§4. Абелевы категории

4.1. Аддитивные категории. Категория $\mathcal{C}$ называется *аддитивной*, если в ней есть нулевой объект[1] и прямые произведения и копроизведения любых пар объектов, а бифунктор $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(*,*)$ действует в категорию $\mathcal{Ab} = \mathbb{Z}\text{-}\mathcal{Mod}$ абелевых групп. Последнее означает, что на каждом множестве $\mathrm{Hom}(X,Y)$ имеется внутренняя структура абелевой группы[2], функториальная по каждому из аргументов в том смысле, что все композиции $\mathrm{Hom}(Y,Z)\times\mathrm{Hom}(X,Y)\to\mathrm{Hom}(X,Z)$ $\mathbb{Z}$-билинейны (или, что то же самое, дистрибутивны по отношению к сложению морфизмов), т. е.

$$(\varphi_1+\varphi_2)\circ(\psi_1+\psi_2)=\varphi_1\circ\psi_1+\varphi_1\circ\psi_2+\varphi_2\circ\psi_1+\varphi_2\circ\psi_2$$

для всех $\varphi_1,\varphi_2 : Y\to Z$, $\psi_1,\psi_2 : X\to Y$ и $X,Y,Z\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. Например, категория абелевых групп $\mathcal{Ab}$ аддитивна. Её подкатегории $R\text{-}\mathcal{Mod}$ и $\mathcal{Mod}\text{-}R$ левых и правых модулей над произвольным кольцом R тоже аддитивны.

Функтор между аддитивными категориями называется *аддитивным*, если его действия на стрелки являются гомоморфизмами абелевых групп. Все рассматриваемые далее функторы между аддитивными категориями по умолчанию предполагаются аддитивными. Нулевой элемент абелевой группы $\mathrm{Hom}(X,Y)$ называется *нулевым морфизмом* и обозначается через 0.

Упражнение 4.1. Покажите, что в аддитивной категории следующие свойства стрелки $\varphi : X\to Y$ эквивалентны: а) φ раскладывается в композицию[3] $X\to 0\to Y$ б) φ является нулевым элементом абелевой группы $\mathrm{Hom}(X,Y)$ в) $\varphi\circ\psi=0$ для любой стрелки ψ с концом в X г) $\psi\circ\varphi=0$ для любой стрелки ψ с началом в Y.

Упражнение 4.2. Покажите, что в аддитивной категории следующие свойства эндоморфизма $\varepsilon\in\mathrm{Hom}(X,X)$ эквивалентны: а) $\varepsilon=\mathrm{Id}_X$ б) $\varphi\circ\varepsilon=\varphi$ для всех стрелок φ с началом в X в) $\varepsilon\circ\varphi=\varphi$ для всех стрелок φ с концом в X.

Упражнение 4.3. Проверьте, что мономорфность[4] (соотв. эпиморфность) морфизма φ в аддитивной категории означает, что φ не является левым (соотв. правым) делителем нуля[5].

Лемма 4.1

Пусть категория $\mathcal{C}$ такова, что $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(*,*) : \mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathcal{Ab}$ является бифунктором с категорию абелевых групп. Тогда каждое произведение $X\times Y$ в $\mathcal{C}$ одновременно является и копроизведением, а каждое копроизведение $X\otimes Y$ — произведением, причём между каноническими морфизмами π_X,π_Y произведения в множители и каноническими морфизмами ι_X,ι_Y множителей в копроизведение выполняются соотношения:

$$\iota_X\pi_X+\iota_Y\pi_Y=\mathrm{Id}\,,\quad \pi_X\iota_X=\mathrm{Id}_X\,,\quad \pi_Y\iota_Y=\mathrm{Id}_Y\,,\quad \pi_X\iota_Y=0\,,\quad \pi_Y\iota_X=0\,, \tag{4-1}$$

[1] См. прим. 2.4 на стр. 24.

[2] Операцию в которой записывают аддитивно и называют *сложением морфизмов*. Для малой аддитивной категории $\mathcal{C}$ эту внутреннюю операцию на $\mathrm{Hom}(X,Y)$ не следует путать с формальным (происходящем не внутри $\mathrm{Hom}(X,Y)$, а в порождённом этим множеством свободном K-модуле) сложением стрелок в алгебре $K[\mathcal{C}]$ из прим. 1.3 на стр. 4.

[3] Т. е. является *нулевым* в смысле прим. 2.4 на стр. 24.

[4] См. n° 1.1.1 на стр. 4.

[5] Т. е. $\varphi\psi=0\Rightarrow\psi=0$ (соотв. $\psi\varphi=0\Rightarrow\psi=0$).

Наоборот, всякий объект $X \oplus Y$, включающийся в диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "\iota_X"] & X \oplus Y \arrow[l, shift left, "\pi_X"] \arrow[r, shift right, "\pi_Y"'] & Y \arrow[l, shift right, "\iota_Y"'] \end{tikzcd},$$

стрелки которой удовлетворяют соотношениям (4-1), является одновременно произведением и копроизведением объектов X и Y.

Доказательство. Пусть есть произведение $X \times Y$. Морфизмы $\iota_X \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Id}_X \times 0 : X \to X \times Y$ и $\iota_Y \stackrel{\text{def}}{=} 0 \times \mathrm{Id}_Y : Y \to X \times Y$ включаются в коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "\pi_Y"] \arrow[d, "\pi_X"'] & Y \\ X & X \arrow[l, "\mathrm{Id}_X"] \arrow[u, "0"'] \arrow[ul, "\iota_X"'] \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "\pi_Y"] \arrow[d, "\pi_X"'] & Y \\ X & Y \arrow[l, "0"] \arrow[u, "\mathrm{Id}_Y"'] \arrow[ul, "\iota_Y"'] \end{tikzcd}$$

и удовлетворяют последним четырём соотношениям (4-1). Из них вытекает, что

$$\pi_X(\iota_X\pi_X + \iota_Y\pi_Y) = \pi_X \quad \text{и} \quad \pi_Y(\iota_X\pi_X + \iota_Y\pi_Y) = \pi_Y .$$

По универсальному свойству произведения есть лишь одна стрелка $\varphi : X \times Y \to X \times Y$ с $\pi_X\varphi = \pi_X$ и $\pi_Y\varphi = \pi_Y$. Это $\varphi = \mathrm{Id}_{X\times Y}$, что доказывает первое соотношение из (4-1).

Упражнение 4.4. Докажите соотношения (4-1) в случае, когда существует копроизведение $X \otimes Y$.

Из соотношений (4-1) следует, что для любой пары стрелок $\alpha : X \to Z$ и $\beta : Y \to Z$ стрелка $\gamma : X \oplus Y \to Z$ со свойствами $\gamma\iota_X = \alpha$ и $\gamma\iota_Y = \beta$ единственна и равна $\gamma = \gamma \circ \mathrm{Id}_{X\oplus Y} = \gamma(\iota_X\pi_X + \iota_Y\pi_Y) = \alpha\pi_X + \beta\pi_Y$, а для любой пары стрелок $\alpha' : W \to X$ и $\beta' : W \to Y$ стрелка $\gamma' : W \to X \oplus Y$ со свойствами $\pi_X\gamma' = \alpha'$ и $\pi_Y\gamma' = \beta'$ также единственна и равна $\gamma' = \mathrm{Id}_{X\oplus Y} \circ \gamma' = (\iota_X\pi_X + \iota_Y\pi_Y)\gamma' = \iota_X\alpha' + \iota_Y\beta'$. □

Упражнение 4.5. Убедитесь, что в условиях лем. 4.1 любые конечные прямые произведения одновременно являются копроизведениями и наоборот, причём $\mathcal{X} = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = X_1 \otimes X_2 \otimes \cdots \otimes X_n$, если и только если существуют такие морфизмы $\iota_\nu : X_\nu \to \mathcal{X}$, $\pi_\nu : \mathcal{X} \to X_\nu$, $\varepsilon_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \iota_\nu\pi_\nu : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, что

$$\begin{gathered} \pi_\nu\iota_\mu = 0 \text{ при } \nu \neq \mu , \quad \pi_\nu\iota_\nu = \mathrm{Id}_{X_\nu} , \\ \varepsilon_\nu\varepsilon_\mu = 0 \text{ при } \nu \neq \mu , \quad \varepsilon_\nu^2 = \varepsilon_\nu , \quad \sum_\nu \varepsilon_\nu = \mathrm{Id}_{\mathcal{X}} . \end{gathered} \tag{4-2}$$

Определение 4.1 (прямые суммы)
Объект $X \oplus Y$, удовлетворяющий условиям лем. 4.1, называется *прямой суммой* объектов X и Y.

Замечание 4.1. Абелева групповая структура на множестве морфизмов $\mathrm{Hom}(X, Y)$ в аддитивной категории $\mathcal{C}$ однозначно восстанавливается по имеющимся в $\mathcal{C}$ композициям, поскольку для любых стрелок $\varphi, \psi : X \to Y$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi+\psi"] \arrow[d, "\Delta_X"'] & Y \\ X \oplus X \arrow[r, "\varphi\times\psi"'] & Y \oplus Y \arrow[u, "\nabla_Y"'] \end{tikzcd} \tag{4-3}$$

в которой диагональный морфизм $\Delta_X \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Id}{\times}\mathrm{Id} : X \to X{\times}X$, кодиагональный морфизм $\nabla_Y \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id} : Y \otimes Y \to Y$ и морфизм $\varphi \times \psi : X \times X \to Y \times Y$ ничего не знают про аддитивную структуру и имеются в любой категории $\mathcal{C}$, где есть произведения $X \times X$ и $Y \times Y = Y \otimes Y$.

Замечание 4.2. Категории $\mathcal{S}et, \mathcal{T}op, \mathcal{G}rp, \mathcal{C}mr$ не допускают функториальной структуры абелевой группы на морфизмах (в частности, не являются аддитивными), т. к. в этих категориях $X \times Y \neq X \otimes Y$.

4.1.1. Матричный формализм. Из соотношений (4-2) вытекает, что для конечных прямых сумм $\mathcal{X} = \bigoplus_\nu X_\nu$ и $\mathcal{Y} = \bigoplus_\mu Y_\mu$ в аддитивной категории имеется канонический изоморфизм абелевых групп $\mathrm{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \simeq \bigoplus_{\mu,\nu} \mathrm{Hom}(X_\nu, Y_\mu)$, сопоставляющий морфизму $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ матрицу $\Phi = \big(\varphi_{\mu\nu}\big)$ из морфизмов $\varphi_{\mu\nu} \overset{\text{def}}{=} \pi_\mu \circ \varphi \circ \iota_\nu : X_\nu \to Y_\mu$. Морфизм $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ восстанавливается из матрицы Φ по формуле $\varphi = \sum\limits_{\mu\nu} \iota_\mu \circ \varphi_{\mu\nu} \circ \pi_\nu$. При этом матрица композиции $\varphi\psi$ равна произведению матриц $\Phi\Psi$.

Пример 4.1 (прямая сумма морфизмов)
Во всякой категории с (ко)произведениями любой набор морфизмов $\gamma_\nu : X_\nu \to Y_\nu$ канонически задаёт морфизм произведений $\prod X_\alpha \to \prod Y_\alpha$ и морфизм копроизведений $\coprod X_\alpha \to \coprod Y_\alpha$, которые отвечают, соответственно, наборам стрелок

$$\gamma_\nu \circ \pi_\nu : \prod X_\alpha \to Y_\nu \quad \text{и} \quad \iota_\nu \circ \gamma_\nu : X_\nu \to \coprod Y_\nu ,$$

где $\pi_\nu : \prod X_\alpha \to X_\nu$ и $\iota_\nu : Y_\nu \to \coprod Y_\alpha$ — канонические морфизмы произведения в сомножители и сомножителей в копроизведение. Для конечных прямых сумм в аддитивных категориях эти два морфизма совпадают и называются *прямой суммой* морфизмов γ_ν. Прямая сумма морфизмов обозначается $\oplus\gamma_\nu$. Во введённых выше матричных обозначениях она изображается диагональной матрицей со стрелками γ_ν по диагонали и нулями в остальных местах.

4.1.2. Бесконечные прямые суммы и произведения. Прямой суммой $\bigoplus_\nu X_\nu$ бесконечного семейства объектов X_ν в аддитивной категории принято называть их *копроизведение* (если оно существует). Бесконечная прямая сумма может не совпадать с произведением $\prod\limits_\nu X_\nu$. Например, в категории абелевых групп произведение состоит из всевозможных семейств векторов $\{v_\nu\}$, $v_\nu \in X_\nu$, с покомпонентным сложением, а прямая сумма образована такими семействами $\{v_\nu\}$, в которых лишь конечное число элементов $v_\nu \neq 0$. В силу универсальных свойств (ко)произведений имеются функториальные по X и Y изоморфизмы

$$\mathrm{Hom}(\bigoplus_\nu X_\nu, Y) \simeq \prod_\nu \mathrm{Hom}(X_\nu, Y) \quad \text{и} \quad \mathrm{Hom}(Y, \prod_\nu X_\nu) \simeq \prod_\nu \mathrm{Hom}(Y, X_\nu) . \tag{4-4}$$

Для каждого i набор стрелок $\pi_{\nu i} : X_i \to X_\nu$, нулевых при $\nu \neq i$ и тождественной для $\nu = i$, по-прежнему задаёт такие морфизмы $\pi_i : \bigoplus_\nu X_\nu \to X_i$, что $\pi_\nu \iota_\nu = \mathrm{Id}_{X_\nu}$ при всех ν, и $\pi_\nu \iota_\mu = 0$ при $\mu \neq \nu$. Произведение стрелок π_ν задаёт морфизм

$$\sigma : \bigoplus_\nu X_\nu \to \prod_\nu X_\nu . \tag{4-5}$$

Упражнение 4.6. Убедитесь, что все ι_ν и σ инъективны, а π_ν сюрьективны.

Если все объекты X_ν являются одинаковыми копиями одного объекта X, занумерованными множеством N, мы обозначаем их прямую сумму через $N \otimes X \stackrel{\text{def}}{=} \coprod_\nu X_\nu$, а произведение — через $X^N \stackrel{\text{def}}{=} \prod_\nu X_\nu$.

4.1.3. (Ко)ядра, (ко)образы и каноническое разложение морфизма. Уравнитель нулевого морфизма и стрелки $\varphi : X \to Y$ и называется *ядром* стрелки φ и обозначается $\ker \varphi$. Если ядро существует, то вместе с такой универсальной стрелкой[1] $\varkappa : \ker \varphi \to X$, что $\varphi\varkappa = 0$ и всякий морфизм $\psi : Z \to X$, для которого $\varphi\psi = 0$, единственным способом пропускается через $\varkappa$. Коуравнитель нулевого морфизма и стрелки φ называется *коядром* и обозначается $\operatorname{coker} \varphi$. В коядро ведёт универсальная стрелка[2] $\varsigma : Y \to \operatorname{coker} \varphi$, такая что $\varsigma\varphi = 0$ и всякий морфизм $\psi : Y \to Z$, для которого $\psi\varphi = 0$, единственным способом пропускается через ς.

Упражнение 4.7. Пусть стрелка φ из аддитивной категории обладает ядром (соотв. коядром). Покажите, что каноническая стрелка $\varkappa : \ker \varphi \to X$ мономорфна (соотв. $\varsigma : Y \to \operatorname{coker} \varphi$ эпиморфна), и инъективность (соотв. сюрьективность) стрелки φ равносильна тому, что $\ker \varphi = 0$ (соотв. $\operatorname{coker} \varphi = 0$).

Ядро канонической стрелки $\varsigma : Y \to \operatorname{coker} \varphi$ называется *образом* морфизма φ и обозначается $\operatorname{im} \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \ker \varsigma$. Коядро канонической стрелки $\varkappa : \ker \varphi \to X$ называется *кообразом* морфизма φ и обозначается $\operatorname{coim} \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{coker} \varkappa$. Например, в категории абелевых групп ядро и образ стрелки $\varphi : X \to Y$ суть обычные ядро и образ гомоморфизма групп, тогда как коядро $\operatorname{coker} \varphi = Y / \operatorname{im} \varphi$, а кообраз $\operatorname{coim} \varphi = X / \ker \varphi$.

Если морфизм $\varphi : X \to Y$ имеет ядро, коядро, образ и кообраз, то в силу универсальных свойств двух последних

$$\operatorname{Hom}(\operatorname{coim} \varphi, \operatorname{im} \varphi) \simeq \{\alpha : \operatorname{coim} \varphi \to Y \mid \varsigma\alpha = 0\} \simeq \{\beta : X \to Y \mid \varsigma\beta = 0 \text{ и } \beta\varkappa = 0\}.$$

Стрелка $\operatorname{can}_\varphi : \operatorname{coim} \varphi \to \operatorname{im} \varphi$, переводимая этими изоморфизмами в исходную стрелку $\varphi : X \to Y$, это единственный морфизм, делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{coker} \varphi & Y \arrow[l, two heads, "\varsigma"'] & \operatorname{im} \varphi \arrow[l, hook', "\varkappa'"'] \\
\ker \varphi \arrow[r, hook, "\varkappa"] & X \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, two heads, "\varsigma'"] & \operatorname{coim} \varphi \arrow[u, "\operatorname{can}_\varphi"']
\end{tikzcd} \tag{4-6}$$

в которой $\varkappa, \varkappa'$ суть канонические вложения ядер, а ς, ς' — сюрьекции на коядра. Диаграмма (4-6) называется *каноническим разложением* морфизма φ. Она функториально зависит от диаграммы $X \xrightarrow{\varphi} Y$.

4.2. Абелевы категории. Аддитивная категория $\mathcal{A}$ называется *абелевой*, если каждая стрелка $\varphi \in \operatorname{Mor} \mathcal{A}$ имеет ядро и коядро, причём каноническая стрелка

$$\operatorname{can}_\varphi : \operatorname{coim} \varphi \to \operatorname{im} \varphi$$

[1] Которую тоже называют *ядром* стрелки φ.

[2] Также называемая *коядром* стрелки φ.

из разложения (4-6) является для всех φ изоморфизмом[1]. Объект $\operatorname{coim}\varphi \simeq \operatorname{im}\varphi$ называется *образом* морфизма $\varphi : X \to Y$ и обозначается $\operatorname{im}\varphi$. Он одновременно является подобъектом в Y и фактор объектом для X. Иными словами, в абелевой категории со всяким морфизмом $\varphi : X \to Y$ функториально[2] связана диаграмма

$$\ker\varphi \xhookrightarrow{\varkappa_\varphi} X \xrightarrow{\pi_\varphi} \operatorname{im}\varphi \xhookrightarrow{\iota_\varphi} Y \xrightarrow{\varsigma_\varphi} \operatorname{coker}\varphi \tag{4-7}$$

в которой через $\pi_\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{can}_\varphi \circ \varsigma'_\varphi$ и $\iota_\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \varkappa'_\varphi \circ \operatorname{can}_\varphi$ обозначены композиции морфизмов из правого нижнего и правого верхнего углов диаграммы (4-6). Обратите внимание, что стрелки $\varkappa_\varphi$ и ι_φ инъективны, а стрелки ς_φ и π_φ сюрьективны по упр. 4.7 на стр. 49.

Пример 4.2 (категории модулей)
Для любого кольца R категория $R\text{-}\mathcal{Mod}$ левых R-модулей, категория $R\text{-}\mathcal{FMod}$ свободных левых R-модулей и категория $R\text{-}\mathcal{mod}$ конечно представимых левых R-модулей абелевы. Ядра, коядра и образы в них суть ядра, коядра и образы гомоморфизмов подлежащих аддитивных абелевых групп, а совпадение образа и кообраза утверждается теоремой о строении гомоморфизма групп[3]. Разумеется, то же самое верно и для категорий правых R-модулей, а также модулей над коммутативными кольцами. В частности, категории абелевых групп и конечно порождённых абелевых групп тоже абелевы.

Упражнение 4.8. Убедитесь, что в любой абелевой категории: а) каждый мономорфизм является ядром своего коядра, а эпиморфизм — коядром своего ядра б) обратимость стрелки φ равносильна тому, что $\ker\varphi = 0$ и $\operatorname{coker}\varphi = 0$ в) $\ker\varphi$ представляет предпучок $Z \mapsto \ker\varphi_*^Z$, где $\varphi_*^Z : \operatorname{Hom}(Z,X) \to \operatorname{Hom}(Z,Y)$ это действие естественного преобразования $\varphi_* : h_X \to h_Y, \psi \mapsto \varphi\psi$, над объектом Z г) $\operatorname{coker}\varphi$ копредставляет функтор $Z \mapsto \ker\varphi_Z^*$, где $\varphi_Z^* : \operatorname{Hom}(Y,Z) \to \operatorname{Hom}(X,Z)$ это действие над Z преобразования $\varphi^* : h^Y \to h^X, \psi \mapsto \psi\varphi$.

Пример 4.3 (неабелева аддитивная категория)
Рассмотрим категорию $F\mathcal{Ab}$, объектами которой являются абелевы группы

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\,, \tag{4-8}$$

профильтрованные возрастающими подгруппами $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$, а морфизмами — такие гомоморфизмы абелевых групп $\varphi : A \to B$, что $\varphi(A_n) \subset B_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Эта категория аддитивна, и у каждого морфизма $\varphi : A \to B$ есть ядро и коядро, которые как группы совпадают с ядром и коядром морфизма φ в категории $\mathcal{Ab}$, а фильтрации на них индуцируются фильтрациями на A и B, т. е. $\ker\varphi = \bigcup(A_n \cap \ker\varphi)$ и $\operatorname{coker}\varphi = \bigcup\bigl(B_n/(B_n \cap \operatorname{im}\varphi)\bigr)$. Для фильтрованной абелевой группы (4-8) обозначим через $A[1]$ фильтрованную группу с компонентами $A[1]_p = A_{p+1}$. Отображение

[1] Иначе говоря, выполняется «основная теорема о строении гомоморфизма», утверждающая, что фактор по ядру изоморфен образу.

[2] В том смысле, что сопоставление стрелке φ диаграммы (4-7) является функтором из категории диаграмм вида $\bullet \to \bullet$ в категорию диаграмм вида $\bullet \to \bullet \to \bullet \to \bullet \to \bullet$.

[3] Т. е. о том, что образ гомоморфизма групп канонически изоморфен фактору по его ядру.

$s : A \to A[1]$, тождественно действующее на элементы группы, является морфизмом фильтрованных групп и имеет нулевые ядро и коядро, т. е. одновеменно инъективно и сюрьективно, однако, не обратимо, если $A \neq 0$. Каноническое разложение (4-6) для морфизма s имеет вид

$$\begin{tikzcd} 0 & A[1] \arrow[l] & A[1] \arrow[l, "\mathrm{Id}_{A[1]}"'] \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "s"] \arrow[r, "\mathrm{Id}_A"] & A \arrow[u, "s"'] . \end{tikzcd}$$

и стрелка $\mathrm{can}_s = s$ в нём не является изоморфизмом.

Упражнение 4.9. Убедитесь, что в категории топологических абелевых групп и их непрерывных гомоморфизмов также имеются ядра, коядра и прямые суммы, однако, она тоже не является абелевой.

4.2.1. Конечная (ко)замкнутость. В абелевой категории $\mathcal{A}$ (ко)ядро разности $\alpha - \beta$ любых двух стрелок $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ с общим началом и концом является (ко)уравнителем этих стрелок. Поэтому в абелевой категории все конечные диаграммы имеют предел и копредел[1]. В частности, в абелевой категории есть конечные послойные (ко)произведения.

Упражнение 4.10. Убедитесь, что в матричных обозначениях из n° 4.1.1 на стр. 48 послойное произведение $A \underset{C}{\times} B$ стрелок $A \xrightarrow{\alpha'} C \xleftarrow{\beta'} B$ является ядром морфизма

$$(\alpha', -\beta') : A \oplus B \to C , \tag{4-9}$$

а послойное копроизведение $A \underset{C}{\otimes} B$ стрелок $A \xleftarrow{\alpha''} C \xrightarrow{\beta''} B$ это коядро морфизма

$$\begin{pmatrix} \alpha'' \\ -\beta'' \end{pmatrix} : C \to A \oplus B . \tag{4-10}$$

4.2.2. Точные последовательности. В абелевой категории $\mathcal{A}$ композиция стрелок $\cdots \xrightarrow{\varphi} X \xrightarrow{\psi} \cdots$ в $\mathcal{A}$ называется *точной*, если $\ker \psi = \mathrm{im}\, \varphi$. Более длинная цепочка стрелок называется *точной*, если композиция любых двух последовательных стрелок в ней точна. Например, точность последовательности $0 \to X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z$ означает, что $\varphi = \ker \psi$, а точность последовательности $X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z \to 0$ это равенство $\psi = \mathrm{coker}\, \varphi$. Точные последовательности вида

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0 \tag{4-11}$$

называются *точными тройками*. Для экономии места мы иногда изображаем точную тройку (4-11) как $A \overset{\alpha}{\hookrightarrow} B \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} C$. Эта запись по умолчанию предполагает инъективность α, сюрьективность β и равенства $\alpha = \ker \beta$, $\beta = \mathrm{coker}\, \alpha$. Точность тройки

[1] См. зам. 2.1. на стр. 28.

(4-11) влечёт равенство $\beta\alpha = 0$. Обратная импликация неверна, и изучение препятствий к её наличию вылилось в целую науку, именуемую *гомологической алгеброй*.

Упражнение 4.11 (баланс точности). Допустим, что строка и столбец диаграммы

$$\begin{tikzcd} & B'' & \\ A' \arrow[r, hook, "\alpha'"] & C \arrow[u, two heads, "\beta''"'] \arrow[r, two heads, "\alpha''"] & A'' \\ & B' \arrow[u, hook, "\beta'"] & \end{tikzcd} \tag{4-12}$$

являются точными тройками. Покажите, что следующие условия равносильны: а) композиция $\beta''\alpha'$ точна б) композиция $\alpha''\beta'$ точна в) $\beta''\alpha' = 0$ и $\alpha''\beta' = 0$.

Лемма 4.2

Если у двух точных троек с общей серединой, как на диаграмме (4-12), композиция $\beta''\alpha' = 0$, то существуют единственные такие стрелки $\varphi' : A' \to B'$ и $\varphi'' : A'' \to B''$, что $\alpha' = \beta'\varphi'$ и $\beta'' = \varphi''\alpha''$. При этом стрелка φ' инъективна и канонически изоморфна $\ker(\alpha''\beta')$, стрелка φ'' сюрьективна и канонически изоморфна $\operatorname{coker}(\alpha''\beta')$, и имеется канонический изоморфизм $\operatorname{coker}\varphi' \simeq \ker\varphi''$. Иными словами, существует единственный с точностью до единственного изоморфизма объект H, достраивающий диаграмму (4-12) до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} & B'' & \\ A' \arrow[r, hook, "\alpha'"] \arrow[dr, bend right, hook, "\varphi'"'] & C \arrow[u, two heads, "\beta''"'] \arrow[r, two heads, "\alpha''"'] & A'' \arrow[ul, bend right, two heads, "\varphi''"'] \\ & B' \arrow[u, hook, "\beta'"] \arrow[r, two heads, "\psi'"'] & H, \arrow[u, hook, "\psi''"'] \end{tikzcd} \tag{4-13}$$

в которой обе тройки $A' \xhookrightarrow{\varphi'} B' \xrightarrow{\psi'} H$ и $H \xhookrightarrow{\psi''} A'' \xrightarrow{\varphi''} B''$ точны.

Доказательство. Существование и единственность стрелок φ' и φ'' вытекает из равенства $\beta''\alpha' = 0$ в силу того, что $\beta' = \ker\beta''$ и $\alpha'' = \operatorname{coker}\alpha'$. Если $\varphi'\xi = 0$, то и $\alpha'\xi = \beta'\varphi'\xi = 0$, откуда $\xi = 0$, т. к. α' инъективен. Поэтому φ' тоже инъективен. Очевидно, что $\alpha''\beta'\varphi' = \alpha''\alpha' = 0$. Если $\alpha''\beta'\eta = 0$ для некоторого $\eta : X \to B'$, то $\beta'\eta = \alpha'\eta'$ для некоего $\eta' : X \to A$, т. к. $\alpha' = \ker\alpha''$. Поскольку $\beta'\varphi'\eta' = \alpha'\eta' = \beta'\eta$, из инъективности β' вытекает равенство $\varphi'\eta' = \eta$, и в силу мономорфности φ' стрелка η' с таким свойством единственна. Поэтому $\varphi' = \ker(\alpha''\beta')$. Симметричные выкладки устанавливают эпиморфность стрелки φ'' и равенство $\varphi'' = \operatorname{coker}(\alpha''\beta')$. Изоморфизм $\operatorname{coker}\varphi' \simeq \ker\varphi''$ это канонический изоморфизм $\operatorname{coim}(\alpha''\beta') \simeq \operatorname{im}(\alpha''\beta')$, существующий в силу абелевости объемлющей категории. □

Определение 4.2 (гомология)
Объект $H = H(\beta''\alpha') \overset{\text{def}}{=} \ker\varphi'' \simeq \operatorname{coker}\varphi' \simeq \ker\beta''/\operatorname{im}\alpha'$ из лем. 4.2, однозначно с точностью до единственного изоморфизма задаваемый парой стрелок β'' и α' с $\beta''\alpha' = 0$, называется *гомологией*[1] такой пары стрелок.

Следствие 4.1
Композиция $\varphi\psi$ точна , если и только если $\varphi\psi = 0$ и $H(\varphi\psi) = 0$.

Доказательство. Применим лем. 4.2 диаграмме

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{im}\varphi & \\
\operatorname{im}\psi \arrow[r, hook, "\iota_\psi"] & X \arrow[u, two heads, "\iota_\varphi"'] \arrow[r, two heads, "\varsigma_\psi"'] & \operatorname{coker}\psi \\
 & \ker\varphi \arrow[u, hook, "\varkappa_\varphi"] &
\end{tikzcd}$$

и воспользуемся упр. 4.11. □

4.2.3. Точные функторы. Функтор $F : \mathcal{E} \to \mathcal{G}$ (соотв. $F : \mathcal{E}^{\text{opp}} \to \mathcal{G}$) между абелевыми категориями называется *точным слева*, если он переводит ядра (соотв. коядра) в ядра или, что то же самое, — точные последовательности вида $0 \to A \to B \to C$ (соотв. $A \to B \to C \to 0$) в точные последовательности $0 \to F(A) \to F(B) \to F(C)$ (соотв. в $0 \to F(C) \to F(B) \to F(A)$). Двойственным образом, F называется *точным справа*, если он переводит коядра (соотв. ядра) в коядра, или — точные последовательности вида $A \to B \to C \to 0$ (соотв. $0 \to A \to B \to C$) в точные последовательности $F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$ (соотв. в $F(C) \to F(B) \to F(A) \to 0$). Функтор называется *точным*, если он точен одновременно и справа и слева.

Упражнение 4.12. Убедитесь, что для точности функтора необходимо и достаточно, чтобы он переводил точные тройки в точные тройки, и в этом случае он сохраняет точность любых последовательностей.

Пример 4.4 (представимые функторы)
Из определения ядра тавтологически следует, что всякий копредставимый функтор $h^A : X \mapsto \operatorname{Hom}(A, X)$ (соотв. представимый функтор $h_A : X \mapsto \operatorname{Hom}(X, A)$) переводит ядра (соотв. коядра) в ядра. Тем самым, все (ко)представимые функторы точны слева.

Пример 4.5 (сопряжённые функторы)
Так как (ко)ядро является (ко)пределом диаграммы, по предл. 2.6 на стр. 32 правые сопряжённые функторы точны слева, а левые — справа. В частности, пределы точны слева, а копределы — справа, так что сл. 2.5 на стр. 32 справедливо для диаграмм в любой абелевой категории[2].

[1]Или — в зависимости от контекста — *когомологией*.

[2]Причём для конечных диаграмм в условии сл. 2.5 можно отбросить требование существования (ко)пределов — в абелевой категории они существуют автоматически

Пример 4.6 (тензорное умножение)
По сл. 2.3 для любых колец R и S с единицами функтор $\mathcal{M}od\text{-}R \to \mathcal{M}od\text{-}S$, $X \mapsto X \underset{R}{\otimes} N$, тензорного умножения на любой R-S-бимодуль N точен справа.

Упражнение 4.13 (расщепимые тройки). В произвольной абелевой категории установите эквивалентность друг другу следующих свойств тройки[1]

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

а) для любого $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ точна последовательность абелевых групп

$$0 \to \operatorname{Hom}(X, A) \xrightarrow{\alpha_*} \operatorname{Hom}(X, B) \xrightarrow{\beta_*} \operatorname{Hom}(X, C) \to 0$$

б) α инъективен, β сюрьективен, и существует такой $\beta' : B \to A$, что $\beta'\alpha = \mathrm{Id}_A$
в) α инъективен, β сюрьективен, и существует такой $\alpha' : C \to B$, что $\beta\alpha' = \mathrm{Id}_C$
г) для любого $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ точна последовательность абелевых групп

$$0 \to \operatorname{Hom}(C, X) \xrightarrow{\beta^*} \operatorname{Hom}(B, X) \xrightarrow{\alpha^*} \operatorname{Hom}(A, X) \to 0$$

д) имеется изоморфизм $\gamma : B \xrightarrow{\sim} A \oplus C$, включающийся в коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal, "\mathrm{Id}_A"'] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"'] & C \arrow[d, equal, "\mathrm{Id}_C"] \\
A \arrow[r, "\iota_A"] & A \oplus C \arrow[r, "\pi_C"] & C
\end{tikzcd}$$

4.3. Проективные и инъективные объекты. Абелева категория, в которой все точные тройки расщепимы, называется *полупростой*. Например, категория векторных пространств над любым полем и категория линейных представлений конечной группы над полем, характеристика которого не делит порядок группы, полупросты.

Напротив, категория $\mathcal{A}b = \mathcal{M}od\text{-}\mathbb{Z}$ абелевых групп не полупроста: точная тройка

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{z \mapsto 2z} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(2) \to 0 \tag{4-14}$$

нерасщепима, поскольку $\operatorname{Hom}\big(\mathbb{Z}/(2), \mathbb{Z}\big) = 0$. Точно так же неполупросты и категории модулей над другими неполупростыми кольцами и алгебрами.

В неполупростой категории (ко)представимые функторы бывают неточны справа: применяя к сюрьекции $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/(2)$ из (4-14) функтор $\operatorname{Hom}\big(\mathbb{Z}/(2), *\big)$, получаем неэпиморфную стрелку $0 \to \mathbb{Z}/(2)$, а применяя к вложению $\mathbb{Z} \xrightarrow{z \mapsto 2z} \mathbb{Z}$ из (4-14) функтор $\operatorname{Hom}\big(*, \mathbb{Z}/(2)\big)$, получим нулевой морфизм $\mathbb{Z}/(2) \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/(2)$. По той же причине вложение в (4-14) аннулируется и тензорным умножением на $\mathbb{Z}/(2)$, т. е. тензорное умножение на несвободную абелеву группу тоже неточно (слева).

[1] тройки с такими свойствами называются *расщепимыми*

Определение 4.3
Объект Q абелевой категории $\mathcal{A}$ называется *проективным* (соотв. *инъективным*), если функтор $h^Q : X \mapsto \operatorname{Hom}(Q, X)$ (соотв. функтор $h_Q : X \mapsto \operatorname{Hom}(X, Q)$) точен справа.

Упражнение 4.14. Покажите, что прямая сумма[1] проективных объектов проективна, а прямое произведение[2] инъективных объектов инъективно.

Лемма 4.3
Проективность объекта P абелевой категории $\mathcal{A}$ равносильна каждому из свойств:

(P1) любая стрелка $\varphi : P \to X$ поднимается вдоль любого эпиморфизма[3] $\pi : Y \twoheadrightarrow X$

(P2) любой эпиморфизм $\pi : Z \twoheadrightarrow P$ расщепляется, т. е. существует такой изоморфизм $\gamma : Z \xrightarrow{\sim} \ker \pi \oplus P$, что $\pi = \pi_P \gamma$.

Инъективность объекта I абелевой категории $\mathcal{A}$ равносильна каждому из свойств:

(I1) любая стрелка $\varphi : X \to I$ продолжается на любое расширение[4] $\iota : X \hookrightarrow Y$

(I2) любое вложение $\iota : I \hookrightarrow Z$ расщепляется, т. е. $\iota = \gamma \iota_I$ для некоторого изоморфизма $\gamma : I \oplus \operatorname{coker} \iota \xrightarrow{\sim} Z$.

Доказательство. Условие (P1) означает сюрьективность морфизма

$$h^P(\pi) = \pi_* : h^P(Y) \to h^P(X)$$

для любой сюрьекции $\pi : Y \twoheadrightarrow X$, т. е. точность функтора h^P справа. Если (P1) выполнено, то тождественный морфизм Id_P поднимается вдоль любого эпиморфизма $\pi : Z \twoheadrightarrow P$ до такой стрелки $\iota : P \to Z$, что $\pi\iota = \mathrm{Id}_P$. По упр. 4.13 это равносильно расщепимости точной тройки $0 \to \ker \pi \hookrightarrow Z \twoheadrightarrow P \to 0$.

Наоборот, пусть любой эпиморфизм на P расщепляется. Покажем, что любая стрелка $\varphi : P \to X$ поднимается вдоль любой сюрьекции $\pi : Y \twoheadrightarrow X$. Рассмотрим послойное произведение

$$\begin{tikzcd} Y \underset{X}{\times} P \arrow[r, two heads, shift left, "\pi'"] \arrow[d, "\varphi'"'] & P \arrow[l, dotted, shift left, "\iota"] \arrow[d, "\varphi"] \\ Y \arrow[r, two heads, "\pi"'] & X . \end{tikzcd}$$

Упражнение 4.15. Убедитесь, что в этом декартовом квадрате сюрьективность π влечёт сюрьективность π'.

Расщепляя π' стрелкой $\iota : P \hookrightarrow Y \underset{X}{\times} P$, получаем стрелку $\psi = \varphi'\iota$, поднимающую φ вдоль π. Эквивалентность условий (I1), (I2) инъективности объекта I доказывается обращением стрелок. □

Упражнение 4.16. Проведите эти рассуждения.

[1] Даже бесконечная.
[2] Даже бесконечное.
[3] Т. е. существует такая стрелка $\psi : P \to Y$, что $\varphi = \pi\psi$.
[4] Т. е. существует такая стрелка $\psi : Y \to I$, что $\psi\iota = \varphi$.

4.3.1. Проективные модули. В категории $\mathcal{M}od$-R правых модулей над произвольным кольцом R с единицей свободный модуль R ранга 1 проективен, т. к. имеется изоморфизм функторов $h^R \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id}$, действующий над модулем M естественным преобразованием $\mathrm{Hom}(R, M) \xrightarrow{\sim} M$, $\varphi \mapsto \varphi(1)$. Поэтому в силу упр. 4.14 на стр. 55 все свободные модули $E \otimes R$ тоже проективны.

Лемма 4.4
Модуль P проективентогда и только тогда, когда существует такой модуль Q, что прямая сумма $P \oplus Q$ является свободным модулем.

Доказательство. Обозначим через $S(P)$ множество векторов модуля P, а через $S(P) \otimes R$ — свободный правый R-модуль, порождённый этим множеством. Если модуль P проективен, то по лем. 4.3 канонический эпиморфизм[1] $S(P) \otimes R \twoheadrightarrow P$, $p \mapsto p$, расщепляется, т. е. $S(P) \otimes R = P \oplus Q$ для некоторого подмодуля $Q \subset S(P) \otimes R$. Наоборот, если модуль $P \oplus Q$ свободен, то для любого эпиморфизма $\pi : A \twoheadrightarrow B$ и любой стрелки $\varphi : P \to B$, стрелка $\varphi' = (\varphi, 0) \colon P \oplus Q \to B$ поднимается вдоль π до такой стрелки $\gamma = (\gamma_1, g_2) \colon P \oplus Q \to A$, что $\pi\gamma = \varphi'$. Но тогда $\pi\gamma_1 = \varphi$, т. е. компонента $\gamma_1 \colon P \to A$ поднимает стрелку φ вдоль π. □

Упражнение 4.17. Убедитесь в обратном: если модуль $P \oplus Q = E \otimes R$ свободен, то и P, и Q проективны.

4.3.2. Инъективные модули. Инъективность модуля I означает возможность деления в нём на любые необратимые элементы кольца.

Лемма 4.5
Правый R-модуль I инъективен , если и только если для любого правого идеала $\mathfrak{q} \subset R$ и любого R-линейного справа гомоморфизма $q : \mathfrak{q} \to I$ имеется такой вектор $e_q \in I$, что $q(x) = e_q \cdot x$ для всех $x \in \mathfrak{q}$, т. е. в I имеется частное $q(x)/x = e_q$.

Доказательство. Импликация ⇒ вытекает из лем. 4.3: продолжим q до R-линейного справа гомоморфизма $q' \colon R \to I$ и возьмём $e_q = q'(1)$. Для доказательства обратной импликации рассмотрим произвольное расширение модулей $N \subset M$ и продолжим любой R-линейный гомоморфизм $\varphi \colon N \to M$ на M при помощи леммы Цорна: подмодули $N \subseteq N' \subseteq M$, на которые φ продолжается, образуют чум по включению, в котором каждая линейно упорядоченная цепочка мажорируется своим объединением. Поэтому существует максимальный по включению подмодуль $L \supseteq N$ с таким гомоморфизмом $\psi \colon L \to I$, что $\psi|_N = \varphi$. Если имеется вектор $m \in M \smallsetminus L$, то подмодуль L', порождённый L и m, строго больше L, и для завершения доказательства достаточно продолжить ψ на $L' \simeq L \oplus R/\ker \pi_m$, где $\pi_m \colon L \oplus R \twoheadrightarrow L'$, $(\ell, x) \mapsto \ell + mx$. Ядро

$$\ker \pi_m = \{(\ell, x) \mid mx = -\ell \in L\}$$

изоморфно правому идеалу $\mathfrak{k} = \{x \in R \mid mx \in L\}$ и R-линейно отображается в I по правилу $x \mapsto \psi(mx)$. Берём вектор $e = \psi(mx)/x \in I$, такой что $\psi(mx) = e \cdot x$ для всех $x \in \mathfrak{k}$, и задаём продолжение $\psi' \colon L' \to I$ правилом $\psi'(\ell + mx) = \psi(\ell) + e \cdot x$. □

[1] См. прим. 2.1 на стр. 18.

Упражнение 4.18. Убедитесь в корректности последнего правила и проверьте, что $\mathbb{Z}$-модули $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ инъективны, причём второй замечателен тем, что для любого $\mathbb{Z}$-модуля A и любого элемента $a \in A$ есть гомоморфизм $\varphi : A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ с $\varphi(a) \neq 0$.

4.4. Порождающие объекты. Объект G абелевой категории $\mathcal{A}$ называется *генератором*[1] (соотв. *когенератором*) категории $\mathcal{A}$, если функтор $h^G : X \mapsto \mathrm{Hom}(G, X)$ (соотв. функтор $h_G : X \mapsto \mathrm{Hom}(X, G)$) строг, т. е. переводит разные стрелки в разные[2]. Например, свободный модуль R ранга 1 порождает категорию $\mathcal{M}od$-R, ибо функтор $h^R \simeq \mathrm{Id}$ строг и даже вполне строг.

Упражнение 4.19. Покажите, что абелева категория с генератором умеренно мощна[3].

4.4.1. Каноническая (ко)свёртка. Для произвольных объектов G, X рассмотрим прямую сумму

$$\mathrm{Hom}(G, X) \otimes G \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{\varphi : G \to X} \varphi \otimes G$$

одинаковых копий G, занумерованных стрелками $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, X)$, и отобразим слагаемое $\varphi \otimes G$ в X при помощи стрелки $\varphi : G \to X$. Получим морфизм

$$c : \mathrm{Hom}(G, X) \otimes G \to X , \tag{4-15}$$

который называется *канонической свёрткой*. Двойственным образом, рассмотрим для объектов Y, C прямое произведение

$$C^{\mathrm{Hom}(Y,C)} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\varphi : Y \to C} C^{\varphi}$$

одинаковых копий C, занумерованных стрелками $\varphi : Y \to C$, и отобразим Y в сомножитель C^{φ} при помощи стрелки $\varphi : Y \to C$. Получим морфизм

$$c' : Y \to C^{\mathrm{Hom}(Y,C)} \tag{4-16}$$

который называется *канонической косвёрткой*.

Предложение 4.1
Кополная абелева категория $\mathcal{A}$ тогда и только тогда порождается объектом G, когда для любого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ каноническая свёртка (4-15) эпиморфна. Полная абелева категория тогда и только тогда копорождается объектом C, когда для любого $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ каноническая косвёртка (4-16) мономорфна.

Доказательство. Докажем второе. Применим к морфизму (4-16) сохраняющий ядра функтор h^X с произвольным $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Получим точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(X, \ker c') \to \mathrm{Hom}(X, Y) \xrightarrow{c'_*} \mathrm{Hom}(X, C)^{\mathrm{Hom}(Y,C)}$$

[1](ко)генераторы также называют (*ко*)*порождающими объектами* категории $\mathcal{A}$
[2]или, эквивалентно, ненулевые — в ненулевые
[3]См. опр. 1.1 на стр. 5.

морфизм c'_* которой переводит стрелку $\varphi : X \to Y$ в график отображения

$$\varphi^* : \mathrm{Hom}(Y, C) \to \mathrm{Hom}(X, C), \quad \psi \mapsto \psi\varphi.$$

Тем самым, инъективность c'_* равносильна инъективности действия функтора

$$h_C : \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}\left(h_C(Y), h_C(X)\right).$$

Если $\ker c' = 0$, отображение c'_* инъективно для всех X, Y, т. е. функтор h_C строг. Наоборот, если h_C строг, то $\mathrm{Hom}(X, \ker c') = 0$ для всех X, и беря $X = \ker c'$, заключаем, что $\ker c' = 0$. □

Упражнение 4.20. Докажите первую часть предл. 4.1 и покажите, что любой модуль является коядром гомоморфизма свободных модулей.

Следствие 4.2
Инъективная абелева группа $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ копорождает категорию абелевых групп.

Доказательство. Косвёртка $c' : A \to \left(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right)^{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})}$ инъективна по упр. 4.18. □

Упражнение 4.21. Убедитесь, что абелева группа $I_R = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ со структурой правого R-модуля, задаваемой левым действием R на себе (соотв. со структурой левого R-модуля, задаваемой правым действием R на себе), является инъективным когенератором категории $\mathcal{M}od\text{-}R$ (соотв. категории $R\text{-}\mathcal{M}od$).

4.4.2. Компактные объекты. Объект K козамкнутой абелевой категории $\mathcal{A}$ называется *компактным*, если функтор $h^K : Z \mapsto \mathrm{Hom}(K, Z)$ коммутирует с бесконечными копределами. Поскольку любой копредел является коуравнителем пары стрелок между прямыми суммами[1], компактность равносильна тому, что h^K переводит прямые суммы в прямые суммы или, эквивалентно, что образ вложения (4-5)

$$\sigma_* : \mathrm{Hom}(K, \bigoplus_\nu X_\nu) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(K, \prod_\nu X_\nu) \simeq \prod_\nu \mathrm{Hom}(K, X_\nu)$$

лежит в $\bigoplus_\nu \mathrm{Hom}(K, X_\nu) \subset \prod_\nu \mathrm{Hom}(K, X_\nu)$. Например, проективный генератор R категории R-модулей компактен.

Упражнение 4.22. Покажите, что компактность проективного модуля равносильна его конечной порождённости.

4.5. Модули над кольцом. Выше мы уже видели, что абелева категория $\mathcal{M}od\text{-}R$ правых модулей[2] над произвольным кольцом R с единицей полна и кополна, обладает инъективным когенератором и компактным проективным генератором. Последнее свойство выделяет категории модулей среди прочих абелевых категорий.

Теорема 4.1
Козамкнутая абелева категория $\mathcal{A}$ с компактным проективным генератором P точно эквивалентна[3] категории $\mathcal{M}od\text{-}R$ правых R-модулей над кольцом $R = \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(P)$.

[1] см. доказательство предл. 2.4 на стр. 27
[2] равно как и категория $R\text{-}\mathcal{M}od$ левых R-модулей
[3] Т. е. имеется эквивалентность категорий, переводящая точные тройки в точные тройки.

Доказательство. Функтор $h^P : \mathcal{A} \to \mathcal{Ab}$ принимает значение в $\mathcal{M}od$-R: правое действие $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,P)$ на абелевой группе $h^P(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,X)$ задаётся правым умножением стрелок на f. В силу проективности P функтор h^P точен. Проверим, что он по-существу сюрьективен и вполне строг[1]. Из предл. 4.1 вытекает, что любой объект $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ представляется в виде коядра морфизма между прямыми суммами подходящих множеств I, J одинаковых копий генератора P:

$$I \otimes P \xrightarrow{\varphi} J \otimes P \twoheadrightarrow X \to 0\,. \tag{4-17}$$

Морфизм φ задаётся некоторой матрицей Φ формата $I \times J$ с элементами

$$\varphi_{ij} \in \mathrm{Hom}(j \otimes P, i \otimes P) \simeq \mathrm{Hom}(P,P) = R\,,$$

имеющей при каждом j лишь конечное число ненулевых φ_{ij}. Применяя к (4-17) функтор h^P и пользуясь компактностью P получаем для $h^P(X)$ представление в виде коядра морфизма свободных R-модулей

$$I \otimes R \xrightarrow{\varphi_*} J \otimes R \twoheadrightarrow h^P(X) \to 0\,, \tag{4-18}$$

который задаётся правым умножением строки $(x_i) \in I \otimes R$ на матрицу Φ. Так как каждый R-модуль является коядром гомоморфизма свободных R-модулей, функтор h^P по-существу сюрьективен. Для любого $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ группа $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)$ является ядром стрелки $h_Y(\varphi)$, получающейся применением $h_Y : Z \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{Ab}}(Z,Y)$ к диаграмме (4-17), а группа $\mathrm{Hom}_R\left(h^P(X), h^P(Y)\right)$ является коядром стрелки $h_{h^P(Y)}(\varphi_*)$, получающейся применением $h_{h^P(Y)} : M \mapsto \mathrm{Hom}_R(Z, h^P(Y))$ к диаграмме (4-17). Эти стрелки совпадают друг с другом, представляя собою гомоморфизм $h^P(Y)^J \to h^P(Y)^I$ прямых произведений одинаковых копий группы $h^P(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,Y)$, задаваемый транспонированной матрицей Φ^t. Тем самым, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y) \simeq \mathrm{Hom}_R\left(h^P(X), h^P(Y)\right)$. □

Теорема 4.2 (эквивалентность Мориты)
Следующие три свойства колец R и S с единицами эквивалентны друг другу:

(1) категории $\mathcal{M}od$-R и $\mathcal{M}od$-S точно эквивалентны

(2) $R \simeq \mathrm{Hom}_S(P,P)$ для некоторого конечно порождённого проективного S-модуля P, являющегося генератором категории $\mathcal{M}od$-S

(3) существует такой R-S бимодуль T, что тензорное умножение $\mathcal{M}od$-$R \to \mathcal{M}od$-S, $M \mapsto M \underset{R}{\otimes} T$, является точной эквивалентностью категорий.

Доказательство. Если выполнено (1), то по теор. 4.1, применённой к $\mathcal{A} = \mathcal{M}od$-$S$, в $\mathcal{M}od$-S имеется компактный проективный генератор P с $\mathrm{Hom}_S(P,P) = R$, что даёт (2), поскольку компактный проективный модуль конечно порождён[2]. Если выполнено (2), положим[3] $T \overset{\text{def}}{=} P$ и покажем, что функторы

$$\mathcal{M}od\text{-}R \to \mathcal{M}od\text{-}S,\ M \mapsto M \underset{R}{\otimes} P, \quad \text{и} \quad \mathcal{M}od\text{-}S \to \mathcal{M}od\text{-}R\,,\ N \mapsto \mathrm{Hom}(P,N)\,,$$

[1] См. лем. 1.1 на стр. 13.
[2] См. упр. 4.22 на стр. 58.
[3] отметим, что на правом S-модуле P имеется каноническая структура левого модуля над кольцом $R = \mathrm{End}_S(P)$

квазиобратны друг другу. Так как эти функторы сопряжены[1]:

$$\mathrm{Hom}_S\big(M \underset{R}{\otimes} P, N\big) \simeq \mathrm{Hom}_R\big(N, \mathrm{Hom}_S(P,N)\big)\,,$$

имеется естественное преобразование[2] $\mathrm{Hom}_S(P,N) \underset{R}{\otimes} P \rightsquigarrow N$, $\varphi \underset{R}{\otimes} p \mapsto \varphi(p)$, и естественное преобразование $M \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_S(P, M \underset{R}{\otimes} P)$, переводящее $m \in M$ в семейство гомоморфизмов $\varphi_m : P \to M \underset{R}{\otimes} P$, $p \mapsto m \underset{R}{\otimes} p$. Если P является проективным генератором, то оба эти преобразования — изоморфизмы. □

Упражнение 4.23. Убедитесь в этом.

Определение 4.4
Кольца R и S, удовлетворяющие условиям теор. 4.2, называются *Морита-эквивалентными*, а функторы $M \mapsto M \underset{R}{\otimes} P$ и $N \mapsto \mathrm{Hom}(P,N)$ называются *эквивалентностями Мориты*.

Упражнение 4.24. Покажите, что категория R-модулей точно эквивалентна категории модулей над кольцом матриц $\mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$ любого конечного размера.

Теорема 4.3 (простая теорема Митчела о вложении)
Если абелева категория $\mathcal{B}$ полна и имеет проективный генератор[3], то любая её малая полная точная[4] абелева подкатегория $\mathcal{A}$ допускает точное вполне строгое вложение в категорию правых модулей над некоторым кольцом с единицей.

Доказательство. Обозначим через P проективный генератор категории $\mathcal{B}$, а через J — произведение множеств $\mathrm{Hom}(P,X)$ по всем $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Тогда $Q = J \otimes P$ тоже является генератором $\mathcal{B}$, и для каждого $X \in \mathcal{A}$ существует сюрьективный морфизм $\psi_X : Q \twoheadrightarrow X$. Положим $R = \mathrm{End}_{\mathcal{B}}(Q)$ и как в доказательстве теор. 4.1 проверим, что точный строгий[5] функтор $h^Q : \mathcal{A} \to \mathcal{M}od\text{-}R$, $X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Q,X)$, вполне строг. Для этого представим произвольный $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ как коядро гомоморфизма $\varphi = \psi_{\ker \psi_X}$:

$$Q \xrightarrow{\varphi} Q \xrightarrow{\psi_X} X \to 0\,.$$

Применение точного функтора h^Q задаёт $h^Q(X)$ как коядро левого умножения

$$R \xrightarrow{\varphi_*} R \to h^Q(X) \to 0$$

на элемент $\varphi \in R$. Применяя к этой диаграмме $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}R}\big(\,*\,, h^Q(Y)\big)$, а к предыдущей — $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\,*\,,Y)$, получаем для $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)$ и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}R}\big(h^Q(X), h^Q(Y)\big)$ одинаковое представление в виде ядра правого умножения на φ в модуле $h^Q(Y)$. □

[1] См. предл. 2.3 на стр. 21.
[2] См. формулу (2-2) на стр. 18.
[3] Не обязательно компактный.
[4] Т. е. такая, что точные тройки из $\mathcal{A}$ точны и в $\mathcal{B}$.
[5] Так как Q это проективный генератор.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 4.1. Воспользуйтесь единственностью нуля в абелевой группе и равенствами $\varphi\circ 0 = \varphi\circ(0+0) = \varphi\circ 0 + \varphi\circ 0$ и $0\circ\varphi = (0+0)\circ\varphi = 0\circ\varphi + 0\circ\varphi$.

Упр. 4.2. Всё вытекает из дистрибутивности: $\varphi\alpha = \varphi\beta \iff \varphi(\alpha-\beta) = 0$.

Упр. 4.6. Инъективность ι_ν и сюрьективность π_ν вытекает из равенства $\pi_\nu\iota_\nu = \mathrm{Id}_{X_\nu}$. Инъективность σ редуцируется к инъективности морфизма $X\oplus Y \to X\oplus Y$ суммы *двух* объектов при помощи леммы Цорна: рассмотрите чум таких подмножеств $S\subset N$, что отображение $\bigoplus_{\nu\in S} X_\nu \to \prod\limits_{\nu\in S} X_\nu$ инъективно.

Упр. 4.8. Если φ обратим, то он не делит нуль, откуда $\ker\varphi = 0$ и $\operatorname{coker}\varphi = 0$. Если $\ker\varphi = 0$ и $\operatorname{coker}\varphi = 0$, то по упр. 4.7 диаграмма (4-6) приобретает вид

$$\begin{tikzcd} 0 & Y \arrow[l] & Y \arrow[l, "\mathrm{Id}_Y"'] \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\mathrm{Id}_X"] & X \arrow[u, "\mathrm{can}_\varphi"'] \end{tikzcd},$$

и обратимость can_φ влечёт обратимость φ. Если φ мономорфен или эпиморфен, его каноническое разложение (4-6) имеет, соответственно, вид

$$\begin{tikzcd} \operatorname{coker}\varphi & Y \arrow[l, "\varsigma"'] & \ker\varsigma \arrow[l, "\varkappa'"'] \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, equal, "\mathrm{Id}_X"] & X \arrow[u, "\mathrm{can}_\varphi"'] \end{tikzcd} \quad \text{или} \quad \begin{tikzcd} 0 & Y \arrow[l] \arrow[r, equal, "\mathrm{Id}_Y"] & Y \\ \ker\varphi \arrow[r, "\varkappa"] & X \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\varsigma'"] & \operatorname{coker}\varkappa \arrow[u, "\mathrm{can}_\varphi"'] \end{tikzcd},$$

и can_φ задаёт канонические изоморфизмы $X \simeq \ker\varsigma$ и $\operatorname{coker}\varkappa \simeq Y$.

Упр. 4.9. Коядро является фактором по *замыканию* образа. Вложение дискретной группы $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$ со стандартной топологией и плотные обмотки торов мономорфны и эпиморфны, но не обратимы.

Упр. 4.12. Если функтор F сохраняет точность троек, то он переводит каноническое разложение (4-6) любого морфизма φ в каноническое разложение морфизма $F(\varphi)$, в частности — переводит $\operatorname{im}\varphi$ в $\operatorname{im}\bigl(F(\varphi)\bigr)$.

Упр. 4.18. $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}//\mathbb{Z}$ очевидно удовлетворяют условиям лем. 4.5 на стр. 56. Гомоморфизм $\varphi : A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ с $\varphi(a)\neq 0$ сначала строится на порождённом элементом a подмодуле $\mathbb{Z}\cdot a$ (изоморфном либо $\mathbb{Z}$ либо $\mathbb{Z}/(n)$), а потом по инъективности продолжается на весь модуль A.

Упр. 4.19. Класс подобъектов любого объекта X инъективно вкладывается в множество подгрупп группы $h^P(X) = \mathrm{Hom}(P,X)$.

Упр. 4.20. Для любого $Y\in\operatorname{Ob}\mathcal{A}$ функтор $h_Y : Z\mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Z,Y)$ переведёт точную последовательность $\mathrm{Hom}(G,X)\otimes G \xrightarrow{c} X \to \operatorname{coker} c \to 0$ в точную последовательность

$$0\to \mathrm{Hom}(\operatorname{coker} c, Y) to \mathrm{Hom}(X,Y) \xrightarrow{c^*} \mathrm{Hom}(G,Y)^{\mathrm{Hom}(G,X)},$$

в которой c^* сопоставляет стрелке $\varphi : X \to Y$ график функции

$$h^G(\varphi) = \varphi^* : \mathrm{Hom}(G, X) \to \mathrm{Hom}(G, Y), \quad \psi \mapsto \varphi\psi .$$

Инъективность c^* равносильна инъективности $h^G : \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(h^G(X), h^G(Y)$. Если $\mathrm{coker}\, c = 0$, отображение c^* инъективно и h^G строг. Наоборот, если h^G строг, то $\mathrm{Hom}(\mathrm{coker}\, c, Y) = 0$ для всех Y, и беря $Y = \mathrm{coker}\, c$, заключаем, что $Y = 0$.

Упр. 4.21. Воспользуйтесь функториальным по X изоморфизмом $\mathrm{Hom}_R\big(X, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\big) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(X \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\big)$.