Итоговый письменный экзамен за семестровый курс

Задачи можно решать в любом порядке. Полное решение каждой задачи оценивается в 10 баллов. Один ответ без объяснений оценивается в нуль баллов вне зависимости от того, верный он или нет. Для получения 100%-ного результата достаточно набрать 40 баллов.

Задача 1 (10 баллов). Задайте на четырёхточечном множестве $X = \{1, 2, 3, 4\}$ топологию, пару пучков F, G и морфизм $\varphi : F \to G$ так, чтобы морфизмы слоёв $\varphi_x : F_x \to G_x$ были сюрьективны во всех точках $x \in X$, а морфизмы сечений $\varphi_U : F(U) \to G(U)$ были сюрьективны не над всеми открытыми $U \subset X$.

Задача 2 (10 баллов). Рассмотрим бикомплекс $\mathbb{Z}$-модулей

$$C_{p,q} = \begin{cases} \mathbb{Z}/(4) & \text{при } q \geqslant 0 \\ 0 & \text{при } q < 0\,, \end{cases}$$

с дифференциалами ∂_1 и ∂_2 бистепеней $(-1, 0)$ и $(0, -1)$, действующими между ненулевыми компонентами $C_{p,q}$ умножением на 2: $z \mapsto 2z \pmod 4$. Вычислите гомологии комплексов[1]

$$T_n = \bigoplus_{p+q=n} C_{p,q} \quad \text{и} \quad T'_n = \prod_{p+q=n} C_{p,q}$$

Задача 3 (10 баллов). Пусть аффинное алгебраическое многообразие X над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ является объединением неприводимых компонент[2] $X_1, X_2, \dots, X_m$ с координатными алгебрами $A_i = \Bbbk[X_i]$ и полями рациональных функций[3] $K_i = \Bbbk(X_i)$. Покажите, что всюду плотные в топологии Зарисского открытые подмножества $U \subset X$ образуют обратную фильтрующуюся систему и найдите $\operatorname{colim} \mathcal{O}_X(U)$ по этой системе, где $\mathcal{O}_X$ — структурный пучок[4].

Задача 4 (10 баллов). Вычислите когомологии с компактными носителями постоянного пучка $\mathbb{R}^{\sim}$ на замкнутом полупространстве $x_1 \geqslant -1$ в $\mathbb{R}^3$, из которого удалена координатная ось x_3.

Задача 5 (10 баллов). Обозначим через X трёхмерное аффинное пространство $\mathbb{A}^3$ без координатной оси x_3, рассматриваемое как алгебраическое многообразие над полем $\mathbb{C}$. Вычислите когомологии $H^\bullet\left(X, \mathcal{O}_X\right)$ его структурного пучка $\mathcal{O}_X$.

Задача 6 (10 баллов). Точен ли комплекс Де Рама пространств глобальных дифференциальных форм с полиномиальными коэффициентами на аффинном пространстве $\mathbb{A}^n$ над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики а) нуль б) $p > 0$? Точен ли при этом комплекс Де Рама пуков дифференциальных форм с локально рациональными коэффициентами[5]?

---

[1] Оба комплекса имеют дифференциал $\partial = \partial_1 + \partial_2$.

[2] Алгебраическое многообразие называется *неприводимым*, если оно не представляется в виде объединения двух непустых собственных замкнутых по Зарисскому подмножеств. Для аффинного многообразия X неприводимость равносильна целостности его координатной алгебры $\Bbbk[X]$. Каждое аффинное алгебраическое многообразие является объединением конечного числа неприводимых.

[3] Полем *рациональных функций* неприводимого аффинного алгебраического многообразия X называется поле частных $\Bbbk(X)$ целостного кольца $\Bbbk[X]$.

[4] Сечения пучка $\mathcal{O}_X$ над открытым по Зарисскому множеством $U \subset X$ это функции $f : U \to \Bbbk$, представляющиеся в окрестности каждой точки $p \in U$ в виде φ/ψ, где φ, ψ — многочлены и $\psi(p) \neq 0$

[5] Предыдущий комплекс является комплексом пространств глобальных сечений последнего комплекса.