§2. Сопряжённые функторы и (ко)пределы

2.1. Сопряжённые функторы. Если функторы $\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$ между категориями $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ связаны функториальным по $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ и $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ изоморфизмом

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)), \tag{2-1}$$

то F называется *левым сопряжённым* функтором к G, а G — *правым сопряжённым* к F. С каждой парой сопряжённых функторов связаны естественные преобразования

$$t : F \circ G \to \operatorname{Id}_{\mathcal{D}} \quad \text{и} \quad s : \operatorname{Id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F. \tag{2-2}$$

Стрелка $t_Y : FG(Y) \to Y$, задающая действие преобразования t над $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$, является образом элемента $\operatorname{Id}_{G(Y)}$ при изоморфизме (2-1), написанном для $X = G(Y)$:

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(FG(Y), Y) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(G(Y), G(Y)) \ni \operatorname{Id}_{G(Y)}.$$

Двойственным образом, стрелка $s_X : X \to GF(X)$ получается из $\operatorname{Id}_{F(X)}$ при изоморфизме (2-1), написанном для $Y = F(X)$:

$$\operatorname{Id}_{F(X)} \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(X)) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GF(X)).$$

Пример 2.1 (продолжение прим. 1.15 про свободные модули)
Изоморфизм из форм. (1-14) на стр. 17 означает, что функтор

$$F : \mathcal{S}et \to R\text{-}\mathcal{M}od, \quad E \mapsto R \otimes E,$$

сопоставляющий произвольному множеству E свободный левый R-модуль с базисом E, сопряжён слева к забывающему функтору $G : R\text{-}\mathcal{M}od \to \mathcal{S}et$, переводящему модуль в множество его элементов, т. е. $\operatorname{Hom}_{R\text{-}\mathcal{M}od}(R \otimes E, M) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{S}et}\big(E, G(M)\big)$ функториально по модулю M и множеству E. Естественное преобразование

$$s_E : E \hookrightarrow G(A \otimes E)$$

вкладывает E в качестве множества базисных векторов в множество всех векторов свободного модуля $R \otimes E$. Естественное преобразование

$$t_M : R \otimes G(M) \twoheadrightarrow M$$

это R-линейный эпиморфизм огромного свободного модуля, базисом которого служит множество всех векторов модуля M, на модуль M. Он переводит каждый базисный вектор m в элемент $m \in M$, а формальную линейную комбинацию базисных векторов — в результат её вычисления внутри модуля M. Так, при $M = R = \mathbb{R}$ векторное пространство $\mathbb{R} \otimes G(\mathbb{R})$ изоморфно пространству всех функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с конечным носителем, а преобразование $t_{\mathbb{R}}$ сопоставляет такой функции вещественное число, равное сумме всех её (ненулевых) значений.

Предложение 2.1
Для существования левого сопряжённого функтора $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ к данному функтору $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ функтор

$$h_G^X : \mathcal{D} \to \mathcal{S}et\,, \quad Y \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X, G(Y)\big)\,, \tag{2-3}$$

был копредставим, и в этом случае $F(X)$ является его копредставляющим объектом.

Доказательство. Необходимость очевидна из определений. Докажем достаточность. Пусть для каждого $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ функтор (2-3) представляется объектом $F(X)$, т. е. имеется естественный изоморфизм функторов $f^X : h^{F(X)} \xrightarrow{\sim} h_G^X$. Чтобы продолжить соответствие $X \mapsto F(X)$ до функтора $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ заметим, что морфизм $\varphi : X_1 \to X_2$ задаёт естественное преобразование $\varphi^* : h_G^{X_2} \to h_G^{X_1}$ заключающееся в правом умножении на φ: стрелка $\psi : X_2 \to G(Y)$ переходит в $\psi\varphi : X_1 \to G(Y)$. Из леммы Ионеды вытекает[1], что композиция естественных преобразований $\left(f^{X_1}\right)^{-1} \circ \varphi^* \circ f^{X_2} : h^{F(X_2)} \to h^{F(X_1)}$ задаётся правым умножением на единственную стрелку $F(X_1) \to F(X_2)$, которую мы и объявим образом $F(\varphi)$ стрелки φ под действием функтора F. Прямо по построению мы получаем функториальный по X изоморфизм $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$. □

Упражнение 2.1. Докажите двойственное утверждение: для существования правого сопряжённого функтора G к функтору $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ был представим предпучок $h_Y^G : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, переводящий $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ в $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y)$, и $G(X)$ в этом случае его и представляет.

Предложение 2.2
Функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ тогда и только тогда сопряжён слева к функтору $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, когда существуют такие естественные преобразования $t : F \circ G \to \operatorname{Id}_{\mathcal{D}}$ и $s : \operatorname{Id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F$, что композиции $F \xrightarrow{F\circ s} FGF \xrightarrow{t\circ F} F$ и $G \xrightarrow{s\circ G} GFG \xrightarrow{G\circ t} G$ являются тождественными эндоморфизмами функторов F и G.

Доказательство. Если имеются функториальные по X и Y изоморфизмы

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(X), Y\big) \arrow[rr, bend left, "\varrho"] && \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X, G(Y)\big) \arrow[ll, bend left, "\lambda"] \end{tikzcd} \tag{2-4}$$

то для любой стрелки $\varphi : X_1 \to X_2$ в $\mathcal{C}$ и любого Y из $\mathcal{D}$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X_1), Y) & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, G(Y)) \arrow[l, "\lambda"', "\sim"] \\ \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X_2), Y) \arrow[u, "F(\varphi)^*"'] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_2, G(Y)) \arrow[l, "\lambda"', "\sim"] \arrow[u, "\varphi^*"'] \end{tikzcd}$$

вертикальные стрелки которой задаются правым умножением на $F(\varphi)$ и на φ соответственно. Рисуя это для $Y = F(X)$ и морфизма $\varphi = s_X : X \to GF(X)$, который задаёт

[1] См. сл. 1.1 на стр. 14.

действие над объектом X естественного преобразования $s : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to GF$ из форм. (2-2) на стр. 18, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(X)) & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GF(X)) \arrow[l, "\lambda"', "\sim"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FGF(X), F(X)) \arrow[u, "F(s_X)^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GF(X), GF(X)) \arrow[l, "\lambda"', "\sim"] \arrow[u, "s_X^*"']
\end{tikzcd}$$

верхняя стрелка λ которой переводит s_X в $\mathrm{Id}_{F(X)}$, а нижняя стрелка λ переводит $\mathrm{Id}_{GF(X)}$ в морфизм $t_{F(X)} : FGF(X) \to F(X)$, задающий действие второго естественного преобразования $t : FG \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ из формулы (2-2) над объектом $F(X)$. Таким образом,

$$\mathrm{Id}_{F(X)} = \lambda(s_X) = \lambda s_X^* \left(\mathrm{Id}_{GF(X)}\right) = F(s_X)^* \lambda \left(\mathrm{Id}_{GF(X)}\right) = F(s_X)^* \left(t_{F(X)}\right) = t_{F(X)} \circ F(s_X),$$

а это и значит, что композиция $F \xrightarrow{F\circ s} FGF \xrightarrow{t\circ F} F$ задаёт тождественное преобразование функтора F. Проверка того, что $G \xrightarrow{s\circ G} GFG \xrightarrow{G\circ t} G$ совпадает с Id_G полностью симметрична. Наоборот, если имеются преобразования $s : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to GF$ и $t : FG \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$, зададим в (2-4) действие λ и ϱ на стрелки $\varphi : F(X) \to Y$ и $\psi : X \to G(Y)$ правилами:

$$\varrho(\varphi) = G(\varphi) \circ s_X \quad \text{и} \quad \lambda(\psi) = t_Y \circ F(\psi),$$

в правых частях которых стоят сквозные отображения вдоль стрелок

$$X \xrightarrow{s_X} GF(X) \xrightarrow{G(\varphi)} G(Y) \quad \text{и} \quad F(X) \xrightarrow{F(\psi)} FG(Y) \xrightarrow{t_Y} Y.$$

Композиция $\lambda\varrho(\varphi) = t_Y \circ FG(\varphi) \circ F(s_X) : F(X) \to Y$ представляет собою путь из левого нижнего угла в правый верхний на диаграмме

$$\begin{tikzcd}
& F(X) \arrow[rr, "\varphi"] & & Y \\
F(X) \arrow[ur, equal, "\mathrm{Id}_{F(X)}"] \arrow[rr, "F(s_X)"] & & FGF(X) \arrow[ul, "t_{F(X)}"'] \arrow[rr, "FG(\varphi)"] & & FG(Y) \arrow[ul, "t_Y"']
\end{tikzcd}$$

правый параллелограмм которой коммутативен в силу естественности преобразования t, а левый треугольник — в силу равенства $F \xrightarrow{F\circ s} FGF \xrightarrow{t\circ F} F$ и Id_F. Поэтому $\lambda\varrho(\varphi) = \varphi$. Равенство $\varrho\lambda(\psi) = \psi$ проверяется симметричным образом. □

2.2. Тензорные произведения и Hom. Пусть R — произвольное кольцо с единицей. Тензорным произведением $M \underset{R}{\otimes} N$ правого R-модуля M на левый R-модуль N называется фактор тензорного произведения абелевых групп[1] $M \otimes N$ по подгруппе, порождённой всевозможными разностями

$$(mx) \otimes n - m \otimes (xn), \quad \text{где} \quad m \in M, \ x \in R, \ n \in N.$$

[1] Или, что то же самое, $\mathbb{Z}$-модулей.

Это абелева группа, на которой кольцо R никак не действует, но в которой выполняются соотношения $(mx)\underset{R}{\otimes} n = m\underset{R}{\otimes}(xn)$. Тензорное умножение на фиксированный левый R-модуль N задаёт функтор из категории правых R-модулей в абелевы группы

$$\mathcal{M}od\text{-}R \to \mathcal{A}b\,, \quad X \mapsto X\underset{R}{\otimes} N\,,$$

переводящий стрелку $\varphi : X_1 \to X_2$ в стрелку $\varphi \otimes 1 : m\underset{R}{\otimes} n \mapsto \varphi(m)\underset{R}{\otimes} n$. Если левый R-модуль N одновременно является правым модулем над ещё одним кольцом S с единицей и правое действие S коммутирует с левым действием R (такие N называются *R-S бимодулями*), функтор тензорного умножения на N отображает $\mathcal{M}od\text{-}R$ в $\mathcal{M}od\text{-}S$: кольцо S действует на $M\otimes N$ справа по правилу $(m\otimes n)y = m\otimes(ny)$. С другой стороны, имеется функтор $h^N : \mathcal{M}od\text{-}S \to \mathcal{A}b\,, Y \mapsto \operatorname{Hom}_S(N,Y)\,$, который принимает значения в $\mathcal{M}od\text{-}R$: правое действие $x \in R$ на $\operatorname{Hom}_S(N,Y)$ переводит S-линейную справа стрелку $\varphi : N \to Y$ в стрелку $\varphi x : n \mapsto \varphi(xn)$ (так что выполняется равенство $(\varphi x)n = \varphi(xn)$).

Предложение 2.3
Тензорное умножение на R-S-бимодуль N сопряжено слева функтору h^N, т. е. имеется естественный по $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{M}od\text{-}R$ и $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{M}od\text{-}S$ изоморфизм абелевых групп

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}\big(X\underset{R}{\otimes} N, Y\big) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}R}\big(X, \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(N,Y)\big)\,. \tag{2-5}$$

Доказательство. Отображение из левой части (2-5) в правую сопоставляет S-линейному справа гомоморфизму $\varphi : X\underset{R}{\otimes} N \to Y$ зависящее от $x \in X$ семейство гомоморфизмов $\varphi_x : N \to Y, n \mapsto \varphi(x\otimes n)$. Каждый из них S-линеен справа:

$$\varphi_x(ns) = \varphi(x\underset{R}{\otimes} ns) = \varphi(x\underset{R}{\otimes} n)s = \varphi_x(n)s\,,$$

а сопоставление $x \mapsto \varphi_x$, как отображение $X \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(N,Y)\,$, R-линейно справа:

$$\varphi_{xr} n = \varphi(xr\underset{R}{\otimes} n) = \varphi(x\underset{R}{\otimes} rn) = \varphi_x(rn) = (\varphi_x r)n\,.$$

Обратное отображение из правой части (2-5) в левую переводит семейство S-линейных справа гомоморфизмов $\varphi_x : N \to Y$, которые R-линейно справа зависят от $x \in X$, в S-линейный справа гомоморфизм $\varphi : x\underset{R}{\otimes} n \mapsto \psi_x(n)\,$. □

Упражнение 2.2. Явно опишите естественные преобразования

$$t_Y : \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(N,Y)\underset{R}{\otimes} N \to Y \quad \text{и} \quad s_X : X \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}\big(N, X\underset{R}{\otimes} N\big)\,.$$

Пример 2.2 (индуцирование и коиндуцирование)
Если кольцо A содержится в кольце B и у них общая единица, каждый правый B-модуль X одновременно является и правым A-модулем, что задаёт *функтор ограничения*

$$\operatorname{res} : \mathcal{M}od\text{-}B \to \mathcal{M}od\text{-}A\,. \tag{2-6}$$

Рассматривая B как B-A бимодуль и беря в предл. 2.3 $S = A$, а $N = R = B$, получим в качестве правого A-модуля $X \underset{B}{\otimes} B \simeq \operatorname{res} X$ ограничение A-модуля X и функториальный по B-модулю X и A-модулю Y изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}A}(\operatorname{res} X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}B}\big(X, \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}A}(B, Y)\big).$$

Правый B-модуль $\operatorname{coind} Y \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}A}(B, Y)$ называется *коиндуцированным* с A-модуля Y. Функтор коиндуцирования $\operatorname{coind} : \mathcal{M}od\text{-}A \to \mathcal{M}od\text{-}B$ сопряжён справа к функтору ограничения.

Упражнение 2.3. Явно опишите естественные преобразования

$$t_Y : \mathrm{Hom}_A(B, Y) \to Y \quad \text{и} \quad s_X : X \to \mathrm{Hom}_A(B, X).$$

Рассматривая B как A-B бимодуль и полагая в предл. 2.3 $S = N = B$, а $R = A$, получим в качестве правого A-модуля $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}B}(B, Y) \simeq \operatorname{res} Y$ ограничение B-модуля Y, и функториальный по A-модулю X и B-модулю Y изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}B}(X \underset{A}{\otimes} B, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}A}(X, \operatorname{res} Y).$$

Правый B-модуль $\operatorname{ind} X \overset{\text{def}}{=} X \underset{A}{\otimes} B$ называется *индуцированным* с A-модуля X. Функтор индуцирования $\operatorname{ind} : \mathcal{M}od\text{-}A \to \mathcal{M}od\text{-}B$ сопряжён слева к функтору ограничения.

Упражнение 2.4. Явно опишите естественные преобразования

$$\lambda_Y : Y \underset{A}{\otimes} B \to Y \quad \text{и} \quad \varrho_X : X \to X \underset{A}{\otimes} B.$$

В ситуации, когда $A = \Bbbk[H]$ и $B = \Bbbk[G]$ являются групповыми алгебрами (с коэффициентами в поле $\Bbbk$) конечной группы G и её подгруппы H, мы получаем известные из начального курса алгебры функторы (ко)индуцирования линейных представлений[1] (над полем $\Bbbk$) группы G с представлений её подгруппы H.

Пример 2.3 (сингулярные симплексы)
Свяжем с топологическим пространством Y симплициальное множество его *сингулярных симплексов* $S(Y) : \Delta^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$, которое сопоставляет комбинаторному симплексу $[n] \in \operatorname{Ob} \Delta$ множество $S_n(Y) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(\Delta^n, Y) = h_Y(\Delta^n)$ всех непрерывных отображений правильного n-мерного симплекса $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ в Y, а неубывающему отображению $\varphi : [n] \to [m]$ — правое умножение $f \mapsto f \circ \varphi^*$ на аффинное отображение $\varphi^* : \Delta^m \to \Delta^n$, действие которого на вершины симплекса совпадает с φ. Возникающий таким образом функтор $S : \mathcal{T}op \to p\mathcal{S}h(\Delta)$ сопряжён справа функтору геометрической реализации $p\mathcal{S}h(\Delta) \to \mathcal{T}op$, $X \mapsto |X|$, из прим. 1.7 на стр. 8, т. е. имеется естественный по симплициальному множеству $X : \Delta^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ и топологическому пространству Y изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(|X|, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h}(X, S(Y)), \tag{2-7}$$

[1] В этом случае функторы индуцирования и коиндуцирования изоморфны.

который является категорным аналогом изоморфизма из форм. (2-5) на стр. 21, установленного выше для модулей над кольцами. В самом деле, функтор геометрической реализации вкладывает категорию $\varDelta$ в категорию $\mathcal{T}op$ в виде дизъюнктного набора $D = \bigsqcup\limits_{n\geqslant 0} \varDelta^n$ правильных симплексов, на котором имеется левое действие стрелок φ категории $\varDelta$ аффинными отображениями φ_*, а также коммутирующее с ним правое действие стрелок категории $\mathcal{T}op$, непрерывно отображающих D в произвольные топологические пространства. С другой стороны, как множество сингулярных симплексов $S(Y)(\varDelta) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(D, Y)$ любого топологического пространства Y, так и множество $X(\varDelta) = \bigsqcup_{n\geqslant 0} X_n$ являются правыми модулями над симплициальной категорией $\varDelta$ в том смысле, что на обоих множествах имеется правое[1] действие стрелок категории $\varDelta$. Геометрическая реализация $|X|$ симплициального множества X, т. е. фактор дизъюнктного объединения $\bigsqcup_{n\geqslant 0} X_n \times \varDelta^n$ по соотношениям $(x\varphi, s) = (x, \varphi s)$, является прямым аналогом тензорного произведения $X \underset{\varDelta}{\otimes} D$. Таким образом, изоморфизм (2-7) имеет вид

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}\big(X \underset{\varDelta}{\otimes} D, Y\big) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}\varDelta}\big(X, \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(D, Y)\big)\,, \tag{2-8}$$

ничем не отличающийся от изоморфизма (2-5) со стр. 21.

Упражнение 2.5. Явно постройте взаимно обратные изоморфизмы между левой и правой частями формулы (2-8) и опишите естественные преобразования[2]

$$t_Y \,:\, |S(Y)| \to Y \quad \text{и} \quad s_X \,:\, X \to S\big(|X|\big)\,.$$

2.3. Пределы диаграмм. Любую малую категорию $\mathcal{N}$ можно воспринимать как диаграмму, вершинами которой служат объекты, а стрелками — морфизмы категории $\mathcal{N}$. Функторы $X \,:\, \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ реализуют эту диаграмму в категории $\mathcal{C}$ в том смысле, что указывают объекты $X_\nu = X(\nu)$, занумерованные множеством $\mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$, а также стрелки $X(\nu \to \mu) \,:\, X_\nu \to X_\mu$, занумерованные множеством $\mathrm{Mor}\,\mathcal{N}$. Поэтому такие функторы часто называют *диаграммами* вида $\mathcal{N}$ в категории $\mathcal{C}$. Диаграммы образуют категорию $\mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})$ с естественными преобразованиями функторов в качестве морф измов. Каждый объект $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ задаёт *постоянную диаграмму* $\overline{Y}$, в которой все объекты $\overline{Y}_\nu = Y$, а все стрелки $\overline{Y}(\nu \to \mu) = \mathrm{Id}_Y$. Со всякой диаграммой $X \in \mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})$ связан предпучок множеств $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et\,,\ Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(\overline{Y}, X)$. Если он представим, т. е. существует такой объект $L \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, что имеется естественный по $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, L) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(\overline{Y}, X)\,, \tag{2-9}$$

то представляющий объект L называют *пределом*[3] диаграммы X и пишут $L = \lim X$. Двойственным образом, объект $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, копредставляющий ассоциированный с диаграммой X ковариантный функтор $\mathcal{C} \to \mathcal{S}et\,,\ Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(X, \overline{Y})$, называется

[1] Т. е. оборачивающее композицию.

[2] Первое является непрерывным отображением топологических пространств, второе — естественным преобразованием функторов $\varDelta^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$, переводящих комбинаторный симплекс $[n]$ в множества X_n и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}\big(\varDelta^n, |X|\big)$ соответственно.

[3] Или *проективным* пределом.

копределом[1] диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ и обозначается $C = \operatorname{colim} X$. С копределом C связана функториальная по $Y \in \mathcal{C}$ биекция

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C, Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(X, \overline{Y}) . \tag{2-10}$$

Как и все (ко) представляющие объекты, (ко) пределы однозначно характеризуются своими «универсальными свойствами». Полагая $Y = L$ в формуле (2-9), мы получаем естественное преобразование $\pi : \overline{L} \to X$, соответствующее тождественному эндоморфизму Id_L и представляющее собою набор стрелок $\pi_\nu : L \to X_\nu$, которые коммутируют со всеми стрелками диаграммы X и универсальны в том смысле, что для любого коммутирующего со всеми стрелками диаграммы X набора стрелок $\psi_\nu : Y \to X_\nu$, выпущенных из произвольного объекта $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$, существует единственный морфизм $\alpha : Y \to \lim X$, такой что $\psi_\nu = \pi_\nu \circ \alpha$ для всех ν.

Двойственным образом, в копредел $C = \operatorname{colim} X$ диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ ведёт канонический набор таких коммутирующих со всеми стрелками диаграммы X морфизмов $\iota_\nu : X_\nu \to C$, что для любых перестановочных со всеми стрелками диаграммы X морфизмов $\psi_\nu : X_\nu \to Y$ в произвольный объект $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ существует единственный морфизм $\beta : \operatorname{colim} X_\nu \to Y$, такой что $\psi_\nu = \beta \circ \iota_\nu$ для всех ν.

Упражнение 2.6. Проверьте, что универсальные свойства задают предел и копредел однозначно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного со всеми каноническими стрелками π_ν и ι_ν соответственно.

Пример 2.4 (начальный, конечный и нулевой объекты)
Простейшая диаграмма — пустая. Её предел Fin называется *конечным*, а копредел Or — *начальным* объектами категории. Эти объекты однозначно с точностью до единственного изоморфизма определяются тем, что для любого $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ есть единственная стрелка $X \to \mathrm{Fin}$ и единственная стрелка $\mathrm{Or} \to X$.

Упражнение 2.7. Укажите начальный и конечный объекты в категориях множеств, топологических пространств, абелевых групп, всех групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным кольцом.

Если в категории имеется как начальный, так и конечный объект, причём они вдобавок ещё и равны друг другу, объект $0 \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Fin} = \mathrm{Or}$ называется *нулевым*. Морфизм $X \to Y$ в категории с нулевым объектом называется *нулевым*, если он разлагается[2] в композицию $X \to 0 \to Y$.

Упражнение 2.8. Какие категории из упр. 2.7 обладают нулевым объектом?

Пример 2.5 (прямые (ко) произведения)
Малая категория $\mathcal{N}$ называется *дискретной*, если все её морфизмы исчерпываются тождественными морфизмами Id_ν с $\nu \in \operatorname{Ob} \mathcal{N}$. Соответствующие *дискретные диаграммы* $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ — это семейства объектов X_ν без стрелок между ними. Пределы и копределы таких диаграмм называются *прямыми произведениями* и *копроизведениями* и обозначаются, соответственно, через $\prod_\nu X_\nu$ и $\coprod_\nu X_\nu$. Когда индексов всего два,

[1] Или *инъективным* пределом.

[2] Обратите внимание, что если такое разложение существует, то оно единственно.

мы получаем прямые (ко) произведения двух объектов из прим. 1.13 и прим. 1.14 на стр. 16. Очевидная индукция показывает, что для существования всех конечных прямых (ко) произведений достаточно существования прямых (ко) произведений любых двух объектов.

Пример 2.6 ((ко) уравнители)
(Ко)предел диаграммы вида $X \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightrightarrows}} Y$ называется (*ко*)*уравнителем*[1] стрелок φ и ψ.

В категории множеств уравнитель представляет собою множество решений уравнения $\varphi(x) = \psi(x)$ на $x \in X$ или, более научно, прообраз диагонали $\Delta_Y \subset Y \times Y$ при каноническом отображении $\varphi \times \psi : X \to Y \times Y$. Коуравнитель является фактором множества Y по наименьшему отношению эквивалентности[2] $R \subset Y \times Y$, содержащему образ отображения $\varphi \times \psi$, т. е. все отождествления $\varphi(x) = \psi(x)$ с $x \in X$.

Упражнение 2.9. Проверьте это и постройте (ко) уравнители любой пары стрелок в категориях топологических пространств, абелевых групп, произвольных групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным коммутативным кольцом.

Например, (ко) ядро гомоморфизма $f : A \to B$ в категории $\mathcal{Ab}$ абелевых групп это (ко) уравнитель f и нулевого морфизма. Интуитивно, уравнители позволяют задавать «подобъекты» при помощи «уравнений», а коуравнители — «фактор объекты» при помощи «соотношений».

Пример 2.7 (послойные произведения)
Предел диаграммы вида

$$X \xrightarrow{\xi} B \xleftarrow{\eta} Y$$

называется *послойным*[3] *произведением* и обозначается $X \underset{B}{\times} Y$. Он включается в коммутативный *декартов квадрат*

$$\begin{tikzcd} X \underset{B}{\times} Y \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \arrow[d, "\eta"] \\ X \arrow[r, "\xi"] & B \end{tikzcd} \tag{2-11}$$

[1] По-английски $(co)equalizer$.

[2] Напомним, что *отношение эквивалентности* на Y это подмножество $R \subset Y \times Y$, которое *рефлексивно* (содержит диагональ Δ_Y), *симметрично* (переходит в себя при транспозиции сомножителей) и *транзитивно* (т. е. $(y_1, y_2), (y_2.y_3) \in R \Rightarrow (y_1, y_3) \in R$). Пересечение отношений эквивалентности является отношением эквивалентности. Поэтому любое подмножество $S \subset Y \times Y$ содержится в единственном минимальном по включению отношении эквивалентности R_S, которое называется *порождённым* подмножеством S. Всякое отображение $\xi : Y \to Z$ определяет отношение эквивалентности $R_\xi = \{(y_1, y_2) \mid \xi(y_1) = \xi(y_2)\}$ на Y, причём $\xi' : Y \to Z'$ тогда и только тогда представляется в виде композиции $\xi' = \eta \circ \xi$ с некоторой стрелкой $\eta : Z \to Z'$, когда $R_\xi \subset R_{\xi'}$, т. е. когда эквивалентность, отвечающая ξ, *влечёт* эквивалентность, отвечающую ξ' (в этом случае говорят, что первая эквивалентность *тоньше* или *сильнее* последней).

[3] Или *расслоенным*.

универсальный в том смысле, что для любого коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "\varphi'"'] & Y \arrow[d, "\eta"] \\ X \arrow[r, "\xi"] & B \end{tikzcd}$$

имеется единственный такой морфизм $\varphi' \times \psi' : Z \to X \underset{B}{\times} Y$, что $\varphi' = \varphi \circ (\varphi' \times \psi')$ и $\psi' = \psi \circ (\varphi' \times \psi')$.

Упражнение 2.10. Убедитесь, что левый верхний угол диаграммы (2-11) задаётся этим универсальным свойством однозначно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с φ и ψ.

В категории множеств отображение $X \underset{B}{\times} Y \to B$ имеет в качестве слоя над произвольной точкой $b \in B$ прямое произведение слоёв $\varphi^{-1}(b) \times \psi^{-1}(b)$, отсюда и название.

Упражнение 2.11. Убедитесь, что $U \underset{X}{\times} V = U \cap V$ в категории $\mathcal{U}(X)$ открытых подмножеств топологического пространства X.

Пример 2.8 (послойные копроизведения)

Оборачивая все стрелки в предыдущем примере, назовём *послойным копроизведением* $X \underset{B}{\otimes} Y$ копредел диаграммы $X \xleftarrow{\xi} B \xrightarrow{\eta} Y$. Он вписывается в коммутативный *кодекартов квадрат*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\xi"'] & Y \arrow[d, "\psi"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & X \underset{B}{\otimes} Y \end{tikzcd} \tag{2-12}$$

универсальный в том смысле, что для любого коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\xi"'] & Y \arrow[d, "\psi'"] \\ X \arrow[r, "\varphi'"] & Z \end{tikzcd}$$

существует единственный такой морфизм $\varphi' \otimes \psi' : X \underset{B}{\otimes} Y \to Z$, что $\varphi' = (\varphi' \otimes \psi') \circ \varphi$ и $\psi' = (\varphi' \otimes \psi') \circ \psi$.

Упражнение 2.12. Явно опишите послойные (ко) произведения в категориях множеств, топологических пространств, абелевых групп, произвольных групп[1], коммутативных колец с единицей и модулей над коммутативным кольцом.

[1] В теории групп копроизведения традиционно называются *амальгамами*.

2.3.1. (Ко) замкнутость. Категория $\mathcal{C}$ называется (*ко*) *замкнутой*, если для любой малой категории $\mathcal{N}$ каждая диаграмма $\mathcal{N} \to \mathcal{C}$ имеет (ко) предел в $\mathcal{C}$.

Предложение 2.4
Для замкнутости категории $\mathcal{C}$ достаточно существования в $\mathcal{C}$ конечного объекта, прямых произведений любых множеств объектов и уравнителей любой пары стрелок с общим началом и концом, а для козамкнутости — существования в $\mathcal{C}$ начального объекта, прямых копроизведений любых множеств объектов и коуравнителей любой пары стрелок с общим началом и концом.

Доказательство. Мы построим предел произвольной диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$, копредел строится аналогично путём обращения стрелок. Надо предъявить универсальный набор мофизмов $\varphi_\nu : L \to X_\nu$, решающий уравнения $\varphi_\mu = X(\nu \to \mu) \circ \varphi_\nu$, где $\nu \to \mu$ пробегает $\operatorname{Mor} \mathcal{N}$. Для каждой стрелки $\nu \to \mu$ обозначим $T_{\nu\to\mu} = X_\mu$ тот объект диаграммы X, в который ведёт эта стрелка, и образуем два произведения $A = \prod_\mu X_\mu$ и $B = \prod_{\nu\to\mu} T_{\nu\to\mu}$. В первое из них каждый объект диаграммы X входит ровно один раз, а во второе — столько раз, сколько стрелок в нём заканчивается. Для каждой стрелки $\mu \to \nu$ имеются два отображения $A \to T_{\nu\to\mu}$: проекция $\pi_\mu : A \to X_\mu$ произведения A на μ-тый сомножитель и композиция $\varkappa_{\nu\to\mu} = X(\nu \to \mu) \circ \pi_\nu$ проекции $\pi_\nu : A \to X_\nu$ произведения A на ν-тый сомножитель со стрелкой $X(\nu \to \mu) : X_\nu \to X_\mu$ диаграммы X. По универсальному свойству произведения B эти пары отображении задают два морфизма $\pi, \varkappa : A \to B$. Их уравнитель L приходит вместе с морфизмом $\varphi : L \to A$, который представляет собою набор стрелок $\varphi_\mu = \pi_\mu \circ \varphi$, удовлетворяющих равенствам

$$\varphi_\mu = \pi_\mu \circ \varphi = \varkappa_{\nu\to\mu} \circ \varphi = X(\nu \to \mu) \circ \varphi_\nu$$

и обладающих требуемым универсальным свойством (убедитесь в этом!). □

Пример 2.9
В категории множеств $\lim X$ изоморфен подмножеству прямого произведения $\prod X_\nu$, образованному такими семействами (x_ν), $\nu \in \operatorname{Ob} \mathcal{N}$, $x_\nu \in X_\nu$, где $x_\mu = X(\nu \to \mu) x_\nu$ для всех стрелок $\nu \to \mu$ из $\operatorname{Mor} \mathcal{N}$.

Упражнение 2.13. Проверьте, что $\operatorname{colim} X$ изоморфен коуравнителю диаграммы

$$\coprod_{\nu\to\mu} S_{\nu\to\mu} \overset{\iota}{\underset{\varkappa}{\rightrightarrows}} \coprod_\nu X_\nu ,$$

в которой объекты $S_{\nu\to\mu} = X_\nu$ суть начала стрелок $X(\nu \to \mu)$ диаграммы X, а морфизмы задаются семействами стрелок

$$\iota_\nu : S_{\nu\to\mu} \to \coprod_\nu X_\nu \quad \text{и} \quad \varkappa_{\nu\to\mu} = \iota_\mu \circ X(\nu \to \mu) : S_{\nu\to\mu} \to \coprod_\nu X_\nu .$$

В частности, убедитесь, что в категории множеств $\operatorname{colim} X$ является фактором дизъюнктного объединения $\bigsqcup_\nu X_\nu$ по наименьшему отношению эквивалентности, для которого $x = X(\nu \to \mu)x$ для всех $x \in X_\nu$ и всех стрелок $\nu \to \mu$ из $\operatorname{Mor} \mathcal{N}$.

Замечание 2.1. Для того, чтобы в категории $\mathcal{C}$ существовали (ко) пределы всех *конечных* диаграмм, в условиях предл. 2.4 достаточно требовать существования в $\mathcal{C}$ конечных (ко) произведений.

Следствие 2.1
Категории множеств, топологических пространств, абелевых групп, всех групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным кольцом замкнуты и козамкнуты.

Доказательство. Сделайте упр. 2.9. □

Пример 2.10 (уточнённое определение пучка)
Объединение $U = \bigcup_i U_i$ произвольного семейства $\{U_i\}_{i\in I}$ открытых множеств топологического пространства X является коуравнителем отображений

$$\coprod_{ij} U_i \cap U_j \underset{\psi_2}{\overset{\psi_1}{\rightrightarrows}} \coprod_i U_i\,,$$

являющихся копроизведениями вложений $U_i \cap U_j \hookrightarrow U_i$ и $U_i \cap U_j \hookrightarrow U_j$. Всякий предпучок $F : \mathcal{U}(X)^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{C}$ объектов любой категории $\mathcal{C}$ переводит диаграмму коуравнителя

$$\coprod_{ij} U_i \cap U_j \underset{\psi_2}{\overset{\psi_1}{\rightrightarrows}} \coprod_i U_i \xrightarrow{\varphi} U\,, \tag{2-13}$$

в следующую диаграмму в категории $\mathcal{C}$:

$$F(U) \xrightarrow{\varphi^*} \prod_i F(U_i) \underset{\psi_2^*}{\overset{\psi_1^*}{\rightrightarrows}} \prod_{ij} F(U_i \cap U_j)\,. \tag{2-14}$$

Стрелка φ^* этой диаграммы является произведением ограничений $F(U) \to F(U_i)$, а стрелки ψ_1^* и ψ_2^* — ограничений $F(U_i) \to F(U_i \cap U_j)$ и $F(U_j) \to F(U_i \cap U_j)$ соответственно. По определению, предпучок F является *пучком*, если стрелка φ является уравнителем стрелок ψ_1^* и ψ_2^*. В частности, когда множество индексов $I = \varnothing$, мы получаем в левом члене диаграммы (2-14) объект $F(\varnothing) \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, а в среднем и правом членах — произведения пустых множеств объектов, т. е. пределы пустых диаграмм, канонически изоморфные конечному объекту[1] $\mathrm{Fin}_{\mathcal{C}}$ категории $\mathcal{C}$. Стрелки ψ_1^* и ψ_2^* являются в этом случае тождественными эндоморфизмами конечного объекта, и их уравнитель равен $\mathrm{Id}_{\mathrm{Fin}_{\mathcal{C}}}$. Таким образом, для любого пучка объектов произвольной категории $\mathcal{C}$ на топологическом пространстве X должно выполняться равенство $F(\varnothing) = \mathrm{Fin}_{\mathcal{C}}$. Например, для любого пучка множеств $F : \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ множество $F(\varnothing)$ состоит из одной точки, а для пучка абелевых групп $F : \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{A}b$ группа $F(\varnothing) = 0$.

[1]Тем самым, для того чтобы предпучок F был пучком, необходимо, чтобы в категории $\mathcal{C}$ был конечный объект (см. прим. 2.4 на стр. 24).

2.3.2. Фильтрующиеся диаграммы. Малая категория $\mathcal{F}$ называется *фильтрующейся*, если из любых двух её объектов выходят стрелки с общим концом и для любых двух стрелок φ, ψ с общими началом и концом из их конца ведёт такая стрелка ζ, что $\zeta\varphi = \zeta\psi$. Например, любой чум, в котором у каждых двух элементов есть общая верхняя грань, является фильтрующейся категорией[1]. Диаграммы вида $\mathcal{F} \to \mathcal{C}$ и $\mathcal{F}^{\text{opp}} \to \mathcal{C}$ с фильтрующейся категорией $\mathcal{F}$ принято называть, соответственно, *индуктивными* (или *прямыми*) и *проективными* (или *обратными*) *системами* стрелок категории $\mathcal{C}$, а их (ко)пределы обозначать через $\varinjlim$, $\underrightarrow{\operatorname{colim}}$ для прямых систем и $\varprojlim$, $\underleftarrow{\operatorname{colim}}$ для обратных. Копредел индуктивной системы множеств $X : \mathcal{F} \to \mathcal{S}et$ изоморфен фактору дизъюнктного объединения $\coprod_{\nu \in \operatorname{Ob}\mathcal{F}} X_\nu$ по отношению эквивалентности, отождествляющему $x_\nu \in X_\nu$ и $x_\mu \in X_\mu$, если существует такая пара стрелок $\nu \to \eta \leftarrow \mu$, что $X(\nu \to \eta)x_\nu = X(\mu \to \eta)x_\mu$ в множестве X_η .

Упражнение 2.14. Проверьте, что это действительно отношение эквивалентности и убедитесь, что множество классов эквивалентности изоморфно $\operatorname{colim} X$.

Пример 2.11 (разбиения отрезка)
Конечные наборы точек $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N < x_\infty = 1$, разбивающие отрезок $[0, 1]$ на непересекающиеся интервалы (как в определении интеграла Римана), образуют прямую систему в категории ∇_{big} относительно морфизмов включения, отвечающих измельчениям разбиения. Копределом этой системы в категории всех (не обязательно конечных) упорядоченных множеств с отмеченными максимальным и минимальным элементами является $[0, 1]$. В категории ∇_{big} копредела не существует.

Пример 2.12 (открытые окрестности и слой предпучка)
Множество открытых окрестностей любого подмножества $Z \subset X$ топологического пространства X является проективной системой в категории $\mathcal{U} = \mathcal{U}(X)$ открытых подмножеств в X, т. к. для любых окрестностей $U, W \supset Z$ окрестность $U \cap W = U \times_X V \supset Z$ вкладывается и в окрестность U, и в окрестность W. Пределом этой системы в категории $\mathcal{S}et$ является пересечение всех открытых окрестностей Z. В категории $\mathcal{U}$ предела может и не быть. Для любого предпучка $F : \mathcal{U}^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$ множества сечений $F(U)$ над открытыми окрестностями U произвольно заданного подмножества $Z \subset X$ образуют индуктивную систему в $\mathcal{S}et$. Её копредел называется *слоем* предпучка F над Z и обозначается F_Z. В силу козамкнутости категории $\mathcal{S}et$ этот копредел всегда существует. Согласно упр. 2.14, каждый элемент слоя F_Z представляет собою класс $s|_Z$ некоторого сечения $s \in F(U)$ над каким-либо открытым множеством $U \supset Z$ по модулю эквивалентности, отождествляющей сечения $s \in F(U)$ и $t \in F(W)$, когда $s|_V = t|_V$ над некоторым открытым V, таким что $Z \subset V \subset U \cap W$. Определённые таким образом классы $s|_Z$ называются *ростками сечений* предпучка F над Z.

В частности, когда $Z = \{x\}$ это одна точка, слой F_x называется *слоем F в точке x*. Мы будем обозначать класс сечения s в слое F_x через $s|_x$. В ситуации, когда F — пучок функций на X со значениями в каком-либо поле $\Bbbk$, класс $f|_x \in F_x$ локальной функции $f \in F(U)$ в слое F над точкой $x \in U$ не следует путать со значением $f(x) \in \Bbbk$ этой функции в точке x, поскольку, во первых, они лежат в разных множествах, во-вторых,

[1] Ср. с прим. 1.2 на стр. 3.

равенство $f|_x = g|_x$ означает равенство $f \equiv g$ в некоторой открытой окрестности точки x, что обычно гораздо сильнее, чем равенство значений $f(x) = g(x)$.

Пример 2.13 (локализация кольца)
Пусть подмножество S ассоциативного (но не обязательно коммутативного) кольца R с единицей таково, что $1 \in S$ и $st \in S$ для всех $s, t \in S$. Пусть, кроме того, выполняются следующие *условия Оре*[1]:

$$\forall\, \varrho \in R,\ \forall\, s \in S \quad \exists\, \lambda \in R,\ \exists t \in S:\ \lambda s = t\varrho \tag{O_1}$$

$$\forall\, \varphi, \psi \in R \quad \text{из} \quad \exists\, s \in S:\ \phi s = \psi s \quad \text{следует, что} \quad \exists\, t \in S:\ t\phi = t\psi\,. \tag{O_2}$$

Превратим множество S в категорию, полагая $\mathrm{Hom}_S(s,t) \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda \in R \mid \lambda s = t\}$.

Упражнение 2.15. Выведите из условий Оре, что категория S фильтрующаяся.

Рассмотрим в категории правых R-модулей фильтрующуюся диаграмму $S \to \mathcal{M}od$-R, образованную свободными модулями $s^{-1}R$ ранга один, где символом s^{-1} обозначен базисный вектор того модуля, который отвечает объекту $s \in S$, и R-линейными отображениями $\lambda_* : s_1^{-1}R \to s_2^{-1}R$, которые отвечают стрелкам $\lambda \in \mathrm{Hom}_S(s_1, s_2)$ и действуют на базисный вектор по правилу $s_1^{-1} \mapsto s_2^{-1}\lambda$. Копредел этой диаграммы в категории $\mathcal{M}od$-R состоит из классов $s^{-1}\varrho$, где $s \in S$, $\varrho \in R$, по модулю равенств $s_1^{-1}\varrho_1 = s_2^{-1}\varrho_2$, означающих существование таких $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, что $\lambda_1 s_1 = \lambda_2 s_2 \in S$ и $\lambda_1\varrho_1 = \lambda_2\varrho_2$ в R. Классы $s^{-1}\varrho$ называются *левыми дробями* со знаменателями в S. Они образуют правый R-модуль, обозначаемый $S^{-1}R$ и именуемый *левой локализацией* кольца R относительно мультипликативной системы Оре S.

Упражнение 2.16. Чему равна сумма $s_1^{-1}\varrho_1 + s_2^{-1}\varrho_2$ в модуле $S^{-1}R$?

Определим *произведение* левых дробей $s_1^{-1}\varrho_1$ и $s_2^{-1}\varrho_2$ следующим образом. Пользуясь условием (O_1) подберём такие $\lambda_1 \in R$ и $t_2 \in S$, что[2] $t_2\varrho_1 = \lambda_1 s_2$, и положим

$$s_1^{-1}\varrho_1 \cdot s_2^{-1}\varrho_2 \stackrel{\text{def}}{=} (t_2 s_1)^{-1}(\lambda_1\varrho_2)\,.$$

Упражнение 2.17. Проверьте, что это определение корректно[3] и задаёт на модуле $S^{-1}R$ структуру ассоциативного кольца с единицей. Убедитесь, что для коммутативного кольца R кольцо дробей $S^{-1}R$ изоморфно известному из курса алгебры[4] кольцу частных a/s, где $a \in R$, $s \in S$, и $a_1/s_1 = a_2/s_2$, если и только если $\exists\, s \in S : s \cdot (a_1 s_2 - a_2 s_1) = 0$ в R.

2.4. Функториальность (ко) пределов. Естественное преобразование f диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ в диаграмму $Y : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ — это набор стрелок $f_\nu : X_\nu \to Y_\nu$, по одной для каждого $\nu \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$, перестановочных со стрелками из диаграмм. Если диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ и $Y : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ имеют в категории $\mathcal{C}$ пределы $L_X = \lim X_\nu$ и $L_Y = \lim Y_\mu$, то для любого функтора $\tau : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ и любого естественного преобразования $f : X \circ \tau \to Y$

[1] В коммутативном кольце R оба условия Оре выполнены автоматически.
[2] Это «политкорректная» запись интуитивно желаемого равенства $\varrho_1 s_2^{-1} = t_2^{-1}\lambda_1$.
[3] Т. е. результат умножения не зависит от выбора таких $\lambda_1 \in R$ и $t_2 \in S$, что $t_2\varrho_1 = \lambda_1 s_2$.
[4] См. http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-04.pdf.

существует единственный морфизм $\lim f : L_X \to L_Y$, такой что при всех $\mu \in \operatorname{Ob}\mathcal{M}$ коммутативны диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
L_X \arrow[r, "\pi_{\tau(\mu)}"] \arrow[d, "\lim f"'] & X_{\tau(\mu)} \arrow[d, "f_\mu"] \\
L_Y \arrow[r, "\pi_\mu"] & Y_\mu\,,
\end{tikzcd}
\tag{2-15}
$$

горизонтальные стрелки которых суть канонические морфизмы из предела в элементы диаграммы. В самом деле, композиции $f_\mu \circ \pi_{\tau(\mu)} : L_X \to Y_\mu$ задают систему стрелок из L_X в элементы диаграммы Y, перестановочные со всеми её стрелками, что даёт единственный морфизм $L_X \to \lim Y = L_Y$, делающий все диаграммы (2-15) коммутативными. Двойственным образом, если существуют копределы $C_X = \operatorname{colim} X_\nu$ и $C_Y = \operatorname{colim} Y_\mu$, то для любого функтора $\tau : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ и любого естественного преобразования $f : X \to Y \circ \tau$ существует единственный морфизм $\operatorname{colim} f : C_X \to C_Y$, такой что коммутативны все диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
X_\nu \arrow[r, "\iota_\nu"] \arrow[d, "f_\nu"'] & C_X \arrow[d, "\operatorname{colim} f"] \\
Y_{\tau(\nu)} \arrow[r, "\iota_{\tau(\nu)}"] & C_Y\,,
\end{tikzcd}
$$

горизонтальные стрелки которых суть канонические морфизмы из вершин диаграммы в копредел. При $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ и $\tau = \mathrm{Id}$ из предл. 2.1 на стр. 19 и равенств (2-9) и (2-10) на стр. 24 получаем

Предложение 2.5
Для заданных малой категории $\mathcal{N}$ и (ко)замкнутой категории $\mathcal{C}$ копредел и предел являются, соответственно, левым и правым сопряжёнными к функтору $\mathcal{C} \to \mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})$, переводящему $C \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ в постоянную диаграмму $\overline{C}$. □

Замечание 2.2. Если не предполагать (ко)замкнутости, то (ко)предел будет функториален на всех диаграммах, где определён.

Следствие 2.2
Категория $p\mathcal{S}h(\mathcal{U})$ предпучков множеств на малой категории $\mathcal{U}$ замкнута и козамкнута. Для любой диаграммы предпучков $F : \mathcal{N} \to p\mathcal{S}h(\mathcal{U})$ множества сечений предпучков $L = \lim F$ и $C = \operatorname{colim} F$ над любым объектом $U \subset \mathcal{U}$ суть $L(U) = \lim F(U)$ и $C(U) = \operatorname{colim} F(U)$, где диаграмма $F(U) : \mathcal{N} \to \mathcal{S}et$ образована множествами сечений предпучков диаграммы F над объектом U с отображениями, задающими действие стрелок диаграммы F над этим объектом.

Доказательство. В силу функториальности (ко)пределов, множества $L(U) = \lim F(U)$ и $C(U) = \operatorname{colim} F(U)$ составляют предпучки множеств на $\mathcal{U}$, и для любого предпучка $F_\nu : \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ диаграммы F имеются перестановочные со всеми морфизмами из диаграммы канонические морфизмы предпучков $L \to F_\nu$ и $F_\nu \to C$, действие которых над каждым объектом $U \in \operatorname{Ob}\mathcal{U}$ задаётся стрелками $\lim F(U) \to F_\nu(U)$ и $F_\nu(U) \to \operatorname{colim} F(U)$ в категории $\mathcal{S}et$. Универсальность этих морфизмов также проверяется отдельно над каждым объектом $U \in \operatorname{Ob}\mathcal{U}$. □

2.4.1. Перестановочность функторов с (ко) пределами. Скажем, что функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *перестановочен с (ко) пределами*, если для любого $L \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ и любой диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ из того, что L является (ко) пределом X в $\mathcal{C}$, вытекает, что $F(L)$ является (ко) пределом диаграммы $F \circ X$ в $\mathcal{D}$.

Предложение 2.6
Если функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ сопряжён слева к функтору $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, то F перестановочен с копределами, а G — с пределами.

Доказательство. В силу сопряжённости F и G имеем функториально по $D \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(\operatorname{colim} X), D\big) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(\operatorname{colim} X, G(D)\big) \simeq \\ &\qquad\qquad \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{Fun}(\mathcal{N},\mathcal{C})}\left(X, \overline{G(D)}\right) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{Fun}(\mathcal{N},\mathcal{D})}\left(F \circ X, \overline{D}\right) . \end{aligned}$$

Тем самым, $F(\operatorname{colim} X) \simeq \operatorname{colim}(F \circ X)$. Рассуждение про пределы аналогично. □

Следствие 2.3
Тензорное умножение на (левый) модуль N над произвольным кольцом S с единицей перестановочно с копределами диаграмм (правых) S-модулей. В частности, тензорное умножение на N переводит коядра в коядра, т. е. для любого $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(K, L)$ имеется канонический изоморфизм абелевых групп

$$\operatorname{coker}\left(\varphi \underset{S}{\otimes} \operatorname{Id}_N : K \underset{S}{\otimes} N \to L \underset{S}{\otimes} N\right) \simeq \operatorname{coker}(\varphi) \underset{S}{\otimes} N .$$

Доказательство. По предл. 2.3 на стр. 21, применённому к кольцам S и $R = \mathbb{Z}$, функтор $\mathcal{M}od\text{-}S \to \mathcal{A}b$, $X \mapsto X \underset{S}{\otimes} N$, сопряжён слева функтору $Y \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}b}(N, Y)$. □

Следствие 2.4
Пределы коммутируют с пределами, а копределы — с копределами всякий раз, когда они существуют: если задана такая диаграмма $F : \mathcal{M} \to \mathcal{Fun}(\mathcal{N}, \mathcal{C})$ естественных преобразований $F(\mu_1 \to \mu_2)$ диаграмм $\{F_\mu : \mathcal{N} \to \mathcal{C}\}$, что для всех $\mu \in \mathcal{M}$ и $\nu \in \mathcal{N}$ μ-тая диаграмма $F_\mu : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ и диаграмма $F(\nu)$, задающая действие стрелок $F(\mu_1 \to \mu_2)_\nu$ между элементами $F_\mu(\nu)$ с фиксированным номером ν, обе имеют (ко)предел в $\mathcal{C}$, то

$$\lim_{\mu} \lim_{\nu} F_\mu \simeq \lim_{\nu} \lim_{\mu} F(\nu) \quad \text{и} \quad \operatorname*{colim}_{\mu} \operatorname*{colim}_{\nu} F_\mu \simeq \operatorname*{colim}_{\nu} \operatorname*{colim}_{\mu} F(\nu) .$$

Следствие 2.5
Если стрелки $f_\nu : X_\nu \to Y_\nu$ задают естественное преобразование между диаграммами абелевых групп $X, Y : \mathcal{N} \to \mathcal{A}b$, то копредел коядер этих стрелок равен коядру индуцированной стрелки между копределами, а предел ядер — ядру стрелки между пределами:

$$\begin{gathered} \operatorname{colim} \operatorname{coker} f_\nu \simeq \operatorname{coker}\big(\operatorname{colim} X_\nu \xrightarrow{\operatorname{colim} f_\nu} \operatorname{colim} Y_\nu\big) \\ \lim \ker f_\nu \simeq \ker\big(\lim X_\nu \xrightarrow{\lim f_\nu} \lim Y_\nu\big) . \end{gathered}$$

Доказательство. Будучи (ко)уравнителем f_ν и нулевого морфизма (ко)ядро является (ко)пределом. □

Предложение 2.7
Копределы прямых систем абелевых групп перестановочны также и с ядрами, т. е. если в сл. 2.5 категория $\mathcal{N}$ индексов диаграмм $X, Y : \mathcal{N} \to \mathcal{Ab}$ фильтрующаяся, то

$$\operatorname{colim} \ker \left(f_\nu : X_\nu \to Y_\nu\right) \simeq \ker\left(\operatorname{colim} X_\nu \xrightarrow{\operatorname{colim} f_\nu} \operatorname{colim} Y_\nu\right). \tag{2-16}$$

Доказательство. Согласно упр. 2.14 на стр. 29 копредел фильтрующейся диаграммы Z является фактором дизъюнктного объединения $\coprod Z_\nu$ по эквивалентности, отождествляющей элементы $z_\nu \in Z_\nu$ и $z_\mu \in Z_\mu$, когда есть пара стрелок $\nu \to \eta \leftarrow \mu$, переводящих эти элементы в один и тот же элемент из Z_η. Пусть $\varphi = \operatorname{colim} f_\nu$. Эта предельная стрелка переводит класс $[x_\nu]$ элемента $x_\nu \in X_\nu$ в класс элемента $f_\nu(x_\nu) \in Y_\nu$.

Упражнение 2.18. Убедитесь, что класс результата не зависит от выбора представителя в классе $[x_\nu]$.

Сопоставляя классу $[x_\nu] \in \operatorname{colim} \ker \left(f_\nu : X_\nu \to Y_\nu\right)$ из левой части (2-16) класс этого же элемента $x_\nu \in \ker f_\nu \subset X_\nu$, но уже в копределе $\operatorname{colim} X_\nu$, мы получим класс, лежащий в $\ker \varphi$. Это задаёт гомоморфизм из левой части (2-16) в правую. Чтобы построить обратный гомоморфизм, рассмотрим класс $[x_\nu] \in \ker \varphi$. Раз $[f_\nu(x_\nu)] = [0]$ в $\operatorname{colim} Y_\nu$, найдутся такие стрелки $\nu \to \eta \leftarrow \mu$, что $f_\nu\left(X(\nu \to \eta)x_\nu\right) = Y(\nu \to \eta)f_\nu(x_\nu) = Y(\mu \to \eta)0 = 0$ в Y_η. Тем самым, элемент $x_\eta = X(\nu \to \eta)x_\nu \in \ker f_\nu$. Сопоставление классу $[x_\nu] \in \ker \varphi$ класса $[x_\eta] \in \operatorname{colim} \ker \left(f_\nu\right)$ задаёт гомоморфизм из правой части (2-16) в левую. Остаётся убедиться, что он определён корректно и обратен предыдущему. □

Упражнение 2.19. Сделайте это, а также докажите, что в категории $\mathcal{S}et$ стрелка

$$\varphi : \operatorname{colim} X_\nu \to \operatorname{colim} Y_\nu,$$

являющаяся копределом такого естественного преобразования $f : X \to Y$ фильтрованных диаграмм $X, Y : \mathcal{N} \to \mathcal{S}et$, в котором все стрелки $f_\nu : X_\nu \to Y_\nu$ инъективны (соотв. сюръективны, биективны), тоже инъективна (соотв. сюръективна, биективна).

Упр. 2.5. Непрерывному отображению $f : |X| \to Y$ из $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(|X|, Y)$ биективно соответствует естественное по $[n] \in \mathrm{Ob}\,\Delta$ преобразование $f_n : X_n \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(\Delta^n, Y)$ из $\mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h}(X, S(Y))$, сопоставляющее точке $x \in X_n$ композицию

$$f \circ \iota|_{x\times\Delta^n} : \Delta^n \to |X| \to Y\,,$$

где $\iota|_{x\times\Delta^n} : \Delta^n \to |X|$ это ограничение отображения факторизации[1]

$$\iota : \bigsqcup_{n\geqslant 0} X_n \times \Delta^n \to |X|$$

на правильный симплекс $\{x\}\times\Delta^n \subset X_n\times\Delta^n$ (убедитесь, что f_n функториально зависит от комбинаторного симплекса $[n]$). Обратная биекция сопоставляет естественному по $[n] \in \mathrm{Ob}\,\Delta$ набору отображений $f_n : X_n \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(\Delta^n, Y)$ отображение $|X| \to Y$, переводящее класс точки $(x, s) \in X_n \times \Delta^n$ по модулю соотношений $(X(\varphi)x, s) = (x, \varphi s)$ в значение непрерывного отображения $f_n(x) : \Delta^n \to Y$ в точке $s \in \Delta^n$ (убедитесь, что это значение не зависит от выбора представителя (x, s) в его классе эквивалентности). Естественное преобразование $t_Y : |S(Y)| \to Y$ переводит класс пары

$$(g : \Delta^n \to Y, t \in \Delta^n) \in S_n(Y) \times \Delta^n = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}op}(\Delta^n, Y) \times \Delta^n\,,$$

представляющей точку из фактор пространства $|S(Y)|$, геометрической реализации симплициального множества $S(Y)$, в точку $g(t) \in Y$ (убедитесь, что отображение t_Y корректно определено, непрерывно и функториально по топологическому пространству Y). Действие естественного преобразования $s_X : X \to S\big(|X|\big)$ над комбинаторным симплексом $[n] \in \mathrm{Ob}\,\Delta$ переводит точку $x \in X_n$ в сингулярный симплекс

$$\iota|_{x\times\Delta^n} : \Delta^n \to |X|$$

топологического пространства $|X|$ (убедитесь, что он функториален по $[n] \in \mathrm{Ob}\,\Delta$ и предпучку $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}un(\Delta^{\mathrm{opp}}, \mathcal{S}et)$).

Упр. 2.7. Начальное множество и начальное топологическое пространство пусты, конечное множество и конечное топологическое пространство это одна точка. Начальный и конечный объекты категории групп это единичная группа[2]. В категориях абелевых групп, коммутативных колец и модулей начальный и конечный объект это нуль.

Упр. 2.8. В категории групп нулевым объектом является единичная группа. В категориях абелевых групп, коммутативных колец и модулей нулевой объект это нулевая абелева группа.

Упр. 2.12. Гомоморфизмы коммутативных колец $A \leftarrow K \to A$ наделяют A и B структурами K-алгебр, и копроизведение $A \underset{K}{\otimes} B$ это *тензорное произведение* K-алгебр, т. е.

[1]Непрерывного в силу определения фактор топологии.

[2]Т. е. группа, состоящая только из единичного элемента.

фактор свободного K-модуля с базисом $A \times B$ (произведение в категории множеств) по подмодулю, порождённому всевозможными разностями

$$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, \varkappa_1 b_1 + \varkappa_2 b_2) - \sum_{i,j=1}^{2} \lambda_i \varkappa_j (a_i, b_j)$$

с $\lambda_i, \varkappa_i \in K$, $a_i \in A$, $\beta_j \in B$ (ср. с n° 2.2). Произведение на классах эквивалентности задаётся покомпонентно: $(a_1 \underset{K}{\otimes} b_1) \cdot (a_2 \underset{K}{\otimes} b_2) = (a_1 a_2) \underset{K}{\otimes} (b_1 b_2)$.

Упр. 2.14. По упр. 2.13 копредел $\underrightarrow{\operatorname{colim}} X$ является фактором дизъюнктного объединения $\coprod_{\nu \in \operatorname{Ob} \mathcal{F}} X_\nu$ по наименьшему отношению эквивалентности, обеспечивающему равенства $x = X(\nu \to \mu)x$ для всех стрелок $\nu \to \mu$ из $\operatorname{Mor} \mathcal{F}$ и всех $x \in X_\nu$. При этом элементы $x_\nu \in X_\nu$ и $x_\mu \in X_\mu$ заведомо отождествляются, если $X(\nu \to \eta)x_\nu = X(\mu \to \eta)x_\mu$ для некоторой пары стрелок $\nu \to \eta \leftarrow \mu$. Достаточно убедиться, что последнее свойство является отношением эквивалентности. Его рефлексивность и симметричность очевидны. Докажем транзитивность. Если x_α эквивалентен x_β, а x_β эквивалентен x_γ, то в категории $\mathcal{F}$ имеется (не обязательно коммутативная) диаграмма из таких стрелок

$$\begin{tikzcd}
& & \varepsilon & & \\
& & \delta \arrow[u, "\xi"] & & \\
& \eta \arrow[ur, "\psi_{\delta\eta}"] & & \zeta \arrow[ul, "\psi_{\delta\zeta}"'] & \\
\alpha \arrow[ur, "\varphi_{\eta\alpha}"] & & \beta \arrow[ul, "\varphi_{\eta\beta}"] \arrow[ur, "\varphi_{\zeta\beta}"'] & & \gamma \arrow[ul, "\varphi_{\zeta\gamma}"']
\end{tikzcd}$$

что $X\left(\varphi_{\eta\alpha}\right) x_\alpha = X\left(\varphi_{\eta\alpha}\right) x_\beta$ и $X\left(\varphi_{\zeta\beta}\right) x_\beta = X\left(\varphi_{\zeta\gamma}\right) x_\gamma$ в категории $\mathcal{S}et$, а $\xi\psi_{\delta\eta}\varphi_{\eta\beta} = \xi\psi_{\delta\zeta}\varphi_{\zeta\beta}$ в $\operatorname{Hom}_{\mathcal{F}}(\beta, \varepsilon)$. Обозначая стрелку из последнего равенства через $\varkappa$, имеем

$$X\left(\varepsilon\psi_{\delta\eta}\varphi_{\eta\alpha}\right) x_\alpha = X(\varkappa) x_\beta = X\left(\varepsilon\psi_{\delta\zeta}\varphi_{\zeta\gamma}\right) x_\gamma .$$

Упр. 2.15. Применяя первое условие Оре[1] к произвольным элементам $s = s_1$ и $\varrho = s_2$ из S получаем ведущие из s_1 и s_2 стрелки λ и t с общим концом $\lambda s_1 = t s_2 \in S$. Применяя второе условие Оре[2] к паре стрелок $\varphi, \psi \in \operatorname{Hom}_S(s, s')$, где $s' = \varphi s = \psi s$, получаем такую стрелку $t \in \operatorname{Hom}_S(s', ts')$, что $t\varphi = t\psi$.

Упр. 2.16. Так как по предыдущему упр. 2.15 категория S фильтрующаяся, у дробей $s_1^{-1}\varrho_1$ и $s_2^{-1}\varrho_2$ есть общий знаменатель, равный $t = \lambda_1 s_1 = \lambda_2 s_2 \in S$ для подходящих $\lambda_1, \lambda_2 \in R$. Тогда $s_1^{-1}\varrho_1 + s_2^{-1}\varrho_2 = t^{-1}(l_1\varrho_1 + \lambda_2\varrho_2)$.

[1]См. формулу (O_1) на стр. 30.
[2]См. формулу (O_2) на стр. 30.