Когерентные пучки.

Терминология. Пусть поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто. Алгебраическое многообразие над $\Bbbk$ это топологическое пространство X, у каждой точки которого есть открытая окрестность U с гомеоморфизмом $\varphi_U : U \xrightarrow{\sim} X_U$, где X_U — аффинное многообразие с топологией Зарисского[1], и любые две таких аффинных карты U и W согласованы в том смысле, что гомеоморфизм $\varphi_W \circ \varphi_U^{-1}$ между открытыми подмножествами $\varphi_U(U \cap W) \subset X_U$ и $\varphi_W(U \cap W) \subset X_W$ задаётся в координатах рациональными функциями, определёнными всюду на этих подмножествах. Через $\mathcal{O}_X$ обозначается пучок локальных рациональных функций на X со значениями в $\Bbbk$. Пучок $\mathcal{O}_X$-модулей $\mathcal{M}$ на X называется квазикогерентным, если существует такое аффинное покрытие $X = \bigcup U_i$, что $\forall\, i$ и открытого $W \subset U_i$ $\mathcal{M}(W) = \mathcal{M}(U_i) \underset{\mathcal{O}_X(U_i)}{\otimes} \mathcal{O}_X(W)$. На проективном пространстве $\mathbb{P}_n$ через $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(d)$ обозначается пучок, сечения которого над открытым $U \subset \mathbb{P}_n$ суть рациональные функции от однородных координат x на $\mathbb{P}_n$, допускающие $\forall\, p \in U$ запись $f(x)/g(x)$ с такими однородными[2] f, g, что $\deg f - \deg g = d$ и $g(p) \neq 0$.

ГА7◇1. Для элементов $f_1, f_2, \dots, f_m$ коммутативного кольца K с единицей тензорное произведение $K_{f_1 f_2 \dots f_m} \overset{\text{def}}{=} \bigotimes_{i=1}^m K_{f_i}$ двучленных комплексов $K_{f_i} : 0 \to K \xrightarrow{x \mapsto f_i x} K \to 0$, сосредоточенных в степенях 0 и 1, называется *комплексом Кошуля*. Обозначим через $\Lambda = \bigoplus_{i=0}^m \Lambda^i$ внешнюю алгебру свободного модуля K^m ранга m с базисом $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$. Покажите, что: **а)** комплекс Кошуля изоморфен комплексу $0 \to \Lambda^0 \xrightarrow{\xi} \Lambda^1 \xrightarrow{\xi} \cdots \xrightarrow{\xi} \Lambda^{m-1} \xrightarrow{\xi} \Lambda^m \xrightarrow{\xi} 0$, дифференциал в котором задаётся левым умножением на $\xi = \sum f_i \xi_i \in \Lambda^1$ **б)** если f_i не делит нуль в $K/\big(f_{i+1}, \dots f_m\big)$ ни при каком i, то $H^m(K_{f_1 f_2 \dots f_m}) \simeq K/(f_1, f_2, \dots, f_m)$, а остальные $H^i(K_{f_1 f_2 \dots f_m}) = 0$.

ГА7◇2. Пусть аффинное алгебраическое многообразие X с координатной алгеброй $A = \Bbbk[X]$ покрыто главными открытыми множествами $U_i = \mathcal{D}(f_i) = \{p \in X \mid f_i(p) \neq 0\}$ для некоторых $f_1, f_2, \dots, f_m \in A$. Покажите, что **а)** последовательность A-модулей точна тогда и только тогда, когда для каждого i точна её локализация по[3] f_i **б)** для любого A-модуля M и любых $n_1, n_2, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ комплекс Кошуля $M_{f_1^{n_1} f_2^{n_2} \dots f_m^{n_m}} = M \underset{A}{\otimes} K_{f_1^{n_1} f_2^{n_2} \dots f_m^{n_m}}$ точен **в)** комплекс Чеха $0 \to M \to \prod_i M_{(f_i)} \to \prod_{i<j} M_{(f_i f_j)} \to \prod_{i<j<k} M_{(f_i f_j f_k)} \to \cdots$, в котором $M_{(h)} \overset{\text{def}}{=} M \underset{A}{\otimes} A[h^{-1}]$, а дифференциал переводит семейство $s \in \prod_{i_0 < \dots < i_p} M_{(f_{i_0} f_{i_1} \dots f_{i_p})}$ элементов $s_{i_0 i_1 \dots i_p} \in M_{(f_{i_0} f_{i_1} \dots f_{i_p})}$ в семейство ds элементов $(ds)_{i_0 i_1 \dots i_{p+1}} = \sum_{\nu=1}^p (-1)^\nu s_{i_0 \dots \hat{i}_\nu \dots i_{p+1}} \in M_{(f_{i_0} f_{i_1} \dots f_{i_{p+1}})}$, является фильтрующимся копределом комплексов Кошуля и тоже точен **г)** аффинные открытые покрытия алгебраических многообразий ацикличны для всех квазикогерентных пучков.

ГА7◇3. Укажите базис над $\Bbbk$ в пространстве когомологий структурного пучка $\mathcal{O}_X$ на многообразии $X = \mathbb{A}^{n+1} \smallsetminus 0$ (используйте стандартное покрытие картами $U_i = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \mid x_i \neq 0\}$).

ГА7◇4. Убедитесь, что все пучки $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(d)$ на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ суть пучки локально свободных $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}$-модулей ранга 1, и постройте точную последовательность Эйлера $0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n} \to V \otimes_\Bbbk \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1) \to \mathcal{T}_{\mathbb{P}_n} \to 0$, в которой V — постоянный пучок векторных пространств со слоем V, а $\mathcal{T}_{\mathbb{P}_n}$ — касательный пучок (локальных векторных полей с рациональными коэффициентами).

ГА7◇5. Вычислите на $\mathbb{P}_n$ когомологии когерентных пучков: **а)** $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(d)$ **б)** $\Lambda^k \mathcal{T}_{\mathbb{P}_n}$ **в)** $\Lambda^k \Omega_{\mathbb{P}_n}$, где $\Omega_{\mathbb{P}_n} = \mathcal{T}^*_{\mathbb{P}_n} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}}(\mathcal{T}_{\mathbb{P}_n}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n})$ — кокасательный пучок (локальных дифференциальных 1-форм с рациональными коэффициентами).

ГА7◇6. Покажите, что: **а)** пучок иделов $\mathcal{J}$ рациональной кубической кривой Веронезе в $\mathbb{P}_3$ включается в точную тройку $0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(-3)^{\oplus 2} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(-2)^{\oplus 3} \to \mathcal{J} \to 0$ **б)** две кубики Веронезе пересекаются , если и только если они лежат на одной кубической поверхности.

[1] Т.е. $X_U \subset \Bbbk^m$ задаётся системой полиномиальных уравнений. Замкнутые множества в X_U суть множества, также задаваемые системами полиномиальных уравнений. Кольцо $\Bbbk[X_U] \overset{\text{def}}{=} \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_m]/I$, где I — идеал многочленов, тождественно зануляющихся на X_U, называется *координатным кольцом* аффинного многообразия X_U.

[2] которые могут зависеть от точки $p \in U$

[3] т. е. результат применения к ней точного функтора $M \mapsto M \underset{A}{\otimes} A[f_i^{-1}]$

Персональный табель ______________________________ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 7 (4 декабря 2015)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
2а			
б			
в			
г			
3			
4			
5а			
б			
в			
6а			
б			