Y, причём $\xi' : Y \to Z'$ тогда и только тогда представляется в виде композиции $\xi' = \eta \circ \xi$ с некоторой стрелкой $\eta : Z \to Z'$, когда $R_\xi \subset R_{\xi'}$, т. е. когда эквивалентность, отвечающая ξ, *влечёт* эквивалентность, отвечающую ξ' (в этом случае говорят, что первая эквивалентность *тоньше* или *сильнее* последней).

[3]Или *расслоенным*.

универсальный в том смысле, что для любого коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "\varphi'"'] & Y \arrow[d, "\eta"] \\ X \arrow[r, "\xi"] & B \end{tikzcd}$$

имеется единственный такой морфизм $\varphi' \times \psi' : Z \to X \underset{B}{\times} Y$, что $\varphi' = \varphi \circ (\varphi' \times \psi')$ и $\psi' = \psi \circ (\varphi' \times \psi')$.

Упражнение 2.10. Убедитесь, что левый верхний угол диаграммы (2-11) задаётся этим универсальным свойством однозначно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с φ и ψ.

В категории множеств отображение $X \underset{B}{\times} Y \to B$ имеет в качестве слоя над произвольной точкой $b \in B$ прямое произведение слоёв $\varphi^{-1}(b) \times \psi^{-1}(b)$, отсюда и название.

Упражнение 2.11. Убедитесь, что $U \underset{X}{\times} V = U \cap V$ в категории $\mathcal{U}(X)$ открытых подмножеств топологического пространства X.

Пример 2.8 (послойные копроизведения)

Оборачивая все стрелки в предыдущем примере, назовём *послойным копроизведением* $X \underset{B}{\otimes} Y$ копредел диаграммы $X \xleftarrow{\xi} B \xrightarrow{\eta} Y$. Он вписывается в коммутативный *кодекартов квадрат*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\xi"'] & Y \arrow[d, "\psi"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & X \underset{B}{\otimes} Y \end{tikzcd} \tag{2-12}$$

универсальный в том смысле, что для любого коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\xi"'] & Y \arrow[d, "\psi'"] \\ X \arrow[r, "\varphi'"] & Z \end{tikzcd}$$

существует единственный такой морфизм $\varphi' \otimes \psi' : X \underset{B}{\otimes} Y \to Z$, что $\varphi' = (\varphi' \otimes \psi') \circ \varphi$ и $\psi' = (\varphi' \otimes \psi') \circ \psi$.

Упражнение 2.12. Явно опишите послойные (ко) произведения в категориях множеств, топологических пространств, абелевых групп, произвольных групп[1], коммутативных колец с единицей и модулей над коммутативным кольцом.

[1] В теории групп копроизведения традиционно называются *амальгамами*.

2.3.1. (Ко) замкнутость. Категория $\mathcal{C}$ называется (*ко*) *замкнутой*, если для любой малой категории $\mathcal{N}$ каждая диаграмма $\mathcal{N} \to \mathcal{C}$ имеет (ко) предел в $\mathcal{C}$.

Предложение 2.4
Для замкнутости категории $\mathcal{C}$ достаточно существования в $\mathcal{C}$ конечного объекта, прямых произведений любых множеств объектов и уравнителей любой пары стрелок с общим началом и концом, а для козамкнутости — существования в $\mathcal{C}$ начального объекта, прямых копроизведений любых множеств объектов и коуравнителей любой пары стрелок с общим началом и концом.

Доказательство. Мы построим предел произвольной диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$, копредел строится аналогично путём обращения стрелок. Надо предъявить универсальный набор мофизмов $\varphi_\nu : L \to X_\nu$, решающий уравнения $\varphi_\mu = X(\nu \to \mu) \circ \varphi_\nu$, где $\nu \to \mu$ пробегает $\operatorname{Mor} \mathcal{N}$. Для каждой стрелки $\nu \to \mu$ обозначим $T_{\nu\to\mu} = X_\mu$ тот объект диаграммы X, в который ведёт эта стрелка, и образуем два произведения $A = \prod_\mu X_\mu$ и $B = \prod_{\nu\to\mu} T_{\nu\to\mu}$. В первое из них каждый объект диаграммы X входит ровно один раз, а во второе — столько раз, сколько стрелок в нём заканчивается. Для каждой стрелки $\mu \to \nu$ имеются два отображения $A \to T_{\nu\to\mu}$: проекция $\pi_\mu : A \to X_\mu$ произведения A на μ-тый сомножитель и композиция $\varkappa_{\nu\to\mu} = X(\nu \to \mu) \circ \pi_\nu$ проекции $\pi_\nu : A \to X_\nu$ произведения A на ν-тый сомножитель со стрелкой $X(\nu \to \mu) : X_\nu \to X_\mu$ диаграммы X. По универсальному свойству произведения B эти пары отображении задают два морфизма $\pi, \varkappa : A \to B$. Их уравнитель L приходит вместе с морфизмом $\varphi : L \to A$, который представляет собою набор стрелок $\varphi_\mu = \pi_\mu \circ \varphi$, удовлетворяющих равенствам

$$\varphi_\mu = \pi_\mu \circ \varphi = \varkappa_{\nu\to\mu} \circ \varphi = X(\nu \to \mu) \circ \varphi_\nu$$

и обладающих требуемым универсальным свойством (убедитесь в этом!). □

Пример 2.9
В категории множеств $\lim X$ изоморфен подмножеству прямого произведения $\prod X_\nu$, образованному такими семействами (x_ν), $\nu \in \operatorname{Ob} \mathcal{N}$, $x_\nu \in X_\nu$, где $x_\mu = X(\nu \to \mu) x_\nu$ для всех стрелок $\nu \to \mu$ из $\operatorname{Mor} \mathcal{N}$.

Упражнение 2.13. Проверьте, что $\operatorname{colim} X$ изоморфен коуравнителю диаграммы

$$\coprod_{\nu\to\mu} S_{\nu\to\mu} \overset{\iota}{\underset{\varkappa}{\rightrightarrows}} \coprod_\nu X_\nu \ ,$$

в которой объекты $S_{\nu\to\mu} = X_\nu$ суть начала стрелок $X(\nu \to \mu)$ диаграммы X, а морфизмы задаются семействами стрелок

$$\iota_\nu : S_{\nu\to\mu} \to \coprod_\nu X_\nu \quad \text{и} \quad \varkappa_{\nu\to\mu} = \iota_\mu \circ X(\nu \to \mu) : S_{\nu\to\mu} \to \coprod_\nu X_\nu \,.$$

В частности, убедитесь, что в категории множеств $\operatorname{colim} X$ является фактором дизъюнктного объединения $\bigsqcup_\nu X_\nu$ по наименьшему отношению эквивалентности, для которого $x = X(\nu \to \mu)x$ для всех $x \in X_\nu$ и всех стрелок $\nu \to \mu$ из $\operatorname{Mor} \mathcal{N}$.

Замечание 2.1. Для того, чтобы в категории $\mathcal{C}$ существовали (ко) пределы всех *конечных* диаграмм, в условиях предл. 2.4 достаточно требовать существования в $\mathcal{C}$ конечных (ко) произведений.

Следствие 2.1
Категории множеств, топологических пространств, абелевых групп, всех групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным кольцом замкнуты и козамкнуты.

Доказательство. Сделайте упр. 2.9. □

Пример 2.10 (уточнённое определение пучка)
Объединение $U = \bigcup_i U_i$ произвольного семейства $\{U_i\}_{i\in I}$ открытых множеств топологического пространства X является коуравнителем отображений

$$\coprod_{ij} U_i \cap U_j \underset{\psi_2}{\overset{\psi_1}{\rightrightarrows}} \coprod_i U_i\,,$$

являющихся копроизведениями вложений $U_i \cap U_j \hookrightarrow U_i$ и $U_i \cap U_j \hookrightarrow U_j$. Всякий предпучок $F : \mathcal{U}(X)^{\text{opp}} \to \mathcal{C}$ объектов любой категории $\mathcal{C}$ переводит диаграмму коуравнителя

$$\coprod_{ij} U_i \cap U_j \underset{\psi_2}{\overset{\psi_1}{\rightrightarrows}} \coprod_i U_i \xrightarrow{\varphi} U\,, \tag{2-13}$$

в следующую диаграмму в категории $\mathcal{C}$:

$$F(U) \xrightarrow{\varphi^*} \prod_i F(U_i) \underset{\psi_2^*}{\overset{\psi_1^*}{\rightrightarrows}} \prod_{ij} F(U_i \cap U_j)\,. \tag{2-14}$$

Стрелка φ^* этой диаграммы является произведением ограничений $F(U) \to F(U_i)$, а стрелки ψ_1^* и ψ_2^* — ограничений $F(U_i) \to F(U_i \cap U_j)$ и $F(U_j) \to F(U_i \cap U_j)$ соответственно. По определению, предпучок F является *пучком*, если стрелка φ является уравнителем стрелок ψ_1^* и ψ_2^*. В частности, когда множество индексов $I = \varnothing$, мы получаем в левом члене диаграммы (2-14) объект $F(\varnothing) \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, а в среднем и правом членах — произведения пустых множеств объектов, т. е. пределы пустых диаграмм, канонически изоморфные конечному объекту[1] $\operatorname{Fin}_{\mathcal{C}}$ категории $\mathcal{C}$. Стрелки ψ_1^* и ψ_2^* являются в этом случае тождественными эндоморфизмами конечного объекта, и их уравнитель равен $\operatorname{Id}_{\operatorname{Fin}_{\mathcal{C}}}$. Таким образом, для любого пучка объектов произвольной категории $\mathcal{C}$ на топологическом пространстве X должно выполняться равенство $F(\varnothing) = \operatorname{Fin}_{\mathcal{C}}$. Например, для любого пучка множеств $F : \mathcal{U}^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$ множество $F(\varnothing)$ состоит из одной точки, а для пучка абелевых групп $F : \mathcal{U}^{\text{opp}} \to \mathcal{A}b$ группа $F(\varnothing) = 0$.

[1] Тем самым, для того чтобы предпучок F был пучком, необходимо, чтобы в категории $\mathcal{C}$ был конечный объект (см. прим. 2.4 на стр. 24).

2.3.2. Фильтрующиеся диаграммы. Малая категория $\mathcal{F}$ называется *фильтрующейся*, если из любых двух её объектов выходят стрелки с общим концом и для любых двух стрелок φ, ψ с общими началом и концом из их конца ведёт такая стрелка ζ, что $\zeta\varphi = \zeta\psi$. Например, любой чум, в котором у каждых двух элементов есть общая верхняя грань, является фильтрующейся категорией[1]. Диаграммы вида $\mathcal{F} \to \mathcal{C}$ и $\mathcal{F}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{C}$ с фильтрующейся категорией $\mathcal{F}$ принято называть, соответственно, *индуктивными* (или *прямыми*) и *проективными* (или *обратными*) *системами* стрелок категории $\mathcal{C}$, а их (ко)пределы обозначать через $\varinjlim$, $\underset{\to}{\mathrm{colim}}$ для прямых систем и $\varprojlim$, $\underset{\leftarrow}{\mathrm{colim}}$ для обратных. Копредел индуктивной системы множеств $X : \mathcal{F} \to \mathcal{S}et$ изоморфен фактору дизъюнктного объединения $\coprod\limits_{\nu\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{F}} X_\nu$ по отношению эквивалентности, отождествляющему $x_\nu \in X_\nu$ и $x_\mu \in X_\mu$, если существует такая пара стрелок $\nu \to \eta \leftarrow \mu$, что $X(\nu \to \eta)x_\nu = X(\mu \to \eta)x_\mu$ в множестве X_η .

Упражнение 2.14. Проверьте, что это действительно отношение эквивалентности и убедитесь, что множество классов эквивалентности изоморфно $\mathrm{colim}\, X$.

Пример 2.11 (разбиения отрезка)
Конечные наборы точек $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N < x_\infty = 1$, разбивающие отрезок $[0, 1]$ на непересекающиеся интервалы (как в определении интеграла Римана), образуют прямую систему в категории ∇_{big} относительно морфизмов включения, отвечающих измельчениям разбиения. Копределом этой системы в категории всех (не обязательно конечных) упорядоченных множеств с отмеченными максимальным и минимальным элементами является $[0, 1]$. В категории ∇_{big} копредела не существует.

Пример 2.12 (открытые окрестности и слой предпучка)
Множество открытых окрестностей любого подмножества $Z \subset X$ топологического пространства X является проективной системой в категории $\mathcal{U} = \mathcal{U}(X)$ открытых подмножеств в X, т. к. для любых окрестностей $U, W \supset Z$ окрестность $U \cap W = U \underset{X}{\times} V \supset Z$ вкладывается и в окрестность U, и в окрестность W. Пределом этой системы в категории $\mathcal{S}et$ является пересечение всех открытых окрестностей Z. В категории $\mathcal{U}$ предела может и не быть. Для любого предпучка $F : \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ множества сечений $F(U)$ над открытыми окрестностями U произвольно заданного подмножества $Z \subset X$ образуют индуктивную систему в $\mathcal{S}et$. Её копредел называется *слоем* предпучка F над Z и обозначается F_Z. В силу козамкнутости категории $\mathcal{S}et$ этот копредел всегда существует. Согласно упр. 2.14, каждый элемент слоя F_Z представляет собою класс $s|_Z$ некоторого сечения $s \in F(U)$ над каким-либо открытым множеством $U \supset Z$ по модулю эквивалентности, отождествляющей сечения $s \in F(U)$ и $t \in F(W)$, когда $s|_V = t|_V$ над некоторым открытым V, таким что $Z \subset V \subset U \cap W$. Определённые таким образом классы $s|_Z$ называются *ростками сечений* предпучка F над Z.

В частности, когда $Z = \{x\}$ это одна точка, слой F_x называется *слоем F в точке x*. Мы будем обозначать класс сечения s в слое F_x через $s|_x$. В ситуации, когда F — пучок функций на X со значениями в каком-либо поле $\Bbbk$, класс $f|_x \in F_x$ локальной функции $f \in F(U)$ в слое F над точкой $x \in U$ не следует путать со значением $f(x) \in \Bbbk$ этой функции в точке x, поскольку, во первых, они лежат в разных множествах, во-вторых,

[1] Ср. с прим. 1.2 на стр. 3.

равенство $f|_x = g|_x$ означает равенство $f \equiv g$ в некоторой открытой окрестности точки x, что обычно гораздо сильнее, чем равенство значений $f(x) = g(x)$.

Пример 2.13 (локализация кольца)
Пусть подмножество S ассоциативного (но не обязательно коммутативного) кольца R с единицей таково, что $1 \in S$ и $st \in S$ для всех $s, t \in S$. Пусть, кроме того, выполняются следующие *условия Оре*[1]:

$$\forall\, \varrho \in R,\ \forall\, s \in S \quad \exists\, \lambda \in R,\ \exists t \in S : \lambda s = t\varrho \tag{O$_1$}$$

$$\forall\, \varphi, \psi \in R \quad \text{из} \quad \exists\, s \in S : \phi s = \psi s \quad \text{следует, что} \quad \exists\, t \in S : t\phi = t\psi\,. \tag{O$_2$}$$

Превратим множество S в категорию, полагая $\mathrm{Hom}_S(s, t) \overset{\text{def}}{=} \{\lambda \in R \mid \lambda s = t\}$.

Упражнение 2.15. Выедите из условий Оре, что категория S фильтрующаяся.

Рассмотрим в категории правых R-модулей фильтрующуюся диаграмму $S \to \mathcal{M}od\text{-}R$, образованную свободными модулями $s^{-1}R$ ранга один, где символом s^{-1} обозначен базисный вектор того модуля, который отвечает объекту $s \in S$, и R-линейными отображениями $\lambda_* : s_1^{-1}R \to s_2^{-1}R$, которые отвечают стрелкам $\lambda \in \mathrm{Hom}_S(s_1, s_2)$ и действуют на базисный вектор по правилу $s_1^{-1} \mapsto s_2^{-1}\lambda$. Копредел этой диаграммы в категории $\mathcal{M}od\text{-}R$ состоит из классов $s^{-1}\varrho$, где $s \in S$, $\varrho \in R$, по модулю равенств $s_1^{-1}\varrho_1 = s_2^{-1}\varrho_2$, означающих существование таких $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, что $\lambda_1 s_1 = \lambda_2 s_2 \in S$ и $\lambda_1\varrho_1 = \lambda_2\varrho_2$ в R. Классы $s^{-1}\varrho$ называются *левыми дробями* со знаменателями в S. Они образуют правый R-модуль, обозначаемый $S^{-1}R$ и именуемый *левой локализацией* кольца R относительно мультипликативной системы Оре S.

Упражнение 2.16. Чему равна сумма $s_1^{-1}\varrho_1 + s_2^{-1}\varrho_2$ в модуле $S^{-1}R$?

Определим *произведение* левых дробей $s_1^{-1}\varrho_1$ и $s_2^{-1}\varrho_2$ следующим образом. Пользуясь условием (O$_1$) подберём такие $\lambda_1 \in R$ и $t_2 \in S$, что[2] $t_2\varrho_1 = \lambda_1 s_2$, и положим

$$s_1^{-1}\varrho_1 \cdot s_2^{-1}\varrho_2 \overset{\text{def}}{=} (t_2 s_1)^{-1}(\lambda_1\varrho_2)\,.$$

Упражнение 2.17. Проверьте, что это определение корректно[3] и задаёт на модуле $S^{-1}R$ структуру ассоциативного кольца с единицей. Убедитесь, что для коммутативного кольца R кольцо дробей $S^{-1}R$ изоморфно известному из курса алгебры[4] кольцу частных a/s, где $a \in R$, $s \in S$, и $a_1/s_1 = a_2/s_2$, если и только если $\exists\, s \in S : s \cdot (a_1 s_2 - a_2 s_1) = 0$ в R.

2.4. Функториальность (ко) пределов. Естественное преобразование f диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ в диаграмму $Y : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ — это набор стрелок $f_\nu : X_\nu \to Y_\nu$, по одной для каждого $\nu \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$, перестановочных со стрелками из диаграмм. Если диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ и $Y : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ имеют в категории $\mathcal{C}$ пределы $L_X = \lim X_\nu$ и $L_Y = \lim Y_\mu$, то для любого функтора $\tau : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ и любого естественного преобразования $f : X \circ \tau \to Y$

[1] В коммутативном кольце R оба условия Оре выполнены автоматически.
[2] Это «политкорректная» запись интуитивно желаемого равенства $\varrho_1 s_2^{-1} = t_2^{-1}\lambda_1$.
[3] Т. е. результат умножения не зависит от выбора таких $\lambda_1 \in R$ и $t_2 \in S$, что $t_2\varrho_1 = \lambda_1 s_2$.
[4] См. http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-04.pdf.

существует единственный морфизм $\lim f : L_X \to L_Y$, такой что при всех $\mu \in \operatorname{Ob} \mathcal{M}$ коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd} L_X \arrow[r, "\pi_{\tau(\mu)}"] \arrow[d, "\lim f"'] & X_{\tau(\mu)} \arrow[d, "f_\mu"] \\ L_Y \arrow[r, "\pi_\mu"] & Y_\mu , \end{tikzcd} \tag{2-15}$$

горизонтальные стрелки которых суть канонические морфизмы из предела в элементы диаграммы. В самом деле, композиции $f_\mu \circ \pi_{\tau(\mu)} : L_X \to Y_\mu$ задают систему стрелок из L_X в элементы диаграммы Y, перестановочные со всеми её стрелками, что даёт единственный морфизм $L_X \to \lim Y = L_Y$, делающий все диаграммы (2-15) коммутативными. Двойственным образом, если существуют копределы $C_X = \operatorname{colim} X_\nu$ и $C_Y = \operatorname{colim} Y_\mu$, то для любого функтора $\tau : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ и любого естественного преобразования $f : X \to Y \circ \tau$ существует единственный морфизм $\operatorname{colim} f : C_X \to C_Y$, такой что коммутативны все диаграммы

$$\begin{tikzcd} X_\nu \arrow[r, "\iota_\nu"] \arrow[d, "f_\nu"'] & C_X \arrow[d, "\operatorname{colim} f"] \\ Y_{\tau(\nu)} \arrow[r, "\iota_{\tau(\nu)}"] & C_Y , \end{tikzcd}$$

горизонтальные стрелки которых суть канонические морфизмы из вершин диаграммы в копредел. При $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ и $\tau = \mathrm{Id}$ из предл. 2.1 на стр. 19 и равенств (2-9) и (2-10) на стр. 24 получаем

Предложение 2.5
Для заданных малой категории $\mathcal{N}$ и (ко)замкнутой категории $\mathcal{C}$ копредел и предел являются, соответственно, левым и правым сопряжёнными к функтору $\mathcal{C} \to \mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})$, переводящему $C \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ в постоянную диаграмму $\overline{C}$. □

Замечание 2.2. Если не предполагать (ко)замкнутости, то (ко)предел будет функториален на всех диаграммах, где определён.

Следствие 2.2
Категория $p\mathcal{S}h(\mathcal{U})$ предпучков множеств на малой категории $\mathcal{U}$ замкнута и козамкнута. Для любой диаграммы предпучков $F : \mathcal{N} \to p\mathcal{S}h(\mathcal{U})$ множества сечений предпучков $L = \lim F$ и $C = \operatorname{colim} F$ над любым объектом $U \subset \mathcal{U}$ суть $L(U) = \lim F(U)$ и $C(U) = \operatorname{colim} F(U)$, где диаграмма $F(U) : \mathcal{N} \to \mathcal{S}et$ образована множествами сечений предпучков диаграммы F над объектом U с отображениями, задающими действие стрелок диаграммы F над этим объектом.

Доказательство. В силу функториальности (ко)пределов, множества $L(U) = \lim F(U)$ и $C(U) = \operatorname{colim} F(U)$ составляют предпучки множеств на $\mathcal{U}$, и для любого предпучка $F_\nu : \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ диаграммы F имеются перестановочные со всеми морфизмами из диаграммы канонические морфизмы предпучков $L \to F_\nu$ и $F_\nu \to C$, действие которых над каждым объектом $U \in \operatorname{Ob} \mathcal{U}$ задаётся стрелками $\lim F(U) \to F_\nu(U)$ и $F_\nu(U) \to \operatorname{colim} F(U)$ в категории $\mathcal{S}et$. Универсальность этих морфизмов также проверяется отдельно над каждым объектом $U \in \operatorname{Ob} \mathcal{U}$. □

2.4.1. Перестановочность функторов с (ко) пределами. Скажем, что функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *перестановочен с (ко) пределами*, если для любого $L \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ и любой диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ из того, что L является (ко) пределом X в $\mathcal{C}$, вытекает, что $F(L)$ является (ко) пределом диаграммы $F \circ X$ в $\mathcal{D}$.

Предложение 2.6

Если функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ сопряжён слева к функтору $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, то F перестановочен с копределами, а G — с пределами.

Доказательство. В силу сопряжённости F и G имеем функториально по $D \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$:

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(\operatorname{colim} X), D\big) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(\operatorname{colim} X, G(D)\big) \simeq$$
$$\simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{Fun}(\mathcal{N},\mathcal{C})}\left(X, \overline{G(D)}\right) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{Fun}(\mathcal{N},\mathcal{D})}\left(F \circ X, \overline{D}\right) .$$

Тем самым, $F(\operatorname{colim} X) \simeq \operatorname{colim}(F \circ X)$. Рассуждение про пределы аналогично. □

Следствие 2.3

Тензорное умножение на (левый) модуль N над произвольным кольцом S с единицей перестановочно с копределами диаграмм (правых) S-модулей. В частности, тензорное умножение на N переводит коядра в коядра, т. е. для любого $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(K, L)$ имеется канонический изоморфизм абелевых групп

$$\operatorname{coker}\left(\varphi \underset{S}{\otimes} \operatorname{Id}_N : K \underset{S}{\otimes} N \to L \underset{S}{\otimes} N\right) \simeq \operatorname{coker}(\varphi) \underset{S}{\otimes} N .$$

Доказательство. По предл. 2.3 на стр. 21, применённому к кольцам S и $R = \mathbb{Z}$, функтор $\mathcal{M}od\text{-}S \to \mathcal{A}b$, $X \mapsto X \underset{S}{\otimes} N$, сопряжён слева функтору $Y \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}b}(N, Y)$. □

Следствие 2.4

Пределы коммутируют с пределами, а копределы — с копределами всякий раз, когда они существуют: если задана такая диаграмма $F : \mathcal{M} \to \mathcal{Fun}(\mathcal{N}, \mathcal{C})$ естественных преобразований $F(\mu_1 \to \mu_2)$ диаграмм $\{F_\mu : \mathcal{N} \to \mathcal{C}\}$, что для всех $\mu \in \mathcal{M}$ и $\nu \in \mathcal{N}$ μ-тая диаграмма $F_\mu : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ и диаграмма $F(\nu)$, задающая действие стрелок $F(\mu_1 \to \mu_2)_\nu$ между элементами $F_\mu(\nu)$ с фиксированным номером ν, обе имеют (ко)предел в $\mathcal{C}$, то

$$\lim_\mu \lim_\nu F_\mu \simeq \lim_\nu \lim_\mu F(\nu) \quad \text{и} \quad \operatorname{colim}_\mu \operatorname{colim}_\nu F_\mu \simeq \operatorname{colim}_\nu \operatorname{colim}_\mu F(\nu) .$$

Следствие 2.5

Если стрелки $f_\nu : X_\nu \to Y_\nu$ задают естественное преобразование между диаграммами абелевых групп $X, Y : \mathcal{N} \to \mathcal{A}b$, то копредел коядер этих стрелок равен коядру индуцированной стрелки между копределами, а предел ядер — ядру стрелки между пределами:

$$\operatorname{colim} \operatorname{coker} f_\nu \simeq \operatorname{coker}\big(\operatorname{colim} X_\nu \xrightarrow{\operatorname{colim} f_\nu} \operatorname{colim} Y_\nu\big)$$
$$\lim \ker f_\nu \simeq \ker\big(\lim X_\nu \xrightarrow{\lim f_\nu} \lim Y_\nu\big) .$$

Доказательство. Будучи (ко)уравнителем f_ν и нулевого морфизма (ко)ядро является (ко)пределом. □

Предложение 2.7
Копределы прямых систем абелевых групп перестановочны также и с ядрами, т. е. если в сл. 2.5 категория $\mathcal{N}$ индексов диаграмм $X, Y : \mathcal{N} \to \mathcal{Ab}$ фильтрующаяся, то

$$\operatorname{colim} \ker \left(f_\nu : X_\nu \to Y_\nu\right) \simeq \ker\left(\operatorname{colim} X_\nu \xrightarrow{\operatorname{colim} f_\nu} \operatorname{colim} Y_\nu\right). \qquad (2\text{-}16)$$

Доказательство. Согласно упр. 2.14 на стр. 29 копредел фильтрующейся диаграммы Z является фактором дизъюнктного объединения $\coprod Z_\nu$ по эквивалентности, отождествляющей элементы $z_\nu \in Z_\nu$ и $z_\mu \in Z_\mu$, когда есть пара стрелок $\nu \to \eta \leftarrow \mu$, переводящих эти элементы в один и тот же элемент из Z_η. Пусть $\varphi = \operatorname{colim} f_\nu$. Эта предельная стрелка переводит класс $[x_\nu]$ элемента $x_\nu \in X_\nu$ в класс элемента $f_\nu(x_\nu) \in Y_\nu$.

Упражнение 2.18. Убедитесь, что класс результата не зависит от выбора представителя в классе $[x_\nu]$.

Сопоставляя классу $[x_\nu] \in \operatorname{colim} \ker \left(f_\nu : X_\nu \to Y_\nu\right)$ из левой части (2-16) класс этого же элемента $x_\nu \in \ker f_\nu \subset X_\nu$, но уже в копределе $\operatorname{colim} X_\nu$, мы получим класс, лежащий в $\ker \varphi$. Это задаёт гомоморфизм из левой части (2-16) в правую. Чтобы построить обратный гомоморфизм, рассмотрим класс $[x_\nu] \in \ker \varphi$. Раз $[f_\nu(x_\nu)] = [0]$ в $\operatorname{colim} Y_\nu$, найдутся такие стрелки $\nu \to \eta \leftarrow \mu$, что $f_\nu\left(X(\nu \to \eta)x_\nu\right) = Y(\nu \to \eta)f_\nu(x_\nu) = Y(\mu \to \eta)0 = 0$ в Y_η. Тем самым, элемент $x_\eta = X(\nu \to \eta)x_\nu \in \ker f_\nu$. Сопоставление классу $[x_\nu] \in \ker \varphi$ класса $[x_\eta] \in \operatorname{colim} \ker \left(f_\nu\right)$ задаёт гомоморфизм из правой части (2-16) в левую. Остаётся убедиться, что он определён корректно и обратен предыдущему. □

Упражнение 2.19. Сделайте это, а также докажите, что в категории $\mathcal{S}et$ стрелка

$$\varphi : \operatorname{colim} X_\nu \to \operatorname{colim} Y_\nu,$$

являющаяся копределом такого естественного преобразования $f : X \to Y$ фильтрованных диаграмм $X, Y : \mathcal{N} \to \mathcal{S}et$, в котором все стрелки $f_\nu : X_\nu \to Y_\nu$ инъективны (соотв. сюрьективны, биективны), тоже инъективна (соотв. сюрьективна, биективна).

§3. Предпучки и пучки

3.1. Предпучки на малой категории. С каждым предпучком множеств F на малой категории $\mathcal{U}$ функториально связана малая категория $\mathcal{N}_F$ с множеством объектов

$$\operatorname{Ob}\mathcal{N}_F \stackrel{\text{def}}{=} \bigsqcup_{U\in\operatorname{Ob}\mathcal{U}} F(U)\,.$$

Будем обозначать объект $s \in F(U)$ категории $\mathcal{N}_F$ символом sU, и для каждой стрелки $\varphi : U \to W$ в категории $\mathcal{U}$ условимся записывать действие контравариантного по φ морфизма $F(\varphi) : F(W) \to F(U)$ на сечение $t \in F(U)$ в виде $t \mapsto t\varphi$, т. е. как правое умножения на φ. Множества морфизмов категории $\mathcal{N}_F$ определяются как

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{N}_F}(sU, tW) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi : U \to W \mid t\varphi = s\}\,.$$

Таким образом, стрелки категории $\mathcal{N}_F$, ведущие в объект tW, находятся в биекции со стрелками категории $\mathcal{U}$, ведущими в объект W, и имеют вид $(t\varphi)U \to tW$, где $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{U}}(U,W)$. В частности, для категории $\mathcal{U} = \mathcal{U}(X)$ открытых множеств топологического пространства X множество $\operatorname{Hom}_{\mathcal{N}_F}(sU,tW)$ непусто , если и только если $U \subset W$ и $s = t|_W$, и в этом случае $\operatorname{Hom}_{\mathcal{N}_F}(t|_U U, tW)$ состоит из единственного элемента — вложения $U \hookrightarrow W$.

В самой категории $\mathcal{U}$ и в категории $p\mathcal{S}h(\mathcal{U})$ предпучков множеств на $\mathcal{U}$ имеются канонические диаграммы формы $\mathcal{N}_F$, переводящиеся друг в друга вложением Ионеды:

$$\begin{tikzcd} & p\mathcal{S}h(\mathcal{U}) \\ \mathcal{N}_F \arrow[ur, "H_F"] \arrow[dr, "D_F"'] & \\ & \mathcal{U}\,, \arrow[uu, hook, "h_*"', "\text{вложение Ионеды}"] \end{tikzcd} \tag{3-1}$$

где $h_* : \mathcal{U} \to p\mathcal{S}h(\mathcal{U})$, $U \mapsto h_U$.

Диаграмма $H_F : \mathcal{N}_F \to p\mathcal{S}h(\mathcal{U})$ сопоставляет объекту tW категории $\mathcal{N}_F$ представимый предпучок h_W, который мы будем обозначать th_W, чтобы помнить, какому сечению $t \in F(W)$ он соответствует. Элементы $\psi \in th_W(U) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{U}}(U,W)$ мы также будем обозначать $t\psi$. Стрелке $t\varphi U \to tW$, происходящей из морфизма $\varphi : U \to W$, на диаграмме H_F отвечает естественное преобразование $\varphi_* : t\varphi h_U \to th_W$ левого умножения на φ, действие которого над объектом $V \in \operatorname{Ob}\mathcal{U}$ задаётся правилом

$$\varphi_{V_*} : (t\varphi)\operatorname{Hom}_{\mathcal{U}}(V,U) \to (t)\operatorname{Hom}_{\mathcal{U}}(V,W)\,, \quad (t\varphi)\psi \mapsto t(\varphi\psi)\,.$$

Диаграмма $D_F : \mathcal{N}_F \to \mathcal{U}$ сопоставляет объекту tW категории $\mathcal{N}_F$ подлежащий ему объект U категории $\mathcal{U}$, который мы будем по-прежнему обозначать sU. Стрелке $t\varphi U \to tW$ категории $\mathcal{N}_F$ на диаграмме H_F отвечает тот самый морфизм $\varphi : U \to W$ категории $\mathcal{U}$, которым эта стрелка задаётся.

Лемма 3.1
Каждый предпучок множеств F на малой категории $\mathcal{U}$ является копределом

$$F = \operatorname{colim} H_F$$

функториально зависящей от F диаграммы H_F представимых предпучков.

Доказательство. Из каждого объекта $sh_U = h_U$ диаграммы H_F ведёт каноническая стрелка $s : h_U \to F$ — естественное преобразование, отвечающее по Ионеде[1] элементу $s \in F(U)$. Его действие над объектом $V \in \operatorname{Ob}\mathcal{U}$ переводит лежащую в $h_U(V)$ стрелку $\psi : V \to U$ в элемент $s\psi \in F(V)$.

Упражнение 3.1. Убедитесь, что стрелки $s : sh_U \to F$ перестановочны со всеми стрелками диаграммы H_F.

Пусть в некоторый предпучок $G : \mathcal{U}^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$ тоже ведут перестановочные со стрелками диаграммы H_F естественные преобразования $\gamma_U(s) : sh_U \to G$. По лемме Ионеды эти преобразования однозначно задаются такими элементами $g_U(s) \in G(U)$, что для любой стрелки $\varphi : U \to W$ и любого элемента $t \in F(W)$ выполняется равенство[2] $g_W(t)\varphi = g_U(t\varphi)$. Поэтому правило $g_U : F(U) \to G(U)$, $s \mapsto g_U(s)$, корректно задаёт морфизм предпучков $g : F \to G$, перестановочный со всеми ведущими в них из диаграммы H_F стрелками, причём это единственный способ задать такой морфизм предпучков. □

Упражнение 3.2. Выведите лем. 3.1 из сл. 2.2 на стр. 31.

Теорема 3.1 (о продолжении по непрерывности)
Для любого ковариантного функтора $G : \mathcal{U} \to \mathcal{C}$ из малой категории $\mathcal{U}$ в произвольную козамкнутую категорию $\mathcal{C}$ существует единственный с точностью до естественного изоморфизма перестановочный с копределами функтор $G^{\smile} : p\mathcal{S}h(\mathcal{U}) \to \mathcal{C}$, такой что $G^{\smile} \circ h_* \simeq G$, где $h_* : \mathcal{U} \to p\mathcal{S}h(\mathcal{U})$ — вложение Ионеды. Этот функтор сопряжён слева функтору $h_*^G : \mathcal{C} \to p\mathcal{S}h(\mathcal{U})$, который переводит объект $C \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ в предпучок

$$h_C^G : \mathcal{U}^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et\,, \quad U \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(G(U), C\big)\,.$$

Упражнение 3.3. Проверьте, что правило $C \mapsto h_C^G$ и впрямь задаёт ковариантный функтор $\mathcal{C} \to p\mathcal{S}h(\mathcal{U})$.

Доказательство. Поскольку каждый предпучок F на $\mathcal{U}$ является копределом диаграммы $H_F = h_* \circ D_F$ из форм. (3-1) на стр. 34, равенство $G^{\smile} \circ h_* \simeq G$ и перестановочность функтора $G^{\smile}$ с копределами не оставляют иной возможности, как положить

$$G^{\smile}(F) = G^{\smile} \operatorname{colim} H_F = G^{\smile} \operatorname{colim} h_* D_F = \operatorname{colim} G^{\smile} h_* D_F = \operatorname{colim} G D_F\,, \tag{3-2}$$

где $GD_F : \mathcal{N}_F \to \mathcal{C}$ это диаграмма в категории $\mathcal{C}$, полученная применением функтора G к диаграмме D_F из (3-1). Диаграмма GD_F состоит из объектов $sG(U) = G(U) \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, по одному для каждой пары (s, U), $U \in \operatorname{Ob}\mathcal{U}$, $s \in F(U)$, и стрелок

$$G(\varphi) : (t\varphi)G(U) \to tG(W)\,,$$

[1] См. лем. 1.2 на стр. 14.

[2] Напомню, что правое умножение сечения $g \in G(W)$ предпучка $G : \mathcal{U}^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$ на морфизм $\varphi : U \to W$ из категории $\mathcal{U}$ по определению означает результат применения к g морфизма ограничения $F(\varphi) : F(W) \to F(U)$, т. е. $g\varphi \stackrel{\text{def}}{=} G(\varphi)g$.

по одной для каждой пары (t, φ), $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(U, W)$, $t \in F(W)$. Естественное преобразование диаграммы GD_F в постоянную диаграмму $\overline{C}$, ассоциированную с объектом $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, это такой набор стрелок $\gamma_{sU} : sG(U) \to C$, что $\gamma_{tW} \circ G(\varphi) = \gamma_{t\varphi U}$ для всех морфизмов $\varphi : U \to W$ категории $\mathcal{U}$ и всех $t \in F(W)$. Такой набор стрелок задаёт естественное преобразование предпучка $F : \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ в предпучок

$$h_C^G : \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et\,, \quad U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(G(U), C\big)\,,$$

действие которого над объектом $U \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{U}$ переводит сечение $s \in F(U)$ в морфизм $\gamma_{sU} : sG(U) \to C$. Тем самым, имеется функториальная по $F \in \mathrm{Ob}\,p\mathcal{S}h(\mathcal{U})$ и $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ биекция

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{colim}\,GD_F, C) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N}_F, \mathcal{C})}(GD_F, \overline{C}) \simeq \mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(\mathcal{C})}(F, h_C^G)\,.$$

Поэтому согласно предл. 2.1 на стр. 19 сопоставление $F \mapsto \mathrm{colim}\,GD_F$ однозначно задаёт функтор $G^{\frown} : p\mathcal{S}h(\mathcal{U}) \to \mathcal{C}$, сопряжённый слева к функтору

$$h_*^G : \mathcal{C} \to p\mathcal{S}h(\mathcal{U})\,, \quad C \mapsto h_C^G\,.$$

Как и всякий левый сопряжённый функтор, он перестановочен с копределами[1]. □

Пример 3.1 (тензорное умножение на бимодуль)
Всякое кольцо R с единицей можно рассматривать как аддитивную категорию $\mathcal{U}$ с одним объектом U и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(U, U) = R$. Предпучок абелевых групп $F : \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{A}b$ на этой категории это правый R-модуль $F = F(U)$, так что $p\mathcal{S}h(\mathcal{U}) \simeq \mathcal{M}od\text{-}R$. Объекты категории $\mathcal{N}_F$ суть элементы $s \in F$, и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{N}_F}(s, t) = \{\varphi \in R \mid t\varphi = s\}$ это *трансформатор* из t в s. Представимый предпучок абелевых групп h_U это свободный модуль ранга 1, т. е. само кольцо R, рассматриваемое как правый модуль над собой. Объекты диаграммы $H_F : \mathcal{N}_F \to \mathcal{M}od\text{-}R$ суть свободные модули sR ранга 1 с базисными элементами $s \in F$, а стрелки — R-линейные справа отображения $(t\varphi)R \to tR$, переводящие базисный вектор $t\varphi \in (t\varphi)R$ в вектор $t \cdot \varphi \in tR$. В этой ситуации лем. 3.1 утверждает, что копредел такой диаграммы канонически изоморфен модулю F.

Упражнение 3.4. Убедитесь в этом непосредственно.

Возьмём в качестве козамкнутой категории $\mathcal{C}$ категорию $\mathcal{M}od\text{-}S$ правых модулей над каким-либо кольцом S. Тогда ковариантный функтор $G : \mathcal{U} \to \mathcal{M}od\text{-}S$ есть то ни что иное, как R-S-бимодуль $G = G(U)$. Отвечающий такому бимодулю функтор

$$h_*^G : \mathcal{M}od\text{-}S \to p\mathcal{S}h(\mathcal{U}) = \mathcal{M}od\text{-}R$$

переводит S-модуль C в R-модуль $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(G, C)$, правое действие кольца R на котором это левое действие на модуле G. В данном случае теор. 3.1 утверждает, что у этого функтора есть левый сопряжённый функтор $G^{\frown} : F \mapsto \mathrm{colim}\,GD_F$. Объектами диаграммы GD_F являются одинаковые копии sG модуля G, занумерованные элементами $s \in F$, а стрелками — морфизмы $\varphi : (t\varphi)G \to tG$, $(t\varphi) \cdot g \mapsto t \cdot (\varphi g)$, по одному для каждого элемента $\varphi \in R$.

Упражнение 3.5. Убедитесь, что $\mathrm{colim}\,GD_F = F \underset{R}{\otimes} G$.

[1] См. предл. 2.6 на стр. 32.

Таким образом мы снова получаем канонический изоморфизм из предл. 2.3 на стр. 21:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}\big(F \bigotimes_R G, C\big) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}R}\big(F, \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(G, C)\big)\,.$$

Пример 3.2 (геометрическая реализация симплициальных множеств)
Для симплициальной категории $\mathcal{U} = \Delta$ и симплициального множества $F : \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ диаграмма $H_F : \mathcal{N}_F \to p\mathcal{S}h(\Delta)$ состоит из объектов $sh_{[n]}$, занумерованных числами $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ и симплексами $s \in F_n = F([n])$. Каждый предпучок $sh_{[n]} = h_{[n]} : \Delta^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ является комбинаторным описанием стандартной триангуляции правильного симплекса $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Действие стрелки $\varphi_* : (t\varphi)h_{[n]} \to th_{[m]}$ состоит в левом умножении стрелок из $h_{[n]}$ на φ.

Упражнение 3.6. Убедитесь, что копредел этой диаграммы в категории симплициальных множеств изоморфен F.

Функтор геометрической реализации $G : \Delta \to \mathcal{T}op$ переводит комбинаторный симплекс $[n]$ в геометрический симплекс $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. По теор. 3.1 этот функтор канонически продолжается на любые симплициальные множества перестановочным с копределами функтором $G^{\frown} : p\mathcal{S}h(\Delta) \to \mathcal{T}op$, который переводит симплициальное множество F в копредел диаграммы GD_F в категории $\mathcal{T}op$. Эта диаграмма получается из предыдущей диаграммы H_F заменой каждого комбинаторного симплекса $h_{[n]}$ на геометрический симплекс Δ^n, а морфизмов $\varphi_* : h_{[n]} \to h_{[m]}$, задаваемых левыми умножениями на стрелки $\varphi : [m] \to [n]$ в категории Δ, — на аффинные отображения $\varphi_* : \Delta^n \to \Delta^m$ действующие на вершины симплексов стрелкой φ.

Упражнение 3.7. Убедитесь, что копредел такой диаграммы гомеоморфен топологическому пространству $|F|$ из прим. 1.7 на стр. 8.

Правый сопряжённый к геометрической реализации функтор $h_*^G : C \to h_C^G$ сопоставляет топологическому пространству C симплициальное множество его сингулярных симплексов $h_C^G = S(C) : [n] \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(\Delta^n, C)$. В данном случае теор. 3.1 утверждает наличие канонического изоморфизма $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(|F|, C) = \mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(\Delta)}(F, S(C))$ из прим. 2.3 на стр. 22.

Пример 3.3 (эталное пространство предпучка)
В случае, когда $\mathcal{U} = \mathcal{U}(X)$ является категорией открытых множеств топологического пространства X, а $F : \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ это предпучок на X, диаграмма H_F состоит из представимых предпучков sh_U, по одному для каждого открытого $U \subset X$ и каждого $s \in F(U)$. Пучок sh_U имеет пустые множества сечений над всеми $V \not\subset U$ и одноточечное множество сечений над каждым $V \subseteq U$. Единственный элемент последнего множества уместно обозначить $s|_V$. Каждому включению $U \hookrightarrow W$ и сечению $t \in F(W)$ в диаграмме H_F отвечает стрелка $t|_U h_U \to th_W$, действие которой над открытым $V \subseteq U \subseteq W$ переводит единственный элемент $t|_V \in t|_U h_U(V)$ в единственный элемент $t|_V \in h_W(V)$.

Упражнение 3.8. Убедитесь, что копредел этой диаграммы в категории предпучков на X равен F.

Возьмём в качестве козамкнутой категории $\mathcal{C}$ в теор. 3.1 категорию $\mathcal{T}op(X)$ топологических пространств над X, объектами которой являются непрерывные отображения $p : Y \to X$ в категории $\mathcal{T}op$, а $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op(X)}(p, q) = \{\psi \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{T}op \mid q\psi = p\}$. Иначе говоря, морфизм из $p : Y \to X$ в $q : Z \to X$ это непрерывное отображение $\psi : Y \to Z$, для каждого $x \in X$ переводящее слой $p^{-1}x$ в слой $q^{-1}x$. Имеется естественный функтор $G : \mathcal{U}(X) \to \mathcal{T}op(X)$ переводящий открытое подмножество $U \subset X$ в его тавтологическое вложение $U \hookrightarrow X$. Согласно теор. 3.1 этот функтор продолжается по непрерывности до функтора $G^{\frown} : p\mathcal{S}h(X) \to \mathcal{T}op(X)$, который сопоставляет предпучку F на X топологическое пространство над X. Оно называется *этальным пространством* предпучка F, обозначается $\mathcal{E}_F$, и представляет собою копредел в категории $\mathcal{T}op(X)$ диаграммы GD_F, объектами которой являются тавтологические вложения $sU \hookrightarrow X$, по одному для каждого открытого $U \subset X$ и каждого сечения $s \in F(U)$, а стрелками — включения $t|_U U \hookrightarrow tW$, по одному для каждого включения $U \hookrightarrow W$ и каждого сечения $t \in F(W)$. Слоем пространства $\mathcal{E}_F$ над точкой $x \in X$ является копредел $\operatorname{colim}_{U\ni x} F(U)$ индуктивной системы множеств сечений предпучка F над всеми открытыми окрестностями U точки x относительно отображений ограничения сечений, т. е. *слой*[1] F_x предпучка F в точке x. Напомню, что он состоит из *ростков* сечений, т. е. из классов $s|_x$ сечений $s \in F(U)$ по модулю эквивалентности, отождествляющей сечения $s \in F(U)$ и $t \in F(W)$, если и только если $s|_V = t|_V$ на какой-нибудь открытой окрестности $V \subset U \cap W$ точки x. Таким образом, как множество

$$\mathcal{E}_F = \bigsqcup_{x\in X} F_x\,,$$

и проекция $\pi_F : \mathcal{E}_F \to X$ отображает все элементы слоя $F_x \subset \mathcal{E}_F$ в точку $x \in X$. Каждое сечение $s \in F(U)$ задаёт локальное отображение $s : U \to \mathcal{E}_F$, переводящее точку $x \in U$ в класс $s|_x \in F_x$ сечения s. Топология на пространстве $\mathcal{E}_F$ определяется как слабейшая из топологий, в которых все такие локальные сечения $s : U \to \mathcal{E}_F$ непрерывны, т. е. множество $\mathcal{W} \subset \mathcal{E}_F$ открыто , если и только если для любого открытого подмножества $U \subset X$ и любого сечения $s \in F(U)$ прообраз множества $\mathcal{W}$ при отображении

$$s : U \hookrightarrow \mathcal{E}_F\,, \quad x \mapsto s|_x\,,$$

открыт в U. Тем самым, базу открытых окрестностей точки $s|_x \in \mathcal{E}_F$, изображающей класс сечения $s \in F(U)$ над какой-либо открытой окрестностью $U \ni x$, составляют образы $s(W) \subset \mathcal{E}_F$ содержащихся в U открытых окрестностей $W \ni x$ при отображении $s : U \to \mathcal{E}_F$, задаваемом сечением s. В частности, проекция $\pi_F : \mathcal{E}_F \to X$ является *локальным гомеоморфизмом* в том смысле, что любая точка пространства $\mathcal{E}_F$ обладает открытой окрестностью[2] $\mathcal{W}$, на которую проекция π_F ограничивается в гомеоморфизм $\pi_F\big|_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \xrightarrow{\sim} \pi_F(\mathcal{W})$.

Упражнение 3.9. Убедитесь, что пространство $\mathcal{E}_F = \bigsqcup_{x\in X} F_x$ с только что описанной топологией действительно является копределом диаграммы $GD_F : \mathcal{N}_F \to \mathcal{T}op(X)$.

Согласно теор. 3.1 функтор $F \mapsto \mathcal{E}_F$ сопряжён слева функтору $h^G_* : \mathcal{T}op(X) \to p\mathcal{S}h(X)$, который сопоставляет непрерывному отображению $p : Y \to X$ пучок его сечений[3]

$$h^G_Y = \Gamma_Y : U \mapsto \{s : U \to Y \mid ps = \mathrm{Id}_U\}\,,$$

[1]См. прим. 2.12 на стр. 29.

[2]Более того, такую окрестность можно указать в любой наперёд заданной окрестности любой точки пространства $\mathcal{E}_F$.

[3]См. прим. 1.8 на стр. 9.

т. е. имеется функториальная по предпучку F на X и пространству Y над X биекция

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{Top}(X)}(\mathcal{E}_F, Y) = \mathrm{Hom}_{p\mathcal{Sh}(X)}(F, \Gamma_Y) . \tag{3-3}$$

В частности, функтор $F \mapsto \mathcal{E}_F$ перестановочен с копределами, а $Y \mapsto \Gamma_Y$ — с пределами.

3.2. Пучки на топологическом пространстве. Поскольку предпучок сечений непрерывного отображения является пучком[1], композиция функторов Γ и $\mathcal{E}$ из прим. 3.3

$$\Gamma \circ \mathcal{E} \,:\, p\mathcal{Sh}(X) \to \mathcal{Sh}(X)$$

функториально сопоставляет каждому предпучку F пучок $F^s \overset{\text{def}}{=} \Gamma \circ \mathcal{E}(F)$, сечения которого над открытым множеством U суть непрерывные сечения $s \,:\, U \hookrightarrow \mathcal{E}_F$ этального пространства $\mathcal{E}_F \to X$ предпучка F. Такое сечение представляет собою семейство ростков $s(x) \in F_x$, занумерованных точками $x \in U$, в котором для каждой точки $y \in U$ найдется открытое $W \ni y$, $W \subset U$, и такое сечение $t \in F(W)$, что $s(x) = t|_x$ в F_x для всех $x \in W$. Иначе говоря, сечение пучка F^s над множеством U задаётся покрытием $\{W_\alpha \to U\}$ множества U семейством открытых множеств W_α и набором сечений $s_\alpha \in F(W_\alpha)$, согласованных на пересечениях, в том смысле, что $s_\alpha\big|_{W_\alpha \cap W_\beta} = s_\beta\big|_{W_\alpha \cap W_\beta}$ для всех α, β. Два таких набора данных задают одно и то же сечение, если и только если их ограничения на некоторое покрытие, вписанное в оба данных покрытия, совпадают.

В силу того, что функтор $\mathcal{E}$ сопряжён слева функтору Γ, имеется естественное преобразование[2] $s \,:\, \mathrm{Id}_{p\mathcal{Sh}(X)} \to \Gamma \circ \mathcal{E}$, т. е. функториальный по F морфизм предпучков $s \,:\, F \to F^s$, называемый *опучковыванием*. Над каждым открытым U он отображает $F(U)$ в $F^s(U)$, переводя $t \in F(U)$ в семейство его классов $t|_x$ в слоях F_x над всеми $x \in U$.

Упражнение 3.10. Покажите, что канонический морфизм $s \,:\, F \to F^s$ инъективен, если и только если предпучок F отделим[3], и является изоморфизмом, если и только если F — пучок. В частности $F^{ss} \simeq F^s$.

Тем самым, ограничение композиции функторов $\Gamma\mathcal{E}$ на подкатегорию пучков естественно изоморфно тождественному функтору $\mathrm{Id}_{\mathcal{Sh}(X)}$. Этим мы наполовину доказали

Предложение 3.1
Ограничение функтора $\mathcal{E} \,:\, F \mapsto \mathcal{E}_F$ на полную подкатегорию пучков $\mathcal{Sh}(X) \subset p\mathcal{Sh}(X)$ и ограничение функтора $\Gamma \,:\, Y \mapsto \Gamma_Y$ на полную подкатегорию локальных гомеоморфизмов в $\mathcal{Top}(X)$ являются квазиобратными друг другу эквивалентностями категорий.

Доказательство. Как мы уже отмечали перед упр. 3.9 на стр. 38, проекция $p \,:\, \mathcal{E}_F \to X$ является локальным гомеоморфизмом для любого предпучка F на X. Так как функтор $F \mapsto \mathcal{E}_F$ сопряжён слева функтору $Y \mapsto \Gamma_Y$, имеется естественное преобразование $e \,:\, \mathcal{E} \circ \Gamma \to \mathrm{Id}_{\mathcal{Top}(X)}$, действие которого $e_Y \,:\, \mathcal{E}_{\Gamma_Y} \to Y$ над объектом $p \,:\, Y \to X$ переводит росток сечений $\sigma_x \in \mathcal{E}_{\Gamma_Y}$, лежащий в слое над точкой $x \in X$, в значение $s(x) \in Y$ любого локального сечения $s \,:\, U \hookrightarrow Y$, представляющего росток s_x. Если отображение

[1] См. прим. 1.8 на стр. 9.
[2] См. формулу (2-2) на стр. 18.
[3] См. прим. 1.8 на стр. 9.

$p : Y \to X$ является локальным гомеоморфизмом, то имеется обратное к e_Y отображение $\varepsilon : Y \to \mathcal{E}_{\Gamma_Y}$, переводящее точку $y \in Y$ в лежащий в слое пучка Γ_Y над точкой $p(y)$ росток любой такой открытой окрестности U точки y, которая гомеоморфно отображается на $p(U) \subset X$ и тем самым может рассматриваться как проходящее через y локальное сечение отображения $p : Y \to X$ над открытой окрестностью $p(U) \ni p(y)$.

Упражнение 3.11. Убедитесь, что e и ε непрерывны и обратны друг другу.

Тем самым, сужение $\mathcal{E}\Gamma$ на подкатегорию локальных гомеоморфизмов эквивалентно тождественному функтору. □

Следствие 3.1
Для любых пучков G, H на X и любых двух локальных гомеоморфизмов $Y \to X$, $Z \to X$ имеются функториальные изоморфизмы:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{Sh}(X)}(G,H) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{Top}(X)}(\mathcal{E}_G,\mathcal{E}_H) \quad \text{и} \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{Top}(X)}(X,Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{Sh}(X)}(\Gamma_Y,\Gamma_Z).$$

Следствие 3.2
Функтор опучковывания $F \mapsto F^s$ сопряжён слева к вложению $\mathcal{Sh}(X) \hookrightarrow p\mathcal{Sh}(X)$, т. е. имеется функториальный по предпучку F и пучку G изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{p\mathcal{Sh}(X)}(F,G) \simeq \mathrm{Hom}_{p\mathcal{Sh}(X)}(F^s,G).$$

В частности, опучковывание перестановочно с копределами, и естественное преобразование $s : F \to F^s$ универсально: любой морфизм $\varphi : F \to G$ предпучка F в пучок G имеет вид $\varphi = \varphi^s \circ s$ для единственного морфизма $\varphi^s : F^s \to G$.

Доказательство. Пользуясь функториальными по предпучку F и пучку G изоморфизмами $G \simeq G^s$ и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Top}(X)}\left(\mathcal{E}_F,\mathcal{E}_G\right) \simeq \mathrm{Hom}_{p\mathcal{Sh}(X)}\left(\Gamma_{\mathcal{E}_F},\Gamma_{\mathcal{E}_G}\right)$, получаем $\mathrm{Hom}_{p\mathcal{Sh}(X)}(F,G) \simeq$ $\simeq \mathrm{Hom}_{p\mathcal{Sh}(X)}\left(F,G^s\right) \simeq \mathrm{Hom}_{p\mathcal{Sh}(X)}\left(F,\Gamma_{\mathcal{E}_G}\right) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{Top}(X)}\left(\mathcal{E}_F,\mathcal{E}_G\right) \simeq \mathrm{Hom}_{p\mathcal{Sh}(X)}\left(\Gamma_{\mathcal{E}_F},\Gamma_{\mathcal{E}_G}\right) \simeq$ $\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{Sh}(X)}\left(F^s,G^s\right) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{Sh}(X)}\left(F^s,G\right).$ □

3.2.1. Локальность. Поскольку слой F_x предпучка F на топологическом пространстве X в точке $x \in X$ является копределом $F_x = \mathrm{colim}_{U \ni x} F(U)$ прямой системы множеств $F(U)$ по всем открытым $U \ni x$, всякий морфизм предпучков $\varphi : F \to G$ в силу функториальности копредела задаёт морфизм слоёв $\varphi_x : F_x \to G_x$, переводящий росток сечения $s \in F(U)$ в росток сечения $\varphi_U(s) \in G(U)$.

Предложение 3.2
Для того, чтобы два морфизма пучков $\varphi, \psi : F \to G$ на пространстве X совпадали, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке $x \in X$ совпадали индуцированные ими морфизмы слоёв $\varphi_x, \psi_x : F_x \to G_x$.

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Для каждого открытого множества $U \subset X$ имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} F(U) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi_U"'] & \coprod\limits_{x\in U} F_x \arrow[d, "\amalg\varphi_x"] \\ G(U) \arrow[r, hook] & \coprod\limits_{x\in U} G_x \end{tikzcd} \tag{3-4}$$

горизонтальные стрелки которой, отправляющие сечение в набор его ростков, инъективны в силу того, что F и G пучки.

Упражнение 3.12. Убедитесь в этом.

Тем самым, если правая вертикальная стрелка не меняется при замене φ на ψ, то и левая не меняется. □

Предложение 3.3
Для морфизма $\varphi : F \to G$ пучков на пространстве X инъективность (соотв. биективность) отображений $\varphi_U : F(U) \to G(U)$ над всеми открытыми $U \subset X$ равносильна инъективности (соотв. биективности) отображений слоёв $\varphi_x : F_x \to G_x$ над всеми точками $x \in X$.

Доказательство. Импликация ⇒ вытекает из упр. 2.19 на стр. 33. Докажем противоположную импликацию. Утверждение про инъективность очевидно: если в предыдущей диаграмме (3-4) правая вертикальная стрелка инъективна, то инъективна и левая. Пусть в диаграмме (3-4) правая вертикальная стрелка биективна. Тогда для любого сечения $s \in G(U)$ у каждой точки $x \in U$ есть открытая окрестность $W_x \ni x$, $W_x \subset U$, с таким сечением $t_x \in F(W_x)$, что класс сечения $\varphi_W(t_x) \in G\big(W_x\big)$ в слое G_x равен $s|_x$. Для любых точек $x, y \in U$ классы сечений t_x и t_y совпадают в слоях F_z над всеми точками $z \in W_x \cap W_y$, поскольку совпадают их образы в слоях G_z. Поэтому, в силу инъективности горизонтальных стрелок, ограничения сечений t_x и t_y на пересечение $W(x) \cap W(y)$ равны. Тем самым, существует и единственно сечение $t \in F(U)$, ограничивающееся в сечение t_x над W_x сразу для всех $x \in U$. В силу коммутативности диаграммы (3-4), $\varphi_U(t) = s$, что доказывает биективность φ_U. □

Предостережение 3.1. Из сюрьективности отображений слоёв $\varphi_x : F_x \to G_x$ над всеми точками $x \in X$, вообще говоря, *не следует*, что отображения $\varphi_U : F(U) \to G(U)$ сюрьективны над *всеми* открытыми $U \subset X$. Рассмотрим, например, на окружности S^1 пучок C гладких вещественных функций и пучок Ω гладких дифференциальных 1-форм. Оператор дифференцирования $d : C \to \Omega$, $f \mapsto df$, локально эпиморфен, однако его действие над всей окружностью $d_{S^1} : C(S^1) \to \Omega(S^1)$ не эпиморфно: дифференциал длины дуги[1] $d\ell \in \Omega(S^1)$ не является дифференциалом ни от какой функции $f : S^1 \to \mathbb{R}$, поскольку

$$\int_{S^1} df = f(2\pi) - f(0) = 0\,, \quad \text{а} \quad \int_{S^1} d\ell = 2\pi\,.$$

3.3. Прямой и обратный образ. С каждым функтором $\Phi : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ между произвольными малыми категориями $\mathcal{U}$, $\mathcal{W}$ естественно связан функтор *подъёма предпучков*

$$\Phi^* : p\mathcal{S}h(\mathcal{W}) \to p\mathcal{S}h(\mathcal{U})\,, \quad S \mapsto S\Phi\,. \tag{3-5}$$

[1]Значение дифференциальной формы $d\ell$ в каждой точке $p \in S^1$ на единичном векторе скорости, направленном против часовой стрелки, равно 1. Эквивалентно, значение формы $d\ell$ в точке $p \in S^1$ равно дифференциалу функции длины $\ell : [a, b] \to \mathbb{R}$, которая определённа на некоторой дуге $[a, b] \subset S^1$, содержащей точку p строго внутри так, что движение $a \to p \to b$ происходит против часовой стрелки, и сопоставляет точке $t \in [a, b]$ длину дуги $[a, t]$ (обратите внимание, что хотя сама функция ℓ зависит от выбора точки a, её дифференциал $d\ell$ от этого выбора не зависит).

Лемма 3.2
У функтора (3-5) есть левый сопряжённый функтор $\Phi_* : p\mathcal{S}h(\mathcal{U}) \to p\mathcal{S}h(\mathcal{W})$, переводящий предпучок $F : \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ в копредел диаграммы $\mathcal{N}_F \to p\mathcal{S}h(\mathcal{W})$, объектами которой являются представимые предпучки $sh_{\Phi(U)} \stackrel{\text{def}}{=} h_{\Phi(U)}$ на $\mathcal{W}$, по одному для каждого $U \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{U}$ и каждого $s \in F(U)$, а стрелками служат отображения

$$\Phi(\varphi)_* : (t\varphi)h_{\Phi(U)} \to th_{\Phi(V)}, \quad (t\varphi)\psi \mapsto t(\Phi(\varphi)\psi),$$

по одному для каждой стрелки $\varphi : U \to V$ категории $\mathcal{U}$ и каждого $t \in F(V)$.

Доказательство. Применим теор. 3.1 на стр. 35 к категории $\mathcal{C} = p\mathcal{S}h(W)$ и функтору

$$G : \mathcal{U} \to p\mathcal{S}h(\mathcal{W}), \quad U \mapsto h_{\Phi(U)}.$$

В этом случае для каждого предпучка $S \in \mathrm{Ob}\,p\mathcal{S}h(\mathcal{W})$ предпучок $h^G_S \in \mathrm{Ob}\,p\mathcal{S}h(\mathcal{U})$ канонически изоморфен подъёму Φ^*S, т. к. по лемме Ионеды имеется функториальный по U и S изоморфизм $h^G_S(U) = \mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(\mathcal{W})}\big(G(U), S\big) = \mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(\mathcal{W})}\big(h_{\Phi(U)}, S\big) \simeq S\Phi(U)$. Таким образом, функтор $h^G_* : p\mathcal{S}h(W) \to p\mathcal{S}h(U)$, $S \mapsto h^G_S$, канонически изоморфен функтору подъёма $\Phi^* : S \mapsto S\Phi$. Согласно теор. 3.1 левый сопряжённый к нему функтор $\Phi_* = G^{\frown} : p\mathcal{S}h(\mathcal{U}) \to p\mathcal{S}h(\mathcal{W})$ переводит предпучок $F \in \mathrm{Ob}\,p\mathcal{S}h(\mathcal{U})$ в копредел диаграммы GD_F, которая выглядит именно так, как указано в формулировке леммы. □

3.3.1. Прямой образ предпучка при непрерывном отображении. По определению, каждое непрерывное отображение топологических пространств $f : X \to Y$ задаёт функтор, действующий между их категориями открытых множеств в противоположном к f направлении

$$f^{-1} : \mathcal{U}(Y) \to \mathcal{U}(X), \quad U \mapsto f^{-1}(U).$$

Подъём предпучка $F : \mathcal{U}(X)^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ на пространстве X вдоль этого функтора называется *прямым образом*[1] предпучка F и обозначается

$$f_* F \stackrel{\text{def}}{=} (f^{-1})^* F = F \circ f^{-1} : \mathcal{U}(Y)^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et.$$

Множества его сечений над открытыми $U \subset Y$ суть $f_* F(U) \stackrel{\text{def}}{=} F\left(f^{-1}(U)\right)$.

Упражнение 3.13. Проверьте, что прямой образ пучка тоже является пучком.

Например, когда $f : Z \hookrightarrow Y$ является вложением замкнутого подмножества, для любого предпучка абелевых групп F на Z слои

$$f_* F_y = \begin{cases} 0 & \text{при } y \notin Z \\ F_y & \text{при } y \in Z. \end{cases}$$

По этой причине пучок $f_* F$ называется *продолжением нулём* на X пучка F с $Z \subset X$. Когда $f : U \hookrightarrow Y$ является вложением открытого подмножества и $F \in p\mathcal{S}h(U)$, слои $f_* F_u$ над всеми точками $y \in U$ также совпадают со слоями F_u, однако над точками $x \notin U$ слои $f_* F_x = \mathrm{colim}_{W \ni x} F(U \cap W)$, вообще говоря, могут быть и ненулевыми.

[1] По-английски *direct image* или *push forward*.

3.3.2. Обратный образ предпучка при непрерывном отображении. Согласно лем. 3.2 функтор $f_* = (f^{-1})^*$ прямого образа предпучков вдоль непрерывного отображения $f : X \to Y$ обладает левым сопряжённым функтором. Этот функтор называется *обратным образом*[1] предпучков при отображении f и обозначается

$$f^* \stackrel{\text{def}}{=} (f^{-1})_* : \ p\mathcal{S}h(Y) \to p\mathcal{S}h(X)\,.$$

Для заданного предпучка F на Y предпучок f^*F на X является копределом диаграммы представимых предпучков, объекты которой имеют вид $sh_{f^{-1}(U)}$, по одному для каждого открытого $U \supset Y$ и каждого сечения $s \in F(U)$, а стрелки суть естественные преобразования $t|_U h_{f^{-1}(U)} \to th_{f^{-1}(W)}$, по одному для каждого вложения $U \hookrightarrow W$ открытых множеств в Y и каждого сечения $t \in F(W)$. Множества сечений этих предпучков над открытым множеством $V \subset X$ образуют диаграмму множеств, непустыми объектами которой являются одноточечные множества $sh_{f^{-1}(U)}(V)$, по одному для каждого открытого $U \supset f(V)$ в Y и каждого $s \in F(U)$, а стрелки переводят единственный элемент множества $s|_W h_{f^{-1}(U)}(V)$ в единственный элемент множества $th_{f^{-1}(W)}(V)$ для всех открытых $W \supset U \supset f(V)$ и всех $t \in F(W)$. Копредел такой диаграммы совпадает со слоем

$$\operatorname*{colim}_{U \supset f(V)} F(U) = F_{f(V)}$$

пучка F над множеством $f(V) \subset Y$. Поэтому, согласно сл. 2.2 на стр. 31 множество сечений предпучка f^*F над открытым $V \subset X$ это слой пучка F над (не обязательно открытым!) образом $f(V) \subset Y$ множества V :

$$f^*F(V) = F_{f(V)} = \operatorname*{colim}_{U \supset f(V)} F(U)\,. \tag{3-6}$$

В частности, в каждой точке $x \in X$ слой $f^*F_x = F_{f(x)}$.

Упражнение 3.14. Убедитесь непосредственно, что для любого предпучка F на Y множества (3-6) образуют предпучок на X и постройте естественную по $F \in p\mathcal{S}h(Y)$ и $G \in p\mathcal{S}h(X)$ биекцию $\operatorname{Hom}_{p\mathcal{S}h(X)}(f^*F, G) = \operatorname{Hom}_{p\mathcal{S}h(Y)}(F, f_*G)$.

Предостережение 3.2. Если предпучок F на Y является пучком, то его обратный образ f^*F, определённый по формуле (3-6), может и не быть пучком на X. Например, при отображении двухточечного множества (с дискретной топологией) в одноточечное обратным образом постоянного пучка является постоянный предпучок, а не постоянный пучок.

3.3.3. Пучковый обратный образ. По определению, *пучковым* обратным образом (пред)пучка F на топологическом пространстве Y при непрерывном отображении $f : X \to Y$ называется опучковывание f^*F^S предпучка f^*F на X, заданного формулой (3-6). Так как прямой образ любого пучка G на X является пучком[2] на Y и функтор опучковывания сопряжён слева к строго полному вложению категории пучков в категорию предпучков, имеют место канонические изоморфизмы

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{S}h(X)}(f^*F^S, G) \simeq \operatorname{Hom}_{p\mathcal{S}h(X)}(f^*F, G) \simeq \operatorname{Hom}_{p\mathcal{S}h(Y)}(F, f_*G) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{S}h(Y)}(F, f_*G)\,,$$

[1] По-английски *pull back*.

[2] Согласно упр. 3.13 выше.

означающие, что пучковый обратный образ сопряжён слева к ограничению функтора прямого образа на подкатегорию пучков. Всюду, когда речь идёт о пучках, под обратным образом пучка понимается именно пучковый обратный образ, и индекс «s» в обозначении f^*F^s опускается, т. е.

$$\text{для пучков} \quad f^*F \overset{\text{def}}{=} f^*F^s\,.$$

Согласно n° 3.2 на стр. 39 сечениями пучкового обратного образа f^*F над открытым множеством $U \subset X$ являются такие занумерованные точками $x \in U$ семейства ростков $s_x \in F_{f(x)}$, что для каждой точки $u \in U$ имеются открытая окрестность $V \ni u$ точки u в U, открытая окрестность $W \supset f(V)$ образа окрестности V в Y, а также сечение $t \in F(W)$, класс которого в слое $F_{f(x)}$ равен s_x для всех $x \in V$.

Иначе пучковый обратный образ можно определить как пучок сечений канонической проекции $X \underset{Y}{\times} \mathcal{E}_F \to X$ послойного произведения топологических пространств $f : X \to Y$ и $\mathcal{E}_F \to Y$ над Y.

Упражнение 3.15. Для любого предпучка F на Y постройте в категории $\mathcal{T}op(X)$ функториальный по F изоморфизм $X \underset{Y}{\times} \mathcal{E}_F \simeq \mathcal{E}_{f^*F}$.

Обратите внимание, что пучковый обратный образ определён для любого предпучка и всегда является пучком. В частности, опучковывание F^s предпучка F на X можно воспринимать как пучковый обратный образ Id_X^*F при тождественном отображении.

3.3.4. Ограничение на открытые и замкнутые подмножества. В ситуации, когда $f : Q \hookrightarrow X$ является вложением открытого или замкнутого подмножества, функтор обратного образа $f^* : \mathcal{S}h(X) \to \mathcal{S}h(Q)$ называется *ограничением* пучков с X на Q.

Ограничение любого пучка множеств F с X на открытое подмножество $f : U \hookrightarrow X$ имеет над всеми открытыми $W \subset U$ те же множества сечений, что и пучок F, т. е. $f^*F(W) = F(W)$. В частности, для всех $x \in U$ слой $f^*F_x = F_x$.

При соблюдении подходящих условий конечности, ограничение пучков на замкнутые подмножества также ведёт себя интуитивно ожидаемым образом. Напомню, что топологическое пространство называется *компактным*, если любое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие. Топологическое пространство называется *локально компактным*, если у любой его точки есть открытая окрестность с компактным замыканием.

Упражнение 3.16. Убедитесь, что все открытые и замкнутые подмножества локально компактного пространства X тоже локально компактны, и в каждой открытой окрестности любого компакта $C \subset X$ есть компакт, для которого все точки из C являются внутренними.

Предложение 3.4
Пусть $f : Z \hookrightarrow X$ это вложение компактного замкнутого подмножества Z в локально компактное топологическое пространство X. Тогда для любого пучка множеств F на X множество глобальных сечений пучка f^*F на Z находится в естественной биекции со слоем пучка F над Z, т. е. $f^*F(Z) \simeq F_Z$.

Доказательство. Поскольку сечения пучка F над всеми открытыми $U \supset Z$ ограничиваются в глобальные сечения пучка f^*F, имеется канонический морфизм

$$\varphi : F_Z = \varinjlim_{U \supset Z} F(U) \to f^*F(Z). \tag{3-7}$$

Если ростки сечений $s \in F(U)$ и $t \in F(W)$ над открытыми $U, W \supset Z$ совпадают в слоях F_z над всеми точками $z \in Z$, то у каждой точки z найдётся открытая в X окрестность $V_z \ni z$, на которую оба сечения ограничиваются одинаково: $s|_{V_z} = t|_{V_z}$. Беря объединение всех этих окрестностей, мы получаем открытое множество $V \supset Z$ с $s|_V = t_V$, что влечёт совпадение классов сечений s и t в слое F_Z и тем самым доказывает инъективность морфизма (3-7). Чтобы установить его сюрьективность, рассмотрим произвольное сечение $s \in f^*F(Z)$. Для каждой точки $z \in Z$ найдутся компактная окрестность[1] C_z точки z в пространстве Z, открытое в X множество $V_z \supset C_z$ и сечение $s_z \in F(V_z)$, класс которого во всех слоях F_x над точками $x \in C_z$ совпадает с классом сечения s. Выберем конечное множество $C_{z_1}, C_{z_2}, \dots, C_{z_n}$ покрывающих Z компактов C_z. Достаточно построить открытое в X множество $W \supset Z$ и сечение $t \in F(W)$, которое при каждом i ограничивается на некоторое открытое в V_{z_i} подмножество $V \supset C_i$ точно также, как и сечение s_{z_i}. Тогда образом класса сечения t в слое F_Z при морфизме (3-7) будет в точности сечение s.

Индукция по n сводит построение к случаю $n = 2$: достаточно для любой пары компактных подмножеств $C_1, C_2 \subset X$ и сечений $s_1 \in F(V_1)$, $s_2 \in F(V_2)$, заданных на открытых в X множествах $V_1 \supset C_1$, $V_2 \supset C_2$ и имеющих равные ростки в слоях F_x над всеми точками $x \in C_1 \cap C_2$, построить открытое в X множество $W \supset C_1 \cup C_2$ и сечение $t \in F(W)$, которое ограничивается на какие-либо открытые в V_i подмножества $W_i \supset C_i$ точно также, как сечение s_i. Рассуждение, использованное при доказательстве инъективности морфизма (3-7), позволяет построить открытое в $V_1 \cap V_2$ подмножество $V \supset C_1 \cap C_2$ и такое сечение $t_V \in F(V)$, что $s_1\big|_V = s_2\big|_V = t_V$. По той же причине и в силу упр. 3.16 непересекающиеся друг с другом компакты $C_i \smallsetminus V$ обладают непересекающимися друг с другом открытыми в V_i окрестностями $U_i \supset (C_i \smallsetminus V)$, над которыми существуют сечения $t_i \in F(U_i)$ с $s_i\big|_{U_i} = t_i$. Поскольку сечения t_1, t_V, t_2 согласованы на непустых пересечениях $U_1 \cap V$ и $V \cap U_2$, а пересечение $U_1 \cap U_2$ пусто, над объединением $W = U_1 \cup V \cup U_2$ эти три сечения однозначно склеиваются в искомое сечение $t \in F(W)$. □

[1] Т. е. компакт, содержащий некоторую открытую окрестность точки z.

§4. Абелевы категории

4.1. Аддитивные категории. Категория $\mathcal{C}$ называется *аддитивной*, если в ней есть нулевой объект[1] и прямые произведения и копроизведения любых пар объектов, а бифунктор $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(*,*)$ действует в категорию $\mathcal{Ab} = \mathbb{Z}\text{-}\mathcal{Mod}$ абелевых групп. Последнее означает, что на каждом множестве $\mathrm{Hom}(X,Y)$ имеется внутренняя структура абелевой группы[2], функториальная по каждому из аргументов в том смысле, что все композиции $\mathrm{Hom}(Y,Z) \times \mathrm{Hom}(X,Y) \to \mathrm{Hom}(X,Z)$ $\mathbb{Z}$-билинейны (или, что то же самое, дистрибутивны по отношению к сложению морфизмов), т. е.

$$(\varphi_1 + \varphi_2) \circ (\psi_1 + \psi_2) = \varphi_1 \circ \psi_1 + \varphi_1 \circ \psi_2 + \varphi_2 \circ \psi_1 + \varphi_2 \circ \psi_2$$

для всех $\varphi_1, \varphi_2 : Y \to Z$, $\psi_1, \psi_2 : X \to Y$ и $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. Например, категория абелевых групп $\mathcal{Ab}$ аддитивна. Её подкатегории $R\text{-}\mathcal{Mod}$ и $\mathcal{Mod}\text{-}R$ левых и правых модулей над произвольным кольцом R тоже аддитивны.

Функтор между аддитивными категориями называется *аддитивным*, если его действия на стрелки являются гомоморфизмами абелевых групп. Все рассматриваемые далее функторы между аддитивными категориями по умолчанию предполагаются аддитивными. Нулевой элемент абелевой группы $\mathrm{Hom}(X,Y)$ называется *нулевым морфизмом* и обозначается через 0.

Упражнение 4.1. Покажите, что в аддитивной категории следующие свойства стрелки $\varphi : X \to Y$ эквивалентны: а) φ раскладывается в композицию[3] $X \to 0 \to Y$ б) φ является нулевым элементом абелевой группы $\mathrm{Hom}(X,Y)$ в) $\varphi \circ \psi = 0$ для любой стрелки ψ с концом в X г) $\psi \circ \varphi = 0$ для любой стрелки ψ с началом в Y.

Упражнение 4.2. Покажите, что в аддитивной категории следующие свойства эндоморфизма $\varepsilon \in \mathrm{Hom}(X,X)$ эквивалентны: а) $\varepsilon = \mathrm{Id}_X$ б) $\varphi \circ \varepsilon = \varphi$ для всех стрелок φ с началом в X в) $\varepsilon \circ \varphi = \varphi$ для всех стрелок φ с концом в X.

Упражнение 4.3. Проверьте, что мономорфность[4] (соотв. эпиморфность) морфизма φ в аддитивной категории означает, что φ не является левым (соотв. правым) делителем нуля[5].

Лемма 4.1
Пусть категория $\mathcal{C}$ такова, что $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(*,*) : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{Ab}$ является бифунктором с категорию абелевых групп. Тогда каждое произведение $X \times Y$ в $\mathcal{C}$ одновременно является и копроизведением, а каждое копроизведение $X \otimes Y$ — произведением, причём между каноническими морфизмами π_X, π_Y произведения в множители и каноническими морфизмами ι_X, ι_Y множителей в копроизведение выполняются соотношения:

$$\iota_X \pi_X + \iota_Y \pi_Y = \mathrm{Id}\,, \quad \pi_X \iota_X = \mathrm{Id}_X\,, \quad \pi_Y \iota_Y = \mathrm{Id}_Y\,, \quad \pi_X \iota_Y = 0\,, \quad \pi_Y \iota_X = 0\,, \tag{4-1}$$

[1] См. прим. 2.4 на стр. 24.

[2] Операцию в которой записывают аддитивно и называют *сложением морфизмов*. Для малой аддитивной категории $\mathcal{C}$ эту внутреннюю операцию на $\mathrm{Hom}(X,Y)$ не следует путать с формальным (происходящем не внутри $\mathrm{Hom}(X,Y)$, а в порождённом этим множеством свободном K-модуле) сложением стрелок в алгебре $K[\mathcal{C}]$ из прим. 1.3 на стр. 4.

[3] Т. е. является *нулевым* в смысле прим. 2.4 на стр. 24.

[4] См. n° 1.1.1 на стр. 4.

[5] Т. е. $\varphi\psi = 0 \Rightarrow \psi = 0$ (соотв. $\psi\varphi = 0 \Rightarrow \psi = 0$).

Наоборот, всякий объект $X \oplus Y$, включающийся в диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "\iota_X"] & X \oplus Y \arrow[l, shift left, "\pi_X"] \arrow[r, shift right, "\pi_Y"'] & Y \arrow[l, shift right, "\iota_Y"'] \end{tikzcd},$$

стрелки которой удовлетворяют соотношениям (4-1), является одновременно произведением и копроизведением объектов X и Y.

Доказательство. Пусть есть произведение $X \times Y$. Морфизмы $\iota_X \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Id}_X \times 0 : X \to X \times Y$ и $\iota_Y \overset{\text{def}}{=} 0 \times \mathrm{Id}_Y : Y \to X \times Y$ включаются в коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "\pi_Y"] \arrow[d, "\pi_X"'] & Y \\ X & X \arrow[l, "\mathrm{Id}_X"] \arrow[u, "0"'] \arrow[ul, "\iota_X"'] \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "\pi_Y"] \arrow[d, "\pi_X"'] & Y \\ X & Y \arrow[l, "0"] \arrow[u, "\mathrm{Id}_Y"'] \arrow[ul, "\iota_Y"'] \end{tikzcd}$$

и удовлетворяют последним четырём соотношениям (4-1). Из них вытекает, что

$$\pi_X(\iota_X\pi_X + \iota_Y\pi_Y) = \pi_X \quad \text{и} \quad \pi_Y(\iota_X\pi_X + \iota_Y\pi_Y) = \pi_Y .$$

По универсальному свойству произведения есть лишь одна стрелка $\varphi : X \times Y \to X \times Y$ с $\pi_X\varphi = \pi_X$ и $\pi_Y\varphi = \pi_Y$. Это $\varphi = \mathrm{Id}_{X\times Y}$, что доказывает первое соотношение из (4-1).

Упражнение 4.4. Докажите соотношения (4-1) в случае, когда существует копроизведение $X \otimes Y$.

Из соотношений (4-1) следует, что для любой пары стрелок $\alpha : X \to Z$ и $\beta : Y \to Z$ стрелка $\gamma : X \oplus Y \to Z$ со свойствами $\gamma\iota_X = \alpha$ и $\gamma\iota_Y = \beta$ единственна и равна $\gamma = \gamma \circ \mathrm{Id}_{X\oplus Y} = \gamma(\iota_X\pi_X + \iota_Y\pi_Y) = \alpha\pi_X + \beta\pi_Y$, а для любой пары стрелок $\alpha' : W \to X$ и $\beta' : W \to Y$ стрелка $\gamma' : W \to X \oplus Y$ со свойствами $\pi_X\gamma' = \alpha'$ и $\pi_Y\gamma' = \beta'$ также единственна и равна $\gamma' = \mathrm{Id}_{X\oplus Y} \circ \gamma' = (\iota_X\pi_X + \iota_Y\pi_Y)\gamma' = \iota_X\alpha' + \iota_Y\beta'$. □

Упражнение 4.5. Убедитесь, что в условиях лем. 4.1 любые конечные прямые произведения одновременно являются копроизведениями и наоборот, причём $\mathcal{X} = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = X_1 \otimes X_2 \otimes \cdots \otimes X_n$, если и только если существуют такие морфизмы $\iota_\nu : X_\nu \to \mathcal{X}$, $\pi_\nu : \mathcal{X} \to X_\nu$, $\varepsilon_\nu \overset{\text{def}}{=} \iota_\nu\pi_\nu : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, что

$$\begin{gathered} \pi_\nu\iota_\mu = 0 \text{ при } \nu \neq \mu , \quad \pi_\nu\iota_\nu = \mathrm{Id}_{X_\nu} , \\ \varepsilon_\nu\varepsilon_\mu = 0 \text{ при } \nu \neq \mu , \quad \varepsilon_\nu^2 = \varepsilon_\nu , \quad \sum_\nu \varepsilon_\nu = \mathrm{Id}_{\mathcal{X}} . \end{gathered} \tag{4-2}$$

Определение 4.1 (прямые суммы)
Объект $X \oplus Y$, удовлетворяющий условиям лем. 4.1, называется *прямой суммой* объектов X и Y.

Замечание 4.1. Абелева групповая структура на множестве морфизмов $\mathrm{Hom}(X, Y)$ в аддитивной категории $\mathcal{C}$ однозначно восстанавливается по имеющимся в $\mathcal{C}$ композициям, поскольку для любых стрелок $\varphi, \psi : X \to Y$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi+\psi"] \arrow[d, "\Delta_X"'] & Y \\ X \oplus X \arrow[r, "\varphi\times\psi"'] & Y \oplus Y \arrow[u, "\nabla_Y"'] \end{tikzcd} \tag{4-3}$$

в которой диагональный морфизм $\Delta_X \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Id}{\times}\mathrm{Id} : X \to X{\times}X$, кодиагональный морфизм $\nabla_Y \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id} : Y \otimes Y \to Y$ и морфизм $\varphi \times \psi : X \times X \to Y \times Y$ ничего не знают про аддитивную структуру и имеются в любой категории $\mathcal{C}$, где есть произведения $X \times X$ и $Y \times Y = Y \otimes Y$.

Замечание 4.2. Категории $\mathcal{S}et, \mathcal{T}op, \mathcal{G}rp, \mathcal{C}mr$ не допускают функториальной структуры абелевой группы на морфизмах (в частности, не являются аддитивными), т. к. в этих категориях $X \times Y \neq X \otimes Y$.

4.1.1. Матричный формализм. Из соотношений (4-2) вытекает, что для конечных прямых сумм $\mathcal{X} = \bigoplus_\nu X_\nu$ и $\mathcal{Y} = \bigoplus_\mu Y_\mu$ в аддитивной категории имеется канонический изоморфизм абелевых групп $\mathrm{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \simeq \bigoplus_{\mu,\nu} \mathrm{Hom}(X_\nu, Y_\mu)$, сопоставляющий морфизму $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ матрицу $\Phi = (\varphi_{\mu\nu})$ из морфизмов $\varphi_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \pi_\mu \circ \varphi \circ \iota_\nu : X_\nu \to Y_\mu$. Морфизм $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ восстанавливается из матрицы Φ по формуле $\varphi = \sum\limits_{\mu\nu} \iota_\mu \circ \varphi_{\mu\nu} \circ \pi_\nu$. При этом матрица композиции $\varphi\psi$ равна произведению матриц $\Phi\Psi$.

Пример 4.1 (прямая сумма морфизмов)
Во всякой категории с (ко)произведениями любой набор морфизмов $\gamma_\nu : X_\nu \to Y_\nu$ канонически задаёт морфизм произведений $\prod X_\alpha \to \prod Y_\alpha$ и морфизм копроизведений $\coprod X_\alpha \to \coprod Y_\alpha$, которые отвечают, соответственно, наборам стрелок

$$\gamma_\nu \circ \pi_\nu : \prod X_\alpha \to Y_\nu \quad \text{и} \quad \iota_\nu \circ \gamma_\nu : X_\nu \to \coprod Y_\nu ,$$

где $\pi_\nu : \prod X_\alpha \to X_\nu$ и $\iota_\nu : Y_\nu \to \coprod Y_\alpha$ — канонические морфизмы произведения в сомножители и сомножителей в копроизведение. Для конечных прямых сумм в аддитивных категориях эти два морфизма совпадают и называются *прямой суммой* морфизмов γ_ν. Прямая сумма морфизмов обозначается $\oplus\gamma_\nu$. Во введённых выше матричных обозначениях она изображается диагональной матрицей со стрелками γ_ν по диагонали и нулями в остальных местах.

4.1.2. Бесконечные прямые суммы и произведения. Прямой суммой $\bigoplus_\nu X_\nu$ бесконечного семейства объектов X_ν в аддитивной категории принято называть их *копроизведение* (если оно существует). Бесконечная прямая сумма может не совпадать с произведением $\prod\limits_\nu X_\nu$. Например, в категории абелевых групп произведение состоит из всевозможных семейств векторов $\{v_\nu\}$, $v_\nu \in X_\nu$, с покомпонентным сложением, а прямая сумма образована такими семействами $\{v_\nu\}$, в которых лишь конечное число элементов $v_\nu \neq 0$. В силу универсальных свойств (ко)произведений имеются функториальные по X и Y изоморфизмы

$$\mathrm{Hom}(\bigoplus_\nu X_\nu, Y) \simeq \prod_\nu \mathrm{Hom}(X_\nu, Y) \quad \text{и} \quad \mathrm{Hom}(Y, \prod_\nu X_\nu) \simeq \prod_\nu \mathrm{Hom}(Y, X_\nu) . \tag{4-4}$$

Для каждого i набор стрелок $\pi_{\nu i} : X_i \to X_\nu$, нулевых при $\nu \neq i$ и тождественной для $\nu = i$, по-прежнему задаёт такие морфизмы $\pi_i : \bigoplus_\nu X_\nu \to X_i$, что $\pi_\nu \iota_\nu = \mathrm{Id}_{X_\nu}$ при всех ν, и $\pi_\nu \iota_\mu = 0$ при $\mu \neq \nu$. Произведение стрелок π_ν задаёт морфизм

$$\sigma : \bigoplus_\nu X_\nu \to \prod_\nu X_\nu . \tag{4-5}$$

Упражнение 4.6. Убедитесь, что все ι_ν и σ инъективны, а π_ν сюрьективны.

Если все объекты X_ν являются одинаковыми копиями одного объекта X, занумерованными множеством N, мы обозначаем их прямую сумму через $N \otimes X \overset{\text{def}}{=} \coprod_\nu X_\nu$, а произведение — через $X^N \overset{\text{def}}{=} \prod_\nu X_\nu$.

4.1.3. (Ко)ядра, (ко)образы и каноническое разложение морфизма. Уравнитель нулевого морфизма и стрелки $\varphi : X \to Y$ и называется *ядром* стрелки φ и обозначается $\ker\varphi$. Если ядро существует, то вместе с такой универсальной стрелкой[1] $\varkappa : \ker\varphi \to X$, что $\varphi\varkappa = 0$ и всякий морфизм $\psi : Z \to X$, для которого $\varphi\psi = 0$, единственным способом пропускается через $\varkappa$. Коуравнитель нулевого морфизма и стрелки φ называется *коядром* и обозначается $\operatorname{coker}\varphi$. В коядро ведёт универсальная стрелка[2] $\varsigma : Y \to \operatorname{coker}\varphi$, такая что $\varsigma\varphi = 0$ и всякий морфизм $\psi : Y \to Z$, для которого $\psi\varphi = 0$, единственным способом пропускается через ς.

Упражнение 4.7. Пусть стрелка φ из аддитивной категории обладает ядром (соотв. коядром). Покажите, что каноническая стрелка $\varkappa : \ker\varphi \to X$ мономорфна (соотв. $\varsigma : Y \to \operatorname{coker}\varphi$ эпиморфна), и инъективность (соотв. сюрьективность) стрелки φ равносильна тому, что $\ker\varphi = 0$ (соотв. $\operatorname{coker}\varphi = 0$).

Ядро канонической стрелки $\varsigma : Y \to \operatorname{coker}\varphi$ называется *образом* морфизма φ и обозначается $\operatorname{im}\varphi \overset{\text{def}}{=} \ker\varsigma$. Коядро канонической стрелки $\varkappa : \ker\varphi \to X$ называется *кообразом* морфизма φ и обозначается $\operatorname{coim}\varphi \overset{\text{def}}{=} \operatorname{coker}\varkappa$. Например, в категории абелевых групп ядро и образ стрелки $\varphi : X \to Y$ суть обычные ядро и образ гомоморфизма групп, тогда как коядро $\operatorname{coker}\varphi = Y/\operatorname{im}\varphi$, а кообраз $\operatorname{coim}\varphi = X/\ker\varphi$.

Если морфизм $\varphi : X \to Y$ имеет ядро, коядро, образ и кообраз, то в силу универсальных свойств двух последних

$$\operatorname{Hom}(\operatorname{coim}\varphi, \operatorname{im}\varphi) \simeq \{\alpha : \operatorname{coim}\varphi \to Y \mid \varsigma\alpha = 0\} \simeq \{\beta : X \to Y \mid \varsigma\beta = 0 \text{ и } \beta\varkappa = 0\}.$$

Стрелка $\operatorname{can}_\varphi : \operatorname{coim}\varphi \to \operatorname{im}\varphi$, переводимая этими изоморфизмами в исходную стрелку $\varphi : X \to Y$, это единственный морфизм, делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd} \operatorname{coker}\varphi & Y \arrow[l, two heads, "\varsigma"'] & \operatorname{im}\varphi \arrow[l, hook', "\varkappa'"'] \\ \ker\varphi \arrow[r, hook, "\varkappa"] & X \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, two heads, "\varsigma'"] & \operatorname{coim}\varphi \arrow[u, "\operatorname{can}_\varphi"'] \end{tikzcd} \tag{4-6}$$

в которой $\varkappa$, $\varkappa'$ суть канонические вложения ядер, а ς, ς' — сюрьекции на коядра. Диаграмма (4-6) называется *каноническим разложением* морфизма φ. Она функториально зависит от диаграммы $X \xrightarrow{\varphi} Y$.

4.2. Абелевы категории. Аддитивная категория $\mathcal{A}$ называется *абелевой*, если каждая стрелка $\varphi \in \operatorname{Mor}\mathcal{A}$ имеет ядро и коядро, причём каноническая стрелка

$$\operatorname{can}_\varphi : \operatorname{coim}\varphi \to \operatorname{im}\varphi$$

[1] Которую тоже называют *ядром* стрелки φ.

[2] Также называемая *коядром* стрелки φ.

из разложения (4-6) является для всех φ изоморфизмом[1]. Объект $\operatorname{coim}\varphi \simeq \operatorname{im}\varphi$ называется *образом* морфизма $\varphi : X \to Y$ и обозначается $\operatorname{im}\varphi$. Он одновременно является подобъектом в Y и фактор объектом для X. Иными словами, в абелевой категории со всяким морфизмом $\varphi : X \to Y$ функториально[2] связана диаграмма

$$\ker\varphi \xhookrightarrow{\varkappa_\varphi} X \xtwoheadrightarrow{\pi_\varphi} \operatorname{im}\varphi \xhookrightarrow{\iota_\varphi} Y \xtwoheadrightarrow{\varsigma_\varphi} \operatorname{coker}\varphi \tag{4-7}$$

в которой через $\pi_\varphi \overset{\text{def}}{=} \operatorname{can}_\varphi \circ \varsigma'_\varphi$ и $\iota_\varphi \overset{\text{def}}{=} \varkappa'_\varphi \circ \operatorname{can}_\varphi$ обозначены композиции морфизмов из правого нижнего и правого верхнего углов диаграммы (4-6). Обратите внимание, что стрелки $\varkappa_\varphi$ и ι_φ инъективны, а стрелки ς_φ и π_φ сюрьективны по упр. 4.7 на стр. 49.

Пример 4.2 (категории модулей)
Для любого кольца R категория $R\text{-}\mathcal{M}od$ левых R-модулей, категория $R\text{-}\mathcal{FM}od$ свободных левых R-модулей и категория $R\text{-}\mathcal{mod}$ конечно представимых левых R-модулей абелевы. Ядра, коядра и образы в них суть ядра, коядра и образы гомоморфизмов подлежащих аддитивных абелевых групп, а совпадение образа и кообраза утверждается теоремой о строении гомоморфизма групп[3]. Разумеется, то же самое верно и для категорий правых R-модулей, а также модулей над коммутативными кольцами. В частности, категории абелевых групп и конечно порождённых абелевых групп тоже абелевы.

Упражнение 4.8. Убедитесь, что в любой абелевой категории: а) каждый мономорфизм является ядром своего коядра, а эпиморфизм — коядром своего ядра б) обратимость стрелки φ равносильна тому, что $\ker\varphi = 0$ и $\operatorname{coker}\varphi = 0$ в) $\ker\varphi$ представляет предпучок $Z \mapsto \ker\varphi^Z_*$, где $\varphi^Z_* :\ \operatorname{Hom}(Z, X) \to \operatorname{Hom}(Z, Y)$ это действие естественного преобразования $\varphi_* : h_X \to h_Y, \psi \mapsto \varphi\psi$, над объектом Z г) $\operatorname{coker}\varphi$ копредставляет функтор $Z \mapsto \ker\varphi^*_Z$, где $\varphi^*_Z :\ \operatorname{Hom}(Y, Z) \to \operatorname{Hom}(X, Z)$ это действие над Z преобразования $\varphi^* : h^Y \to h^X, \psi \mapsto \psi\varphi$.

Пример 4.3 (неабелева аддитивная категория)
Рассмотрим категорию $F\mathcal{A}b$, объектами которой являются абелевы группы

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\,, \tag{4-8}$$

профильтрованные возрастающими подгруппами $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$, а морфизмами — такие гомоморфизмы абелевых групп $\varphi : A \to B$, что $\varphi(A_n) \subset B_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Эта категория аддитивна, и у каждого морфизма $\varphi : A \to B$ есть ядро и коядро, которые как группы совпадают с ядром и коядром морфизма φ в категории $\mathcal{A}b$, а фильтрации на них индуцируются фильтрациями на A и B, т. е. $\ker\varphi = \bigcup(A_n \cap \ker\varphi)$ и $\operatorname{coker}\varphi = \bigcup\bigl(B_n/(B_n \cap \operatorname{im}\varphi)\bigr)$. Для фильтрованной абелевой группы (4-8) обозначим через $A[1]$ фильтрованную группу с компонентами $A[1]_p = A_{p+1}$. Отображение

[1] Иначе говоря, выполняется «основная теорема о строении гомоморфизма», утверждающая, что фактор по ядру изоморфен образу.

[2] В том смысле, что сопоставление стрелке φ диаграммы (4-7) является функтором из категории диаграмм вида $\bullet \to \bullet$ в категорию диаграмм вида $\bullet \to \bullet \to \bullet \to \bullet \to \bullet$.

[3] Т. е. о том, что образ гомоморфизма групп канонически изоморфен фактору по его ядру.

$s: A \to A[1]$, тождественно действующее на элементы группы, является морфизмом фильтрованных групп и имеет нулевые ядро и коядро, т. е. одновеменно инъективно и сюрьективно, однако, не обратимо, если $A \neq 0$. Каноническое разложение (4-6) для морфизма s имеет вид

$$\begin{tikzcd} 0 & A[1] \arrow[l] & A[1] \arrow[l, "\mathrm{Id}_{A[1]}"'] \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "s"] \arrow[r, "\mathrm{Id}_A"] & A \arrow[u, "s"'] \end{tikzcd} .$$

и стрелка $\mathrm{can}_s = s$ в нём не является изоморфизмом.

Упражнение 4.9. Убедитесь, что в категории топологических абелевых групп и их непрерывных гомоморфизмов также имеются ядра, коядра и прямые суммы, однако, она тоже не является абелевой.

4.2.1. Конечная (ко)замкнутость. В абелевой категории $\mathcal{A}$ (ко)ядро разности $\alpha - \beta$ любых двух стрелок $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ с общим началом и концом является (ко)уравнителем этих стрелок. Поэтому в абелевой категории все конечные диаграммы имеют предел и копредел[1]. В частности, в абелевой категории есть конечные послойные (ко)произведения.

Упражнение 4.10. Убедитесь, что в матричных обозначениях из n° 4.1.1 на стр. 48 послойное произведение $A \times_C B$ стрелок $A \xrightarrow{\alpha'} C \xleftarrow{\beta'} B$ является ядром морфизма

$$(\alpha', -\beta') : A \oplus B \to C , \tag{4-9}$$

а послойное копроизведение $A \otimes_C B$ стрелок $A \xleftarrow{\alpha''} C \xrightarrow{\beta''} B$ это коядро морфизма

$$\begin{pmatrix} \alpha'' \\ -\beta'' \end{pmatrix} : C \to A \oplus B . \tag{4-10}$$

4.2.2. Точные последовательности. В абелевой категории $\mathcal{A}$ композиция стрелок $\cdots \xrightarrow{\varphi} X \xrightarrow{\psi} \cdots$ в $\mathcal{A}$ называется *точной*, если $\ker \psi = \mathrm{im}\, \varphi$. Более длинная цепочка стрелок называется *точной*, если композиция любых двух последовательных стрелок в ней точна. Например, точность последовательности $0 \to X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z$ означает, что $\varphi = \ker \psi$, а точность последовательности $X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z \to 0$ это равенство $\psi = \mathrm{coker}\, \varphi$. Точные последовательности вида

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0 \tag{4-11}$$

называются *точными тройками*. Для экономии места мы иногда изображаем точную тройку (4-11) как $A \overset{\alpha}{\hookrightarrow} B \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} C$. Эта запись по умолчанию предполагает инъективность α, сюрьективность β и равенства $\alpha = \ker \beta$, $\beta = \mathrm{coker}\, \alpha$. Точность тройки

[1] См. зам. 2.1. на стр. 28.

(4-11) влечёт равенство $\beta\alpha = 0$. Обратная импликация неверна, и изучение препятствий к её наличию вылилось в целую науку, именуемую *гомологической алгеброй*.

Упражнение 4.11 (баланс точности). Допустим, что строка и столбец диаграммы

$$\begin{tikzcd} & B'' & \\ A' \arrow[r, hook, "\alpha'"] & C \arrow[u, two heads, "\beta''"'] \arrow[r, two heads, "\alpha''"] & A'' \\ & B' \arrow[u, hook, "\beta'"] & \end{tikzcd} \tag{4-12}$$

являются точными тройками. Покажите, что следующие условия равносильны: а) композиция $\beta''\alpha'$ точна б) композиция $\alpha''\beta'$ точна в) $\beta''\alpha' = 0$ и $\alpha''\beta' = 0$.

Лемма 4.2

Если у двух точных троек с общей серединой, как на диаграмме (4-12), композиция $\beta''\alpha' = 0$, то существуют единственные такие стрелки $\varphi' : A' \to B'$ и $\varphi'' : A'' \to B''$, что $\alpha' = \beta'\varphi'$ и $\beta'' = \varphi''\alpha''$. При этом стрелка φ' инъективна и канонически изоморфна $\ker(\alpha''\beta')$, стрелка φ'' сюрьективна и канонически изоморфна $\operatorname{coker}(\alpha''\beta')$, и имеется канонический изоморфизм $\operatorname{coker}\varphi' \simeq \ker\varphi''$. Иными словами, существует единственный с точностью до единственного изоморфизма объект H, достраивающий диаграмму (4-12) до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} & B'' & \\ A' \arrow[r, hook, "\alpha'"] \arrow[dr, bend right, "\varphi'"'] & C \arrow[u, two heads, "\beta''"'] \arrow[r, two heads, "\alpha''"'] & A'' \arrow[ul, bend right, "\varphi''"'] \\ & B' \arrow[u, hook, "\beta'"] \arrow[r, two heads, "\psi'"'] & H, \arrow[u, hook, "\psi''"'] \end{tikzcd} \tag{4-13}$$

в которой обе тройки $A' \xhookrightarrow{\varphi'} B' \xrightarrow{\psi'} H$ и $H \xhookrightarrow{\psi''} A'' \xrightarrow{\varphi''} B''$ точны.

Доказательство. Существование и единственность стрелок φ' и φ'' вытекает из равенства $\beta''\alpha' = 0$ в силу того, что $\beta' = \ker\beta''$ и $\alpha'' = \operatorname{coker}\alpha'$. Если $\varphi'\xi = 0$, то и $\alpha'\xi = \beta'\varphi'\xi = 0$, откуда $\xi = 0$, т. к. α' инъективен. Поэтому φ' тоже инъективен. Очевидно, что $\alpha''\beta'\varphi' = \alpha''\alpha' = 0$. Если $\alpha''\beta'\eta = 0$ для некоторого $\eta : X \to B'$, то $\beta'\eta = \alpha'\eta'$ для некоего $\eta' : X \to A$, т. к. $\alpha' = \ker\alpha''$. Поскольку $\beta'\varphi'\eta' = \alpha'\eta' = \beta'\eta$, из инъективности β' вытекает равенство $\varphi'\eta' = \eta$, и в силу мономорфности φ' стрелка η' с таким свойством единственна. Поэтому $\varphi' = \ker(\alpha''\beta')$. Симметричные выкладки устанавливают эпиморфность стрелки φ'' и равенство $\varphi'' = \operatorname{coker}(\alpha''\beta')$. Изоморфизм $\operatorname{coker}\varphi' \simeq \ker\varphi''$ это канонический изоморфизм $\operatorname{coim}(\alpha''\beta') \simeq \operatorname{im}(\alpha''\beta')$, существующий в силу абелевости объемлющей категории. □

Определение 4.2 (гомология)
Объект $H = H(\beta''\alpha') \overset{\text{def}}{=} \ker\varphi'' \simeq \operatorname{coker}\varphi' \simeq \ker\beta''/\operatorname{im}\alpha'$ из лем. 4.2, однозначно с точностью до единственного изоморфизма задаваемый парой стрелок β'' и α' с $\beta''\alpha' = 0$, называется *гомологией*[1] такой пары стрелок.

Следствие 4.1
Композиция $\varphi\psi$ точна , если и только если $\varphi\psi = 0$ и $H(\varphi\psi) = 0$.

Доказательство. Применим лем. 4.2 диаграмме

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{im}\varphi & \\
\operatorname{im}\psi \arrow[r, hook, "\iota_\psi"] & X \arrow[u, "\iota_\varphi"'] \arrow[r, two heads, "\varsigma_\psi"'] & \operatorname{coker}\psi \\
& \ker\varphi \arrow[u, hook, "\varkappa_\varphi"] &
\end{tikzcd}$$

и воспользуемся упр. 4.11. □

4.2.3. Точные функторы. Функтор $F : \mathcal{E} \to \mathcal{G}$ (соотв. $F : \mathcal{E}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{G}$) между абелевыми категориями называется *точным слева*, если он переводит ядра (соотв. коядра) в ядра или, что то же самое, — точные последовательности вида $0 \to A \to B \to C$ (соотв. $A \to B \to C \to 0$) в точные последовательности $0 \to F(A) \to F(B) \to F(C)$ (соотв. в $0 \to F(C) \to F(B) \to F(A)$). Двойственным образом, F называется *точным справа*, если он переводит коядра (соотв. ядра) в коядра, или — точные последовательности вида $A \to B \to C \to 0$ (соотв. $0 \to A \to B \to C$) в точные последовательности $F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$ (соотв. в $F(C) \to F(B) \to F(A) \to 0$). Функтор называется *точным*, если он точен одновременно и справа и слева.

Упражнение 4.12. Убедитесь, что для точности функтора необходимо и достаточно, чтобы он переводил точные тройки в точные тройки, и в этом случае он сохраняет точность любых последовательностей.

Пример 4.4 (представимые функторы)
Из определения ядра тавтологически следует, что всякий копредставимый функтор $h^A : X \mapsto \operatorname{Hom}(A, X)$ (соотв. представимый функтор $h_A : X \mapsto \operatorname{Hom}(X, A)$) переводит ядра (соотв. коядра) в ядра. Тем самым, все (ко)представимые функторы точны слева.

Пример 4.5 (сопряжённые функторы)
Так как (ко)ядро является (ко)пределом диаграммы, по предл. 2.6 на стр. 32 правые сопряжённые функторы точны слева, а левые — справа. В частности, пределы точны слева, а копределы — справа, так что сл. 2.5 на стр. 32 справедливо для диаграмм в любой абелевой категории[2].

[1] Или — в зависимости от контекста — *когомологией*.

[2] Причём для конечных диаграмм в условии сл. 2.5 можно отбросить требование существования (ко)пределов — в абелевой категории они существуют автоматически

Пример 4.6 (тензорное умножение)
По сл. 2.3 для любых колец R и S с единицами функтор $\mathcal{M}od\text{-}R \to \mathcal{M}od\text{-}S$, $X \mapsto X \underset{R}{\otimes} N$, тензорного умножения на любой R-S-бимодуль N точен справа.

Упражнение 4.13 (расщепимые тройки). В произвольной абелевой категории установите эквивалентность друг другу следующих свойств тройки[1]

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

а) для любого $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ точна последовательность абелевых групп

$$0 \to \operatorname{Hom}(X, A) \xrightarrow{\alpha_*} \operatorname{Hom}(X, B) \xrightarrow{\beta_*} \operatorname{Hom}(X, C) \to 0$$

б) α инъективен, β сюрьективен, и существует такой $\beta' : B \to A$, что $\beta'\alpha = \operatorname{Id}_A$
в) α инъективен, β сюрьективен, и существует такой $\alpha' : C \to B$, что $\beta\alpha' = \operatorname{Id}_C$
г) для любого $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ точна последовательность абелевых групп

$$0 \to \operatorname{Hom}(C, X) \xrightarrow{\beta^*} \operatorname{Hom}(B, X) \xrightarrow{\alpha^*} \operatorname{Hom}(A, X) \to 0$$

д) имеется изоморфизм $\gamma : B \xrightarrow{\sim} A \oplus C$, включающийся в коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal, "\operatorname{Id}_A"'] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"'] & C \arrow[d, equal, "\operatorname{Id}_C"] \\ A \arrow[r, "\iota_A"] & A \oplus C \arrow[r, "\pi_C"] & C \end{tikzcd}$$

4.3. Проективные и инъективные объекты. Абелева категория, в которой все точные тройки расщепимы, называется *полупростой*. Например, категория векторных пространств над любым полем и категория линейных представлений конечной группы над полем, характеристика которого не делит порядок группы, полупросты.

Напротив, категория $\mathcal{A}b = \mathcal{M}od\text{-}\mathbb{Z}$ абелевых групп не полупроста: точная тройка

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{z \mapsto 2z} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(2) \to 0 \tag{4-14}$$

нерасщепима, поскольку $\operatorname{Hom}\big(\mathbb{Z}/(2), \mathbb{Z}\big) = 0$. Точно так же неполупросты и категории модулей над другими неполупростыми кольцами и алгебрами.

В неполупростой категории (ко)представимые функторы бывают неточны справа: применяя к сюрьекции $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/(2)$ из (4-14) функтор $\operatorname{Hom}\big(\mathbb{Z}/(2), *\big)$, получаем неэпиморфную стрелку $0 \to \mathbb{Z}/(2)$, а применяя к вложению $\mathbb{Z} \xrightarrow{z \mapsto 2z} \mathbb{Z}$ из (4-14) функтор $\operatorname{Hom}\big(*, \mathbb{Z}/(2)\big)$, получим нулевой морфизм $\mathbb{Z}/(2) \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/(2)$. По той же причине вложение в (4-14) аннулируется и тензорным умножением на $\mathbb{Z}/(2)$, т. е. тензорное умножение на несвободную абелеву группу тоже неточно (слева).

[1] тройки с такими свойствами называются *расщепимыми*

Определение 4.3
Объект Q абелевой категории $\mathcal{A}$ называется *проективным* (соотв. *инъективным*), если функтор $h^Q : X \mapsto \mathrm{Hom}(Q, X)$ (соотв. функтор $h_Q : X \mapsto \mathrm{Hom}(X, Q)$) точен справа.

Упражнение 4.14. Покажите, что прямая сумма[1] проективных объектов проективна, а прямое произведение[2] инъективных объектов инъективно.

Лемма 4.3
Проективность объекта P абелевой категории $\mathcal{A}$ равносильна каждому из свойств:

(P1) любая стрелка $\varphi : P \to X$ поднимается вдоль любого эпиморфизма[3] $\pi : Y \twoheadrightarrow X$

(P2) любой эпиморфизм $\pi : Z \twoheadrightarrow P$ расщепляется, т. е. существует такой изоморфизм $\gamma : Z \xrightarrow{\sim} \ker \pi \oplus P$, что $\pi = \pi_P \gamma$.

Инъективность объекта I абелевой категории $\mathcal{A}$ равносильна каждому из свойств:

(I1) любая стрелка $\varphi : X \to I$ продолжается на любое расширение[4] $\iota : X \hookrightarrow Y$

(I2) любое вложение $\iota : I \hookrightarrow Z$ расщепляется, т. е. $\iota = \gamma \iota_I$ для некоторого изоморфизма $\gamma : I \oplus \operatorname{coker} \iota \xrightarrow{\sim} Z$.

Доказательство. Условие (P1) означает сюрьективность морфизма

$$h^P(\pi) = \pi_* : h^P(Y) \to h^P(X)$$

для любой сюрьекции $\pi : Y \twoheadrightarrow X$, т. е. точность функтора h^P справа. Если (P1) выполнено, то тождественный морфизм Id_P поднимается вдоль любого эпиморфизма $\pi : Z \twoheadrightarrow P$ до такой стрелки $\iota : P \to Z$, что $\pi\iota = \mathrm{Id}_P$. По упр. 4.13 это равносильно расщепимости точной тройки $0 \to \ker \pi \hookrightarrow Z \twoheadrightarrow P \to 0$.

Наоборот, пусть любой эпиморфизм на P расщепляется. Покажем, что любая стрелка $\varphi : P \to X$ поднимается вдоль любой сюрьекции $\pi : Y \twoheadrightarrow X$. Рассмотрим послойное произведение

$$\begin{tikzcd} Y \underset{X}{\times} P \arrow[r, two heads, shift left, "\pi'"] \arrow[d, "\varphi'"'] & P \arrow[l, dotted, shift left, "\iota"] \arrow[d, "\varphi"] \\ Y \arrow[r, two heads, "\pi"'] & X . \end{tikzcd}$$

Упражнение 4.15. Убедитесь, что в этом декартовом квадрате сюрьективность π влечёт сюрьективность π'.

Расщепляя π' стрелкой $\iota : P \hookrightarrow Y \underset{X}{\times} P$, получаем стрелку $\psi = \varphi'\iota$, поднимающую φ вдоль π. Эквивалентность условий (I1), (I2) инъективности объекта I доказывается обращением стрелок. □

Упражнение 4.16. Проведите эти рассуждения.

---

[1] Даже бесконечная.

[2] Даже бесконечное.

[3] Т. е. существует такая стрелка $\psi : P \to Y$, что $\varphi = \pi\psi$.

[4] Т. е. существует такая стрелка $\psi : Y \to I$, что $\psi\iota = \varphi$.

4.3.1. Проективные модули. В категории $\mathcal{M}od\text{-}R$ правых модулей над произвольным кольцом R с единицей свободный модуль R ранга 1 проективен, т. к. имеется изоморфизм функторов $h^R \simeq \mathrm{Id}$, действующий над модулем M естественным преобразованием $\mathrm{Hom}(R, M) \simeq M$, $\varphi \mapsto \varphi(1)$. Поэтому в силу упр. 4.14 на стр. 55 все свободные модули $E \otimes R$ тоже проективны.

Лемма 4.4
Модуль P проективентогда и только тогда, когда существует такой модуль Q, что прямая сумма $P \oplus Q$ является свободным модулем.

Доказательство. Обозначим через $S(P)$ множество векторов модуля P, а через $S(P) \otimes R$ — свободный правый R-модуль, порождённый этим множеством. Если модуль P проективен, то по лем. 4.3 канонический эпиморфизм[1] $S(P) \otimes R \twoheadrightarrow P$, $p \mapsto p$, расщепляется, т. е. $S(P) \otimes R = P \oplus Q$ для некоторого подмодуля $Q \subset S(P) \otimes R$. Наоборот, если модуль $P \oplus Q$ свободен, то для любого эпиморфизма $\pi : A \twoheadrightarrow B$ и любой стрелки $\varphi : P \to B$, стрелка $\varphi' = (\varphi, 0) \colon P \oplus Q \to B$ поднимается вдоль π до такой стрелки $\gamma = (\gamma_1, g_2) \colon P \oplus Q \to A$, что $\pi\gamma = \varphi'$. Но тогда $\pi\gamma_1 = \varphi$, т. е. компонента $\gamma_1 \colon P \to A$ поднимает стрелку φ вдоль π. □

Упражнение 4.17. Убедитесь в обратном: если модуль $P \oplus Q = E \otimes R$ свободен, то и P, и Q проективны.

4.3.2. Инъективные модули. Инъективность модуля I означает возможность деления в нём на любые необратимые элементы кольца.

Лемма 4.5
Правый R-модуль I инъективен , если и только если для любого правого идеала $\mathfrak{q} \subset R$ и любого R-линейного справа гомоморфизма $q : \mathfrak{q} \to I$ имеется такой вектор $e_q \in I$, что $q(x) = e_q \cdot x$ для всех $x \in \mathfrak{q}$, т. е. в I имеется частное $q(x)/x = e_q$.

Доказательство. Импликация $\Rightarrow$ вытекает из лем. 4.3: продолжим q до R-линейного справа гомоморфизма $q' \colon R \to I$ и возьмём $e_q = q'(1)$. Для доказательства обратной импликации рассмотрим произвольное расширение модулей $N \subset M$ и продолжим любой R-линейный гомоморфизм $\varphi \colon N \to M$ на M при помощи леммы Цорна: подмодули $N \subseteq N' \subseteq M$, на которые φ продолжается, образуют чум по включению, в котором каждая линейно упорядоченная цепочка мажорируется своим объединением. Поэтому существует максимальный по включению подмодуль $L \supseteq N$ с таким гомоморфизмом $\psi \colon L \to I$, что $\psi|_N = \varphi$. Если имеется вектор $m \in M \smallsetminus L$, то подмодуль L', порождённый L и m, строго больше L, и для завершения доказательства достаточно продолжить ψ на $L' \simeq L \oplus R/\ker \pi_m$, где $\pi_m \colon L \oplus R \twoheadrightarrow L'$, $(\ell, x) \mapsto \ell + mx$. Ядро

$$\ker \pi_m = \{(\ell, x) \mid mx = -\ell \in L\}$$

изоморфно правому идеалу $\mathfrak{k} = \{x \in R \mid mx \in L\}$ и R-линейно отображается в I по правилу $x \mapsto \psi(mx)$. Берём вектор $e = \psi(mx)/x \in I$, такой что $\psi(mx) = e \cdot x$ для всех $x \in \mathfrak{k}$, и задаём продолжение $\psi' \colon L' \to I$ правилом $\psi'(\ell + mx) = \psi(\ell) + e \cdot x$. □

[1] См. прим. 2.1 на стр. 18.

Упражнение 4.18. Убедитесь в корректности последнего правила и проверьте, что $\mathbb{Z}$-модули $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ инъективны, причём второй замечателен тем, что для любого $\mathbb{Z}$-модуля A и любого элемента $a \in A$ есть гомоморфизм $\varphi : A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ с $\varphi(a) \neq 0$.

4.4. Порождающие объекты. Объект G абелевой категории $\mathcal{A}$ называется *генератором*[1] (соотв. *когенератором*) категории $\mathcal{A}$, если функтор $h^G : X \mapsto \mathrm{Hom}(G, X)$ (соотв. функтор $h_G : X \mapsto \mathrm{Hom}(X, G)$) строг, т. е. переводит разные стрелки в разные[2]. Например, свободный модуль R ранга 1 порождает категорию $\mathcal{M}od$-R, ибо функтор $h^R \simeq \mathrm{Id}$ строг и даже вполне строг.

Упражнение 4.19. Покажите, что абелева категория с генератором умеренно мощна[3].

4.4.1. Каноническая (ко)свёртка. Для произвольных объектов G, X рассмотрим прямую сумму

$$\mathrm{Hom}(G, X) \otimes G \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{\varphi : G \to X} \varphi \otimes G$$

одинаковых копий G, занумерованных стрелками $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, X)$, и отобразим слагаемое $\varphi \otimes G$ в X при помощи стрелки $\varphi : G \to X$. Получим морфизм

$$c : \mathrm{Hom}(G, X) \otimes G \to X \,, \tag{4-15}$$

который называется *канонической свёрткой*. Двойственным образом, рассмотрим для объектов Y, C прямое произведение

$$C^{\mathrm{Hom}(Y,C)} \overset{\text{def}}{=} \prod_{\varphi : Y \to C} C^{\varphi}$$

одинаковых копий C, занумерованных стрелками $\varphi : Y \to C$, и отобразим Y в сомножитель C^{φ} при помощи стрелки $\varphi : Y \to C$. Получим морфизм

$$c' : Y \to C^{\mathrm{Hom}(Y,C)} \tag{4-16}$$

который называется *канонической косвёрткой*.

Предложение 4.1
Кополная абелева категория $\mathcal{A}$ тогда и только тогда порождается объектом G, когда для любого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ каноническая свёртка (4-15) эпиморфна. Полная абелева категория тогда и только тогда копорождается объектом C, когда для любого $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ каноническая косвёртка (4-16) мономорфна.

Доказательство. Докажем второе. Применим к морфизму (4-16) сохраняющий ядра функтор h^X с произвольным $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Получим точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(X, \ker c') \to \mathrm{Hom}(X, Y) \xrightarrow{c'_*} \mathrm{Hom}(X, C)^{\mathrm{Hom}(Y,C)}$$

[1] (ко)генераторы также называют (*ко*)*порождающими объектами* категории $\mathcal{A}$
[2] или, эквивалентно, ненулевые — в ненулевые
[3] См. опр. 1.1 на стр. 5.

морфизм c'_* которой переводит стрелку $\varphi : X \to Y$ в график отображения

$$\varphi^* : \mathrm{Hom}(Y, C) \to \mathrm{Hom}(X, C), \quad \psi \mapsto \psi\varphi .$$

Тем самым, инъективность c'_* равносильна инъективности действия функтора

$$h_C : \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}\left(h_C(Y), h_C(X)\right) .$$

Если $\ker c' = 0$, отображение c'_* инъективно для всех X, Y, т. е. функтор h_C строг. Наоборот, если h_C строг, то $\mathrm{Hom}(X, \ker c') = 0$ для всех X, и беря $X = \ker c'$, заключаем, что $\ker c' = 0$. □

Упражнение 4.20. Докажите первую часть предл. 4.1 и покажите, что любой модуль является коядром гомоморфизма свободных модулей.

Следствие 4.2
Инъективная абелева группа $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ копорождает категорию абелевых групп.

Доказательство. Косвёртка $c' : A \to \left(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right)^{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})}$ инъективна по упр. 4.18. □

Упражнение 4.21. Убедитесь, что абелева группа $I_R = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ со структурой правого R-модуля, задаваемой левым действием R на себе (соотв. со структурой левого R-модуля, задаваемой правым действием R на себе), является инъективным когенератором категории $\mathcal{M}od$-R (соотв. категории R-$\mathcal{M}od$).

4.4.2. Компактные объекты. Объект K козамкнутой абелевой категории $\mathcal{A}$ называется *компактным*, если функтор $h^K : Z \mapsto \mathrm{Hom}(K, Z)$ коммутирует с бесконечными копределами. Поскольку любой копредел является коуравнителем пары стрелок между прямыми суммами[1], компактность равносильна тому, что h^K переводит прямые суммы в прямые суммы или, эквивалентно, что образ вложения (4-5)

$$\sigma_* : \mathrm{Hom}(K, \bigoplus_\nu X_\nu) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(K, \prod_\nu X_\nu) \simeq \prod_\nu \mathrm{Hom}(K, X_\nu)$$

лежит в $\bigoplus\limits_\nu \mathrm{Hom}(K, X_\nu) \subset \prod\limits_\nu \mathrm{Hom}(K, X_\nu)$. Например, проективный генератор R категории R-модулей компактен.

Упражнение 4.22. Покажите, что компактность проективного модуля равносильна его конечной порождённости.

4.5. Модули над кольцом. Выше мы уже видели, что абелева категория $\mathcal{M}od$-R правых модулей[2] над произвольным кольцом R с единицей полна и кополна, обладает инъективным когенератором и компактным проективным генератором. Последнее свойство выделяет категории модулей среди прочих абелевых категорий.

Теорема 4.1
Козамкнутая абелева категория $\mathcal{A}$ с компактным проективным генератором P точно эквивалентна[3] категории $\mathcal{M}od$-R правых R-модулей над кольцом $R = \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(P)$.

[1] см. доказательство предл. 2.4 на стр. 27
[2] равно как и категория R-$\mathcal{M}od$ левых R-модулей
[3] Т. е. имеется эквивалентность категорий, переводящая точные тройки в точные тройки.

Доказательство. Функтор $h^P : \mathcal{A} \to \mathcal{Ab}$ принимает значение в $\mathcal{Mod}\text{-}R$: правое действие $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,P)$ на абелевой группе $h^P(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,X)$ задаётся правым умножением стрелок на f. В силу проективности P функтор h^P точен. Проверим, что он по-существу сюрьективен и вполне строг[1]. Из предл. 4.1 вытекает, что любой объект $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ представляется в виде коядра морфизма между прямыми суммами подходящих множеств I, J одинаковых копий генератора P:

$$I \otimes P \xrightarrow{\varphi} J \otimes P \twoheadrightarrow X \to 0\,. \tag{4-17}$$

Морфизм φ задаётся некоторой матрицей Φ формата $I \times J$ с элементами

$$\varphi_{ij} \in \mathrm{Hom}(j \otimes P, i \otimes P) \simeq \mathrm{Hom}(P,P) = R\,,$$

имеющей при каждом j лишь конечное число ненулевых φ_{ij}. Применяя к (4-17) функтор h^P и пользуясь компактностью P получаем для $h^P(X)$ представление в виде коядра морфизма свободных R-модулей

$$I \otimes R \xrightarrow{\varphi_*} J \otimes R \twoheadrightarrow h^P(X) \to 0\,, \tag{4-18}$$

который задаётся правым умножением строки $(x_i) \in I \otimes R$ на матрицу Φ. Так как каждый R-модуль является коядром гомоморфизма свободных R-модулей, функтор h^P по-существу сюрьективен. Для любого $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ группа $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)$ является ядром стрелки $h_Y(\varphi)$, получающейся применением $h_Y : Z \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{Ab}}(Z,Y)$ к диаграмме (4-17), а группа $\mathrm{Hom}_R\left(h^P(X), h^P(Y)\right)$ является коядром стрелки $h_{h^P(Y)}(\varphi_*)$, получающейся применением $h_{h^P(Y)} : M \mapsto \mathrm{Hom}_R(Z, h^P(Y))$ к диаграмме (4-17). Эти стрелки совпадают друг с другом, представляя собою гомоморфизм $h^P(Y)^J \to h^P(Y)^I$ прямых произведений одинаковых копий группы $h^P(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,Y)$, задаваемый транспонированной матрицей Φ^t. Тем самым, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y) \simeq \mathrm{Hom}_R\left(h^P(X), h^P(Y)\right)$. □

Теорема 4.2 (эквивалентность Мориты)
Следующие три свойства колец R и S с единицами эквивалентны друг другу:

(1) категории $\mathcal{Mod}\text{-}R$ и $\mathcal{Mod}\text{-}S$ точно эквивалентны

(2) $R \simeq \mathrm{Hom}_S(P,P)$ для некоторого конечно порождённого проективного S-модуля P, являющегося генератором категории $\mathcal{Mod}\text{-}S$

(3) существует такой R-S бимодуль T, что тензорное умножение $\mathcal{Mod}\text{-}R \to \mathcal{Mod}\text{-}S$, $M \mapsto M \underset{R}{\otimes} T$, является точной эквивалентностью категорий.

Доказательство. Если выполнено (1), то по теор. 4.1, применённой к $\mathcal{A} = \mathcal{Mod}\text{-}S$, в $\mathcal{Mod}\text{-}S$ имеется компактный проективный генератор P с $\mathrm{Hom}_S(P,P) = R$, что даёт (2), поскольку компактный проективный модуль конечно порождён[2]. Если выполнено (2), положим[3] $T \overset{\text{def}}{=} P$ и покажем, что функторы

$$\mathcal{Mod}\text{-}R \to \mathcal{Mod}\text{-}S,\ M \mapsto M \underset{R}{\otimes} P\,, \quad \text{и} \quad \mathcal{Mod}\text{-}S \to \mathcal{Mod}\text{-}R\,,\ N \mapsto \mathrm{Hom}(P,N)\,,$$

[1]См. лем. 1.1 на стр. 13.
[2]См. упр. 4.22 на стр. 58.
[3]отметим, что на правом S-модуле P имеется каноническая структура левого модуля над кольцом $R = \mathrm{End}_S(P)$

квазиобратны друг другу. Так как эти функторы сопряжены[1]:

$$\mathrm{Hom}_S\big(M \underset{R}{\otimes} P, N\big) \simeq \mathrm{Hom}_R\big(N, \mathrm{Hom}_S(P,N)\big)\,,$$

имеется естественное преобразование[2] $\mathrm{Hom}_S(P,N) \underset{R}{\otimes} P \xrightarrow{\sim} N$, $\varphi \underset{R}{\otimes} p \mapsto \varphi(p)$, и естественное преобразование $M \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_S(P, M \underset{R}{\otimes} P)$, переводящее $m \in M$ в семейство гомоморфизмов $\varphi_m : P \to M \underset{R}{\otimes} P$, $p \mapsto m \underset{R}{\otimes} p$. Если P является проективным генератором, то оба эти преобразования — изоморфизмы. □

Упражнение 4.23. Убедитесь в этом.

Определение 4.4
Кольца R и S, удовлетворяющие условиям теор. 4.2, называются *Морита-эквивалентными*, а функторы $M \mapsto M \underset{R}{\otimes} P$ и $N \mapsto \mathrm{Hom}(P,N)$ называются *эквивалентностями Мориты*.

Упражнение 4.24. Покажите, что категория R-модулей точно эквивалентна категории модулей над кольцом матриц $\mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$ любого конечного размера.

Теорема 4.3 (простая теорема Митчела о вложении)
Если абелева категория $\mathcal{B}$ полна и имеет проективный генератор[3], то любая её малая полная точная[4] абелева подкатегория $\mathcal{A}$ допускает точное вполне строгое вложение в категорию правых модулей над некоторым кольцом с единицей.

Доказательство. Обозначим через P проективный генератор категории $\mathcal{B}$, а через J — произведение множеств $\mathrm{Hom}(P,X)$ по всем $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Тогда $Q = J \otimes P$ тоже является генератором $\mathcal{B}$, и для каждого $X \in \mathcal{A}$ существует сюрьективный морфизм $\psi_X : Q \twoheadrightarrow X$. Положим $R = \mathrm{End}_{\mathcal{B}}(Q)$ и как в доказательстве теор. 4.1 проверим, что точный строгий[5] функтор $h^Q : \mathcal{A} \to \mathcal{M}od\text{-}R$, $X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Q,X)$, вполне строг. Для этого представим произвольный $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ как коядро гомоморфизма $\varphi = \psi_{\ker \psi_X}$:

$$Q \xrightarrow{\varphi} Q \xrightarrow{\psi_X} X \to 0\,.$$

Применение точного функтора h^Q задаёт $h^Q(X)$ как коядро левого умножения

$$R \xrightarrow{\varphi_*} R \to h^Q(X) \to 0$$

на элемент $\varphi \in R$. Применяя к этой диаграмме $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}R}\big(*, h^Q(Y)\big)$, а к предыдущей — $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(*, Y)$, получаем для $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)$ и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}R}\big(h^Q(X), h^Q(Y)\big)$ одинаковое представление в виде ядра правого умножения на φ в модуле $h^Q(Y)$. □

[1] См. предл. 2.3 на стр. 21.
[2] См. формулу (2-2) на стр. 18.
[3] Не обязательно компактный.
[4] Т. е. такая, что точные тройки из $\mathcal{A}$ точны и в $\mathcal{B}$.
[5] Так как Q это проективный генератор.

§5. Элементы гомологической алгебры

5.1. Исчисление градуированных объектов. Под *градуированным K-модулем* мы понимаем прямую сумму K-модулей $V = \bigoplus_{\nu\in\mathbb{Z}} V^{\nu}$, элементы которой суть *конечные* суммы вида $v_{\nu_1} + v_{\nu_2} + \cdots + v_{\nu_m}$, в которых каждый $v_d \in V^d$. Векторы $v_d \in V^d$ называются *однородными* степени d, и степень однородного вектора обозначается $|v_d| \overset{\text{def}}{=} d$. Если компоненты $V^d = 0$ при всех $d \ll 0$ (соотв. при всех $d \gg 0$) градуированный модуль V называется *ограниченным слева* (соотв. *справа*). Через $V[k]$ обозначается градуированный модуль с компонентами $V[k]^{\nu} \overset{\text{def}}{=} V^{\nu+k}$.

Гомоморфизм градуированных модулей $f : V \to W$ называется *однородным* степени m, если $f(V^{\nu}) \subset W^{\nu+m}$ при всех ν. Например, *сдвиг градуировки* $s : V \to V[1]$, тождественно действующий на элементы модуля: $s(v) \overset{\text{def}}{=} v$, однороден степени -1. Все K-линейные гомоморфизмы $V \to W$ образуют градуированный K-модуль

$$\mathrm{GrHom}(V, W) = \bigoplus_{\nu} \mathrm{GrHom}^{\nu}(V, W), \tag{5-1}$$

компонента степени ν которого состоит из однородных гомоморфизмов ν-той степени. Поскольку при композиции однородных гомоморфизмов $|fg| = |f| + |g|$, эндоморфизмы градуированного модуля V образуют *градуированную алгебру* $\mathrm{GrEnd}(V)$, в которой $\mathrm{GrEnd}^{\nu}(V) \cdot \mathrm{GrEnd}^{\mu}(V) \subset \mathrm{GrEnd}^{\nu+\mu}(V)$.

Тензорное произведение[1] $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ градуированных модулей V_i определяется как градуированный модуль с компонентами

$$\left(V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n\right)^{\nu} \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{\sum \nu_i = \nu} V_1^{\nu_1} \otimes V_2^{\nu_2} \otimes \cdots \otimes V_n^{\nu_n}.$$

5.1.1. Кошулево правило знаков. При работе с градуированными модулями мы по умолчанию используем так называемые s-версии[2] стандартных полилинейных операций линейной алгебры, которые получаются из обычных применением *кошулева правила знаков*: если некая операция над буквами $f_1, f_2, \dots, f_n$ определяется в неградуированной теории как линейная комбинация (некоммутативных) мономов от этих букв, в которой все мономы отличаются друг от друга перестановками букв, то в s-версии такой операции каждая транспозиция букв f_{ν} и f_{μ} дополнительно сопровождается умножением соответствующего монома на $(-1)^{|f_{\nu}|\cdot|f_{\mu}|}$. Например, *s-коммутатор* однородных эндоморфизмов градуированного модуля определяется как

$$[f, g] \overset{\text{def}}{=} f \circ g - (-1)^{|f||g|} g \circ f,$$

а *s-правило Лейбница* для однородного оператора F на градуированной алгебре выглядит так:

$$F(ab) = (Fa)b + (-1)^{|F|\cdot|a|} a(Fb).$$

Аналогично, результат применения тензорного произведения $f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n$ однородных гомоморфизмов $f_i : V_i \to V_i$ к тензорному моному

$$v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \in V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$$

[1] По умолчанию, все тензорные произведения берутся в категории K-модулей.

[2] Т. е. подкрученные на знак (*sign*) или, как ещё говорят, *супер-* (или *skew-*) версии тензорных операций.

из однородных векторов v_i определяется как

$$f_1 \otimes \cdots \otimes f_m \left(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m\right) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{\varepsilon} f_1(v_1) \otimes \cdots \otimes f_m(v_m), \tag{5-2}$$

где $\varepsilon = |f_m|\big(|v_1| + \cdots + |v_{m-1}|\big) + |f_{m-1}|\big(|v_1| + \cdots + |v_{m-2}|\big) + \cdots + |f_2||v_1|$. Аналогично вычисляется и композиция тензорных мономов от гомоморфизмов:

$$\left(f_1 \otimes \cdots \otimes f_m\right) \circ \left(g_1 \otimes \cdots \otimes g_m\right) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{\varepsilon} (f_1 \circ g_1) \otimes \cdots \otimes (f_m \circ g_m) \tag{5-3}$$

где $\varepsilon = |f_m|\big(|g_1| + \cdots + |g_{m-1}|\big) + |f_{m-1}|\big(|g_1| + \cdots + |g_{m-2}|\big) + \cdots + |f_2||g_1|$.

5.1.2. Комплексы и (ко)гомологии. Градуированный K-модуль V, оснащённый однородным K-линейным оператором $d : V \to V$ степени $|d| = 1$ с $d^2 = 0$ называется *комплексом*. Действие оператора d удобно изображать диаграммой

$$\cdots \xrightarrow{d} V^{\nu-1} \xrightarrow{d} V^{\nu} \xrightarrow{d} V^{\nu+1} \xrightarrow{d} \cdots . \tag{5-4}$$

Равенство $d^2 = 0$ означает, что $\ker d \supset \operatorname{im} d$. Оператор d с таким свойством называется *дифференциалом*. Фактор модуль $H(V) \stackrel{\text{def}}{=} \ker d / \operatorname{im} d$ называется *модулем когомологий* комплекса V. Он естественно градуирован:

$$H(V) = \bigoplus H^{\nu}(V), \quad \text{где} \quad H^{\nu}(V) = \frac{\ker\left(d : V^{\nu} \to V^{\nu+1}\right)}{\operatorname{im}\left(d : V^{\nu-1} \to V^{\nu}\right)} .$$

Элементы из $\ker d$ называются *коциклами*, а элементы из $\operatorname{im} d$ — *кограницами*. Если $H(V) = 0$, т. е. $\ker d = \operatorname{im} d$, комплекс V называется *точным* или *ацикличным*.

Замечание 5.1. Формально, комплекс можно определить в любой категории как последовательность стрелок (5-4) со свойством $d^2 = 0$, а когомологии комплекса — в любой точной категории. Все обсуждаемые в этом параграфе свойства когомологий справедливы для любой абелевой категории.

Замечание 5.2. Иногда бывает удобно считать, что степень дифференциала не $+1$, а -1. В этом случае однородные компоненты комплекса принято нумеровать нижними индексами, а дифференциал обозначать буквой ∂, так что диаграмма (5-4) превращается в $\cdots \xrightarrow{\partial} V_{\nu+1} \xrightarrow{\partial} V_{\nu} \xrightarrow{\partial} V_{\nu-1} \xrightarrow{\partial} \cdots$. Соответствующие факторы

$$H_{\nu}(V) = \frac{\ker\left(\partial : V_{\nu} \to V_{\nu-1}\right)}{\operatorname{im}\left(\partial : V_{\nu+1} \to V_{\nu}\right)}$$

называют *гомологиями*, элементы из $\ker \partial$ — *циклами*, а элементы из $\operatorname{im} \partial$ — *границами*[1]. Одни обозначения превращаются в другие формальной сменой знака у всех индексов с одновременным их опусканием или поднятием.

Пример 5.1 (цепной комплекс симплициального множества)
Пусть $X : \Delta^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$ — симплициальное множество[2], и K-произвольное коммутативное кольцо. Обозначим через $C_n = C_n(X, K) \stackrel{\text{def}}{=} K \otimes X_n$ свободный K-модуль с базисом

[1] И только комплексы так и остаются комплексами ☺

[2] См. прим. 1.7 на стр. 8.

$X_n = X([n])$. Он называется модулем *n-мерных цепей* симплициального множества X с коэффициентами из K. Линейный оператор $\partial : C_n \to C_{n-1}$, действие которого на базисный вектор $x \in X_n$ задаётся правилом

$$\partial x \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i X(\partial_i) x\,, \tag{5-5}$$

где $\partial_i : [n-1] \hookrightarrow [n]$ — возрастающее вложение, не содержащее в образе числа i, называется *граничным оператором*. Он сопоставляет ориентированному симплексу его ориентированную границу[1] и имеет $\partial^2 = 0$.

Упражнение 5.1. Убедитесь в этом.

Комплекс (C, ∂) называется *цепным комплексом*, а его гомологии — *гомологиями* симплициального множества X с коэффициентами в K. В случае, когда $X = S(\mathcal{X})$ является множеством сингулярных симплексов[2] топологического пространства $\mathcal{X}$, эти гомологии называются *сингулярными гомологиями* топологического пространства $\mathcal{X}$ с коэффициентами в K и обозначаются $H_n(\mathcal{X}, K)$. Аналогичная конструкция имеет смысл и для полусимплициальных множества $X : \Delta_{\mathrm{s}}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$. Получающиеся при этом гомологии называют *симплициальными гомологиями* соответствующего триангулированного пространства $|X|$.

Упражнение 5.2. Вычислите симплициальные гомологии тора из прим. 1.6 на стр. 7, триангулированного как на рис. 1◇1 и рис. 1◇2 на стр. 7.

Пример 5.2 (тензорное произведение комплексов)
На тензорном произведении $U \otimes V$ комплексов U и V имеется каноническая структура комплекса с дифференциалом

$$d = d_{U\otimes V} \overset{\text{def}}{=} d_U \otimes 1 + 1 \otimes d_V\,. \tag{5-6}$$

Равенство $d^2 = 0$ обеспечивается кошулевым правилом знаков, согласно которому

$$(1 \otimes d_V) \circ (d_U \otimes 1) = -d_U \otimes d_V\,,$$

ибо $|d_U| = |d_V| = 1$. Поэтому $d^2 = d_U^2 \otimes 1 + d_U \otimes d_V - d_U \otimes d_V + 1 \otimes d_V^2 = 0$. Отметим, что в силу того же правила знаков результат применения обеих частей формулы (5-6) к однородным элементам выглядит так:

$$d(u \otimes v) = (d_U \otimes 1)(u \otimes v) + (1 \otimes d_V)(u \otimes v) = (d_U u) \otimes v + (-1)^{|v|} v \otimes (d_V v)\,.$$

Аналогично определяется тензорное произведение $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_m$ любого множества комплексов. Дифференциал на нём продолжает дифференциалы $d_i : V_i \to V_i$ по s-правилу Лейбница и равен

$$d_{\otimes V_i} = \sum_{i=1}^{m} 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes d_i \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$$

(отдельные слагаемые написанной суммы перемножаются и применяются к элементам с учётом кошулева правила знаков).

[1] Например, границей треугольника будет его контур, обходимый в порядке возрастания номеров вершин.

[2] См. прим. 2.3 на стр. 22.

5.1.3. Мультикомплексы. Мы называем *m-комплексом* $\mathbb{Z}^m$-градуированный K-модуль $V = \bigoplus_{\mu\in\mathbb{Z}^m} V^\mu$, на котором заданы однородные K-линейные дифференциалы

$$d_1, d_2, \dots, d_m : V \to V\,,$$

степенями которых являются стандартные базисные векторы в $\mathbb{Z}^m$, т. е.

$$d_i(V^\mu) \subset V^{\mu_1,\dots,\mu_{i-1},\mu_i+1,\mu_{i+1},\dots,\mu_m}$$

и которые удовлетворяют соотношениям грассмановой алгебры с m образующими, т. е. $d_i d_j + d_j d_i = 0$ и $d_i^2 = 0$ для всех i, j. Чаще всего мы будем иметь дело с *бикомплексами* $V = \bigoplus_{p,q} V^{p,q}$, на которых действует пара дифференциалов $d_1, d_2 : V \to V$, таких что $d_1^2 = 0$, $d_2^2 = 0$, $d_1 d_2 = -d_2 d_1$, $d_1(V^{p,q}) \subset V^{p+1,q}$, $d_2(V^{p,q}) = V^{p,q+1}$.

С каждым m-комплексом V можно связать обычный $\mathbb{Z}$-градуированный комплекс $\operatorname{Tot} V$, называемый *свёрткой* или *тотальным комплексом* m-комплекса V и имеющий

$$\operatorname{Tot}^\nu V \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{\sum \mu_i = \nu} V^{\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_m} \quad \text{и} \quad d_{\operatorname{Tot}} = \sum d_i : \operatorname{Tot}^\nu V \to \operatorname{Tot}^{\nu+1} V\,.$$

Например, попарные тензорные произведения $U^p \otimes W^q$ однородных компонент комплексов (U, d_U) и (W, d_W) образуют бикомплекс с дифференциалами $d_1 = d_U \otimes 1_W$ и $d_2 = 1_U \otimes d_W$, и тензорное произведение комплексов $U \otimes V$ из предыдущего прим. 5.2 представляет собою тотальный комплекс этого бикомплекса.

Упражнение 5.3. Убедитесь, что для любых двух комплексов (U, d_U) и (W, d_W) модули $H^{p,q} = \operatorname{Hom}(U^{-p}, W^q)$ образуют бикомплекс с дифференциалами

$$d_1 : \varphi \mapsto (-1)^{q+p} \varphi \circ \partial_U \quad \text{и} \quad d_2 : \varphi \mapsto \partial_W \circ \varphi\,.$$

5.2. Категории комплексов. В гомологической алгебре рассматриваются три разных категории комплексов с одним и тем же классом объектов — комплексами K-модулей, но с разными классами морфизмов.

5.2.1. DG-категория комплексов. Аддитивная категория $\mathcal{C}$, в которой на каждом множестве стрелок $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ имеется структура комплекса, а дифференциалы композиций вычисляются по s-правилу Лейбница:

$$d(\varphi \circ \psi) = (d\varphi) \circ \psi + (-1)^{|\varphi|} \varphi \circ (d\psi) \tag{5-7}$$

называется *дифференциальной градуированной* (или *DG*-) категорией. Примером такой категории является *DG-категория комплексов*, объектами которой являются комплексы K-модулей (V, d_V), а морфизмами из (U, d_U) в (W, d_W) являются произвольные K-линейные гомоморфизмы $U \to W$, образующие градуированный модуль (5-1)

$$\operatorname{Hom}_{\mathrm{DG}}(V, W) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{GrHom}(V, W) = \bigoplus_\nu \operatorname{GrHom}^\nu(V, W) \tag{5-8}$$

с дифференциалом $d : \operatorname{GrHom}^\nu(V, W) \to \operatorname{GrHom}^{\nu+1}(V, W)$, переводящим однородный морфизм $\psi : V \to W$ в его s-коммутатор с дифференциалами:

$$\psi \mapsto [d, \psi] \overset{\text{def}}{=} d_W \circ \psi - (-1)^{|\psi|} \psi \circ d_V\,.$$

Упражнение 5.4. Убедитесь, что комплекс $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(V, W)$ является свёрткой бикомплекса $\mathrm{Hom}(U^p, W^q)$ из упр. 5.3, и проверьте, что $d^2 = 0$ и что дифференциал композиции вычисляется по s-правилу Лейбница (5-7).

Мы будем использовать обозначение $\mathrm{Hom}^{\nu}_{\mathrm{DG}}(V, W) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{GrHom}^{\nu}(V, W)$ для однородных компонент комплекса $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(V, W)$.

5.2.2. Просто категория комплексов обозначается $\mathcal{C}om$ и имеет морфизмами K-линейные отображения степени нуль, перестановочные с дифференциалами:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}om}(V, W) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}^0_{\mathrm{DG}}(V, W) \cap \ker d = \{\varphi : V \to W \mid \forall \nu\ \varphi(V^{\nu}) \subset W^{\nu}\ \&\ d_W\varphi = \varphi d_V\}\,.$$

Такие отображения называются *морфизмами комплексов*. Очевидно, что морфизмы комплексов образуют абелеву подгруппу в $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(V, W)$. Прямая сумма $V \oplus W$ комплексов U и V определяется как их прямая сумма в категории градуированных K-модулей, т. е. имеет $U^{\nu} \oplus W^{\nu}$ в качестве компоненты степени ν, и снабжается дифференциалом $d_U \oplus d_W$. Таким образом, категория комплексов аддитивна. Ядро и коядро морфизма комплексов $\varphi : V \to W$ тоже определяются как ядро и коядро в категории градуированных K-модулей и снабжаются дифференциалами, индуцированными дифференциалами комплексов V и W соответственно.

Упражнение 5.5. Убедитесь, что $\ker \varphi_{\nu} \subset V^{\nu}$ образуют подкомплекс[1] в V, а дифференциал d_W корректно задаёт структуру комплекса на факторе $W/\varphi(V)$.

Поскольку в категории градуированных модулей[2] выполняется основная теорема о строении гомоморфизма, она выполняется и в категории комплексов. Таким образом, категория комплексов абелева. Точно так же проверяется, что и для любой абелевой категории $\mathcal{A}$ категория $\mathcal{C}om(\mathcal{A})$ комплексов из объектов категории $\mathcal{A}$ тоже абелева.

Предложение 5.1
Каждый морфизм комплексов $\varphi : V \to W$ корректно задаёт морфизм когомологий $\varphi_* : H(V) \to H(W)$, переводящий класс коцикла ξ в класс коцикла $\varphi(\xi)$.

Доказательство. Если $d_V\xi = 0$, то и $d_W\varphi\xi = \varphi d_V\xi = 0$, т. е. $\varphi(\xi)$ является коциклом. При замене коцикла ξ на когомологичный коцикл $\xi + d_V\zeta$ образ $\varphi(\xi + d_V\zeta) = \varphi(\xi) + \varphi(d_V\zeta) = \varphi(\xi) + d_W(\varphi(\zeta))$ когомологичен образу $\varphi(\xi)$. □

Предложение 5.2
С любой точной тройкой комплексов $0 \to U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W \to 0$ функториально[3] связана длинная точная последовательность когомологий

$$\cdots \xrightarrow{\varphi_*} H^i(V) \xrightarrow{\psi_*} H^i(W) \xrightarrow{\delta} H^{i+1}(U) \xrightarrow{\varphi_*} H^{i+1}(V) \xrightarrow{\psi_*} \cdots\,, \tag{5-9}$$

в которой *связывающий гомоморфизм* $\delta : H^i(W) \to H^{i+1}(U)$ индуцирован дифференциалом комплекса V, т. е. переводит когомологический класс коцикла $\psi(\eta) \in \ker d_W$ в когомологический класс коцикла $d_V(\eta) \in \ker d_U$.

[1] т. е. d_V переводит $\ker \varphi_{\nu}$ в $\ker \varphi_{\nu+1}$

[2] с сохраняющими градуировку гомоморфизмами K-модулей в качестве стрелок

[3] в том смысле, что сопоставление точной тройке её длинной последовательности когомологий является функтором из категории точных трёхчленных комплексов в категорию точных комплексов (в качестве стрелок в обеих категориях рассматриваются морфизмы комплексов)

Доказательство. Корректность определения гомоморфизма δ проверяется ползаньем по коммутативной диаграмме с точными строками

$$\begin{tikzcd}
{} & {} & {} \\
U^{i+1} \arrow[u, "d_U"'] \arrow[r, hook, "\varphi"] & V^{i+1} \arrow[u, "d_V"'] \arrow[r, two heads, "\psi"'] & W^{i+1} \arrow[u, "d_W"'] \\
U^{i} \arrow[u, "d_U"'] \arrow[r, hook, "\varphi"] & V^{i} \arrow[u, "d_V"'] \arrow[r, two heads, "\psi"'] & W^{i} \arrow[u, "d_W"'] \arrow[llu, dotted, "\delta"] \\
U^{i-1} \arrow[u, "d_U"'] \arrow[r, hook, "\varphi"] & V^{i-1} \arrow[u, "d_V"'] \arrow[r, two heads, "\psi"'] & W^{i-1} \arrow[u, "d_W"'] \arrow[llu, dotted, "\delta"] \\
{} \arrow[u, "d_U"'] & {} \arrow[u, "d_V"'] & {} \arrow[u, "d_W"']
\end{tikzcd}$$

Упражнение 5.6. Убедитесь, что при $d_W\psi\eta = 0$ образ $d_V(\eta)$ лежит в $\ker d_U \subset U \subset V$ и не меняется при добавлении к η кограницы, а при $\psi\eta_1 = \psi\eta_2$ их образы $d_V(\eta_1)$ и $d_V(\eta_2)$ когомологичны в U.

Функториальная зависимость морфизмов φ_*, ψ_* и δ от точной тройки очевидна из их конструкции, как и то, что последовательность (5-9) является комплексом. Проверку его точности мы оставляем читателю. □

Упражнение 5.7. Проверьте точность последовательности (5-9).

Определение 5.1 (сдвиг градуировки)

Функтор сдвига $S : \mathcal{C}om \to \mathcal{C}om$, $V \mapsto SV = V[1]$, действует на комплекс по правилу $SV^\nu = V^{\nu+1}$, $d_{SV} = -d_V$, так что *отображение сдвига* $s : V \to V[1]$, тождественно действующее на элементы и лежащее в $\mathrm{Hom}^{-1}_{\mathrm{DG}}(V, V[1])$, s-коммутирует с дифференциалом: $[d, s] = d_{SV}s + sd_V = 0$. Действие функтора S на морфизмы тождественно. Функтор S обратим. Его итерации обозначаются $S^kV = V[k]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 5.3 (конус морфизма)

С каждым морфизмом комплексов $\varphi : U \to W$ функториально связан сосредоточенный в двух столбцах с номерами -1 и 0 бикомплекс

$$\begin{tikzcd}
{} & {} \\
U^{i+1} \arrow[u, "-d_U"] \arrow[r, "\varphi"] & W^{i+1} \arrow[u, "d_W"'] \\
U^{i} \arrow[u, "-d_U"] \arrow[r, "\varphi"] & W^{i} \arrow[u, "d_W"'] \\
U^{i-1} \arrow[u, "-d_U"] \arrow[r, "\varphi"] & W^{i-1} \arrow[u, "d_W"'] \\
{} \arrow[u, "-d_U"] & {} \arrow[u, "d_W"']
\end{tikzcd} \tag{5-10}$$

свёртка которого называется *конусом* морфизма φ и обозначается $\mathrm{Con}(\varphi)$. Как градуированный модуль $\mathrm{Con}(\varphi) \simeq U[1] \oplus W$ имеет $\mathrm{Con}^i(\varphi) = U^{i+1} \oplus W^i$, но дифференциал

$$d_{\mathrm{Con}(\varphi)} : U[1] \oplus W \to U[1] \oplus W, \quad \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -d_U & 0 \\ \varphi & d_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \tag{5-11}$$

не равен прямой сумме дифференциалов. Комплекс $W \subset \mathrm{Con}(\varphi)$ является подкомплексом в $\mathrm{Con}(\varphi)$ и фактор $\mathrm{Con}(\varphi)/W \simeq V[1]$, однако точная тройка комплексов

$$0 \to W \xrightarrow{\iota_\varphi} \mathrm{Con}(\varphi) \xrightarrow{\pi_\varphi} U[1] \to 0\,, \tag{5-12}$$

вообще говоря, *не расщепляется* в категории $\mathcal{C}om$. Длинная точная последовательность когомологий тройки (5-12) имеет вид

$$\cdots \to H^i(\mathrm{Con}\,\varphi) \xrightarrow{\pi_{\varphi_*}} H^{i+1}(U) \xrightarrow{\varphi_*} H^{i+1}(W) \xrightarrow{\iota_{\varphi_*}} H^{i+1}(\mathrm{Con}\,\varphi) \to \cdots\,, \tag{5-13}$$

и её связывающий гомоморфизм $\delta : H^i(U[1]) = H^{i+1}(U) \to H^{i+1}(W)$ совпадает с φ_*.

Упражнение 5.8. Убедитесь в этом.

5.2.3. Гомотопическая категория комплексов обозначается $\mathcal{H}o$ и имеет в качестве морфизмов нулевые когомологии комплексов $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}o}(V,W) \overset{\mathrm{def}}{=} H^0\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(V,W)\right) = \frac{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}om}(V,W)}{\mathrm{im}\left(d : \mathrm{Hom}^{-1}_{\mathrm{DG}}(V,W) \to \mathrm{Hom}^0_{\mathrm{DG}}(V,W)\right)}\,.$$

Иначе говоря, морфизмы в гомотопической категории $\mathcal{H}o$ суть морфизмы комплексов $\varphi : V \to W$, рассматриваемые с точностью до сложения с морфизмами вида $[d,\gamma] = d_W\gamma - \gamma d_V$, где $\gamma : V \to W$ — любое K-линейное отображение степени -1. Морфизмы комплексов вида $[d,\gamma]$ называются *гомотопными нулю*. Морфизмы комплексов φ и ψ с гомотопной нулю разностью $\varphi - \psi = [d,\gamma]$ называются *гомотопными*, а отображение γ называется в этой ситуации *гомотопией* между φ и ψ, что записывается как $\varphi \underset{\gamma}{\sim} \psi$. Итак, морфизмы в категории $\mathcal{H}o$ это морфизмы комплексов с точностью до гомотопии.

Упражнение 5.9. Убедитесь, что гомотопные нулю морфизмы образуют двусторонний идеал в $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}om)$, т. е. $\varphi \underset{\gamma}{\sim} 0 \Rightarrow \varphi\psi \underset{\gamma\psi}{\sim} 0$ и $\eta\varphi \underset{\eta\gamma}{\sim} 0$ для всех таких стрелок $\psi, \eta \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}om)$, что композиции $\varphi\psi$ и $\eta\varphi$ определены.

Тем самым, композиция морфизмов корректно определена на классах гомотопных морфизмов, и $\mathcal{H}o$ действительно является категорией.

Гомотопный нулю морфизм $\varphi = d_W\gamma + \gamma d_V : V \to W$ задаёт нулевой морфизм когомологий $\varphi_* : H(V) \to H(W)$, т. к. для любого коцикла $\xi \in \ker d_V$ коцикл $\varphi(\xi) = d_W(\gamma\xi) + \varphi\gamma(d_V\xi) = d_W(\gamma\xi)$ является кограницей. Поэтому гомотопные морфизмы комплексов одинаково действуют на когомологиях. В частности, при вычислении когомологий произвольного комплекса $V \in \mathcal{C}om$ можно заменить этот комплекс любым другим комплексом W, изоморфным V в категории $\mathcal{H}o$ — когомологии у W будут те же, что и у V, хотя изоморфизма между V и W в категории $\mathcal{C}om$ при этом может и не быть.

Определение 5.2

Комплекс V называется *стягиваемым*, если $\mathrm{Id}_V \underset{\gamma}{\sim} 0$. Гомотопия γ между нулевым и тождественным эндоморфизмами называется *стягивающей гомотопией*.

Упражнение 5.10. Убедитесь, что в категории $\mathcal{Ho}$ все стягиваемые комплексы изоморфны нулевому комплексу и, в частности, ацикличны.

Пример 5.4 (конус тождественного морфизма)

Конус $\mathrm{Con}(\mathrm{Id}_V)$ тождественного морфизма $\mathrm{Id}_V : V \to V$ стягиваем посредством стягивающей гомотопии $\gamma \in \mathrm{GrHom}^{-1}(\mathrm{Con}(\mathrm{Id}_V), \mathrm{Con}(\mathrm{Id}_V))$, которая в терминах прямых разложений $\mathrm{Con}^i(\mathrm{Id}_V) = V^{i+1} \oplus V^i$ и $\mathrm{Con}^{i-1}(\mathrm{Id}_V) = V^i \oplus V^{i-1}$ задаётся матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, т. е. действует по правилу

$$\gamma_i : V^{i+1} \oplus V^i \to V^i \oplus V^{i-1}, \quad \begin{pmatrix} v_{i+1} \\ v_i \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v_i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В самом деле, s-коммутатор $\left[d_{\mathrm{Con}(\mathrm{Id}_V)}, \gamma\right]$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} -d_V & 0 \\ 1 & d_V \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -d_V & 0 \\ 1 & d_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -d_V \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & d_V \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}_{\mathrm{Con}(\mathrm{Id}_V)}.$$

5.3. Комплексы Кошуля. Рассмотрим коммутативное кольцо K и для произвольного элемента $f \in K$ обозначим через K_f двучленный комплекс

$$0 \to K \xrightarrow{f} K \to 0, \tag{5-14}$$

сосредоточенный в степенях 0 и 1, дифференциалом в котором является гомоморфизм умножения на $f : x \mapsto fx$. Когомологии комплекса K_f суть

$$H^0(K_f) = \mathrm{Ann}\, f = \{a \in K \mid af = 0\} \quad \text{и} \quad H^1(K_f) = K/(f).$$

Лемма 5.1

Любой комплекс K-модулей C вписывается в категории $\mathcal{Com}$ в точную тройку

$$0 \to C[-1] \hookrightarrow K_f \otimes C \twoheadrightarrow C \to 0 \tag{5-15}$$

которая производит длинную точную последовательность когомологий

$$\cdots \to H^i(C) \xrightarrow{f} H^i(C) \to H^i(K_f \otimes C) \to H^{i+1}(C) \xrightarrow{f} H^{i+1}(C) \to \cdots$$

со связывающим гомоморфизмом $\delta : H^i(C) \to H^{i+1}(C[-1]) = H^i(C)$, $[x] \mapsto [fx]$.

Доказательство. Комплекс $K_f \otimes C$ имеет компонентой степени k сумму

$$\left(K_f^0 \otimes C^k\right) \oplus \left(K_f^1 \otimes C^{k-1}\right) \simeq C^k \oplus C^{k-1},$$

и изоморфен свёртке двухстолбцового бикомплекса[1]

$$\begin{tikzcd}
 & \\
C^{k+1} \arrow[u, "d_C"] \arrow[r, "f"] & C^{k+1} \arrow[u, "-d_C"'] \\
C^{k} \arrow[u, "d_C"] \arrow[r, "f"] & C^{k} \arrow[u, "-d_C"'] \\
C^{k-1} \arrow[u, "d_C"] \arrow[r, "f"] & C^{k-1} \arrow[u, "-d_C"'] \\
 \arrow[u, "d_C"] & \arrow[u, "-d_C"']
\end{tikzcd}$$

в котором правый столбец является подкомплексом, изоморфным $C[-1]$, а фактор по нему изоморфен левому столбцу, т. е. C. Последнее утверждение следует прямо из предл. 5.2 на стр. 65. □

Следствие 5.1
Если $f \in K$ обратим, то комплекс $K_f \otimes C$ ацикличен для любого комплекса C. □

Пример 5.5 (комплекс Кошуля последовательности элементов)
Для конечной последовательности $f_1, f_2, \dots, f_m \in K$ тензорное произведение

$$K_{f_1 f_2 \cdots f_m} \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\alpha=1}^{m} K_{f_\alpha}$$

двучленных комплексов (5-14) называется *комплексом Кошуля* этой последовательности. Комплекс Кошуля сосредоточен в степенях от 0 до m, и его компонента степени k является прямой суммой $\binom{m}{k}$ свободных модулей ранга 1:

$$K^{\otimes m} = K \otimes K \otimes \cdots \otimes K \simeq K\,,$$

которые биективно соответствуют грассмановым мономам $\xi_I = \xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \cdots \wedge \xi_{i_k}$, если сопоставить такой моном базисному произведению $1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$ в котором k единиц степени 1 стоят в позициях $i_1, i_2, \dots, i_k$, а остальные $m-k$ единиц имеют степень нуль. Действие дифференциала комплекса на такое произведение $1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$ при этом совпадет с действием на моном ξ_I левого умножения на грассманову линейную форму $\xi = f_1\xi_1 + f_2\xi_2 + \cdots + f_m\xi_m$. Таким образом, комплекс Кошуля последовательности $f_1, f_2, \dots, f_m$ можно отождествить с комплексом

$$0 \to \Lambda^0(K^m) \xrightarrow{\xi} \Lambda^1(K^m) \xrightarrow{\xi} \cdots \xrightarrow{\xi} \Lambda^{m-1}(K^m) \xrightarrow{\xi} \Lambda^m(K^m) \xrightarrow{\xi} 0\,, \tag{5-16}$$

дифференциал в котором задаётся левым умножением на $\xi = \sum f_i \xi_i \in \Lambda^1(K^m)$.

[1]минусы справа обусловлены Кошулевым правилом знаков: в правом столбце

$$(\mathrm{Id} \otimes d_c)(1 \otimes c) = -1 \otimes (d_C c)\,,$$

поскольку в нём $|1| = 1$

Определение 5.3
Последовательность $f_1, f_2, \dots, f_m \in K$ называется *регулярной*, если класс элемента f_k не делит нуль в факторе $K/(f_{k+1}, f_{k+2}, \dots, f_m)$ при всех[1] $1 \leqslant k \leqslant m$.

Лемма 5.2
Если элементы $f_1, f_2, \dots, f_m \in K$ образуют регулярную последовательность, комплекс Кошуля (5-16) имеет

$$H^k(K_{f_1 f_2 \dots f_m}) \simeq \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqslant k \leqslant m-1 \\ K/(f_1, f_2, \dots, f_m) & \text{при } k = m\,. \end{cases}$$

В частности, если хоть один из элементов f_i обратим в K, комплекс Кошуля полностью ацикличен.

Доказательство. Индукция по m. Случай $m = 1$ очевиден. Если теорема верна для последовательности $f_2, f_3, \dots, f_m$, то по лем. 5.1 k-тая группа когомологий комплекса $K_{f_1 f_2 \dots f_m} = K_{f_1} \otimes K_{f_2 f_3 \dots f_m}$ при $0 \leqslant k \leqslant m-1$ зажата между двумя нулями:

$$0 = H^{k-1}\left(K_{f_2 f_3 \dots f_m}\right) \to H^k\left(K_{f_1 f_2 \dots f_m}\right) \to H^k\left(K_{f_2 f_3 \dots f_m}\right) = 0\,,$$

а m-тая группа является коядром умножения на f_1

$$\dots \to H^{m-1}\left(K_{f_2 f_3 \dots f_m}\right) \xrightarrow{f_1} H^{m-1}\left(K_{f_2 f_3 \dots f_m}\right) \to H^m\left(K_{f_1 f_2 \dots f_m}\right) \to 0$$

в фактор кольце $H^{m-1}\left(K_{f_2 f_3 \dots f_m}\right) = K/\left(f_2 f_3 \dots f_m\right)$. □

5.4. Спектральные последовательности. Рассмотрим последовательность таблиц $E_0, E_1, E_2, \dots$, клетки которых занумерованы целыми числами (p, q), где p увеличивается по горизонтали, а q по вертикали. Если при каждом r

- в клетках таблицы E_r располагаются модули $E_r^{p,q}$ и задан дифференциал d_r бистепени $(r, 1-r)$ по (p, q), действующий из клеток диагонали $p + q = n$ в клетки следующей диагонали $p + q = n + 1$ со сдвигом на r единиц вправо:
$$d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r, q+1-r}, \quad d_r^2 = 0$$
- очередная таблица E_{r+1} состоит из когомологий предыдущей таблицы E_r:
$$E_{r+1}^{p,q} = \ker(d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q+1-r})/d_r(E_r^{p-r,q-1+r})$$

то говорят, что эти таблицы образуют *спектральную последовательность*[2] когомологического типа[3]. Скажем, что спектральная последовательность *стабилизируется*, если содержимое каждой клетки с какого-то момента перестаёт меняться, т. е.

$$\forall\,(p,q)\,\exists\,N = N(p,q) : \forall\,r \geqslant N \quad d_r\left(E_r^{p,q}\right) = 0 \quad \text{и} \quad d_r\left(E_r^{p-r,q+r-1}\right) = 0\,. \tag{5-17}$$

[1] при $k = m$ это означает, что f_m не делит нуль в K

[2] В просторечии *спектралку*.

[3] В спектралке гомологического типа таблицы нумеруют верхним индексом: $E^0, E^1, E^2, \dots$ и заполняют модулями $E_{p,q}^r$ с дифференциалами $\partial_r : E_{p,q}^r \to E_{p-r,q+r-1}^r$ бистепени $(-r, r-1)$, бьющими из клеток диагонали $p + q = n$ в клетки предыдущей диагонали $p + q = n - 1$ со сдвигом на r единиц в влево.

Например, такое заведомо происходит, когда в одной из таблиц E_r на каждой диагонали $p+q = \mathrm{const}$ имеется лишь конечное число ненулевых модулей. Если спектральная последовательность стабилизируется, то модуль $E_r^{p,q}$ с $r \geqslant N(p,q)$ из условия (5-17) обозначается $E_\infty^{p,q}$ и называется *предельным*. В этой ситуации говорят, что спектралка *сходится* к градуированным модулям

$$E_\infty^n \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigoplus_{p+q=n} E_\infty^{p,q}$$

и пишут $E_r^{p,q} \Rightarrow E_\infty^n$. Спектральные последовательности являются основным инструментом для получения информации о когомологиях комплексов, тем или иным способом «собранных» из более элементарных комплексов. Простейшим примером этой ситуации является

Предложение 5.3 (спектральная последовательность фильтрованного комплекса) Пусть комплекс C обладает такой убывающей системой подкомплексов[1] $F^pC \subseteq C$,

$$C \supseteq \cdots \supseteq F^{p-1}C \supseteq F^pC \supseteq F^{p+1}C \supseteq \cdots \supseteq 0\,, \tag{5-18}$$

что для каждого $n \in \mathbb{Z}$ подмодули F^pC^n совпадают с C^n при всех $p \ll 0$ и зануляются при всех $p \gg 0$. Тогда существует спектральная последовательность с

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}\left(\mathrm{Gr}^p C\right)\,, \quad \text{где} \quad \mathrm{Gr}^p C \stackrel{\mathrm{def}}{=} F^pC/F^{p+1}C\,,$$

сходящаяся к присоединённым факторам $\mathrm{Gr}^p H^{p+q}(C) \stackrel{\mathrm{def}}{=} F^pH^{p+q}(C)/F^{p+1}H^{p+q}(C)$ убывающей фильтрации $F^\bullet H(C)$ на модуле когомологий $H(C)$, относящей в подмодуль $F^pH(C) \subseteq H(C)$ все коциклы, лежащие в подкомплексе F^pC, по модулю всех попавших в этот подкомплекс кограниц.

Доказательство. Для каждого $r = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$ рассмотрим в модуле C^{p+q} модули

$$\begin{aligned}
Z_r^{p,q} &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \ker\bigl(F^pC^{p+q} \xrightarrow{d} C^{p+q+1}/F^{p+r}C^{p+q+1}\bigr) = \{c \in F^pC^{p+q} \mid dc \in F^{p+r}C^{p+q+1}\}\\
B_r^{p,q} &\stackrel{\mathrm{def}}{=} d\left(F^{p-r+1}C^{p+q-1}\right) + F^{p+1}C^{p+q}\\
E_r^{p,q} &\stackrel{\mathrm{def}}{=} Z_r^{p,q}/\left(B_r^{p,q} \cap Z_r^{p,q}\right) \simeq \left(Z_r^{p,q} + B_r^{p,q}\right)/B_r^{p,q}\,.
\end{aligned}$$

При $r = 0$ они имеют вид

$$\begin{aligned}
Z_0^{p,q} &= F^pC^{p+q}\\
B_0^{p,q} &= F^{p+1}C^{p+q}\\
E_0^{p,q} &= F^pC^{p+q}/F^{p+1}C^{p+q} = \mathrm{Gr}^pC^{p+q}\,,
\end{aligned}$$

и дифференциал $d : C^{p+q} \to C^{p+q+1}$ комплекса C корректно факторизуется до дифференциала $d_0 : E_0^{p,q} = \mathrm{Gr}^pC^{p+q} \to \mathrm{Gr}^pC^{p+q+1} = E_0^{p,q+1}$. Таким образом, в p-том столбце

[1] Это означает, что $d_C(F^pC) \subset F^pC$ при всех $p \in \mathbb{Z}$.

таблицы E_0 стоит p-тый присоединённый фактор комплекс $\mathrm{Gr}^p C = F^p C / F^{p+1} C$ фильтрованного комплекса C. Прообразы коциклов степени $p + q$ из этого комплекса образуют в C^{p+q} подмодуль $\{c \in F^p C^{p+q} \mid dc \in F^{p+1} C^{p+q}\} = Z_1^{p,q}$, а когомологии

$$H^{p+q}(\mathrm{Gr}^p C) = \frac{Z_1^{p,q}}{Z_1 \cap \left(F^p(C^{p+q-1}) + F^{p+1}C^{p+q}\right)} = \frac{Z_1^{p,q}}{Z_1^{p,q} \cap B_1^{p,q}} = E_1^{p,q}\,.$$

Упражнение 5.11. При всех $r \in \mathbb{N}$ проверьте, что

$$d(Z_r^{p,q}) \subset Z_r^{p+r,q-r+1} \quad \text{и} \quad d(B_r^{p,q}) \subset B_r^{p+r,q-r+1}\,,$$

так что дифференциал $d : C \to C$ корректно факторизуется до дифференциала $d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q+1-r}$, и убедитесь, что модуль когомологий последнего

$$\frac{\ker\left(d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q+1-r}\right)}{\operatorname{im}\left(d_r : E_r^{p-r,q+r-1} \to E_r^{p,q}\right)} \simeq \frac{Z_{r+1}^{p,q}}{B_{r+1}^{p,q} \cap Z_{r+1}^{p,q}} = E_{r+1}^{p,q}\,.$$

Из условия предположения вытекает, что на каждой диагонали возникающей таким образом спектральной последовательности имеется лишь конечное число ненулевых модулей, и она сходится к модулям

$$E_\infty^{p,q} = \frac{Z_\infty^{p,q}}{B_\infty^{p,q} \cap Z_\infty^{p,q}} \simeq \frac{F^p C^{p+q} \cap \ker d}{F^{p+1} C^{p+q} \cap \operatorname{im} d} = \mathrm{Gr}^p H^{p+q}(C)\,,$$

что и утверждалось. □

Пример 5.6 (двучленная фильтрация)

Точная тройка комплексов $0 \to U \to V \to W \to 0$ задаёт на среднем комплексе V двучленную фильтрацию $V = F^0 V \supset U = F^1 V \supset 0 = F^2 V$ с присоединёнными факторами $\mathrm{Gr}^0 V = V/U = W$ и $\mathrm{Gr}^1 V = U/0 = U$. В этом случае таблица E_1 спектральной последовательности из предл. 5.3 сосредоточена в двух столбцах $p = 0, 1$ и имеет вид

$$\begin{tikzcd}
H^{p+1}(W) \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, dash, dotted] & H^{p+2}(U) \\
H^{p}(W) \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, dash, dotted] & H^{p+1}(U) \\
H^{p-1}(W) \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, dash, dotted] & H^{p}(U) \\
H^{p-2}(W) \arrow[r, "\delta"] & H^{p-1}(U)
\end{tikzcd}$$

Таблица её когомологий $E_2 = H(E_1)$ совпадает с предельной таблицей E_∞ и состоит из присоединённых факторов индуцированной двучленной фильтрации на $H(V)$:

$$0 \to \operatorname{coker}\left(H^{n-1}(W) \to H^n(U)\right) \hookrightarrow H^n(V) \twoheadrightarrow \ker\left(H^n(W) \to H^{n+1}(U)\right) \to 0\,,$$

что согласуется с длинной последовательностью когомологий (5-9)

$$\cdots \to H^{n-1}(W) \xrightarrow{\delta} H^n(U) \to H^n(V) \to H^n(W) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(U) \to \cdots ,$$

исходной точной тройки комплексов $0 \to U \to V \to W \to 0$. Таким образом, спектральная последовательность двучленной фильтрации содержит ровно столько же информации, что и длинная последовательность когомологий.

5.4.1. Спектральные последовательности бикомплекса. На тотальном комплексе[1] $C^n = \mathrm{Tot}^n(V) = \bigoplus\limits_{p+q=n} V^{p,q}$ бикомплекса $V = V^{p,q}$ имеются две симметричных фильтрации, получающиеся одна из другой отражением $p \leftrightarrow q$ относительно диагонали $p = q$. Первая имеет

$$F^p\,\mathrm{Tot}^n(V) = \bigoplus_{\nu \geqslant p} V^{\nu,n-\nu}$$

и индуцирует на $H^n\left(\mathrm{Tot}^n(V)\right)$ убывающую фильтрацию, присоединённые градуированные факторы которой можно вычислять при помощи спектральной последовательности из предл. 5.3. В столбцах её начальной таблицы E_0 стоят фактор комплексы

$$E_0^{p,*} = G^p\,\mathrm{Tot}(V) \simeq V^{p,*},$$

и дифференциал тотального комплекса $d = d_{\mathrm{h}} + d_{\mathrm{v}}$, имеющий горизонтальную и вертикальную компоненты $d_{\mathrm{h}} : V^{p,q} \to V^{p+1,q}$ и $d_{\mathrm{v}} : V^{p,q} \to V^{p,q+1}$, действует на E_0 дифференциалом $d_0 = d_{\mathrm{v}}$. Таблица $E_1 = H(E_0)$ состоит из когомологий

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}\Big(\mathrm{Gr}^p\left(\mathrm{Tot}(V)\right)\Big) = H^q_{\mathrm{ver}}\left(V^{p,*}\right)$$

комплексов-столбцов бикомплекса V, а дифференциал $d = d_{\mathrm{h}} + d_{\mathrm{v}}$ действует на них дифференциалом $d_1 = d_{\mathrm{h}*}$, который индуцируется на когомологиях комплексов-столбцов бикомплеса V горизонтальным дифференциалом d_{h} этого бикомплекса.

Упражнение 5.12. Убедитесь, что всякий s-антикоммутирующий с дифференциалами[2] d_U, d_W комплексов U, W моморфизм $\varphi \in \mathrm{Hom}^0_{\mathrm{DG}}(U, W)$, также, как и морфизм комплексов, корректно задаёт морфизм когомологий[3] $\varphi_* : H(U) \to H(W)$.

Тем самым, таблица E_2 состоит из модулей $E_2^{p,q} = H^p_{\mathrm{hor}}\left(H^q_{\mathrm{ver}}(V)\right)$.

Вторая убывающая фильтрация на $\mathrm{Tot}^n(V)$ получается из первой перестановкой букв p, q и имеет

$$F^q\,\mathrm{Tot}^n(V) = \bigoplus_{\nu \geqslant q} V^{n-\nu,\nu}.$$

Дифференциалы $d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p-r+1,q+r}$ ассоциированной с нею спектральной последовательности с ростом r наклоняются влево и вверх, симметрично относительно диагонали $p = q$ к тому, как вели себя дифференциалы первой спектралки, а $E_2^{p,q} = H^p_{\mathrm{ver}}\left(H^q_{\mathrm{hor}}(V)\right)$. Подытожим сказанное как

[1] См. n° 5.1.3 на стр. 64.

[2] Т. е. удовлетворяющий равенству $d_W\varphi + \varphi d_U = 0$.

[3] Ср. с предл. 5.1 на стр. 65.

Предложение 5.4 (спектральные последовательности бикомплекса)
С каждым бикомплексом V связаны две спектралки с E_2-членами

$$ {}^{I}E_2^{p,q} = H^p_{\mathrm{hor}}\left(H^q_{\mathrm{ver}}(V)\right) \quad \text{и} \quad {}^{II}E_2^{p,q} = H^q_{\mathrm{ver}}\left(H^p_{\mathrm{hor}}(V)\right) . \tag{5-19} $$

Если на каждой диагонали $p+q=\mathrm{const}$ бикомплекса V имеется лишь конечное число ненулевых модулей $V^{p,q}$, обе они сходятся к присоединённым градуированным факторам некоторых фильтраций на $H^{p+q}(\mathrm{Tot}(V))$. $\square$

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 1.1. Транзитивность очевидна, рефлексивность — взять $\xi = \mathrm{Id}$, кососимметричность: в силу возможности сокращать слева (соотв. справа), равенства $\varphi = \psi\xi = \varphi\xi'\xi$ (соотв. $\varphi = \xi\psi = \xi\xi'\psi$) влекут $\xi'\xi = \mathrm{Id}$ (соотв. $\xi\xi' = \mathrm{Id}$), а равенства $\psi = \varphi\xi' = \psi\xi\xi'$ (соотв. $\psi = \varphi\xi' = \psi\xi\xi'$) влекут $\xi\xi' = \mathrm{Id}$ (соотв. $\xi\xi' = \mathrm{Id}$)

Упр. 1.7. Типичный ответ: «$\ln|x| + C$, где C — произвольная константа» *неверен*[1]. На самом деле деле C является сечением *постоянного пучка* $\mathbb{R}^{\sim}$ над несвязным открытым множеством $\mathbb{R} \smallsetminus 0$.

Упр. 1.12. Элементу $a \in F(A)$ отвечает естественное преобразование

$$f_X : \mathrm{Hom}(A, X) \to F(X),$$

посылающее стрелку $\varphi : A \to X$ в значение отображения $F(\varphi) : F(A) \to F(X)$ на элементе a. Обратное отображение сопоставляет естественному преобразованию f_* значение отображения $f_A : h^A(A) \to F(A)$ на элементе $\mathrm{Id}_A \in h^A(A)$. Проверяется это с помощью построенной по произвольной стрелке $\varphi : A \to X$ диаграммы

$$\begin{tikzcd} h^A(A) = \mathrm{Hom}(A,A) \arrow[r, "h^A(\varphi)"] \arrow[d, "f_A"'] & \mathrm{Hom}(A,X) = h^A(X) \arrow[d, "f_X"] \\ F(A) \arrow[r, "F(\varphi)"] & F(X), \end{tikzcd} \tag{5-20}$$

верхняя строка которой переводит Id_A в φ, так что $f_X(\varphi) = F(\varphi)\big(f_A(\mathrm{Id}_A)\big)$.

Упр. 2.5. Непрерывному отображению $f : |X| \to Y$ из $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Top}}(|X|, Y)$ биективно соответствует естественное по $[n] \in \mathrm{Ob}\,\Delta$ преобразование $f_n : X_n \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{Top}}(\Delta^n, Y)$ из $\mathrm{Hom}_{p\mathcal{Sh}}(X, S(Y))$, сопоставляющее точке $x \in X_n$ композицию

$$f \circ \iota|_{x\times\Delta^n} : \Delta^n \to |X| \to Y,$$

где $\iota|_{x\times\Delta^n} : \Delta^n \to |X|$ это ограничение отображения факторизации[2]

$$\iota : \bigsqcup_{n\geqslant 0} X_n \times \Delta^n \to |X|$$

на правильный симплекс $\{x\}\times\Delta^n \subset X_n\times\Delta^n$ (убедитесь, что f_n функториально зависит от комбинаторного симплекса $[n]$). Обратная биекция сопоставляет естественному по $[n] \in \mathrm{Ob}\,\Delta$ набору отображений $f_n : X_n \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{Top}}(\Delta^n, Y)$ отображение $|X| \to Y$, переводящее класс точки $(x, s) \in X_n \times \Delta^n$ по модулю соотношений $(X(\varphi)x, s) = (x, \varphi s)$ в значение непрерывного отображения $f_n(x) : \Delta^n \to Y$ в точке $s \in \Delta^n$ (убедитесь, что это значение не зависит от выбора представителя (x, s) в его классе эквивалентности). Естественное преобразование $t_Y : |S(Y)| \to Y$ переводит класс пары

$$(g : \Delta^n \to Y, t \in \Delta^n) \in S_n(Y) \times \Delta^n = \mathrm{Hom}_{\mathcal{Top}}(\Delta^n, Y) \times \Delta^n,$$

[1] И в былые годы абитуриентам мехмата случалось получать за такой ответ двойку на устном вступительном экзамене по математике.

[2] Непрерывного в силу определения фактор топологии.

представляющей точку из фактор пространства $|S(Y)|$, геометрической реализации симплициального множества $S(Y)$, в точку $g(t) \in Y$ (убедитесь, что отображение t_Y корректно определено, непрерывно и функториально по топологическому пространству Y). Действие естественного преобразования $s_X : X \to S\big(|X|\big)$ над комбинаторным симплексом $[n] \in \mathrm{Ob}\,\Delta$ переводит точку $x \in X_n$ в сингулярный симплекс

$$\iota|_{x \times \Delta^n} : \Delta^n \to |X|$$

топологического пространства $|X|$ (убедитесь, что он функториален по $[n] \in \mathrm{Ob}\,\Delta$ и предпучку $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}un(\Delta^{\mathrm{opp}}, \mathcal{S}et)$).

Упр. 2.7. Начальное множество и начальное топологическое пространство пусты, конечное множество и конечное топологическое пространство это одна точка. Начальный и конечный объекты категории групп это единичная группа[1]. В категориях абелевых групп, коммутативных колец и модулей начальный и конечный объект это нуль.

Упр. 2.8. В категории групп нулевым объектом является единичная группа. В категориях абелевых групп, коммутативных колец и модулей нулевой объект это нулевая абелева группа.

Упр. 2.12. Гомоморфизмы коммутативных колец $A \leftarrow K \to A$ наделяют A и B структурами K-алгебр, и копроизведение $A \underset{K}{\otimes} B$ это *тензорное произведение* K-алгебр, т. е. фактор свободного K-модуля с базисом $A \times B$ (произведение в категории множеств) по подмодулю, порождённому всевозможными разностями

$$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, \varkappa_1 b_1 + \varkappa_2 b_2) - \sum_{i,j=1}^{2} \lambda_i \varkappa_j (a_i, b_j)$$

с $\lambda_i, \varkappa_i \in K$, $a_i \in A$, $\beta_j \in B$ (ср. с n° 2.2). Произведение на классах эквивалентности задаётся покомпонентно: $(a_1 \underset{K}{\otimes} b_1) \cdot (a_2 \underset{K}{\otimes} b_2) = (a_1 a_2) \underset{K}{\otimes} (b_1 b_2)$.

Упр. 2.14. По упр. 2.13 копредел $\underset{\to}{\mathrm{colim}}\, X$ является фактором дизъюнктного объединения $\coprod_{\nu \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}} X_\nu$ по наименьшему отношению эквивалентности, обеспечивающему равенства $x = X(\nu \to \mu)x$ для всех стрелок $\nu \to \mu$ из $\mathrm{Mor}\,\mathcal{F}$ и всех $x \in X_\nu$. При этом элементы $x_\nu \in X_\nu$ и $x_\mu \in X_\mu$ заведомо отождествляются, если $X(\nu \to \eta)x_\nu = X(\mu \to \eta)x_\mu$ для некоторой пары стрелок $\nu \to \eta \leftarrow \mu$. Достаточно убедиться, что последнее свойство является отношением эквивалентности. Его рефлексивность и симметричность очевидны. Докажем транзитивность. Если x_α эквивалентен x_β, а x_β эквивалентен x_γ, то в категории $\mathcal{F}$ имеется (не обязательно коммутативная) диаграмма из таких стре-

[1] Т. е. группа, состоящая только из единичного элемента.

лок

$$\begin{tikzcd}
 & & \varepsilon & & \\
 & & \delta \arrow[u, "\xi"] & & \\
 & \eta \arrow[ur, "\psi_{\delta\eta}"] & & \zeta \arrow[ul, "\psi_{\delta\zeta}"'] & \\
\alpha \arrow[ur, "\varphi_{\eta\alpha}"] & & \beta \arrow[ul, "\varphi_{\eta\beta}"] \arrow[ur, "\varphi_{\zeta\beta}"'] & & \gamma \arrow[ul, "\varphi_{\zeta\gamma}"']
\end{tikzcd}$$

что $X\left(\varphi_{\eta\alpha}\right)x_\alpha = X\left(\varphi_{\eta\alpha}\right)x_\beta$ и $X\left(\varphi_{\zeta\beta}\right)x_\beta = X\left(\varphi_{\zeta\gamma}\right)x_\gamma$ в категории $\mathcal{S}et$, а $\xi\psi_{\delta\eta}\varphi_{\eta\beta} = \xi\psi_{\delta\zeta}\varphi_{\zeta\beta}$ в $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(\beta, \varepsilon)$. Обозначая стрелку из последнего равенства через $\varkappa$, имеем

$$X\left(\varepsilon\psi_{\delta\eta}\varphi_{\eta\alpha}\right)x_\alpha = X(\varkappa)x_\beta = X\left(\varepsilon\psi_{\delta\zeta}\varphi_{\zeta\gamma}\right)x_\gamma\,.$$

Упр. 2.15. Применяя первое условие Оре[1] к произвольным элементам $s = s_1$ и $\varrho = s_2$ из S получаем ведущие из s_1 и s_2 стрелки λ и t с общим концом $\lambda s_1 = ts_2 \in S$. Применяя второе условие Оре[2] к паре стрелок $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_S(s, s')$, где $s' = \varphi s = \psi s$, получаем такую стрелку $t \in \mathrm{Hom}_S(s', ts')$, что $t\varphi = t\psi$.

Упр. 2.16. Так как по предыдущему упр. 2.15 категория S фильтрующаяся, у дробей $s_1^{-1}\varrho_1$ и $s_2^{-1}\varrho_2$ есть общий знаменатель, равный $t = \lambda_1 s_1 = \lambda_2 s_2 \in S$ для подходящих $\lambda_1, \lambda_2 \in R$. Тогда $s_1^{-1}\varrho_1 + s_2^{-1}\varrho_2 = t^{-1}(l_1\varrho_1 + \lambda_2\varrho_2)$.

Упр. 4.1. Воспользуйтесь единственностью нуля в абелевой группе и равенствами $\varphi\circ 0 = \varphi\circ(0+0) = \varphi\circ 0 + \varphi\circ 0$ и $0\circ\varphi = (0+0)\circ\varphi = 0\circ\varphi + 0\circ\varphi$.

Упр. 4.2. Всё вытекает из дистрибутивности: $\varphi\alpha = \varphi\beta \iff \varphi(\alpha - \beta) = 0$.

Упр. 4.6. Инъективность ι_ν и сюрьективность π_ν вытекает из равенства $\pi_\nu\iota_\nu = \mathrm{Id}_{X_\nu}$. Инъективность σ редуцируется к инъективности морфизма $X\oplus Y \to X\oplus Y$ суммы *двух* объектов при помощи леммы Цорна: рассмотрите чум таких подмножеств $S \subset N$, что отображение $\bigoplus_{\nu\in S} X_\nu \to \prod\limits_{\nu\in S} X_\nu$ инъективно.

Упр. 4.8. Если φ обратим, то он не делит нуль, откуда $\ker\varphi = 0$ и $\mathrm{coker}\,\varphi = 0$. Если $\ker\varphi = 0$ и $\mathrm{coker}\,\varphi = 0$, то по упр. 4.7 диаграмма (4-6) приобретает вид

$$\begin{tikzcd}
0 & Y \arrow[l] & Y \arrow[l, "\mathrm{Id}_Y"'] \\
0 \arrow[r] & X \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\mathrm{Id}_X"] & X\,, \arrow[u, "\mathrm{can}_\varphi"']
\end{tikzcd}$$

и обратимость can_φ влечёт обратимость φ. Если φ мономорфен или эпиморфен, его

[1]См. формулу (O_1) на стр. 30.
[2]См. формулу (O_2) на стр. 30.

каноническое разложение (4-6) имеет, соответственно, вид

$$
\begin{tikzcd}
\operatorname{coker}\varphi & Y \arrow[l, "\varsigma"'] & \ker\varsigma \arrow[l, "\varkappa'"'] \\
0 \arrow[r] & X \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, equal, "\mathrm{Id}_X"] & X \arrow[u, "\mathrm{can}_\varphi"']
\end{tikzcd}
\quad \text{или} \quad
\begin{tikzcd}
0 & Y \arrow[l] \arrow[r, equal, "\mathrm{Id}_Y"] & Y \\
\ker\varphi \arrow[r, "\varkappa"] & X \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\varsigma'"] & \operatorname{coker}\varkappa \arrow[u, "\mathrm{can}_\varphi"']
\end{tikzcd},
$$

и can_φ задаёт канонические изоморфизмы $X \xrightarrow{\sim} \ker\varsigma$ и $\operatorname{coker}\varkappa \xrightarrow{\sim} Y$.

Упр. 4.9. Коядро является фактором по *замыканию* образа. Вложение дискретной группы $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$ со стандартной топологией и плотные обмотки торов мономорфны и эпиморфны, но не обратимы.

Упр. 4.12. Если функтор F сохраняет точность троек, то он переводит каноническое разложение (4-6) любого морфизма φ в каноническое разложение морфизма $F(\varphi)$, в частности — переводит $\operatorname{im}\varphi$ в $\operatorname{im}\big(F(\varphi)\big)$.

Упр. 4.18. $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}//\mathbb{Z}$ очевидно удовлетворяют условиям лем. 4.5 на стр. 56. Гомоморфизм $\varphi : A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ с $\varphi(a) \neq 0$ сначала строится на порождённом элементом a подмодуле $\mathbb{Z}\cdot a$ (изоморфном либо $\mathbb{Z}$ либо $\mathbb{Z}/(n)$), а потом по инъективности продолжается на весь модуль A.

Упр. 4.19. Класс подобъектов любого объекта X инъективно вкладывается в множество подгрупп группы $h^P(X) = \operatorname{Hom}(P, X)$.

Упр. 4.20. Для любого $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ функтор $h_Y : Z \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(Z, Y)$ переведёт точную последовательность $\operatorname{Hom}(G, X) \otimes G \xrightarrow{c} X \to \operatorname{coker} c \to 0$ в точную последовательность

$$0 \to \operatorname{Hom}(\operatorname{coker} c, Y) to \operatorname{Hom}(X, Y) \xrightarrow{c^*} \operatorname{Hom}(G, Y)^{\operatorname{Hom}(G,X)},$$

в которой c^* сопоставляет стрелке $\varphi : X \to Y$ график функции

$$h^G(\varphi) = \varphi^* : \operatorname{Hom}(G, X) \to \operatorname{Hom}(G, Y), \quad \psi \mapsto \varphi\psi .$$

Инъективность c^* равносильна инъективности $h^G : \operatorname{Hom}(X, Y) \to \operatorname{Hom}(h^G(X), h^G(Y)$. Если $\operatorname{coker} c = 0$, отображение c^* инъективно и h^G строг. Наоборот, если h^G строг, то $\operatorname{Hom}(\operatorname{coker} c, Y) = 0$ для всех Y, и беря $Y = \operatorname{coker} c$, заключаем, что $Y = 0$.

Упр. 4.21. Воспользуйтесь функториальным по X изоморфизмом $\operatorname{Hom}_R\big(X, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\big) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(X \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\big)$.

Упр. 5.7. Равенства $\psi_*\varphi_* = 0$, $\delta\psi_* = 0$ и $\varphi_*\delta = 0$ следуют прямо из определений морфизмов φ_*, ψ_* и δ. Точность композиции $\psi_*\varphi_*$: если класс коцикла η лежит в $\ker\psi_*$, то $\psi\eta = d_W\xi$, и для такого $\eta' \in V$, что $\psi\eta' = \xi$, когомологичная коциклу η разность $\eta - d_V\eta' \in \ker\psi$, а значит, найдётся такой $\zeta \in U$, что $\varphi\zeta = \eta - d_V\eta' \equiv \eta \,(\mathrm{mod}\ d)_V(V)$. Точность композиции $\delta\psi_*$: если класс коцикла $\xi = \psi(\eta) \in \ker\delta$, то $\delta\xi = d_V\varphi\zeta$ для некоторого $\zeta \in U$, откуда $\eta - \varphi\zeta \in \ker d_V$ является коциклом в V, и $\xi = \psi(\eta - \varphi\zeta)$. Точность композиции $\varphi_*\delta$: если коцикл $\zeta \in \ker d_U$ лежит в $\ker\varphi_*$, то $\varphi\zeta = d_V\eta$ для и $\eta \in V$, и $\zeta = \delta(\psi\eta)$, причём $\psi\eta \in W$ является коциклом, т. к. $d_W(\psi\eta) = \psi d_V\eta = \psi\varphi\zeta = 0$.

Упр. 5.9. Пусть $\psi : U \to V$ и $d_V\psi = \psi d_U$. Тогда для $\varphi = \delta_W\gamma + \gamma d_V$ имеем

$$\varphi\psi = \delta_W\gamma\psi + \gamma d_V\psi = \delta_W\gamma\psi + \gamma\psi d_U\,.$$

Упр. 5.10. Если A стягиваем, то единственные отображения $\iota : 0 \to A$ и $\pi : A \to 0$ суть взаимно обратные изоморфизмы в $\mathcal{H}o$, т. к. $\pi\iota = \mathrm{Id}_0$, а $\iota\pi = 0 \sim \mathrm{Id}_A$.