

Массивы, таблицы и диаграммы

ТП4♦1. Покажите, что следующие три условия на массив a попарно эквивалентны:

- а) a плотен вниз
- б) строчная развёртка массива a является таблицей Юнга
- в) $\forall i \in I, j \in J \quad a(1, j + 1) + a(2, j + 1) + \dots + a(i, j + 1) \leq a(1, j) + a(2, j) + \dots + a(i - 1, j)$.

ТП4♦2. Нарисуйте плотный вниз массив со строчной развёрткой

1	4	6
2	5	7
3	8	9

 и плотный влево

массив со столбцовой развёрткой¹

1	2	3
4	5	8
6	7	9

. Какой перестановке из симметрической группы S_9 отвечает по теореме о биекции эта пара массивов?

ТП4♦3. Каким перестановкам $g \in S_9$ соответствует по теореме о биекции пара таблиц²

- а)

1	2	3	6	7	8	9
4						
5						

 и

1	4	5	6	7	8	9
2						
3						
- б)

1	3	5	6
2	4	9	
7	8		

 и

1	3	5	7
2	4	8	
6	9		

.

ТП4♦4. Покажите, что всякий гомоморфизм³ между двумя DU-орбитами биективен, если вторая орбита не состоит из одной точки.

ТП4♦5. Выпишите явно многочлены Шура а) $s_{2,1}(x_1, x_2, x_3)$ б) $s_{3,1}(x_1, x_2, x_3)$ в) $s_{2,1,1}(x_1, x_2, x_3)$.

ТП4♦6. Из скольких мономов состоит $s_{(2,1,1)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$?

ТП4♦7. Выразите $\det \begin{pmatrix} x_1^6 & x_2^6 & x_3^6 & x_4^6 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ через элементарные симметрические многочлены и произведение $\prod_{i < j} (x_i - x_j)$.

ТП4♦8 (доминирование). Для двух диаграмм Юнга λ и μ одинакового веса $|\lambda| = |\mu| = n$ мы пишем⁴ $\lambda \geq \mu$, если $\lambda_1 + \dots + \lambda_j \geq \mu_1 + \dots + \mu_j$ для каждого $j = 1, 2, \dots$

- а) Покажите, что доминирование является частичным порядком и приведите пример двух несравнимых диаграмм.
- б) Пусть λ — минимальная по отношению доминирования диаграмма, строго доминирующая диаграмму μ . Покажите, что μ получается из λ переносом ровно одной клетки в юго-западном направлении на ближайшее возможное расстояние, и в этом случае $\mu^t \triangleright \lambda^t$. Выведите отсюда, что для произвольных двух диаграмм $\lambda \geq \mu \iff \lambda^t \trianglelefteq \mu^t$.

ТП4♦9. Разрежем диаграмму λ в объединение Γ -образных диаграмм $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ с углами на главной диагонали. Например:

 =

 \cup

 \cup

, а в общем случае k равно числу

клеток на главной диагонали диаграммы λ и $\gamma_i = (\lambda_i - i + 1, 1^{\lambda_i - i})$. Выясните, с каким коэффициентом входит s_λ в разложение произведения $s_{\gamma_1} \dots s_{\gamma_k}$ по базису Шура.

ТП4♦10* (инволюция Шютценберже). Покажите, что центральная симметрия не меняет форму⁵ массивов: $\Phi(a^*) = \Phi(a)$, где $a^*(i, j) = a(n + 1 - i, m + 1 - j)$ для $m \times n$ массива a .

¹Напомним, что столбцовая развёртка массива a — это строчная развёртка транспонированного массива a^t .
²Перестановка $g \in S_9$ задаёт биективное отображение $I \rightarrow J$ горизонтальных индексов в вертикальные, массив является графиком этого отображения, первая из таблиц — строчной развёрткой его уплотнения вниз, вторая — столбцовой развёрткой его уплотнения влево.
³Т. е. отображение, перестановочное с действием всех операций D_j и U_j .
⁴Это отношение называется *доминированием*.
⁵Напомним, что форма массива это диаграмма Юнга, описывающая его биуплотнение.

Персональный табель _____.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 4 (21.03.2023)

№	дата	кто принял	подпись
1а			
б			
в			
2			
3а			
б			
4			
5а			
б			
в			
6			
7			
8а			
б			
9			
10			