# Представления конечных групп

**ТП5◇1.** Покажите, что на каждом вещественном (соотв. комплексном) конечномерном представлении конечной группы $G$ можно ввести $G$-инвариантное евклидово (соотв. эрмитово) скалярное произведение. Выведите отсюда полную приводимость таких представлений.

**ТП5◇2*.** Опишите все конечные подгруппы в $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ с точностью до сопряжения.

**ТП5◇3.** Покажите, что $R(G_1 \times G_2) = R(G_1) \otimes_{\mathbb{Z}} R(G_2)$, где $R(G) \subset \mathbb{C}^G$ обозначает кольцо комплексных представлений[1] конечной группы $G$.

**ТП5◇4.** Пусть пересечение класса сопряжённости $C \subset G$ с подгруппой $H \subset G$ является объединением $D_1 \sqcup \ldots \sqcup D_s$ классов $H$-сопряжённости. Для заданного характера $\chi$ подгруппы $H$ выразите значение индуцированного им характера группы $G$ на классе $C$ через значения $\chi(D_i)$, порядки $|D_i|$ и индекс $[G : H]$.

**ТП5◇5.** Опишите комплексное представление группы $S_4$, индуцированное **а)** двумерным неприводимым представлением подгруппы $S_3 = \mathrm{Stab}(4)$ **б)** 1-мерным представлением 4-цикла умножением на $\sqrt[4]{1}$ **в)** 1-мерным представлением 3-цикла умножением на $\sqrt[3]{1}$.

**ТП5◇6 (аффинная группа прямой).** Рассмотрим группу $A$ всех биективных преобразований $x \mapsto ax + b$ аффинной прямой $\mathbb{A}^1$ над полем $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$. **а)** Покажите, что $A = \mathbb{F}_p \rtimes \mathbb{F}_p^*$, где $\mathbb{F}_p \subset A$ — подгруппа сдвигов, а $\mathbb{F}_p^* \subset A$ — подгруппа растяжений относительно начала координат, и перечислите классы сопряжённости в $A$. **б)** Вычислите характер представления группы $A$ в пространстве функций $\mathbb{A}^1 \to \mathbb{C}$ с нулевой суммой значений. Убедитесь, что оно неприводимо и индуцировано одномерным представлением подгруппы сдвигов с характером $\mathbb{F}_p \to \mathrm{U}_1$, $t \mapsto e^{2\pi i t/p}$. **в)** Покажите, что все остальные неприводимые представления группы $A$ одномерны и вычислите их характеры.

**ТП5◇7* (группа Гейзенберга).** Для простого $p > 2$ и $n$-мерного векторного пространства $L$ над полем $\mathbb{F}_p$ *группа Гейзенберга* $H_p^n$ состоит из троек $(x, u, u^*) \in \mathbb{F}_p \times L \times L^*$ с операцией $(x_1, u_1, u_1^*) \circ (x_2, u_2, u_2^*) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + x_2 + (u_2^*(u_1) - u_1^*(u_2))/2,\ u_1 + u_2,\ u_1^* + u_2^*)$. Обозначим через $H' \simeq \mathbb{F}_p \times L \subset H_p^n$ абелеву подгруппу всех троек вида $(x, u, 0)$. **а)** Проверьте, что $H_p^n$ действительно группа и перечислите её классы сопряжённости. **б)** Убедитесь, что $H_p^1$ изоморфна группе верхних унитреугольных $3\times3$ матриц над $\mathbb{F}_p$. **в)** Покажите, что для каждого $a \in \mathbb{F}_p^*$ комплексное представление $W_a$ группы $H_p^n$, индуцированное одномерным представлением подгруппы $H'$ с характером $\psi_a(x, u, 0) = e^{2\pi i a x/p}$, неприводимо, и все такие представления различны. Вычислите размерность и характер представления $W_a$. **г)** Покажите, что все остальные неприводимые представления группы $H_p^n$ одномерны.

**ТП5◇8* (группа Гейзенберга 2).** При $p = 2$ обозначим через $H$ группу с $4n + 4$ образующими $\pm 1, \pm u_1, \ldots, \pm u_{2n+1}$ и соотношениями $u_i^2 = -1$, $u_i u_j = -u_j u_i$ и «минус на минус даёт плюс». **а)** Убедитесь, что $H$ состоит из $2^{2n+2}$ элементов $\pm u_I = \pm u_{i_1} \ldots u_{i_k}$, где $I = (i_1, \ldots, i_k)$ пробегает всевозможные возрастающие поднаборы в $(1, \ldots, (n + 1))$, включая $\varnothing$, для которого $u_\varnothing = 1$, и отвечающие индексам $I$ чётной длины элементы $\pm u_I$ образуют в $H$ подгруппу[2] $H_2^n$. **б)** Покажите, что группа $H_2^1$ изоморфна группе кватернионных единиц $Q_8$. Опишите **в)** центр **г)** классы сопряжённости **д)** неприводимые представления группы $H_2^n$.

**ТП5◇9*.** Покажите, что в разложениях тензорных степеней любого эффективного представления конечной группы встречаются все неприводимые представления этой группы.

**ТП5◇10*.** Покажите, что каждый неодномерный неприводимый характер конечной группы зануляется хотя бы на одном классе сопряжённости.

---

[1] Т. е. целочисленная линейная оболочка комплексных неприводимых характеров.

[2] Она называется *группой Гейзенберга* для $p = 2$.

Персональный табель ______________________________________.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

**Листок № 6 (18.04.2023)**

| № | дата | кто принял | подпись |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |
| 5а | | | |
| б | | | |
| в | | | |
| 6а | | | |
| б | | | |
| в | | | |
| 7а | | | |
| б | | | |
| в | | | |
| г | | | |
| 8а | | | |
| б | | | |
| в | | | |
| г | | | |
| д | | | |
| 9 | | | |
| 10 | | | |