Алгебры многочленов

ТП2⋄1. Пусть $\operatorname{char}\Bbbk = 0$. Постройте изоморфизмы между пространствами **а)** симметричных n-линейных форм $\varphi : V \times \ldots \times V \to \Bbbk$ **б)** функций $f : V \to \Bbbk$, задаваемых однородным многочленом степени n от линейных координат в каком-нибудь базисе пространства V **в)** $\operatorname{Sym}^n(V^*)$ **г)** $\operatorname{Sym}^n(V)^*$ **д)** $(S^nV)^*$ **е)** $S^n(V^*)$. Какие из них остаются изоморфизмами в положительной характеристике?

ТП2⋄2. Пусть $\operatorname{char}\Bbbk = 0$. Постройте изоморфизмы между пространствами **а)** кососимметричных n-линейных форм $\varphi : V \times \ldots \times V \to \Bbbk$ **б)** $\operatorname{Alt}^n(V^*)$ **в)** $\operatorname{Alt}^n(V)^*$ **г)** $(\Lambda^nV)^*$ **д)** $\Lambda^n(V^*)$. Какие из них остаются изоморфизмами при $\operatorname{char}\Bbbk > 0$?

ТП2⋄3 (спинорное разложение). Пусть $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$, $U = \Bbbk^2$ и $V = \operatorname{End}(U)$. Покажите, что **а)** $V^{\otimes 2} \simeq S^2V \oplus \Lambda^2V$ **б)** $S^2V \simeq (S^2U \otimes S^2U^*) \oplus (\Lambda^2U \otimes \Lambda^2U^*)$ **в)** $\Lambda^2V \simeq (S^2U \otimes \Lambda^2U^*) \oplus (\Lambda^2U \otimes S^2U^*)$.

ТП2⋄4. Укажите в $V^{\otimes 3}$ тензор, не равный сумме кососимметричного и симметричного.

ТП2⋄5 (принцип Аронгольда). Покажите, что над полем характеристики нуль пространство $\operatorname{Sym}^n(V) \subset V^{\otimes n}$ линейно порождается тензорами вида $v^{\otimes n} = v \otimes \ldots \otimes v$ с $v \in V$ и явно выразите через них тензор $u \otimes w \otimes w + w \otimes u \otimes w + w \otimes w \otimes u \in \operatorname{Sym}^3(V)$. Порождается ли S^nV полными n-ми степенями v^n векторов $v \in V$?

ТП2⋄6. Существует ли линейная обратимая замена координат, превращающая многочлен $9\,x^3 - 15\,yx^2 - 6\,zx^2 + 9\,xy^2 + 18\,z^2x - 2\,y^3 + 3\,zy^2 - 15\,z^2y + 7\,z^3$ в многочлен от $\leqslant 2$ переменных?

ТП2⋄7. Выясните, разложима ли в произведение трёх линейных форм от $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ грассманова кубическая форма $-\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3 + 2\,\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_4 + 4\,\xi_1 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4 + 3\,\xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4$, и если да, выпишите такое разложение явно.

ТП2⋄8. Существуют ли такие ненулевые линейные операторы $F_1, \ldots, F_m : V \to V$ и отличный от $0 \in \Bbbk^m$ набор констант $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \Bbbk^m$, что $\lambda_1 F_1^{\otimes n} + \ldots + \lambda_m F_m^{\otimes n} = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$?

ТП2⋄9* (принцип расщепления). Покажите, что: **а)** диагонализуемые операторы всюду плотны в $\operatorname{End}(\mathbb{C}^n)$ **б)** если утверждение про матрицу A записывается системой полиномиальных соотношений с целыми коэффициентами на матричные элементы a_{ij}, то из его справедливости для какого-нибудь всюду плотного множества матриц в $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{C})$ или в $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$ вытекает, что оно верно для всех матриц над любым коммутативным кольцом **в)** если система полиномиальных соотношений на a_{ij} из предыдущего пункта не меняется при заменах $A \mapsto CAC^{-1}$ с произвольным[1] $C \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{C})$, то её достаточно проверить для диагональных комплексных матриц.

ТП2⋄10. Для $n \times n$ матрицы F, рассматриваемой как линейный оператор $\Bbbk^n \to \Bbbk^n$, выразите через коэффициенты характеристического многочлена $\chi_F(t) = \det(tE - F)$ числа: **а)** $\operatorname{tr} F^{\otimes 2}$ **б*)** $\operatorname{tr} F^{\otimes 3}$ **в)** $\det F^{\otimes 2}$ **г*)** $\det F^{\otimes 3}$, а для обратимой матрицы — след и определитель действия F **д*)** на $\operatorname{End}(\Bbbk^n)$ по правилу $G \mapsto FGF^{-1}$ **е*)** на $S^2(\Bbbk^{n*})$ по правилу $Ff(x_1, \ldots, x_n) = f((x_1, \ldots, x_n)\,F)$.

ТП2⋄11. Пусть $\operatorname{char}\Bbbk = 0$, и оператор $F : V \to V$ диагонализуем. Выразите собственные числа операторов $S^kF : v_1 \ldots v_k \mapsto F(v_1) \ldots F(v_k)$ и $\Lambda^kF : v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \mapsto F(v_1) \wedge \ldots \wedge F(v_k)$ через собственные числа F и докажите в $\Bbbk[\![t]\!]$ следующие тождества:
а) $\det(E - tF)^{-1} = \sum_{k \geqslant 0} \operatorname{tr}(S^kF)\,t^k$ **б)** $\det(E + tF) = \sum_{k \geqslant 0} \operatorname{tr}(\Lambda^kF)\,t^k$.

ТП2⋄12*. Верны ли тождества из зад. ТП2⋄11 также и для недиагонализуемых F?

ТП2⋄13*. Пусть $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — любой, а $E : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — тождественный линейные операторы. Докажите, что в $\operatorname{End}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n)$ выполняется равенство $e^{F \otimes E + E \otimes F} = e^F \otimes e^F$.

[1] Т. е. является утверждением не про матрицу A, но про линейный оператор $\alpha : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ с матрицей A в некотором базисе.

Персональный табель ______________________________________.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 2 (14.02.2023)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3а			
б			
в			
4			
5			
6			
7			
8			
9а			
б			
в			
10а			
б			
в			
г			
д			
е			
11а			
б			
12			
13			