А. Л. Городенцев[*]

ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Кафедра дискретной математики МФТИ
2023

[*] ВШЭ, ИТЭФ, НМУ, e-mail:gorod@itep.ru , http://gorod.bogomolov-lab.ru/

Оглавление

§1. Тензорная алгебра

1.1. Полилинейные отображения. Рассмотрим векторные пространства $V_1, \dots, V_n$ и W над любым полем $\Bbbk$. Отображение множеств

$$\varphi : V_1 \times \ldots \times V_n \to W \tag{1-1}$$

называется *полилинейным*[1], если оно линейно по каждому из n своих аргументов при произвольно зафиксированных остальных: $\varphi(\dots, \lambda u + \mu v, \dots) = \lambda\, \varphi(\dots, u, \dots) + \mu\, \varphi(\dots, v, \dots)$. Полилинейные отображения образуют векторное пространство относительно стандартных операций сложения и умножения на числа функций со значениями в векторном пространстве. Пространство полилинейных отображений обозначается $\mathrm{Hom}(V_1, \dots, V_n; W)$. Если выбрать в каждом пространстве V_i базис $E_i \subset V_i$ и для каждого сочетания базисных векторов

$$(e_1, \dots, e_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$$

произвольным образом указать вектор $\varphi(e_1, \dots, e_n) \in W$, то этот набор данных однозначно задаст полилинейное отображение (1-1) с указанными значениями на наборах базисных векторов. Его значение на произвольном наборе векторов $(v_1, \dots, v_n)$, где $v_i = \sum_{e_i \in E_i} x_{e_i} e_i \in V_i$, равно $\varphi(v_1, \dots, v_n) = \sum_{(e_1, \dots, e_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n} x_{e_1} x_{e_2} \dots x_{e_n} \varphi(e_1, \dots, e_n)$. Если выбрать в пространстве W базис $E \subset W$ и разложить по нему все векторы $\varphi(e_1, \dots, e_n)$:

$$\varphi(e_1, \dots, e_n) = \sum_{e \in E} a^{e}_{e_1, \dots, e_n} e\,,$$

получим набор чисел $a^{e}_{e_1, \dots, e_n} \in \Bbbk$, который естественно организуется в $(n+1)$-мерную матрицу, ячейки которой нумеруются элементами множества[2] $E \times E_1 \times \ldots \times E_n$. В терминах этой матрицы

$$\varphi(v_1, \dots, v_n) = \sum_{(e, e_1, \dots, e_n) \in E \times E_1 \times \ldots \times E_n} x_{e_1} \dots x_{e_n} a^{e}_{e_1, \dots, e_n} e\,.$$

При сложении полилинейных отображений и умножении их на числа соответствующие этим отображениям многомерные матрицы поэлементно складываются и умножаются на числа. Таким образом, мы получаем $\Bbbk$-линейный изоморфизм пространства полилинейных отображений с пространством многомерных матриц. Мы заключаем, что если $\dim V_i = d_i$ и $\dim W = d$, то $\dim \mathrm{Hom}(V_1, \dots, V_n; W) = d d_1 \dots d_n$.

1.1.1. Универсальное полилинейное отображение. Если помимо пространств $V_1, \dots, V_n$ и W задаться ещё одним пространством U и полилинейным отображением

$$\tau : V_1 \times \ldots \times V_n \to U\,, \tag{1-2}$$

то каждому линейному отображению $F : U \to W$ можно сопоставить полилинейное отображение $F \circ \tau : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$. Это сопоставление является линейным отображением векторных пространств

$$\mathrm{Hom}(U, W) \to \mathrm{Hom}(V_1, \dots, V_n; W)\,, \quad F \mapsto F \circ \tau\,. \tag{1-3}$$

[1] Или *n-линейным*, когда желательно точно указать количество аргументов.

[2] При $n = 1$ получается обычная двумермерная матрица линейного отображения $V \to W$, строки которой биективно соответствуют базисным векторам пространства W, а столбцы — базисным векторам пространства V.

Полилинейное отображение (1-2) называется *универсальным*, если для каждого векторного пространства W линейное отображение (1-3) является изоморфизмом. Это означает, что для каждого полилинейного отображения $\varphi : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ существует единственное такое линейное отображение $F : U \to W$, что $\varphi = F \circ \tau$, т. е. пара полилинейных сплошных стрелок в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dd, dashed, "F"] \\
V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[ur, "\tau"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \\
 & W
\end{tikzcd}$$

всегда замыкается в коммутативный треугольник единственным пунктирным линейным отображением.

Лемма 1.1

Для любых двух универсальных полилинейных отображений

$$\tau_1 : V_1 \times \ldots \times V_n \to U_1 \qquad \text{и} \qquad \tau_2 : V_1 \times \ldots \times V_n \to U_2$$

имеется единственный такой линейный изоморфизм $\iota : U_1 \xrightarrow{\sim} U_2$, что $\tau_2 = \iota\tau_1$.

Доказательство. В силу универсальности τ_1 и τ_2 существуют единственные такие линейные отображения $F_{21} : U_1 \to U_2$ и $F_{12} : U_2 \to U_1$, что $\tau_2 = F_{21}\tau_1$ и $\tau_1 = F_{12}\tau_2$, т. е. коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[dd, equal, "\mathrm{Id}_{U_1}"'] \arrow[dr, dashed, "F_{21}"] & & & & U_2 \arrow[dl, dashed, "F_{12}"'] \arrow[dd, equal, "\mathrm{Id}_{U_2}"] \\
 & U_2 \arrow[dl, dashed, "F_{12}"] & V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[l, "\tau_2"'] \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[ull, "\tau_1"'] \arrow[urr, "\tau_2"] \arrow[dll, "\tau_1"] \arrow[drr, "\tau_2"'] & U_1 \arrow[dr, dashed, "F_{21}"] & \\
U_1 & & & & U_2 .
\end{tikzcd}$$

Равенства $F_{21}F_{12} = \mathrm{Id}_{U_2}$ и $F_{12}F_{21} = \mathrm{Id}_{U_1}$ выполняются в силу того, что разложения $\tau_1 = \varphi \circ \tau_1$ и $\tau_2 = \psi \circ \tau_2$ единственны и имеют место для $\varphi = \mathrm{Id}_{U_1}$, $\psi = \mathrm{Id}_{U_2}$. □

1.2. Тензорное произведение. Универсальное полилинейное отображение называется *тензорным произведением векторов* и обозначается

$$\tau : V_1 \times \ldots \times V_n \to V_1 \otimes \ldots \otimes V_n . \tag{1-4}$$

Единственное с точностью до единственного перестановочного с тензорным произведением векторов изоморфизма пространство $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ называется *тензорным произведением* векторных пространств $V_1, \ldots, V_n$, а его элементы — *тензорами*. Тензорные произведения векторов обычно записывают в виде

$$v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \overset{\text{def}}{=} \tau(v_1, \ldots, v_n) . \tag{1-5}$$

Они составляют образ универсального отображения (1-4) и называются *разложимыми* тензорами. Так как отображение (1-4) не линейно, а полилинейно, его образ как правило не является векторным подпространством, и наугад взятая линейная комбинация мономов (1-5) скорее всего не раскладывается в тензорное произведение n векторов.

1.2.1. Существование тензорного произведения. Данные выше определения обеспечивают единственность универсального полилинейного отображения, но не гарантируют его существования. В этом разделе мы явно построим пространство $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ и укажем в нём базис. Рассмотрим векторное пространство[1] $\mathcal{V}$, базисом которого по определению являются всевозможные n-буквенные слова $[v_1 \ldots v_n]$, в которых в качестве i-той буквы может выступать любой вектор $v_i \in V_i$. В этом огромном пространстве рассмотрим не менее огромное подпространство $\mathcal{R} \subset \mathcal{V}$, порождённое всевозможными трёхчленными линейными комбинациями вида

$$[\ \ldots\ (\lambda u + \mu w)\ \ldots\ ] - \lambda [\ \ldots\ u\ \ldots\ ] - \mu [\ \ldots\ w\ \ldots\ ]\,, \tag{1-6}$$

где обозначенные многоточиями соответственные фрагменты всех трёх слов одинаковы. Положим по определению

$$V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \overset{\text{def}}{=} \mathcal{V}/\mathcal{R}\,, \quad v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \overset{\text{def}}{=} [v_1 \ldots v_n] \pmod{\mathcal{R}}\,. \tag{1-7}$$

Иными словами, пространство $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ состоит из конечных линейных комбинаций формальных тензорных мономов $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$, в которых $v_i \in V_i$ и которые подчиняются стандартным соотношениям дистрибутивности: если любой из сомножителей (при фиксированных остальных) записать в виде линейной комбинации векторов, то такое произведение можно преобразовать по обычному правилу для раскрытия скобок:

$$\ldots\ \otimes (\lambda u + \mu w) \otimes\ \ldots\ = \lambda \cdot (\ \ldots\ \otimes u \otimes\ \ldots\ ) + \mu \cdot (\ \ldots\ \otimes w \otimes\ \ldots\ )\,. \tag{1-8}$$

Лемма 1.2
Отображение $\tau : V_1 \times \ldots \times V_n \to \mathcal{V}/\mathcal{R}$, $(v_1, \ldots, v_n) \mapsto [v_1 \ldots v_n] \pmod{\mathcal{R}}$, является универсальным полилинейным отображением.

Доказательство. Полилинейность тавтологически следует из наложенных соотношений и выражается в точности формулой (1-8). Докажем универсальность. Для любого отображения множеств $\varphi : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ существует единственное линейное отображение $F : \mathcal{V} \to W$, переводящее базисный вектор $[v_1 \ldots v_n] \in \mathcal{V}$ в $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$. Для того, чтобы это отображение было корректно определено на факторе $\mathcal{V}/\mathcal{R}$, достаточно проверить, что $\mathcal{R} \subset \ker F$. Для каждого соотношения (1-6) из полилинейности φ и линейности F получаем

$$\begin{aligned} &F\big([\ldots (\lambda u + \mu w) \ldots] - \lambda [\ldots u \ldots] - \mu [\ldots w \ldots]\big) = \\ &\qquad = F\big([\ldots (\lambda u + \mu w) \ldots]\big) - \lambda F\big([\ldots u \ldots]\big) - \mu F\big([\ldots w \ldots]\big) = \\ &\qquad\qquad = \varphi(\ldots\,, (\lambda u + \mu w),\ \ldots) - \lambda \varphi(\ldots\,, u,\ \ldots) - \mu \varphi(\ldots\,, w,\ \ldots) = 0\,, \end{aligned}$$

что и требовалось. □

Следствие 1.1
Разложимые тензоры $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$ линейно порождают пространство $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$.

Доказательство. Поскольку слова $[v_1 \ldots v_n]$ линейно порождают $\mathcal{V}$, их образы $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$ при факторизации $\mathcal{V} \twoheadrightarrow \mathcal{V}/\mathcal{R}$ линейно порождают фактор $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n = \mathcal{V}/\mathcal{R}$. □

[1] Скорее всего, бесконечномерное.

Теорема 1.1
Если в каждом пространстве V_i задан базис $E_i \subset V_i$, то всевозможные тензорные произведения

$$e_1 \otimes \ldots \otimes e_n\,,\ \text{где } e_i \in E_i\,, \tag{1-9}$$

базисных векторов образуют базис в $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$. В частности, $\dim V_1 \otimes \ldots \otimes V_n = \prod_i \dim V_i$.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{W}$ пространство с базисом из выражений (1-9), которые мы временно будем воспринимать как формальные символы. Полилинейное отображение

$$\tau : V_1 \times \ldots \times V_n \to \mathcal{W}\,,$$

переводящее каждый набор базисных векторов $(e_1, \ldots, e_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$ в соответствующий базисный вектор (1-9) пространства $\mathcal{W}$, универсально, поскольку для любых полилинейного и линейного отображений $\varphi : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ и $F : \mathcal{W} \to W$ равенство $\varphi = F \circ \tau$ равносильно выполнению для всех $(e_1, \ldots, e_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$ равенств $F(e_1 \otimes \ldots \otimes e_n) = \varphi(e_1, \ldots, e_n)$, которые однозначно определяют F, если задано φ, и наоборот. По лем. 1.1 имеется единственный линейный изоморфизм $\mathcal{W} \xrightarrow{\sim} V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$, переводящий базисные векторы (1-9) пространства $\mathcal{W}$ в соответствующие тензорные произведения базисных векторов, вычисленные в $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$. Тем самым, последние тоже образуют базис. □

Пример 1.1 (многочлены)
Обратите внимание, что теор. 1.1 верна и для *бесконечномерных* векторных пространств. Например, тензорное произведение n экземпляров пространства многочленов $\Bbbk[x] \otimes \ldots \otimes \Bbbk[x]$ изоморфно пространству многочленов от n переменных $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$. Изоморфизм сопоставляет базисному разложимому тензору $x^{m_1} \otimes \ldots \otimes x^{m_n}$ базисный моном $x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}$.

Пример 1.2 (многообразия Сегре)
Тензорное произведение $\tau : V_1 \times \ldots \times V_n \to V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ конечномерных пространств V_i задаёт отображение $s : \mathbb{P}_{m_1} \times \ldots \times \mathbb{P}_{m_n} \to \mathbb{P}_m$ из произведения проективных пространств $\mathbb{P}_{m_i} = \mathbb{P}(V_i)$ в проективное пространство $\mathbb{P}_m = \mathbb{P}\left(V_1 \otimes \ldots \otimes V_n\right)$. Это отображение называется *вложением Сегре*. Оно переводит набор одномерных подпространств, натянутых на ненулевые векторы $v_i \in V_i$, в одномерное подпространство, порождённое тензором $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$.

Упражнение 1.1. Убедитесь, что отображение корректно определено[1] и инъективно.

Образ вложения Сегре состоит из классов пропорциональности разложимых тензоров и называется *многообразием Сегре*. По построению, многообразие Сегре заметается n семействами проективных подпространств размерностей $m_1, \ldots, m_n$. Его размерность $\sum m_i$ обычно гораздо меньше размерности $m = \prod(m_i + 1) - 1$ объемлющего пространства. При этом многообразие Сегре не содержится ни в какой гиперплоскости, поскольку линейная оболочка множества разложимых тензоров совпадает со всем пространством $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$.

1.2.2. Линейные операторы как тензоры. Рассмотрим для векторных пространств U, W билинейное отображение $W \times U^* \to \mathrm{Hom}(U, W)$, переводящее $(w, \xi) \in W \times U^*$ в оператор

$$U \to W\,, \quad u \mapsto \xi(u) \cdot w\,, \tag{1-10}$$

[1] Т. е. тензор $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$ отличен от нуля и заменяется на пропорциональный при замене векторов v_i на пропорциональные.

образ которого порождён вектором w, а ядро равно $\mathrm{Ann}(\xi)$. При ненулевых ξ, w этот оператор имеет ранг 1, и каждый оператор $F : U \to W$ ранга 1 получается таким образом из подходящих ненулевых ξ, w, однозначно с точностью до пропорциональности определяемых оператором F как аннулятор подпространства $\ker F \subset U$, имеющего коразмерность 1, и базисный вектор в одномерном подпространстве $\operatorname{im} F \subset W$. Поэтому, переходя к проективизациям, мы получаем корректно определённое *вложение Сегре*

$$s : \mathbb{P}(W) \times \mathbb{P}(U^*) \hookrightarrow \mathbb{P}\big(\mathrm{Hom}(U, W)\big),$$

образ которого состоит из рассматриваемых с точностью до пропорциональности линейных операторов $U \to W$ ранга 1. В силу универсального свойства тензорного произведения, существует единственное линейное отображение

$$W \otimes U^* \to \mathrm{Hom}(U, V) \tag{1-11}$$

переводящее каждый разложимый тензор $w \otimes \xi$ в оператор (1-10). Если пространства U и W конечномерны с базисами $u_1, \dots, u_n$ и $w_1, \dots, w_m$, то mn разложимых тензоров $w_j \otimes u_i^*$, где $u_1^*, \dots, u_n^* \in U^*$ это двойственный к $u_1, \dots, u_n$ базис пространства U^*, образуют базис пространства $W \otimes U^*$. Отображение (1-11) переводит тензор $w_j \otimes u_i^*$ в линейный оператор

$$U \to W, \quad u_k \mapsto \begin{cases} w_j & \text{при } k = i \\ 0 & \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

матрица которого в выбранных базисах имеет единицу в клетке (i, j) и нули в остальных местах. Таким образом, стандартный базис тензорного произведения $W \otimes U^*$ переводится в стандартный базис пространства операторов, т. е. отображение (1-11) является линейным изоморфизмом. В дальнейшем мы часто будем отождествлять пространства $W \otimes U^*$ и $\mathrm{Hom}(U, W)$ при помощи изоморфизма (1-11) и обозначать оператор (1-10) через $w \otimes \xi$.

Если записывать операторы $U \to W$ их матрицами $A = (a_{ij})$ в выбранных выше базисах, то точки $w = (x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_m = \mathbb{P}(W)$ и $\xi = (y_0 : y_1 : \dots : y_m) \in \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(U^*)$ перейдут при вложении Сегре в $m \times n$ матрицу $A = w^t \cdot \xi$ с элементами $a_{ij} = x_i y_j$, а его образ, состоящий из матриц ранга 1, задастся однородными квадратичными уравнениями

$$\det \begin{pmatrix} a_{ij} & a_{ik} \\ a_{\ell j} & a_{\ell k} \end{pmatrix} = a_{ij}a_{\ell k} - a_{ik}a_{\ell j} = 0\,.$$

Два семейства координатных пространств $\xi \times \mathbb{P}_m$ и $\mathbb{P}_n \times w$ при этом перейдут в два семейства лежащих на многообразии Сегре проективных пространств, образованных матрицами ранга 1 с фиксированными отношениями между строками и столбцами соответственно.

Пример 1.3 (квадрика Сегре в $\mathbb{P}_3$)
При $U = W = \Bbbk^2$ вложение Сегре задаёт биекцию между $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ и обсуждавшейся в курсе геометрии[1] квадрикой Сегре в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}\left(\mathrm{Mat}_2(\Bbbk)\right)$, точками которой являются ненулевые матрицы $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ с $ad - bc = 0$, рассматриваемые с точностью до пропорциональности. Эта биекция переводит пару точек $(x_0 : x_1)$ и $(y_0 : y_1)$ в матрицу

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 y_0 & x_1 y_0 \\ x_0 y_1 & x_1 y_1 \end{pmatrix} \tag{1-12}$$

[1] См. раздел 19.4.1 на стр. 246 в http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2021/lec_19.pdf.

и отображает два семейства координатных прямых $\mathbb{P}_1 \times \{y\}$, $\{x\} \times \mathbb{P}_1 \subset \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ в два семейства проективных прямых на квадрике Сегре, образованных матрицами ранга 1 с фиксированными отношениями [строка 1] : [строка 2] $= (x_0 : x_1)$ и [столбец 1] : [столбец 2] $= (y_0 : y_1)$. В каждом из семейств все прямые попарно скрещиваются, а любые две прямые из разных семейств пересекаются, при этом каждая точка квадрики Сегре является точкой пересечения ровно одной пары прямых из разных семейств, и никаких других прямых на квадрике Сегре нет.

Упражнение 1.2. Докажите все эти геометрические утверждения.

1.3. Канонические изоморфизмы. Линейные отображения $f : V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \to W$ удобно задавать указанием значений $f(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n)$ на разложимых тензорах, а затем по линейности продолжать f на произвольные тензоры. Поскольку разложимые тензоры линейно порождают $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$, такое продолжение единственно при условии, что оно существует. Последнее равносильно тому, что все линейные соотношения, которые имеются между разложимыми тензорами, выполняются и между их образами в W. Поскольку все эти соотношения линейно порождаются соотношениями полилинейности из форм. (1-8) на стр. 6, мы получаем следующий полезный критерий.

Лемма 1.3
Линейное отображение $f : V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \to W$, $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \mapsto f(v_1, \ldots, v_n)$, существует если и только если векторы $f(v_1, \ldots, v_n) \in W$ полилинейно зависят[1] от векторов $v_i \in V_i$. □

Предложение 1.1
Имеется канонический изоморфизм $U \otimes W \simeq W \otimes U$, $u \otimes w \mapsto w \otimes u$.

Доказательство. Так как правило $u \otimes w \mapsto w \otimes u$ билинейно по u, w, оно по лем. 1.3 корректно определяет линейное отображение $U \otimes W \to W \otimes U$. Аналогично, существует линейное отображение $W \otimes U \to U \otimes W$, $w \otimes u \mapsto u \otimes w$. Оно обратно предыдущему, поскольку обе их композиции тождественно действуют на разложимых тензорах. □

Предложение 1.2
Имеются канонические изоморфизмы $V \otimes (U \otimes W) \simeq V \otimes U \otimes W \simeq (V \otimes U) \otimes W$, переводящие тензоры $v \otimes (u \otimes w)$, $v \otimes u \otimes w$ и $(v \otimes u) \otimes w$ друг в друга.

Доказательство. Поскольку тензор $v \otimes (u \otimes w) \in V \otimes (U \otimes W)$ трилинейно зависит от (v, u, w), существует линейное отображение $V \otimes U \otimes W \to V \otimes (U \otimes W)$, $v \otimes u \otimes w \mapsto v \otimes (u \otimes w)$. Обратное отображение строится в два шага. При каждом $v \in V$ тензор $v \otimes u \otimes w$ билинейно зависит от u и w. Поэтому имеется линейное отображение

$$\tau_v : U \otimes W \to V \otimes U \otimes W\,, \quad u \otimes w \mapsto v \otimes u \otimes w\,,$$

которое само по себе линейно зависит от v. Так как тензор $\tau_v(t) = v \otimes t$ билинеен по $v \in V$ и $t \in U \otimes W$, мы получаем искомое линейное отображение

$$V \otimes (U \otimes W) \to V \otimes U \otimes W\,, \quad v \otimes (u \otimes w) \mapsto v \otimes u \otimes w\,.$$

Изоморфизм $V \otimes U \otimes W \simeq (V \otimes U) \otimes W$ устанавливается аналогично. □

[1] Т. е. линейны по каждому v_i при фиксированных остальных.

Предложение 1.3
Имеются канонические изоморфизмы

$$V \otimes (U \oplus W) \simeq (V \otimes U) \oplus (V \otimes W) \quad \text{и} \quad (U \oplus W) \otimes V \simeq (U \otimes V) \oplus (W \otimes V)\,,$$

действующие на разложимые тензоры по правилам:

$$v \otimes (u \dotplus w) \leftrightarrows (v \otimes u) \dotplus (v \otimes w) \quad \text{и} \quad (u \dotplus w) \otimes v \leftrightarrows (u \otimes v) \dotplus (w \otimes v)$$

где $a \dotplus b$ для $a \in A$ и $b \in B$ означает сумму элементов $(a, 0)$ и $(0, b)$ в $A \oplus B$.

Доказательство. Достаточно построить первый изоморфизм, второй получится из него применением предл. 1.1. Отображение

$$V \otimes (U \oplus W) \to (V \otimes U) \oplus (V \otimes W)\,, \quad v \otimes (u \dotplus w) \mapsto (v \otimes u) \dotplus (v \otimes w)\,, \tag{1-13}$$

существует, поскольку $(v \otimes u) \dotplus (v \otimes w)$ билинеен по v и $u \dotplus w$. Обратное отображение снова строится в два шага: сначала строим линейные отображения

$$\begin{aligned} f_1 &: V \otimes U \to V \otimes (U \oplus W)\,, \quad v \otimes u \mapsto v \otimes (u \dotplus 0)\,, \\ f_2 &: V \otimes W \to V \otimes (U \oplus W)\,, \quad v \otimes w \mapsto v \otimes (0 \dotplus w)\,, \end{aligned}$$

затем складываем их в отображение

$$f : (V \otimes U) \oplus (V \otimes W) \to V \otimes (U \oplus W)\,, \quad a \dotplus b \mapsto f_1(a) + f_2(b)\,,$$

очевидно, линейное и обратное к (1-13). □

1.4. Тензорные степени. Тензорное произведение n экземпляров векторного пространства V с самим собой называется n-той *тензорной степенью* пространства V и обозначается

$$V^{\otimes n} \stackrel{\text{def}}{=} V \otimes \ \dots \ \otimes V\,.$$

Мы полагаем $V^{\otimes 0} \stackrel{\text{def}}{=} \Bbbk$ и $V^{\otimes 1} \stackrel{\text{def}}{=} V$. Тензорное умножение векторов задаёт на прямой сумме

$$TV \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus\nolimits_{n \geqslant 0} V^{\otimes n}$$

структуру (некоммутативной) ассоциативной градуированной[1] $\Bbbk$-алгебры. Если зафиксировать в V базис $E \subset V$, то по теор. 1.1 на стр. 7 моном $1 \in V^0$ и всевозможные тензорные мономы

$$e_1 \otimes \dots \otimes e_m\,, \quad e_i \in E\,,\ m \in \mathbb{N}\,, \tag{1-14}$$

составят базис векторного пространства TV. Умножение мономов (1-14) заключается в приписывании их друг к другу через знак $\otimes$, моном 1 служит единицей. Таким образом, фиксация базиса E в V позволяет отождествить алгебру TV с алгеброй многочленов от *не коммутативных* переменных $e \in E$. Каждое прямое слагаемое $V^{\otimes n} \subset TV$ является пространством однородных многочленов степени n. Алгебра TV называется *тензорной алгеброй* пространства V или *свободной ассоциативной* $\Bbbk$*-алгеброй*, порождённой пространством V. Вложение $\iota : V \hookrightarrow TV$ в качестве подпространства $V^{\otimes 1}$ обладает следующим универсальным свойством.

[1]Алгебра A над полем $\Bbbk$ называется *градуированной*, если она является прямой суммой векторных пространств $A = \bigoplus_{k \geqslant 0} A_k$, которые перемножаются так, что $A_k A_m \subset A_{k+m}$ для всех k, m.

Предложение 1.4 (универсальное свойство тензорной алгебры)
Для любого линейного отображения $f : V \to A$ в произвольную ассоциативную $\Bbbk$-алгебру A существует единственный такой гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр $\alpha : TV \to A$, что $f = \alpha \circ \iota$. Другими словами, гомоморфизмы $\Bbbk$-алгебр $TV \to A$ находятся в канонической биекции с линейными отображениям $V \to A$.

Доказательство. Искомый гомоморфизм α должен переводить каждый разложимый тензор

$$v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \in TV$$

в произведение $f(v_1) \ldots f(v_n) \in A$. Поскольку разложимые тензоры линейно порождают алгебру TV, гомоморфизм α единствен, если существует. Так как для любого линейного отображения $f : V \to A$ произведение $f(v_1) \ldots f(v_n) \in A$ полилинейно по v_i, по лем. 1.3 на стр. 9 для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует линейное отображение $\alpha_n : V^{\otimes n} \to A$, $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \mapsto f(v_1) \ldots f(v_n)$. Нужный нам гомоморфизм $\alpha : TV \to A$ переводит конечную сумму $\sum_k t_k$ однородных тензоров $t_k \in V^{\otimes k}$ в сумму $\sum_k \alpha_k(t_k) \in A$, где $\alpha_0 : V^0 \to A$ переводит единицу в единицу. □

Упражнение 1.3. Убедитесь, что $\Bbbk$-алгебра TV вместе с вложением $\iota : V \hookrightarrow TV$ определяются своим универсальным свойством однозначно с точностью до единственного изоморфизма $\Bbbk$-алгебр, перестановочного с вложением ι.

1.5. Свёртки. Для двойственных векторных пространств V, V^* над полем $\Bbbk$ и пары разложимых тензоров одинаковой степени $t = v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$ и $\vartheta = \xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_n \in V^{*\otimes n}$ число

$$\langle\, t\,,\, \vartheta \,\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \prod\nolimits_{i=1}^{n} \xi_i(v_i) = \prod\nolimits_{i=1}^{n} \langle\, v_i\,,\, \xi_i \,\rangle \in \Bbbk \tag{1-15}$$

называется *полной свёрткой* тензоров t и ϑ. Поскольку при каждом $\vartheta \in V^{*\otimes n}$ число (1-15) полилинейно по векторам v_i, существует единственный ковектор $c_\vartheta \in V^{\otimes n *}$

$$c_\vartheta : V^{\otimes n} \to \Bbbk\,, \quad v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \mapsto \langle\, v_1 \otimes \ldots \otimes v_n\,,\, \vartheta \,\rangle\,,$$

и этот ковектор полилинеен по сомножителям $\xi_1, \ldots, \xi_n$ разложимого тензора ϑ. Поэтому существует единственное линейное отображение

$$V^{*\otimes n} \to V^{\otimes n *}\,, \quad \vartheta \mapsto c_\vartheta\,. \tag{1-16}$$

Иначе говоря, полная свёртка (1-15) корректно задаёт билинейное спаривание[1]

$$V^{\otimes n} \times V^{*\otimes n} \to \Bbbk\,, \quad (t, \vartheta) \mapsto \langle\, t\,,\, \vartheta \,\rangle\,. \tag{1-17}$$

Предложение 1.5
Для конечномерного пространства V спаривание (1-17) совершенно, т. е. линейное отображение (1-16) является изоморфизмом.

Доказательство. Тензорные мономы $e_1 \otimes \ldots \otimes e_n$ и $e_1^* \otimes \ldots \otimes e_n^*$, составленные из векторов $e_i \in E$ и ковекторов $e_i^* \in E^*$ двойственных друг другу базисов E и E^* пространств V и V^* образуют двойственные базисы в $V^{\otimes n}$ и $V^{*\otimes n}$. □

[1] См. раздел 7.2 части I

Следствие 1.2

Сопоставление разложимому тензору $\xi = \xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_n \in V^{*\otimes n}$ полилинейной формы

$$\xi : V \times \ldots \times V \to \Bbbk , \quad \xi(v_1, \ldots , v_n) = \prod_{i=1}^{n} \xi_i(v_i) ,$$

задаёт для любого конечномерного пространства V изоморфизм

$$V^{*\otimes n} \simeq \mathrm{Hom}(V, \ldots , V;\ \Bbbk) . \tag{1-18}$$

Доказательство. В силу универсального свойства тензорного произведения пространство $V^{\otimes n *}$ линейных отображений $V^{\otimes n} \to \Bbbk$ изоморфно пространству n-линейных форм $V \times \ldots \times V \to \Bbbk$. Изоморфизм (1-18) является композицией этого изоморфизма с изоморфизмом (1-16). □

1.5.1. Частичные свертки. Пара инъективных (возможно не монотонных) отображений

$$\{1, \ldots , p\} \xleftarrow{\ I\ } \{1, \ldots , m\} \xrightarrow{\ J\ } \{1, \ldots , q\}$$

задаёт два слова $I = (i_1, \ldots , i_m)$, $J = (j_1, \ldots , j_m)$ одинаковой длины m, состоящие из не повторяющихся в пределах каждого слова индексов $i_\nu = I(\nu)$ и $j_\nu = J(\nu)$. Линейный оператор

$$\begin{gathered} c^I_J : V^{*\otimes p} \otimes V^{\otimes q} \to V^{*\otimes(p-m)} \otimes V^{\otimes(q-m)} , \\ \xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_p \otimes v_1 \otimes \ldots \otimes v_q \mapsto \prod_{\nu=1}^{m} \xi_{i_\nu}(v_{j_\nu}) \cdot \bigotimes_{i \notin I} \xi_i \otimes \bigotimes_{j \notin J} v_j , \end{gathered} \tag{1-19}$$

который для каждого $\nu = 1, \ldots , m$ сворачивает i_ν-й сомножитель произведения $V^{*\otimes p}$ с j_ν-м сомножителем произведения $V^{\otimes q}$, оставляя все остальные тензорные сомножители в их первоначальном порядке, называется *частичной сверткой* по индексам I и J. Отметим, что разные пары отображений I, J могут приводить к *разным* отображениям свёртки даже в тех случаях, когда они имеют одинаковые пары теоретико-множественных образов и отличаются только порядком элементов в этих образах.

Пример 1.4 (свёртка вектора с полилинейной формой)

Посредством изоморфизма из сл. 1.2 интерпретируем n-линейную форму $\varphi : V \times \ldots \times V \to \Bbbk$ как тензор $\varphi \in V^{*\otimes n}$. Его свёртка с произвольно выбранным вектором $v \in V$ по первому тензорному сомножителю лежит в $V^{*\otimes(n-1)}$ и является $(n-1)$-линейной формой на V. Эта форма называется *внутренним произведением* v и φ и обозначается $v \llcorner \varphi$ или $i_v\varphi$. Поскольку для разложимой формы $\varphi = \varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n$ выполняется равенство

$$i_v\varphi(w_1, \ldots , w_{n-1}) = \varphi_1(v)\varphi_2(w_1) \ldots \varphi_n(w_{n-1}) = \varphi(v, w_1, \ldots , w_{n-1}) , \tag{1-20}$$

левая и правая части которого линейны по φ, левая часть равна правой для всех, в том числе и неразложимых, полилинейных форм φ, т. е. внутреннее умножение формы на вектор означает фиксацию этого вектора в качестве первого аргумента формы.

1.5.2. Линейный носитель тензора. Для заданного тензора $t \in V^{\otimes n}$ пересечение всех таких векторных подпространств $U \subset V$, что $t \in U^{\otimes n}$, называется *линейным носителем* тензора t и обозначается $\mathrm{supp}(t) \subset V$. Иначе носитель можно охарактеризовать как такое наименьшее по включению или же по размерности подпространство $U \subset V$, что $t \in U^{\otimes n}$. Эквивалентность всех приведённых описаний вытекает из равенства $U^{\otimes n} \cap W^{\otimes n} = (U \cap W)^{\otimes n}$.

Упражнение 1.4. Докажите это равенство.

Размерность носителя называется *рангом* тензора и обозначается $\operatorname{rk} t \overset{\text{def}}{=} \dim \operatorname{supp}(t)$. Тензор t называется *вырожденным*, если его носитель $\operatorname{supp}(t) \subsetneq V$ имеет положительную коразмерность. Это означает, что некоммутативный многочлен t «эффективно зависит» от меньшего, чем $\dim V$, числа переменных, и при помощи линейной замены базиса можно убрать часть переменных из t. Например, если $\dim \operatorname{supp}(t) = 1$, то $t = c \cdot v^{\otimes n}$ для некоторых $c \in \Bbbk$ и $v \in V$.

Явно указать векторы, линейно порождающие $\operatorname{supp}(t)$ над $\Bbbk$ можно при помощи свёрток. Для любой последовательности $J = j_1, \dots, j_{n-1}$ из $n-1$ неповторяющихся индексов[1] $1 \leqslant j_\nu \leqslant n$ обозначим через

$$t_J : V^{*\otimes(n-1)} \to V, \quad \xi \mapsto c^{1,\dots,(n-1)}_{j_1,\dots,j_{n-1}}(\xi \otimes t), \tag{1-21}$$

полную свёртку с тензором t, которая спаривает ν-й сомножитель произведения $V^{*\otimes(n-1)}$ с j_ν-м сомножителем тензора t для всех $1 \leqslant \nu \leqslant (n-1)$. Если записать t в виде суммы разложимых тензоров вида $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$, то результатом такой свёртки будет линейная комбинация векторов v_i с $i \notin J$. Очевидно, что она лежит в $\operatorname{supp}(t)$.

Теорема 1.2
Пространство $\operatorname{supp}(t)$ линейно порождается образами всех свёрток (1-21).

Доказательство. Обозначим $\operatorname{supp}(t)$ через $W \subset V$. Достаточно доказать, каждая линейная форма $\xi \in V^*$, аннулирующая образы всех свёрток (1-21), аннулирует подпространство W. Предположим противное: пусть ковектор $\xi \in V^*$ имеет ненулевое ограничение на W, но аннулирует $t_J\left(V^{*\otimes(n-1)}\right)$ для всех J. Выберем в V^* базис $\xi_1, \dots, \xi_d$, в котором $\xi_1 = \xi$ и ограничения ковекторов $\xi_1, \dots, \xi_k$ на W образуют базис в W^*. Обозначим через $w_1, \dots, w_k$ двойственный базис пространства W и разложим t по этому базису. Значение $\xi\left(t_J(\xi_{i_1} \otimes \ldots \otimes \xi_{i_{n-1}})\right)$ равно полной свёртке тензора t с базисным тензорным мономом $\xi_{i_1} \otimes \ldots \otimes \xi_{i_{n-1}} \otimes \xi_1$ по всем n тензорным сомножителям в том порядке, который предписан последовательностью[2] J. Получающееся в результате этой свёртки число равно коэффициенту, с которым соответствующий двойственный тензорный моном[3] от базисных векторов w_i входит в разложение t. Подбирая надлежащие J, можно получить коэффициент при любом содержащем w_1 мономе, входящем в разложение t. Тем самым, все они нулевые, т. е. $w_1 \notin \operatorname{supp}(t)$ вопреки нашему выбору. □

---

[1]Подчеркнём, что индексы в последовательности не обязаны возрастать или убывать.

[2]Т. е. j_ν-й сомножитель тензора t сворачивается с ξ_{i_ν} при $1 \leqslant \nu \leqslant n-1$, а оставшийся в t сомножитель с номером $\{1, \dots, n\} \smallsetminus J$ сворачивается с ξ_1.

[3]j_ν-й множитель этого монома равен w_{i_ν} при $1 \leqslant \nu \leqslant n-1$, а оставшийся сомножитель с номером $\{1, \dots, n\} \smallsetminus J$ равен w_1.

§2. Алгебра многочленов

2.1. Симметрическая алгебра векторного пространства. Напомню, что в некоммутативном кольце R бывают идеалы трёх типов. Подкольцо $I \subset R$ называется *левым идеалом*, если $xa \in I$ для всех $a \in I$, $x \in R$. Симметричным образом, I называется *правым идеалом*, если $ax \in I$ для всех $a \in I$, $x \in R$. Идеал $I \subset R$ называется *двусторонним*, если он одновременно и левый, и правый. Иначе двусторонние идеалы можно охарактеризовать как ядра гомоморфизмов колец. Действительно, если элемент $a \in R$ аннулируется гомоморфизмом $\varphi : R \to S$, то для любых $x, y \in R$ выполняется равенство $\varphi(xay) = \varphi(x)\varphi(a)\varphi(y) = 0$. Наоборот, если аддитивная подгруппа $I \subset R$ является двусторонним идеалом, то на фактор группе R/I можно корректно задать умножение правилом $[a][b] \overset{\text{def}}{=} [ab]$.

Упражнение 2.1. Убедитесь в этом.

При этом аддитивный гомоморфизм фактризации $R \twoheadrightarrow R/I$ становится гомоморфизмом колец с ядром I. Из теоремы о строении гомоморфизма абелевых групп[1] вытекает, что каждый гомоморфизм колец $\varphi : R \to S$ является композицией сюрьективного гомоморфизма факторизации $R \twoheadrightarrow R/\ker\varphi \simeq \operatorname{im}\varphi$ и вложения $R/\ker\varphi \simeq \operatorname{im}\varphi \hookrightarrow S$.

Рассмотрим в тензорной алгебре TV произвольного векторного пространства V над любым полем $\Bbbk$ двусторонний идеал $\mathcal{I}_{\text{sym}} \subset TV$, порождённый всевозможными разностями

$$u \otimes w - w \otimes u \in V \otimes V\,. \tag{2-1}$$

Он состоит из конечных линейных комбинаций тензоров, которые можно получить умножая разности (2-1) с обеих сторон на любые элементы тензорной алгебры. Таким образом, пересечение $\mathcal{I}_{\text{sym}} \cap V^{\otimes n}$ линейно порождается разностями вида

$$(\ldots \otimes v \otimes w \otimes \ldots) - (\ldots \otimes w \otimes v \otimes \ldots)\,,$$

где оба заключённых в скобки тензора разложимы и обозначенные многоточиями фрагменты у них одинаковы. Весь идеал $\mathcal{I}_{\text{sym}}$ является прямой сумой таких однородных компонент:

$$\mathcal{I}_{\text{sym}} = \bigoplus_{n \geqslant 2} (\mathcal{I}_{\text{sym}} \cap V^{\otimes n})\,.$$

Фактор алгебра $SV \overset{\text{def}}{=} TV/\mathcal{I}_{\text{sym}}$ называется *симметрической алгеброй* пространства V. Умножение, индуцированное в ней тензорным произведением векторов, называется *коммутативным умножением* и обозначается точкой, которую, как правило, опускают. Как векторное пространство симметрическая алгебра является прямой суммой своих однородных компонент:

$$SV = \bigoplus_{n \geqslant 0} S^n V\,, \quad \text{где} \quad S^n V \overset{\text{def}}{=} V^{\otimes n}/(\mathcal{I}_{\text{sym}} \cap V^{\otimes n})\,.$$

Пространство $S^n V$ называется *n-й симметрической степенью* пространства V. Обратите внимание, что $S^0 V = \Bbbk$ и $S^1 V = V$. Включение $\iota : V \hookrightarrow SV$ в качестве прямого слагаемого $S^1 V$ обладает следующим универсальным свойством.

[1] См. http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2223/lec_02.pdf, предложение 2.1 на стр. 28.

Упражнение 2.2. Убедитесь, что для любого линейного отображения $f : V \to A$ пространства V в произвольную коммутативную $\Bbbk$-алгебру A имеется единственный такой гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр $\tilde{f} : SV \to A$, что $f = \tilde{f} \circ \iota$, причём SV и ι определяются этим свойством однозначно с точностью до единственного перестановочного с ι изоморфизма $\Bbbk$-алгебр.

По этой причине симметрическую алгебру SV иначе называют *свободной* коммутативной $\Bbbk$-алгеброй с единицей, порождённой векторным пространством V.

2.1.1. Симметричные полилинейные отображения. Полилинейное отображение

$$\varphi : V \times \ldots \times V \to U \tag{2-2}$$

называется *симметричным*, если $\varphi(v_{g_1}, \ldots, v_{g_n}) = \varphi(v_1, \ldots, v_n)$ для всех перестановок $g \in S_n$. Симметричные полилинейные отображения образуют векторное подпространство в пространстве всех n-линейных отображений (2-2). Взятие композиции фиксированного симметричного n-линейного отображения (2-2) со всевозможными линейными отображениями $F : U \to W$ представляет собою линейное по F отображение из $\mathrm{Hom}(U, W)$ в пространство симметричных полилинейных отображений $V \times \ldots \times V \to W$, переводящее F в $F \circ \varphi$. Если оно является изоморфизмом для всех пространств W, отображение φ называется *универсальным* симметричным n-линейным отображением или *коммутативным произведением* векторов.

Упражнение 2.3. Покажите, что коммутативное произведение единственно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с коммутативным произведением.

Предложение 2.1
Композиция $\sigma_n = \pi_{S^n} \circ \tau$ тензорного произведения $\tau : V \times \ldots \times V \to V^{\otimes n}$ с последующей проекцией $\pi_{S^n} : V^{\otimes n} \twoheadrightarrow S^n V$ является универсальным симметричным n-линейным отображением.

Доказательство. В силу универсального свойства тензорного произведения любое n-линейное отображение $\varphi : V \times \ldots \times V \to W$ однозначно раскладывается в композицию $\varphi = \widetilde{F} \circ \tau$ с линейным отображением $\widetilde{F} : V^{\otimes n} \to W$. Если φ симметрично, то $\widetilde{F}$ аннулирует соотношения коммутативности (2-1), ибо $\widetilde{F}\big((\ldots \otimes v \otimes w \otimes \ldots) - (\ldots \otimes w \otimes v \otimes \ldots)\big) = \widetilde{F}(\ldots \otimes v \otimes w \otimes \ldots) - \widetilde{F}(\ldots \otimes w \otimes v \otimes \ldots) = \varphi(\ldots, v, w, \ldots) - \varphi(\ldots, w, v, \ldots) = 0$, и значит, корректно факторизуется до линейного отображения $F : S^n V \to W$, $v_1 \ldots v_n \mapsto \varphi(v_1, \ldots, v_n)$. Таким образом, $\varphi = \widetilde{F} \circ \tau = F \circ \pi_{S^n} \circ \tau = F \circ \sigma_n$. Из-за универсальности τ любое линейное отображение $F' : S^n V \to W$, для которого $\varphi = F' \circ \sigma_n = F' \circ \pi_{S^n} \circ \tau$, удовлетворяет равенству $F' \circ \pi_{S^n} = F \circ \pi_{S^n}$, влекущему равенство $F' = F$ в силу сюрьективности проекции π_{S^n}. □

Следствие 2.1
Для любого[1] векторного пространства V над произвольным полем $\Bbbk$ пространство симметричных n-линейных форм $V \times \ldots \times V \to \Bbbk$ канонически двойственно n-той симметрической степени $S^n V$.

Доказательство. Отправляя линейную форму $\xi : S^n V \to \Bbbk$ в её композицию с коммутативным умножением $\sigma_n : V \times \ldots \times V \to S^n V$, мы получаем линейное отображение $(S^n V)^* \to \mathrm{Sym}^n(V, \Bbbk)$, являющееся изоморфизмом в силу универсального свойства σ_n. □

[1] В том числе бесконечномерного.

Следствие 2.2
Если зафиксировать в пространстве V базис $E \subset V$, то конечные коммутативные мономы

$$e^{\boldsymbol{m}} \overset{\text{def}}{=} \prod\nolimits_{e\in E} e^{m(e)}\,,$$

занумерованные всевозможными функциями $\boldsymbol{m} : E \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $e \mapsto m(e)$, с конечным носителем и суммой значений $\sum_{e\in E} m(e) = n$, составят базис в S^nV. Иначе говоря, выбор базиса в V задаёт изоморфизм симметрической алгебры SV с алгеброй многочленов от базисных векторов, причём каждое пространство S^nV переводится этим изоморфизмом в пространство однородных многочленов степени n.

Доказательство. Обозначим через U векторное пространство с базисом из мономов $e^{\boldsymbol{m}}$, которые мы будем воспринимать как формальные символы, и рассмотрим симметричное полилинейное отображение $\mu : V \times \ldots \times V \to U$, значение которого на каждом наборе базисных векторов равно моному, в котором каждый базисный вектор представлен в степени, равной числу его вхождений в набор. Это отображение универсально, поскольку для симметричного полилинейного отображения $\varphi : V \times \ldots \times V \to W$ и линейного ображения $F : U \to W$ равенство $\varphi = F \circ \mu$ равносильно выполнению равенств

$$\varphi(\underbrace{e_1, \ldots, e_1}_{m_1}, \ldots, \underbrace{e_k, \ldots, e_k}_{m_k}) = F(e_1^{m_1} \ldots e_k^{m_k}) \tag{2-3}$$

для всех конечных подмножеств $\{e_1, \ldots, e_k\} \subset E$ и всех функций $m : \{e_1, \ldots, e_k\} \to \mathbb{N}$, $e_i \mapsto m_i$, с суммой значений $\sum_i m_i = n$, и равенства (2-3) однозначно определяют F, если задано φ, и наоборот. По упр. 2.3 существует изоморфизм $U \xrightarrow{\sim} S^nV$, переводящий каждый базисный вектор $e_1^{m_1} \ldots e_k^{m_k} \in U$ в коммутативное произведение $e_1^{m_1} \ldots e_k^{m_k} \in S^nV$. Стало быть, такие произведения образуют базис в S^nV. □

Упражнение 2.4. Найдите $\dim S^nV$ если $\dim V = d$.

2.1.2. Вычисление значения многочлена на векторе. Обозначим через $\Bbbk^V$ пространство всех функций $V \to \Bbbk$. Сопоставим каждому разложимому симметрическому тензору

$$f = \xi_1 \ldots \xi_n \in S^nV^*$$

функцию $f : V \to \Bbbk$, $v \mapsto \prod_{i=1}^n \xi_i(v)$. Поскольку эта функция полилинейно и симметрично зависит от ковекторов $\xi_1, \ldots, \xi_n$, сопоставление функций разложимым тензорам корректно продолжается до линейного отображения $S^n : \Bbbk^V$, и далее до гомоморфизма алгебр

$$\varepsilon : SV^* \to \Bbbk^V, \quad (f \in SV^*) \mapsto (f : V \to \Bbbk)\,, \tag{2-4}$$

который канонически сопоставляет каждому многочлену $f \in S^nV^*$ полиномиальную функцию $f : V \to \Bbbk$. Образ гомоморфизма (2-4) называется *алгеброй полиномиальных функций* на пространстве V. Обратите внимание, что это определение не зависит от выбора базиса и имеет смысл также и для бесконечномерных пространств V. Для конечномерного пространства V с базисом $e_1, \ldots, e_d$ алгебра SV^* изоморфна по сл. 2.2 алгебре многочленов $\Bbbk[x_1, \ldots, x_d]$ от элементов двойственного базиса $x_1, \ldots, x_d$ пространства V^*. Для однородного полинома $f(x_1, \ldots, x_d)$ степени n и вектора $v = \sum \alpha_i e_i \in V$ значение $f(v) = f(a_1, \ldots, a_d)$ является результатом подстановки в f значений $x_i = \alpha_i$. В качестве следствия мы заключаем, что результат подстановки в многочлен $f(x_1, \dots, x_d)$ координат вектора v зависит только от $f \in SV$ и $v \in V$, но не от выбора пары двойственных друг другу базисов V и V^*, используемых для записи f в виде многочлена от координат и вычисления значений координат вектора v.

Предложение 2.2
Для конечномерного пространства V гомоморфизм (2-4) инъективен если и только если основное поле $\Bbbk$ бесконечно.

Доказательство. Пусть $\dim V = n$. Если поле $\Bbbk$ конечно и состоит из q элементов, пространство $\Bbbk^V$ тоже конечно и состоит из q^{q^n} элементов. Так как алгебра многочленов бесконечна, гомоморфизм (2-4) имеет ненулевое ядро. Инъективность гомоморфизма (2-4) над бесконечным полем $\Bbbk$ доказывается индукцией по n. Так как ненулевой многочлен $f(x)$ от одной переменной имеет не более $\deg f$ корней, он не может тождественно обращаться в нуль на одномерном пространстве $V \simeq \Bbbk$, если $\Bbbk$ бесконечно. Запишем многочлен от n переменных $x_1, \dots, x_n$ как многочлен от x_n с коэффициентами из $\Bbbk[x_1, \dots, x_{n-1}]$:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum\nolimits_{\nu=0}^{d} \varphi_\nu(x_1, \dots, x_{n-1}) \cdot x_n^{d-\nu} .$$

Вычисляя коэффициенты φ_ν в произвольной точке $(p_1, \dots, p_{n-1}) \in \Bbbk^{n-1}$, получаем многочлен от x_n с постоянными коэффициентами, задающий тождественно нулевую функцию на прямой $(x_1, \dots, x_{n-1}) = (p_1, \dots, p_{n-1})$. По уже доказанному он нулевой. Тем самым, все многочлены φ_ν являются тождественно нулевыми функциями на $\Bbbk^{n-1}$. По предположению индукции, они являются нулевыми многочленами. □

Упражнение 2.5. Покажите, что для конечномерного векторного пространства V над конечным полем $\Bbbk$ гомоморфизм (2-4) сюрьективен и приведите пример ненулевого полинома $f \in S^n V^*$, задающего нулевую функцию $V \to \Bbbk$.

2.2. Симметрические тензоры. Начиная с этого места и до конца §2 мы будем по умолчанию считать, что основное поле $\Bbbk$ имеет характеристику нуль. Симметрическая группа S_n действует на тензорной степени $V^{\otimes n}$ любого векторного пространства V над полем $\Bbbk$ перестановками сомножителей в разложимых тензорах. А именно, для каждого $g \in S_n$ положим

$$g(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = v_{g(1)} \otimes v_{g(2)} \otimes \dots \otimes v_{g(n)} . \tag{2-5}$$

Поскольку правая часть полилинейно зависит от $v_1, \dots, v_n$, формула (2-5) корректно определяет линейный оператор $g : V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$. Подпространство

$$\operatorname{Sym}^n V \stackrel{\text{def}}{=} \{\, t \in V^{\otimes n} \mid \forall\, g \in S_n \;\, g(t) = t \}$$

называется пространством *симметричных* тензоров в $V^{\otimes n}$.

2.2.1. Стандартный базис пространства симметричных тензоров. Зафиксируем в пространстве V некоторый базис E, а $V^{\otimes n}$ — базис из тензорных мономов $e_1 \otimes \dots \otimes e_n$ с $e_i \in E$. В разложении произвольного симметричного тензора $t \in \operatorname{Sym}^n V$ по последнему базису все мономы, составляющие одну орбиту группы S_n, входят с одним и тем же коэффициентом, зависящим только от орбиты. Орбиты группы S_n на базисных мономах нумеруются функциями $\boldsymbol{m} : E \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $e \mapsto m(e)$ с конечным носителем и суммой значений $\sum_{e \in E} m(e) = n$. Орбита $E_{\boldsymbol{m}}$, отвечающая такой функции, состоит из всех тензорных мономов, в которые каждый вектор

$e \in E$ входит ровно $m(e)$ раз. Сумма всех мономов из орбиты $E_{\boldsymbol{m}}$ обозначается $e_{\boldsymbol{m}}$ и называется *полным симметрическим тензором* показателя m. Таким образом, всевозможные полные симметрические тензоры степени $|\boldsymbol{m}| \overset{\text{def}}{=} \sum_{e\in E} m(e) = n$ образуют базис пространства $\operatorname{Sym}^n(V)$.

Упражнение 2.6. Пусть функция $\boldsymbol{m} : E \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ принимает ненулевые значения $m(e_i) = m_i$ только на базисных векторах $e_1, \dots, e_d$. Покажите, что орбита $E_{\boldsymbol{m}}$ состоит из

$$|E_{\boldsymbol{m}}| = \frac{n!}{m_1! \dots m_d!}$$

различных тензорных мономов.

Предложение 2.3

Над полем характеристики нуль ограничение проекции $\pi_{S^n} : V^{\otimes n} \twoheadrightarrow S^n V$ на подпространство $\operatorname{Sym}^n \subset V^{\otimes n}$ и ограничение проекции $\pi_{\Lambda^n} : V^{\otimes n} \twoheadrightarrow \Lambda^n V$ на подпространство $\operatorname{Alt}^n \subset V^{\otimes n}$ являются изоморфизмами векторных пространств.

Доказательство. Для каждой функции $\boldsymbol{m} : E \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ с конечным носителем

$$\operatorname{supp}(\boldsymbol{m}) = \{e_1, \dots, e_k\}$$

и значениями $\boldsymbol{m}(e_i) = m_i$, все $\frac{n!}{m_1!m_2!\dots m_k!}$ тензоров из орбиты $E_{\boldsymbol{m}}$ отобразятся проекцией

$$\pi_{S^n} : V^{\otimes n} \twoheadrightarrow S^n V$$

в один и тот же коммутативный моном $e_1^{m_1} \dots e_k^{m_k}$. Тем самым, образы стандартных базисных симметричных тензоров пропорциональны базисным коммутативным и грассмановым мономам:

$$\pi_{S^n}(e_{\boldsymbol{m}}) = \frac{n!}{m_1!m_2! \dots m_d!} \cdot e_1^{m_1} e_2^{m_2} \dots e_k^{m_k} . \tag{2-6}$$

□

Предостережение 2.1. Не смотря на предл. 2.3, подпространство $\operatorname{Sym}^n V \subset V^{\otimes n}$ не следует путать с фактор пространством $S^n V = V^{\otimes n} / (\mathcal{I}_{\text{sym}} \cap V^{\otimes n})$, которое получаются из $V^{\otimes n}$ отождествлением некоторых тензоров между собою. Над полем характеристики $p > 0$ многие симметричные тензоры аннулируются проекцией π_{S^n}. Даже в характеристике нуль изоморфизм из предл. 2.3 переводит стандартный базис в $\operatorname{Sym}^n V$ не в стандартный базис $S^n V$, а в перескалированный. Возникающие при этом поправочные комбинаторные множители приходится учитывать как при подъёме на пространство $\operatorname{Sym} V$ коммутативного умножения, имеющегося в алгебре SV, так и при спуске на пространства SV и SV^* операций свёртки, которые имеются между пространствами $\operatorname{Sym} V$ и $\operatorname{Sym} V^*$.

2.3. Поляризация многочленов. Обратное к изоморфизму из предл. 2.3 отображение

$$\pi_{S^n}^{-1} : S^n V^* \xrightarrow{\sim} V^{*\otimes n}$$

называется *полной поляризацией*. Оно сопоставляет однородному многочлену $f \in S^n V$ единственный такой симметричный тензор $\tilde f \in \operatorname{Sym}^n V^*$, который проектируется в f при факторизации по соотношениям коммутирования. Если интерпретировать многочлен f как полиномиальную функцию[1] $f : V \to \Bbbk$, а тензор $\tilde f$ — как симметричную n-линейную форму

$$\tilde f : V \times \dots \times V \to \Bbbk, \quad \tilde f(v_1, \dots, v_n) \overset{\text{def}}{=} \langle\, v_1 \otimes \dots \otimes v_n \,, \tilde f \,\rangle ,$$

[1] См. n° 2.1.2 на стр. 16.

то для всех $v \in V$ будет выполнено равенство $f(v) = \tilde{f}(v, \dots, v)$. Полной поляризацией базисного монома $x_1^{m_1} \dots x_k^{m_k}$ степени $\sum_i m_i = n$ является симметрический тензор

$$\frac{m_1! \dots m_k!}{n!} \cdot x_{\boldsymbol{m}}\,, \tag{2-7}$$

пропорциональный сумме всех тензорных мономов, состоящих из m_1 ковекторов x_1, m_2 ковекторов x_2, … , m_k ковекторов x_k. Полная поляризация произвольного многочлена может быть вычислена отсюда по линейности. Ниже, в n° 2.3.1 и в форм. (2-12) на стр. 21 мы приведём более явные рецепты для вычисления значения $\tilde{f}(v_1, \dots, v_n)$ в терминах многочлена f.

Упражнение 2.7. Убедитесь, что билинейная форма $\tilde{f} : V \times V \to \Bbbk$, задающая полную поляризацию однородного многочлена второй степени $q \in S^2V^*$ удовлетворяет равенству

$$2\tilde{f}(u, w) = f(u + w) - f(u) - f(w)\,.$$

2.3.1. Комбинаторная формула для полной поляризации. Поскольку значение симметричной n-линейной формы не меняется при перестановках её аргументов, мы будем обозначать через $\tilde{f}\left(v_1^{m_1}, \dots, v_n^{m_k}\right)$ значение полной поляризации $\tilde{f}$ многочлена f на наборе векторов, содержащем $m_i \geqslant 0$ копий вектора v_i для каждого $i = 1, \dots, k$, так что $\sum_{i=1}^k m_i = \deg f = n$. В этих обозначениях, для всех $f \in S^nV^*$ и любых $v_1, \dots, v_k \in V$ выполняется ровно та же мультиномиальная формула, что и при раскрытия скобок в выражении $(v_1 + \dots + v_k)^n$, а именно,

$$f(v_1 + \dots + v_k) = \tilde{f}\big((v_1 + \dots + v_k)^n\big) = \sum_{m_1, \dots, m_k} \frac{n!}{m_1! \dots m_k!} \cdot \tilde{f}\left(v_1^{m_1}, \dots, v_k^{m_k}\right)\,, \tag{2-8}$$

где суммирование идёт по всем таким наборам целых чисел $m_1, \dots, m_k$, что $0 \leqslant m_i \leqslant n$ при каждом i и $m_1 + \dots + m_k = n$.

Упражнение 2.8. Убедитесь в этом.

Предложение 2.4
Значение полной поляризации любого однородного многочлена $f \in S^nV^*$ на (необязательно конечномерном) векторном пространстве V над полем характеристики нуль можно вычислять по формуле

$$n! \cdot \tilde{f}(v_1, \dots, v_n) = \sum_{I \subsetneq \{1, \dots, n\}} (-1)^{\ell(I)} f\Big(\sum_{i \notin I} v_i\Big)\,, \tag{2-9}$$

где суммирование идёт по всем собственным подмножествам $I \subsetneq \{1, \dots, n\}$, включая пустое подмножество $I = \varnothing$, а $\ell(I)$ означает число элементов в I. Например, для $f \in S^3V^*$ получаем

$$6\,\tilde{f}(u, v, w) = f(u + v + w) - f(u + v) - f(u + w) - f(v + w) + f(u) + f(v) + f(w)\,.$$

Доказательство. Воспользуемся разложением (2-8) для $k = n$. Сумма в правой части формулы содержит ровно один член, зависящий от всех n векторов v_i, а именно, $n! \cdot \tilde{f}(v_1, \dots, v_n)$. Для каждого собственного подмножества $I \subsetneq \{1, \dots, n\}$ не зависящие от векторов v_i с $i \in I$ слагаемые из правой части формулы (2-8) входят в неё ровно с тем же самым коэффициентом, что и в разложение (2-8) для $f\left(\sum_{i \notin I} v_i\right)$, поскольку последнее получается из разложения для $f(v_1 + \dots + v_n)$ подстановкой $v_i = 0$ для всех $i \in I$. Таким образом, все слагаемые, не содержащие хотя бы один из векторов v_i, могут быть удалены из (2-8) при помощи стандартной процедуры включения-исключения, что и даёт искомую формулу

$$n! \cdot \tilde{f}(v_1, \dots, v_n) = f\Big(\sum_{\nu} v_\nu\Big) - \sum_{\{i\}} f\Big(\sum_{\nu \neq i} v_\nu\Big) + \sum_{\{i,j\}} f\Big(\sum_{\nu \neq i,j} v_\nu\Big) - \sum_{\{i,j,k\}} f\Big(\sum_{\nu \neq i,j,k} v_\nu\Big) + \dots\,. \quad \square$$

2.4. Двойственность и свёртки. Для конечномерного пространства V над полем характеристики нуль полная свёртка между $V^{\otimes m}$ и $V^{*\otimes m}$ индуцирует невырожденное спаривание между пространствами S^mV и S^mV^*, сопоставляющее многочленам $f \in S^nV$ и $g \in S^nV^*$ полную свёртку их полных поляризаций $\tilde{f} \in V^{\otimes m}$ и $\widetilde{g} \in V^{*\otimes m}$.

Упражнение 2.9. Проверьте, что ненулевые спаривания между мономами, составленными из элементов двойственных базисов пространств V и V^*, исчерпываются значениями

$$\langle\, e_1^{m_1} \dots e_d^{m_d}\,,\, x_1^{m_1} \dots x_d^{m_d}\,\rangle = \frac{m_1! \cdot m_2! \cdot \,\dots\, \cdot m_d!}{n!}\,. \tag{2-10}$$

2.4.1. Производная многочлена в направлении вектора. Внутреннее умножение[1] на фиксированный вектор $v \in V$ задаёт линейное отображение $i_v : V^{*\otimes n} \to V^{*\otimes(n-1)}$. Применяя его к полной поляризации $\tilde{f}$ многочлена $f \in S^nV^*$ и затем проектируя результат из $V^{*\otimes(n-1)}$ в $S^{n-1}V^*$, мы получаем линейное отображение $\mathrm{pl}_v : S^nV^* \to S^{n-1}V^*$, которое называется *поляризацией* вдоль v и включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
V^{*\otimes n} \supset \mathrm{Sym}^n V^* \arrow[r, "i_v"] \arrow[d, "\pi_{S^n}"', "\wr"] & V^{*\otimes(n-1)} \arrow[d, "\pi_{S^{n-1}}"] \\
S^nV^* \arrow[r, "\mathrm{pl}_v"] & S^{n-1}V^*\,.
\end{tikzcd}$$

Поляризация переводит многочлен $f(x) = \tilde{f}(x^n) \in S^nV^*$ в билинейно зависящий от f и v многочлен $\mathrm{pl}_v f(x) = \tilde{f}(v, x^{n-1}) \in S^{n-1}V^*$, который называется *полярой* вектора v относительно f. При $n = 2$ мы получаем в точности полярное преобразование относительно проективной квадрики $V(f) \subset \mathbb{P}(V)$, которое сопоставляет точке v её полярную гиперплоскость.

Рассмотрим двойственные базисы $e_1, \dots, e_d \in V$, $x_1, \dots, x_d \in V^*$ и базисный симметричный тензор[2] $x_{(m_1,\dots,m_d)} \in \mathrm{Sym}^n V^*$, равный сумме всех тензорных мономов, в которые каждый базисный ковектор x_ν входит ровно m_ν раз. Свёртка $x_{(m_1,\dots,m_d)}$ с базисным вектором $e_i \in V$ по первому тензорному сомножителю зануляется при $m_i = 0$, а во всех остальных случаях равна базисному симметричному тензору $x_{(m'_1,\dots,m'_d)} \in \mathrm{Sym}^{n-1} V^*$, имеющему $m'_i = m_i - 1$ и $m'_\nu = m_\nu$ при $\nu \neq i$. Поэтому

$$\begin{aligned}
\mathrm{pl}_{e_i} x_1^{m_1} \dots x_d^{m_d} = \frac{m_1! \dots m_d!}{n!}\, \pi_{S^{n-1}} \left(x_{(m'_1,\dots,m'_d)} \right) = \\
= \frac{m_i}{n}\, x_1^{m_1} \dots x_{i-1}^{m_{i-1}} x_i^{m_i - 1} x_{i+1}^{m_{i+1}} \dots x_d^{m_d} = \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\, x_1^{m_1} \dots x_d^{m_d}\,.
\end{aligned}$$

Так как многочлен $\mathrm{pl}_v f$ билинейно зависит от v и f, поляра произвольного вектора $v = \sum \alpha_i e_i$ относительно любого однородного многочлена f равна разделённой на степень $\deg f$ *частной производной* от многочлена f в направлении вектора v:

$$\mathrm{pl}_v f = \frac{1}{\deg(f)}\, \partial_v f = \frac{1}{\deg(f)} \sum \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\,.$$

Обратите внимание, что поскольку левая часть этой формулы определена инвариантно, правая часть тоже не зависит от выбора двойственных координат в V и V^*. Из равенств

$$\mathrm{pl}_u \mathrm{pl}_w f(v) = \tilde{f}\left(u, w, v^{n-1}\right) = \mathrm{pl}_w \mathrm{pl}_u f(v)$$

[1] См. прим. 1.4 на стр. 12.
[2] См. n° 2.2.1 на стр. 17.

вытекает, что частные производные коммутируют: $\partial_u \partial_w = \partial_w \partial_u$ для всех $u, w \in V$. Кроме того, для любых векторов $u, w \in V$, целых неотрицательных чисел k, m и многочлена $f \in S^{k+m}V^*$ выполняется равенство

$$k!\,\partial_u^k f(w) = (k+m)!\,\tilde{f}\left(u^k, w^m\right) = m!\,\partial_w^m f(u)\,. \tag{2-11}$$

Наконец, мы получаем ещё одну формулу для полной поляризации:

$$\tilde{f}(v_1, \dots, v_n) = \frac{1}{n!}\,\partial_{v_1} \dots \partial_{v_n} f \tag{2-12}$$

для любого многочлена $f \in S^n V^*$ и любых n векторов $v_1, \dots, v_n \in V$.

Упражнение 2.10. Докажите *правило Лейбница*: $\partial_v(fg) = g\partial_v(f) + f\partial_v(g)$.

Пример 2.1 (разложение Тейлора)
Для любых двух векторов $u, w \in V$ и многочлена $f \in S^n V^*$ по формуле бинома[1] получаем

$$f(u+w) = \tilde{f}\left((u+w)^n\right) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \cdot \tilde{f}(u^m, w^{n-m})\,.$$

Формула (2-11) позволяет переписать это равенство в виде *разложения Тейлора*

$$f(u+w) = \sum_{m=0}^{\deg f} \frac{1}{m!}\,\partial_w^m f(u)\,. \tag{2-13}$$

Обратите внимание, что это *точное равенство* в $S^n V^*$, причём его правая часть *явно* симметрична по u и w в силу соотношений (2-11).

2.4.2. Линейный носитель многочлена. Линейный носитель[2] $\operatorname{supp}(\tilde{f}) \subset V^*$ полной поляризации $\tilde{f}$ многочлена $f \in S^n V^*$ называется *линейным носителем многочлена* f. Обратите внимание, что линейный носитель является векторным подпространством в V^*, а не в V.

Упражнение 2.11. Убедитесь, что каждый многочлен f корректно задаёт полиномиальную функцию на $V/\operatorname{Ann}\big(\operatorname{supp}(f)\big)$ по правилу $f([v]) = f(v)$.

Согласно теор. 1.2 на стр. 13, подпространство $\operatorname{supp}(f) \subset V^*$ является образом полной свёртки $c_f : V^{\otimes(n-1)} \to V^*$ с тензором $\tilde{f}$, причём из-за симметричности тензора $\tilde{f}$ эта свёртка не зависит от выбора индексов, по которым она производится. Иначе говоря, $\operatorname{supp}(f)$ линейно порождается всеми частными производными порядка $n-1$ от f:

$$\frac{\partial^{m_1}}{\partial x_1^{m_1}} \frac{\partial^{m_2}}{\partial x_2^{m_2}} \dots \frac{\partial^{m_d}}{\partial x_d^{m_d}} f(x)\,, \quad \text{где} \quad \sum m_\nu = n-1\,. \tag{2-14}$$

Вклад в коэффициент при x_i у линейной формы (2-14) вносит лишь тот коэффициент многочлена f, что стоит при $x_1^{m_1} \dots x_{i-1}^{m_{i-1}} x_i^{m_i+1} x_{i+1}^{m_{i+1}} \dots x_d^{m_d}$. Записывая многочлен f в виде

$$f = \sum_{\nu_1 \dots \nu_d} \frac{n!}{\nu_1! \dots \nu_d!}\, a_{\nu_1 \dots \nu_d}\, x_1^{\nu_1} \dots x_d^{\nu_d}\,, \tag{2-15}$$

[1] См. формулу (2-8) на стр. 19.

[2] См. n° 1.5.2 на стр. 12.

мы получаем для линейной формы (2-14) следующее выражение:

$$n! \cdot \sum_{i=1}^{d} a_{m_1 \dots m_{i-1}(m_i+1)m_{i+1}\dots m_d} x_i\,, \tag{2-16}$$

и всего таких линейных форм имеется[1] $\binom{n+d-2}{d-1}$.

Предложение 2.5

Однородный многочлен f вида (2-15) над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики нуль тогда и только тогда является n-той степенью линейной формы, когда $d \times \binom{n+d-2}{d-1}$-матрица из коэффициентов линейных форм (2-16) имеет ранг 1. В этом случае есть ровно n линейных форм φ, удовлетворяющих уравнению $\varphi^n = f$, все они пропорциональны формам (2-16) и получаются друг из друга умножением на корни n-той степени из единицы в поле $\Bbbk$.

Доказательство. Равенство $f = \varphi^n$ означает, что $\operatorname{supp}(f)$ одномерен и порождён формой φ. В этом случае все формы (2-16) пропорциональны форме φ, и уравнение $t^n = f$ имеет в целостном кольце $\Bbbk[x_1, \dots, x_d]$ ровно n корней вида $\zeta \cdot \varphi$, где ζ пробегает множество корней из единицы в поле $\Bbbk$. Наоборот, если все формы (2-16) пропорциональны, и $\psi \neq 0$ — одна из них, то $\operatorname{supp}(f) = \Bbbk \cdot \psi$ и $f = \lambda\psi^n$ для некоторого $\lambda \in \Bbbk$, а $\varphi = \sqrt[n]{\lambda} \cdot \psi$. □

Пример 2.2 (бинарные формы ранга 1)

Однородный многочлен степени n от двух переменных $f(x_0, x_1) = \sum_k a_k \cdot \binom{n}{k} \cdot x_0^{n-k} x_1^k$ представляется в виде $(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1)^n$ если и только если $a_i : a_{i+1} = \alpha_0 : \alpha_1$ не зависит от i, что равносильно условию

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} = 1\,, \tag{2-17}$$

и выражается квадратичными соотношениями $a_i a_{j+1} = a_{i+1} a_j$ на коэффициенты f.

Упражнение 2.12. Убедитесь, что столбцы матрицы (2-17) суть делённые на $n!$ коэффициенты n линейных форм $\frac{\partial^k}{\partial x_0^k} \frac{\partial^m}{\partial x_1^m} f$, где $k + m = n - 1$.

[1] Это количество разложений числа $n-1$ в сумму d занумерованных целых неотрицательных слагаемых $m_1, \dots, m_d$.

§3. Грассманова алгебра

3.1. Внешняя алгебра. Для произвольного векторного пространства V над полем $\Bbbk$ обозначим через $\mathcal{I}_{\text{skew}} \subset TV$ двусторонний идеал тензорной алгебры, порождённый квадратами

$$v \otimes v \in V \otimes V \tag{3-1}$$

всевозможных векторов $v \in V$. Элементы идеала AI называются *соотношениями антикоммутирования*. Как векторное пространство, идеал $\mathcal{I}_{\text{skew}} = \bigoplus_{n\geqslant 2} \mathcal{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes n}$ является прямой суммой своих однородных компонент $\mathcal{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes n}$, каждая из которых является линейной оболочкой разложимых тензоров вида $\ldots \otimes v \otimes v \otimes \ldots$, где обозначенные многоточиями фрагменты одинаковы. Обратите внимание, что в этой линейной оболочке лежат и все суммы вида

$$(\ldots \otimes v \otimes w \otimes \ldots) + (\ldots \otimes w \otimes v \otimes \ldots),$$

а если $\operatorname{char} \Bbbk \neq 2$, то $\mathcal{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes n}$ линейно порождается такими суммами. Фактор алгебра

$$\Lambda V \stackrel{\text{def}}{=} TV / \mathcal{I}_{\text{skew}}$$

называется *внешней* или *грассмановой* алгеброй пространства V. Умножение в ΛV, индуцированное тензорным произведением в TV, называется *внешним* или *грассмановым* умножением и обозначается знаком $\wedge$. Как векторное пространство, внешняя алгебра является прямой суммой $\Lambda V = \bigoplus_{n\geqslant 0} \Lambda^n V$ своих однородных компонент $\Lambda^n V \stackrel{\text{def}}{=} V^{\otimes n} / (\mathcal{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes n})$, которые называются *внешними степенями* пространства V. При этом $\Lambda^0 V = \Bbbk$, $\Lambda^1 V = V$ и $\Lambda^k V \wedge \Lambda^m V \subset \Lambda^{k+m} V$ для всех k, m. Из описания идеала $\mathcal{I}_{\text{skew}}$ вытекает, что $u \wedge w = -w \wedge u$ для всех $u, w \in V$, и $v \wedge v = 0$ для всех $v \in V$. Перестановка сомножителей в составленном из векторов грассмановом мономе равносильна умножению этого монома на знак перестановки:

$$\forall\, g \in S_k \quad v_{g_1} \wedge \ldots \wedge v_{g_k} = \operatorname{sgn}(g) \cdot v_1 \wedge \ldots \wedge v_k\,.$$

Поэтому для однородных элементов $\omega \in \Lambda^k V$, $\eta \in \Lambda^m V$ выполняется равенство

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{km} \eta \wedge \omega\,.$$

Градуированные алгебры с таким свойством называются *s-коммутативными*[1]. Отождествление V с $\Lambda^1 V$ задаёт вложение $\iota : V \hookrightarrow \Lambda V$ со следующим универсальным свойством.

Упражнение 3.1. Покажите, что для любого линейного отображения $f : V \to L$ в произвольную s-коммутативную $\Bbbk$-алгебру L существует единственный такой гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр $\tilde{f} : \Lambda V \to L$, что $f = \tilde{f} \circ \iota$, причём алгебра ΛV и вложение ι определяются этим свойством однозначно с точностью до единственного перестановочного с ι изоморфизма $\Bbbk$-алгебр.

По этой причине алгебра ΛV иначе называется *свободной* s-коммутативной $\Bbbk$-алгеброй, порождённой векторным пространством V.

Пример 3.1 (грассмановы квадратичные формы)
Покажем, что каждый ненулевой однородный грассманов многочлен второй степени $\omega \in \Lambda^2 V$ на конечномерном пространстве V над любым полем $\Bbbk$ в подходящем базисе $e_1, \ldots, e_d$ пространства V может быть записан в *нормальном виде Дарбу*

$$e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \ldots + e_{2r-1} \wedge e_{2r}\,. \tag{3-2}$$

[1] Префикс «s» можно по желанию воспринимать как аббревиатуру для *super* или для *skew*.

Рассмотрим произвольный базис $u_1, \dots, u_d$ и перенумеруем его векторы так, чтобы

$$\omega = u_1 \wedge (\alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n) + u_2 \wedge (\beta_3 u_3 + \dots + \beta_n u_n) + (\text{члены без } u_1 \text{ и } u_2)\,,$$

где коэффициент $\alpha_2 \neq 0$. Перейдём к новому базису $v_1, \dots, v_d$, в котором $v_2 = \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$, а остальные $v_i = u_i$ при $i \neq 2$.

Упражнение 3.2. Убедитесь, что это действительно базис.

Получим выражение вида

$$\begin{aligned}\omega = v_1 \wedge v_2 + v_2 \wedge (\gamma_3 v_3 + \dots + \gamma_n v_n) + (\text{члены без } v_1 \text{ и } v_2) =\\ = (v_1 - \gamma_3 v_3 - \dots - \gamma_n v_n) \wedge v_2 + (\text{члены без } v_1 \text{ и } v_2)\end{aligned}$$

для некоторых $\gamma_3, \dots, \gamma_n \in \Bbbk$. Переходя к базису из векторов $w_1 = v_1 - \gamma_3 v_3 - \dots - \gamma_n v_n$ и $w_i = v_i$ при $i \neq 1$, получаем $\omega = w_1 \wedge w_2 + (\text{члены без } w_1 \text{ и } w_2)$, после чего процесс может быть продолжен по индукции.

3.1.1. Кососимметричные полилинейные отображения. Полилинейное отображение

$$\alpha : V \times \dots \times V \to U \tag{3-3}$$

называется *кососимметричным*, если оно принимает нулевое значение всякий раз, когда какие-либо два аргумента совпадают. Всякое кососимметричное полилинейное отображение *знакопеременно*, т. е. $\alpha(v_{g(1)}, v_{g(2)}, \dots, v_{g(m)}) = \operatorname{sgn} g \cdot \alpha(v_1, \dots, v_n)$ для всех $g \in S_n$.

Упражнение 3.3. Убедитесь в этом и покажите, что когда $1 + 1 \neq 0$ в $\Bbbk$, знакопеременность равносильна кососимметричности.

Кососимметричные n-линейные отображения образуют векторное подпространство в пространстве n-линейных отображений. Сопоставляя линейному отображению $F : U \to W$ его композицию $F \circ \alpha$ с фиксированным кососимметричным n-линейным отображением (3-3), мы получаем линейное отображение $F \mapsto F \circ \alpha$ из $\operatorname{Hom}(U, W)$ в пространство кососимметричных полилинейных отображений $V \times \dots \times V \to W$. Если оно является изоморфизмом для всех векторных пространств W, то полилинейное отображение α называется *универсальным* кососимметричным n-линейным отображением, а также *антикоммутативным* или *грассмановым* произведением векторов.

Упражнение 3.4. Покажите, что пространство, в котором принимает значение грассманово произведение, единственно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с этим произведением.

Предложение 3.1

Композиция $\alpha_n = \pi_{S^n} \circ \tau$ тензорного произведения $\tau : V \times \dots \times V \to V^{\otimes n}$ с последующей проекцией $\pi_{\Lambda^n} : V^{\otimes n} \twoheadrightarrow \Lambda^n V$ является универсальным кососимметричным n-линейным отображением.

Доказательство. В силу универсальности τ любое n-линейное отображение $\varphi : V \times \dots \times V \to W$ однозначно представляется в виде композиции $\varphi = \widetilde{F} \circ \tau$, где $\widetilde{F} : V^{\otimes n} \to W$ линейно. Если φ кососимметрично, $\widetilde{F}$ аннулирует линейные порождающие подпространства $\mathcal{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes n} = \ker \pi_{\Lambda^n}$:

$$\widetilde{F}(\, \dots \otimes w \otimes w \otimes \, \dots) = \varphi(\, \dots, w, w, \dots) = 0\,,$$

и значит, корректно факторизуется до линейного отображения

$$F: \Lambda^n V \to W, \quad v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \mapsto \varphi(v_1, \ldots, v_n).$$

Таким образом, $\varphi = \widetilde{F} \circ \tau = F \circ \pi_{\Lambda^n} \circ \tau = F \circ \alpha_n$. Из-за универсальности τ любое линейное отображение $F': \Lambda^n V \to W$, для которого $\varphi = F' \circ \alpha_n = F' \circ \pi_{\Lambda^n} \circ \tau$, удовлетворяет равенству $F' \circ \pi_{\Lambda^n} = F \circ \pi_{\Lambda^n}$, откуда $F' = F$ в силу сюрьективности проекции π_{Λ^n}. □

Упражнение 3.5. Убедитесь, что для любого (в том числе бесконечномерного) пространства V пространство кососимметричных n-линейных отображений $V \times \ldots \times V \to \Bbbk$ канонически двойственно n-той внешней степени $\Lambda^n V$.

Следствие 3.1

Если зафиксировать в V базис $E \subset V$, то занумерованные всевозможными m-элементными подмножествами $M = \{e_1, \ldots, e_m\} \subset E$ мономы $e_M = e_1 \wedge \ldots \wedge e_m$ составят базис в $\Lambda^m V$ при всех m. При перестановке элементов множества M, моном e_M умножается на знак перестановки.

Доказательство. Рассмотрим векторное пространство U с базисом из символов e_M, где M пробегает m-элементные подмножества в E. В каждом таком подмножестве M мы произвольным образом занумеруем элементы, так что M запишется как $\{e_1, \ldots, e_m\}$, и рассмотрим кососимметричное полилинейное отображение $\alpha: V \times \ldots \times V \to U$, переводящее каждый упорядоченный набор из m различных базисных векторов, образующих перестановку $e_{g_1}, \ldots, e_{g_m}$ элементов некоторого множества $M = \{e_1, \ldots, e_m\} = \{e_{g_1}, \ldots, e_{g_m}\} \subset E$, в вектор $\mathrm{sgn}(g) \cdot e_M$. Отображение α универсально, поскольку для любого кососимметричного полилинейного отображения

$$\varphi: V \times \ldots \times V \to W$$

и линейного отображения $F: U \to W$ равенство $\varphi = F \circ \alpha$ равносильно тому, что

$$F(e_{\{e_1, \ldots, e_m\}}) = \mathrm{sgn}(g) \cdot \varphi(e_{g(1)}, \ldots, e_{g(m)})$$

для каждого m-элементного подмножества $\{e_1, \ldots, e_m\} \subset E$ и всех перестановок $g \in S_m$, причём эти условия корректно и однозначно определяют F, если задано φ, и наоборот. Тем самым, имеется единственный изоморфизм $U \xrightarrow{\sim} \Lambda^n V$, переводящий базисный вектор $e_{\{e_1, \ldots, e_m\}} \in U$ в грассманово произведение $e_1 \wedge \ldots \wedge e_m \in \Lambda^n V$. □

Следствие 3.2

Если пространство V конечномерно с базисом $e_1, \ldots, e_d$, то $\dim \Lambda^m V = \binom{d}{m}$, и мономы

$$e_I = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_m}, \quad \text{где} \quad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ \ldots \ < i_m \leqslant d. \tag{3-4}$$

составляют базис пространства $\Lambda^m V$. В частности, $\Lambda^m V = 0$ при $m > d$, и $\dim \Lambda V = 2^d$.

Упражнение 3.6. В условиях сл. 3.2 покажите, что $\omega \in \Lambda V$ однороден степени $d = \dim V$ если и только если $v \wedge \omega = 0$ для всех $v \in V$, и опишите *центр* грассмановой алгебры

$$Z(\Lambda V) \stackrel{\text{def}}{=} \{\tau \in \Lambda V \mid \forall\, \omega \in \Lambda V \ \tau \wedge \omega = \omega \wedge \tau\}.$$

Предложение 3.2
Над полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$ однородный грассманов многочлен $\omega \in \Lambda^2 V$ тогда и только тогда разложим в произведение $u \wedge w$ двух векторов $u, w \in V$, когда $\omega \wedge \omega = 0$.

Доказательство. Если $\omega = u \wedge w$, то $\omega \wedge \omega = u \wedge w \wedge u \wedge w = 0$. Чтобы получить обратное, воспользуемся прим. 3.1 на стр. 23 и выберем в V такой базис $e_1, \dots, e_d$, в котором

$$\omega = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \dots \,.$$

Если в этой сумме есть хотя бы два слагаемых, то в $\omega\wedge\omega$ войдёт $2e_1\wedge e_2\wedge e_3\wedge e_4$, откуда $\omega\wedge\omega \neq 0$ если $2 \neq 0$. Таким образом, равенство $\omega \wedge \omega = 0$ влечёт равенство $\omega = e_1 \wedge e_2$. □

3.1.2. Линейные замены переменных и миноры. Пусть векторы $u_1, \dots, u_n \in V$ линейно выражаются векторы $w_1, \dots, w_m \in V$ по формуле $(u_1, \dots, u_k) = (w_1, \dots, w_m) \cdot C$, где $C \in \operatorname{Mat}_{m\times n}(\Bbbk)$. Тогда при каждом $k = 1, \dots, n$ мономы $u_J = IWPu, j, k$ линейно выражаются через мономы $w_I = w_{i_1} \wedge \dots \wedge w_{i_d}$ по формуле

$$u_J = u_{j_1} \wedge \dots \wedge u_{j_k} = \Big(\sum_{i_1} w_{i_1} c_{i_1 j_1}\Big) \wedge \Big(\sum_{i_2} w_{i_2} c_{i_2 j_2}\Big) \wedge \dots \wedge \Big(\sum_{i_k} w_{i_k} c_{i_k j_k}\Big) =$$
$$= \sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_k\leqslant n} w_{i_1} \wedge \dots \wedge w_{i_k} \cdot \sum_{g\in S_k} \operatorname{sgn}(g)\, c_{i_{g(1)} j_1} \dots c_{i_{g(k)} j_k} = \sum_I w_I \cdot c_{IJ}\,, \tag{3-5}$$

где $I = (i_1, \dots, i_k)$ пробегает наборы из k возрастающих номеров, а $c_{IJ} = \det C_{IJ}$ обозначает определитель $k\times k$-подматрицы $C_{IJ} \subset C$, сосредоточенной в пересечениях столбцов с номерами из J и строк с номерами из I. Определитель $c_{IJ} \stackrel{\text{def}}{=} \det C_{IJ}$ называется IJ-м *минором* k-го порядка в матрице C. Таким образом, IJ-тый элемент матрицы, выражающей грассманов моном u_J через грассмановы мономы w_I равен IJ-тому минору матрицы, выражающей векторы u через векторы w. Эта матрица[1] имеет размер $\binom{n}{k} \times \binom{n}{k}$, обозначается $\Lambda^k C$ и называется k-*й внешней степенью* матрицы C.

Предложение 3.3 (мультипликативность внешних степеней)
Для любых матриц $A \in \operatorname{Mat}_{m\times k}(\Bbbk)$, $B \in \operatorname{Mat}_{k\times n}(\Bbbk)$ при всех $1 \leqslant d \leqslant \min(m, n, k)$ выполняется равенство $\Lambda^d(A \cdot B) = \Lambda^d A \cdot \Lambda^d B$. В частности, для квадратных матриц A и B одинакового размера $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Доказательство. Рассмотрим в пространстве V с базисом $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_m)$ наборы векторов $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_k) = \boldsymbol{e}\,A$ и $\boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_n) = \boldsymbol{a}\,B = \boldsymbol{e}\,AB$. Обозначим через $\boldsymbol{e_d} \subset \Lambda^d V$ набор из $\binom{m}{d}$ грассмановых мономов $e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d}$, а через $\boldsymbol{b_d}, \boldsymbol{a_d} \subset \Lambda^d V$ — наборы из $\binom{n}{d}$ и $\binom{k}{d}$ грассмановых многочленов $b_J = b_{j_1} \wedge \dots \wedge b_{j_d}$ и $a_L = a_{\ell_1} \wedge \dots \wedge a_{\ell_d}$ соответственно. Набор мономов $\boldsymbol{e_d}$ является базисом в $\Lambda^d V$, а набор многочленов $\boldsymbol{b_d}$ выражается через него, с одной стороны, как $\boldsymbol{b_d} = \boldsymbol{e_d}\,\Lambda^d(AB)$, а с другой стороны — как $\boldsymbol{b_d} = \boldsymbol{a_d}\,\Lambda^d B = \boldsymbol{e_d}\,\Lambda^d A\,\Lambda^d B$. Поскольку матрица перехода от произвольного набора векторов к базису однозначно определяется этим набором, мы заключаем, что $\Lambda^d(A \cdot B) = \Lambda^d A \cdot \Lambda^d B$. □

[1] Здесь и далее мы предполагаем, что при каждом k индексы $I = (i_1, \dots, i_k)$ линейно упорядочиваются лексикографически.

Пример 3.2 (Соотношения Лапласа)
Для каждого набора из m возрастающих индексов $J = (j_1, \dots, j_m) \subset \{1, \dots, n\}$ положим

$$\deg J \overset{\text{def}}{=} m\,, \quad |J| \overset{\text{def}}{=} j_1 + \ldots + j_m$$

и обозначим через $\bar J = (\bar j_1, \dots, \bar j_{n-m}) = \{1, \dots, n\} \smallsetminus J$ дополнительный к J набор из $n - m$ возрастающих индексов. Для произвольной квадратной матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$ рассмотрим в грассмановой алгебре ΛV векторного пространства с базисом $e_1, \dots, e_n$ набор из n векторов

$$\alpha_j = e_1 a_{1j} + e_2 a_{2j} + \ldots + e_n a_{nj}\,, \quad \text{где} \quad 1 \leqslant j \leqslant n\,. \tag{3-6}$$

Для двух наборов индексов I, J одинаковой длины $\deg I = \deg J = m$ произведения

$$\alpha_J = \alpha_{j_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{j_m} \quad \text{и} \quad \alpha_{\bar I} = \alpha_{\bar i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{\bar i_m}$$

имеют дополнительные степени m и $n - m$.

Упражнение 3.7. Убедитесь, что

$$\alpha_J \wedge \alpha_{\bar I} = \begin{cases} (-1)^{|J| + \frac{m(m+1)}{2}} \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J \end{cases} \tag{3-7}$$

Подставляя в (3-7) разложения (3-6) и пользуясь формулами (3-5), в левой части получим

$$\left(\sum\nolimits_M e_M a_{MJ}\right) \wedge \left(\sum\nolimits_L e_L a_{L\bar I}\right) = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \sum\nolimits_M (-1)^{|M|} a_{MJ} a_{\overline{MI}}\,,$$

где M пробегает все индексы длины $\deg M = m$, а справа при $I \neq J$ получим 0, а при $I = J$ —

$$(-1)^{\frac{m(m+1)}{2} + |J|} \det A \cdot e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$$

Мы заключаем, для любых двух наборов J, I из m столбцов произвольной квадратной матрицы $A \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$ выполняются *соотношения Лапласа*

$$\sum\nolimits_M (-1)^{|M| + |J|} a_{MJ} a_{\overline{MI}} = \begin{cases} \det A & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J \end{cases} \tag{3-8}$$

где суммирование идёт по всем наборам M из m строк матрицы A.

При $I = J$ соотношение (3-8) даёт формулу для вычисления определителя $\det A$ через всевозможные миноры a_{MJ} порядка m, сосредоточенные в m фиксированных столбцах матрицы A с номерами J, и *дополнительные* к ним миноры $a_{\overline{JM}}$ порядка $n - m$, равные определителям матриц, получающихся из A вычёркиванием всех строк и столбцов, содержащих минор a_{MJ}:

$$\det A = \sum\nolimits_M (-1)^{|M| + |J|} a_{MJ} a_{\overline{MJ}}\,. \tag{3-9}$$

Произведение $(-1)^{|M| + |J|} a_{\overline{MJ}}$ называется *алгебраическим дополнением* к минору a_{MJ} и обозначается $\bar a_{MJ}$. При $I \neq J$ соотношение (3-8) с точностью до знака имеет вид

$$\sum\nolimits_M (-1)^{|M| + |I|} a_{MJ} a_{\overline{MI}} = 0 \tag{3-10}$$

и называется *теоремой об умножении на чужие алгебраические дополнения*, поскольку левая часть в (3-10) отличается от (3-9) тем, что миноры a_{MJ} умножаются не на свои алгебраические дополнения $a_{\overline{MJ}}$, а на дополнения $a_{\overline{MI}}$ к минорам a_{MI}, сосредоточенным в другом наборе столбцов $I \neq J$.

Упражнение 3.8. Установите транспонированный вариант соотношений Лапласа

$$\sum\nolimits_M (-1)^{|I|+|M|} a_{JM} a_{\overline{IM}} = \begin{cases} \det A & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J. \end{cases} \tag{3-11}$$

Соотношения (3-8) и (3-11) сворачиваются в матричные равенства

$$\Lambda^m A \cdot \Lambda^{n-m} A^\vee = \Lambda^{n-m} A^\vee \cdot \Lambda^m A = \det A \, E\,, \tag{3-12}$$

где E — единичная матрицу размера $\binom{n}{m} \times \binom{n}{m}$, $\Lambda^m A$ — m-тая внешняя степень[1] матрицы A, т. е. матрица размера $\binom{n}{d} \times \binom{n}{d}$, клетки которой нумеруются d-элементными подмножествами $I, J \subset \{1, \dots, n\}$, и в клетке IJ стоит IJ-минор матрицы A, а через $\Lambda^{n-m} A^\vee$ обозначена матрица размера $\binom{n}{m} \times \binom{n}{m}$, клетки которой тоже нумеруются d-элементными подмножествами $I, J \subset \{1, \dots, n\}$, но в клетке IJ стоит *алгебраическое дополнение* к JI-минору[2] матрицы A, т. е. взятый со знаком $(-1)^{|I|+|J|}$ минор порядка $n - d$, сосредоточенный в столбцах $\overline{I}$ и строках $\overline{J}$. Матрица $\Lambda^{n-m} A^\vee$ называется *присоединённой* к матрице $\Lambda^m A$.

Пример 3.3 (соотношение Плюккера)
Рассмотрим 2×4 матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

с элементами из кольца $K = \mathbb{Z}[a_{11}, \dots, a_{22}]$ многочленов от восьми переменных a_{ij} и обозначим через $A_{ij} = a_{1i} a_{2j} - a_{1j} a_{2i}$, где $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, её 2×2 минор, образованный i-м и j-м столбцами. Раскладывая нулевой определитель

$$0 = \det \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

по первым двум строкам, заключаем, что шесть миноров A_{ij} связаны *соотношением Плюккера*

$$A_{12} A_{34} - A_{13} A_{24} + A_{14} A_{23} = 0\,. \tag{3-13}$$

Упражнение 3.9. Убедитесь, для любого поля $\Bbbk$ и любых шести чисел $A_{ij} \in \Bbbk$, удовлетворяющих соотношению (3-21), существует матрица $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 4}(\Bbbk)$ с 2×2 минорами A_{ij}.

Мы заключаем, что шесть чисел A_{ij} из поля $\Bbbk$ являются минорами 2×4 матрицы с элементами из $\Bbbk$ если и только если они удовлетворяют соотношению Плюккера (3-13). Отметим, что это согласуется с предл. 3.2 на стр. 26: грассманова квадратичная форма $\omega = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} A_{ij} e_i \wedge e_j$ имеет $\omega \wedge \omega = 2(A_{12} A_{34} - A_{13} A_{24} + A_{14} A_{23}) e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$, а грассманово произведение векторов

$$u = a_{11} e_1 + a_{12} e_2 + a_{13} e_3 + a_{14} e_4 \quad \text{и} \quad w = a_{21} e_1 + a_{22} e_2 + a_{23} e_3 + a_{24} e_4$$

равно $u \wedge w = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} (a_{1i} a_{2j} - a_{1j} a_{2i}) e_i \wedge e_j$.

[1] См. n° 3.1.2 на стр. 26.

[2] Обратите внимание, что индексы I и J преставились!

Пример 3.4 (определитель пучка матриц)
Рассмотрим квадратные матрицы $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$ и пару коммутирующих переменных x, y. Матрица $x\,A + y\,B$ имеет элементы в $\Bbbk[x, y]$, и её определитель $\det(x\,A + y\,B)$ является однородным многочленом степени n от x и y. Покажем, что его коэффициент при $x^m y^{n-m}$ равен

$$\operatorname{tr}(\Lambda^m A \cdot \Lambda^{n-m} B^\vee) = \sum\nolimits_{IJ} (-1)^{|I|+|J|} a_{IJ} b_{\overline{I}\overline{J}}\,, \tag{3-14}$$

где суммирование идёт по всем m-элементным подмножествам $I, J \subset \{1, \dots, n\}$. Для этого рассмотрим наборы линейных форм $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\xi_1, \dots, \xi_n)A$ и $(\beta_1, \dots, \beta_n) = (\xi_1, \dots, \xi_n)B$ от грассмановых переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$. Тогда

$$\det(xA + yB) \cdot \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n = (x\alpha_1 + y\beta_1) \wedge (x\alpha_2 + y\beta_2) \wedge \dots \wedge (x\alpha_n + y\beta_n)\,.$$

Моном $x^m y^{n-m}$ возникает при выборе первого слагаемого в каких-либо m скобках, скажем, с номерами $i_1, \dots, i_m$, и второго слагаемого во всех остальных скобках. Вклад такого произведения в коэффициент при $x^m y^{n-m}$ равен

$$\begin{aligned}
\operatorname{sgn}(i_1, \dots, i_m, \overline{i}_1, \dots, \overline{i}_{n-m}) \cdot \alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_k} \wedge \beta_{\overline{i}_1} \wedge \dots \wedge \beta_{\overline{i}_{n-m}} = \\
= (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}+|I|} \alpha_I \wedge \beta_{\overline{I}} = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}+|I|} \left(\sum\nolimits_J \xi_J a_{JI}\right) \wedge \left(\sum\nolimits_M \xi_M b_{M\overline{I}}\right) = \\
= (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}+|I|} \sum\nolimits_{JM} a_{JI} \cdot b_{M\overline{I}} \cdot \xi_J \wedge \xi_M = \left(\sum\nolimits_J (-1)^{|I|+|J|} a_{JI} \cdot b_{\overline{J}\overline{I}}\right) \cdot \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n.
\end{aligned}$$

Коэффициент при $x^m y^{n-m}$ в $\det(x\,A + y\,B)$ равен сумме этих вкладов по всем наборам I из m возрастающих номеров, что и даёт формулу (3-14).

3.2. Кососимметрические тензоры. Напомню[1], что симметрическая группа S_n действует на тензорной степени $V^{\otimes n}$ такого векторного пространства V перестановками сомножителей в разложимых тензорах: $g(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = v_{g(1)} \otimes v_{g(2)} \otimes \dots \otimes v_{g(n)}$. Подпространство

$$\mathrm{Alt}^n V \stackrel{\text{def}}{=} \{\, t \in V^{\otimes n} \mid \forall\, g \in S_n \;\; g(t) = \operatorname{sgn}(g) \cdot t \,\}$$

называется пространством *знакопеременных* тензоров в $V^{\otimes n}$.

3.2.1. Стандартный базис пространства знакопеременных тензоров. В разложении знакопеременного тензора $t \in \mathrm{Alt}^n V$ по базисным мономам тензорной алгебры присутствуют лишь мономы, в которых каждый базисный вектор $e \in E$ встречается не более одного раза, причём вместе с каждым таким мономом $e_1 \otimes \dots \otimes e_n$ в разложение t входят все $n!$ мономов

$$g(e_1 \otimes \dots \otimes e_n) = e_{g_1} \otimes \dots \otimes e_{g_n}\,,$$

которые получаются из него перестановками $g \in S_n$, причём коэффициенты при $e_1 \otimes \dots \otimes e_n$ и $g(e_1 \otimes \dots \otimes e_n)$ отличаются друг от друга множителем $\operatorname{sgn}(g)$. Таким образом, базис в пространстве $\mathrm{Alt}^n V$ составляют *полные знакопеременные тензоры*

$$e_I = \sum\nolimits_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g) \cdot e_{g_1} \otimes \dots \otimes e_{g_n} \tag{3-15}$$

находящиеся в биекции с n-элементным подмножествам $I = \{e_1, \dots, e_n\} \subset E$. При этом мы считаем, что на множестве E базисных векторов зафиксирован некоторый порядок, вводим индуцированный порядок на каждом конечном подмножестве $I \subset E$ и располагаем сомножители тензора $e_1 \otimes \dots \otimes e_n$, отвечающего тождественной перестановке в формуле (3-15), в порядке возрастания.

[1] См. n° 2.2 на стр. 17.

Предложение 3.4
Над полем характеристики нуль ограничение проекции $\pi_{\Lambda^n} : V^{\otimes n} \twoheadrightarrow \Lambda^n V$ на подпространство $\mathrm{Alt}^n \subset V^{\otimes n}$ является изоморфизмом векторных пространств.

Доказательство. Для любого конечного подмножества $I = \{e_1, \dots, e_n\} \subset E$ каждое из $n!$ слагаемых суммы (3-15), перейдёт при проекции $\pi_{\Lambda^n} : V^{\otimes n} \twoheadrightarrow \Lambda^n V$ в грассманов моном $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$. Тем самым, образы стандартных базисных знакопеременных тензоров пропорциональны базисным грассмановым мономам: $\pi_{\Lambda^n}(e_I) = n! \cdot e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$. □

Предостережение 3.1. Не смотря на предл. 3.4, подпространство $\mathrm{Alt}^n V \subset V^{\otimes n}$ не следует путать с фактор пространством $\Lambda^n V = V^{\otimes n} / (\mathcal{I}_{\mathrm{skew}} \cap V^{\otimes n})$, которое получаются из $V^{\otimes n}$ отождествлением некоторых тензоров между собою. Над полем характеристики $p > 0$ кососимметричные тензоры, степень которых больше p, аннулируются проекцией π_{Λ^n}. Даже в характеристике нуль изоморфизм из предл. 3.4 не отождествляют друг с другом стандартные базисные векторы буквально, но выражают их друг через друга с поправочными комбинаторными множителями, которые приходится учитывать как при подъёме на пространство знакопеременных тензоров умножения, которое имеется в алгебре ΛV, так и при спуске на пространства ΛV и ΛV^* операций свёртки, имеющихся на $V^{\otimes n}$ и $V^{*\otimes n}$.

3.3. Поляризация грассмановых многочленов. Согласно предл. 3.4, над полем характеристики нуль факторизация $\pi_{\Lambda^n} : \ \mathrm{Alt}^n V \to \Lambda^n V$ антисимметричных тензоров по соотношениям антикоммутирования является изоморфизмом. Обратный изоморфизм $\pi_{\Lambda^n}^{-1} : \Lambda^n V \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alt}^n V$, называется *полной поляризацией* грассмановых многочленов. Он сопоставляет грассманову многочлену $\omega \in \Lambda^n V$ единственный знакопеременный тензор $\widetilde{\omega} \in \mathrm{Alt}^n V \subset V^{\otimes n}$, лежащий в классе ω по модулю подпространства[1] $\mathcal{I}_{\mathrm{skew}} \cap V^{\otimes n}$. Тензор $\widetilde{\omega}$ можно воспринимать как кососимметричную n-линейную форму $\widetilde{\omega} : V^* \times \ldots \times V^* \to \Bbbk, \quad (\xi_1, \dots, \xi_n) \mapsto \langle\, \xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_n \,,\, \widetilde{\omega} \,\rangle$. В доказательстве предл. 3.4 мы видели, что поляризация грассманова монома $\omega = v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$ равна

$$\widetilde{\omega} = \frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} \mathrm{sgn}(g) \cdot v_{g_1} \otimes \ldots \otimes v_{g_n} \,.$$

Поляризации произвольных грассмановых многочленов получаются отсюда по линейности.

3.3.1. Двойственность. Для двойственных конечномерных векторных пространств V, V^* над полем характеристики нуль полная свёртка $\langle\, \widetilde{\omega} \,,\, \tilde{\xi} \,\rangle \in \Bbbk$ полных поляризаций $\widetilde{\omega} \in \mathrm{Alt}^n V$, $\tilde{\xi} \in \mathrm{Alt}^n V^*$ однородных грассмановых многочленов $\omega \in \Lambda^n V$, $\xi \in \Lambda^n V^*$ задаёт невырожденное спаривание между пространствами $\Lambda^n V^*$ и $\Lambda^n V$. Грассмановы мономы, составленные из векторов e_i и e_i^* двойственных друг другу базисов в V и V^* спариваются при этом по правилу

$$\langle\, e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n} \,,\, e_{j_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{j_n}^* \,\rangle = \begin{cases} \mathrm{sgn}(g)/n! & \text{если } \exists\, g \in S_n : \forall\, \nu \ i_\nu = j_{g(\nu)} \\ 0 & \text{в остальных случаях}\,. \end{cases}$$

Упражнение 3.10. Убедитесь в этом.

[1] См. n° 3.1 на стр. 23.

3.3.2. Грассмановы частные производные. Как и для обычных многочленов, определим отображение *поляризации* грассмановых многочленов вдоль ковектора $\xi \in V^*$

$$\mathrm{pl}_\xi \overset{\mathrm{def}}{=} \pi_{\Lambda^{n-1}} \circ i_\xi \circ \pi_{\Lambda^n}^{-1} : \Lambda^n V \to \Lambda^{n-1} V\,, \tag{3-16}$$

которое переводит грассманов многочлен $\omega \in \Lambda^n V$ в проекцию на $\Lambda^{n-1}V$ внутреннего произведения[1] $i_\xi\widetilde{\omega}$ ковектора ξ и полной поляризации $\widetilde{\omega}$ многочлена ω. Отображение (3-16) вписывается в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} V^{*\otimes n} \supset \mathrm{Alt}^n V^* \arrow[r, "i_\xi"] \arrow[d, "\pi_{\Lambda^n}"', "\wr"] & V^{*\otimes(n-1)} \arrow[d, "\pi_{\Lambda^{n-1}}"] \\ \Lambda^n V^* \arrow[r, "\mathrm{pl}_\xi"] & \Lambda^{n-1} V^*\,. \end{tikzcd}$$

Назовём *грассмановой производной* однородного грассманова многочлена ω в направлении ковектора $\xi \in V^*$ грассманов многочлен $\partial_\xi\omega \overset{\mathrm{def}}{=} \deg\omega \cdot \mathrm{pl}_\xi\omega$. Так как тензор $\widetilde{\omega}$ кососимметричен, для любых $\xi,\ \eta,\ \psi_1, \dots, \psi_{n-2} \in V^*$ выполняется равенство

$$i_\xi i_\eta \widetilde{\omega}\left(\psi_1, \dots \psi_{n-2}\right) = \omega\left(\xi, \eta, \psi_1, \dots \psi_{n-2}\right) = -\omega\left(\eta, \xi, \psi_1, \dots \psi_{n-2}\right) = -i_\eta i_\xi \widetilde{\omega}\left(\psi_1, \dots \psi_{n-2}\right)\,.$$

Поэтому и грассмановы поляризации, и грассмановы производные антикоммутируют:

$$\mathrm{pl}_\xi \mathrm{pl}_\eta = -\mathrm{pl}_\eta \mathrm{pl}_\xi \quad \text{и} \quad \partial_\xi\partial_\eta = -\partial_\eta\partial_\xi\,,$$

в частности $\partial_\xi^2 = 0$ для любого $\xi \in V^*$, что согласуется с тем, что грассмановы многочлены линейны по каждой переменной. Как и в коммутативном случае[2], выполняется равенство

$$\widetilde{\omega}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \frac{1}{n!}\,\partial_{\xi_1} \dots \partial_{\xi_n}\omega\,. \tag{3-17}$$

Если ковекторы $x_i \in V^*$ и векторы $e_i \in V$ образуют двойственные друг другу базисы пространств V и V^*, то в силу билинейной зависимости $\mathrm{pl}_\xi\omega$ от ξ и ω, грассманова производная в направлении ковектора $\xi = \sum_i \alpha_i x_i$ может быть записана как $\partial_\xi = \sum_i \alpha_i\,\partial_{x_i}$. При этом ненулевой вклад в $\partial_{x_i}\omega$ будет лишь от входящих в ω мономов e_J с $J \ni i$.

Упражнение 3.11. Убедитесь, что $\partial_{x_{i_1}} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n} = e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}$ для любой[3] последовательности попарно разных индексов $i_1, \dots, i_n$.

Таким образом, дифференцирование грассманова монома в направлении базисного ковектора, двойственного к первой слева переменной в мономе, ведёт себя как обычная частная производная $\partial/\partial_{e_{i_1}}$ по этой переменной. В силу анткоммутативности грассмановых переменных, дифференцирование по k-той слева переменной монома ведёт себя как $(-1)^{k-1}\partial/\partial_{e_{i_k}}$:

$$\begin{aligned} \partial_{x_{i_k}} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n} &= \partial_{x_{i_k}} (-1)^{k-1} e_{i_k} \wedge e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_{k-1}} \wedge e_{i_{k+1}} \ldots e_{i_n} = \\ &= (-1)^{k-1} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_{k-1}} \wedge e_{i_{k+1}} \ldots e_{i_n}\,. \end{aligned}$$

[1] Т. е. свёртки ξ с ω по первому тензорному сомножителю, см. прим. 1.4 на стр. 12.

[2] Ср. с 2-12 на стр. 21

[3] Не обязательно возрастающей.

Иначе говоря, грассмановы производные удовлетворяют *грассманову правилу Лейбница*: для любых однородных грассмановых многочленов $\omega, \tau \in \Lambda V$ и любого ковектора $\xi \in V^*$

$$\partial_\xi(\omega \wedge \eta) = \partial_\xi(\omega) \wedge \eta + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge \partial_\xi(\eta)\,. \tag{3-18}$$

Упражнение 3.12. Докажите формулу (3-18).

3.3.3. Линейный носитель грассманова многочлена. Как и в коммутативном случае, *линейный носитель* $\operatorname{supp}(\omega) \subset V$ однородного грассманова многочлена $\omega \in \Lambda^n V$ определяется как линейный носитель[1] $\operatorname{supp}(\widetilde{\omega})$ его полной поляризации $\widetilde{\omega} \in \operatorname{Alt}^n V \subset V^{\otimes n}$. Он равен пересечению всех таких подпространств $U \subset V$, что $\omega \in \Lambda^n U$, и тем самым является наименьшим таким подпространством, как по включению, так и по размерности.

Упражнение 3.13. Убедитесь в этом.

Согласно теор. 1.2 на стр. 13, подпространство $\operatorname{supp}(\omega) = \operatorname{supp}(\widetilde{\omega}) \subset V$ является образом полной свёртки $c_\omega : V^{*\otimes(n-1)} \to V$ с тензором $\widetilde{\omega} \in V^{\otimes n}$ по любым[2] его $n-1$ тензорным сомножителям, т. е. линейно порождается векторами $\partial_J \omega \overset{\text{def}}{=} \partial_{x_{j_1}} \dots \partial_{x_{j_{n-1}}} \omega$, где $J = j_1 \dots j_{n-1}$ пробегает всевозможные последовательности из $n-1$ не повторяющихся[3] натуральных чисел $1 \leqslant j_\nu \leqslant d$. Запишем ω в виде суммы

$$\omega = \sum_I a_I e_I = \sum_{i_1 \dots i_n} \alpha_{i_1 \dots i_n} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n} \tag{3-19}$$

где $I = i_1 \dots i_n$ пробегает все последовательности из n неповторяющихся индексов, а коэффициенты $\alpha_{i_1 \dots i_n}$ кососимметричны по $i_1, \dots, i_n$. Вклад в $\partial_J \omega$ дают лишь те слагаемые $a_I e_I$, у которых $I \supset J$. С точностью до общего знака,

$$\partial_J \omega = \pm \sum_{i \notin J} \alpha_{j_1 \dots j_{n-1} i}\, e_i\,. \tag{3-20}$$

Предложение 3.5

Следующие три условия на грассманов многочлен (3-19) эквивалентны:

1) $\omega = u_1 \wedge \dots \wedge u_n$ для некоторых $u_1, \dots, u_n \in V$

2) $u \wedge \omega = 0$ для всех $u \in \operatorname{supp}(\omega)$

3) для всех наборов $i_1 \dots i_{m+1}$ и $j_1 \dots j_{m-1}$, состоящих, соответственно, из $n+1$ и $n-1$ неповторяющихся в каждом из наборов индексов, выполнены *соотношения Плюккера*

$$\sum_{\nu=1}^{m+1} (-1)^{\nu-1} a_{j_1 \dots j_{m-1} i_\nu} a_{i_1 \dots \hat{i}_\nu \dots i_{m+1}} = 0\,, \tag{3-21}$$

где «крышка» в $a_{i_1 \dots \hat{i}_\nu \dots i_{m+1}}$ означает, что индекс i_ν следует пропустить.

[1] См. n° 1.5.2 на стр. 12.

[2] В силу знакопеременности тензора $\widetilde{\omega}$ изменение последовательности сворачиваемых сомножителей может привести лишь к смене знака у результата.

[3] В силу кососимметричности грассмановых частных производных можно было бы ограничиться только строго возрастающими последовательностями, но мы умышленно этого не делаем, чтобы упростить предстоящие далее вычисления.

Доказательство. Условие (1) означает, что ω лежит в старшей внешней степени $\Lambda^{\dim \operatorname{supp}(\omega)}$ своей линейной оболочки $\operatorname{supp}(\omega)$. По упр. 3.6 на стр. 25 это равносильно условию (2). Соотношение (3-21) представляет собою координатную запись условия (2) для $u = \partial_{j_1\cdots j_{m-1}}\omega$ и констатирует обнуление коэффициента при $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_{m+1}}$ в произведении $(\partial_{j_1\cdots j_{m-1}}\omega) \wedge \omega$. Поскольку такие векторы u линейно порождают пространство $\operatorname{supp}(\omega)$, соотношения Плюккера равносильны условию (2). □

Пример 3.5 (квадрика Плюккера в $\mathbb{P}_5$)
Для четырёхмерного пространства V с базисом e_1, e_2, e_3, e_4 запись квадратичного многочлена $\omega \in \Lambda^2 V$ в виде (3-19) выглядит как $\omega = \sum_{i,j} a_{ij} e_i \wedge e_j$, где коэффициенты a_{ij} образуют кососимметричную матрицу размера 4×4. Соотношение Плюккера для наборов $(i_1, i_2, i_3) = (2, 3, 4)$ и $j_1 = 1$ имеет вид

$$a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23} = 0\,. \tag{3-22}$$

Любой другой выбор непересекающихся наборов (i_1, i_2, i_3) и $j_1 \notin \{i_1, i_2, i_3\}$ приводит к тому же самому квадратичному соотношению (3-22).

Упражнение 3.14. Проверьте это.

Если же взять $j_1 \in \{i_1, i_2, i_3\}$, то получится тривиальное соотношение $0 = 0$, поскольку в каждом из произведений $a_{ij}a_{km}$ будет сомножитель вида $a_{nn} = 0$. Таким образом, множество разложимых в произведение двух линейных множителей грассмановых квадратичных форм от четырёх переменных описывается уравнением (3-22), которое задаёт гладкую квадрику в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$.

Упражнение 3.15. Убедитесь, что соотношение (3-22) на грассманову квадратичную форму $\omega = \sum_{i,j} a_{ij} e_i \wedge e_j \in \Lambda^2 \Bbbk^4$ равносильно условию $\omega \wedge \omega = 0$.

Пример 3.6 (разложимые квадратичые формы)
Пусть $\dim V = n$. Всякая грассманова квадратичная форма $\omega \in \Lambda^2 V$ раскладывается по базисным мономам как $\omega = \sum_{i,j} a_{ij} e_i \wedge e_j$, где числа $a_{ij} \in \Bbbk$ образуют кососимметричную $n \times n$ матрицу A, являющуюся матрицей Грама билинейной формы $\widetilde{\omega} : V^* \times V^* \to \Bbbk$ в двойственном базисе пространства V^*.

Упражнение 3.16. Убедитесь в этом.

В базисе $e_1, \ldots, e_d$, который двойствен к такому базису пространства V^*, где матрица Грама кососимметричной билинейной формы $\widetilde{\omega}$ имеет блочный диагональный вид из 2×2 блоков[1] $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, форма ω приобретает вид $\omega = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \ldots$. Если в этой сумме ровно одно слагаемое, то форма $\omega = e_1 \wedge e_2$ разложима, и $\omega \wedge \omega = 0$. Если слагаемых больше одного, то $\omega \wedge \omega = 2e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 + \ldots \neq 0$, и стало быть, форма ω не представляется в виде $u \wedge w$ ни для каких $u, w \in V$. Таким образом, грассманова квадратичная форма $\omega \in \Lambda^2 V$ разложима в произведение двух линейных форм если и только если $\omega\wedge\omega = 0$. При $\dim V = 4$ и $\dim \Lambda^4 V = 1$ условие $\omega\wedge\omega = 0$ на форму $\omega = \sum_{i,j} a_{ij} e_i \wedge e_j$ записывается одним квадратичным соотношением (3-22), констатирующим обнуление коэффициента при $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$ в $\omega \wedge \omega$.

[1] См. раздел n° 16.5.2 части I.

3.4. Грассманианы. Множество m-мерных векторных подпространств в d-мерном векторном пространстве V называется *грассманианом* и обозначается $\mathrm{Gr}(m, d)$ или $\mathrm{Gr}(m, V)$, если важно указать конкретное пространство V. Грассманиан $\mathrm{Gr}(m, V)$ вкладывается в проективное пространство $\mathbb{P}(\Lambda^m V)$ *отображением Плюккера*

$$p_m : \mathrm{Gr}(m, V) \to \mathbb{P}(\Lambda^m V), \quad U \mapsto \Lambda^m U \subset \Lambda^m V, \tag{3-23}$$

которое сопоставляет каждому m-мерному подпространству $U \subset V$ одномерное подпространство $\Lambda^m U \subset \Lambda^m V$. Если векторы $u_1, \dots, u_m$ составляют базис в U, то с точностью до ненулевого постоянного множителя $p_m(U) = u_1 \wedge \ldots \wedge u_m$.

Упражнение 3.17. Убедитесь, что отображение (3-23) инъективно.

Образ плюккерова вложения (3-23) состоит из ненулевых грассмановых полиномов $\omega \in \Lambda^m V$, полностью разложимых в произведение m линейных множителей, т. е. имеющих линейный носитель минимально возможной размерности $\dim \mathrm{supp}\omega = \deg \omega = m$. Такие полиномы называются *разложимыми*. По предл. 3.5 классы пропорциональности таких полиномов составляют алгебраическое многообразие в $\mathbb{P}(\Lambda^m V)$, задаваемое квадратичными уравнениями (3-21).

Грассманиан $\mathrm{Gr}(m, d)$ является прямым обобщением проективного пространства $\mathbb{P}_n = \mathrm{Gr}(1, n+1)$. Векторное подпространство $U \subset V$ размерности m в координатном пространстве $V = \Bbbk^d$ можно задавать $m \times d$ матрицей $X_{\boldsymbol{u}}$, в m строках которой стоят координаты векторов некоторого базиса $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_m)$ пространства U. При выборе в подпространстве U другого базиса $(w_1, \dots, w_m) = (u_1, \dots, u_m) \cdot C_{\boldsymbol{uw}}$, где $C_{\boldsymbol{uw}} \in \mathrm{GL}_m(\Bbbk)$ — матрица, по столбцам которой записаны координаты векторов базиса $\boldsymbol{w}$ в базисе $\boldsymbol{u}$, матрица $X_{\boldsymbol{u}}$ заменится матрицей $X_{\boldsymbol{w}} = C^t_{\boldsymbol{uw}} X_{\boldsymbol{u}}$.

Упражнение 3.18. Убедитесь в этом.

Таким образом, точки грассманиана $\mathrm{Gr}(m, d)$ биективно соответствуют орбитам действия группы $\mathrm{GL}_m(\Bbbk)$ левыми умножениями на множестве $m \times d$ матриц ранга m. При $m = 1$ мы получаем орбиты мультипликативной группы поля $\varkappa^\times = \mathrm{GL}_1(\Bbbk)$ на множестве ненулевых строк $(x_1, \dots, x_d)$. Матрица X, строки которой порождают заданное подпространство $U \subset \Bbbk^d$ является прямым аналогом строки однородных координат на $\mathbb{P}_n$, и мы будем называть её *матрицей однородных координат* точки $U \in \mathrm{Gr}(m, d)$. Подчеркнём, что она определена лишь с точностью до умножения слева на произвольные матрицы из $\mathrm{GL}_m(\Bbbk)$.

Упражнение 3.19. Убедитесь, что каждый коэффициент $x_{i_1 \ldots i_n}$ в разложении

$$u_1 \wedge \ldots \wedge u_m = \sum_{i_1 < \ldots < i_m} x_{i_1 \ldots i_n} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}$$

равен $m \times m$ минору матрицы $X_{\boldsymbol{u}}$, расположенному в столбцах $i_1, \dots, i_m$.

Набор рассматриваемых с точностью до пропорциональности $m \times m$ миноров $x_{i_1 \ldots i_n}$ матрицы $X_{\boldsymbol{u}}$, т. е. набор однородных координат плюккерова образа $p_m(U) \in \mathbb{P}(\Lambda^m V)$ подпространства $U \subset V$, называется *плюккеровыми координатами* точки $U \in \mathrm{Gr}(m, d)$.

3.5. Многообразие Сегре как сечение грассманиана. Рассмотрим прямую сумму

$$W = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$$

конечномерных векторных пространств V_i. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ и произвольной последовательности целых чисел $m_1, \dots, m_n$, в которой $0 \leqslant m_i \leqslant \dim V_i$ при всех i и $\sum_\nu m_\nu = k$, обозначим через $W_{m_1\dots m_n} \subset \Lambda^k W$ линейную оболочку всех тех грассмановых мономов $w_1 \wedge \dots \wedge w_k$, у которых для каждого i ровно m_i из сомножителей w_ν лежит в V_i.

Упражнение 3.20. Покажите, что правило $\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_n \mapsto \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n$ корректно задаёт линейный изоморфизм $\Lambda^{m_1} V_1 \otimes \dots \otimes \Lambda^{m_n} V_n \simeq W_{m_1\dots m_n}$ и что

$$\Lambda^k W = \bigoplus_{m_1,\dots,m_n} W_{m_1\dots m_n} \simeq \bigoplus_{m_1,\dots,m_n} \Lambda^{m_1} V_1 \otimes \dots \otimes \Lambda^{m_n} V_n \,. \tag{3-24}$$

В частности, тензорное произведение $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ канонически изоморфно прямому слагаемому $W_{1\dots 1} \subset \Lambda^n W$ разложения (3-24). Этот изоморфизм переводит разложимые тензоры $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$ в грассмановы мономы $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$. Таким образом, многообразие Сегре прим. 1.2 на стр. 7 представляет собою сечение грассманиана $\mathrm{Gr}(n, W) \subset \mathbb{P}(\Lambda^n W)$ проективным подпространством $\mathbb{P}\left(W_{1\dots 1}\right) \subset \mathbb{P}(\Lambda^n W)$ и является проективным алгебраическим многообразием, задаваемым ограничениями квадратичных соотношений из предл. 3.5 на стр. 32 на линейное подпространство $W_{1\dots 1} \subset \Lambda^n W$.

§4. Симметрические функции

4.1. Симметрические и кососимметрические многочлены. Симметрическая группа S_n действует на кольце многочленов $\mathbb{Z}[x_1, \dots , x_n]$ переставляя переменные:

$$\forall\, g \in S_n \quad gf(x_1, \dots , x_n) \overset{\text{def}}{=} f(x_{g(1)}, x_{g(2)}, \dots , x_{g(n)})\,. \tag{4-1}$$

Многочлен $f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots , x_n]$ называется *симметрическим*, если $gf = f$ для всех $g \in S^n$, и *кососимметрическим* — если $gf = \operatorname{sgn}(g)\cdot f$ для всех $g \in S^n$. Симметрические многочлены образуют в $\mathbb{Z}[x_1, \dots , x_n]$ подкольцо, а кососимметрические — модуль над этим кольцом[1]. При отождествлении кольца многочленов от n переменных с n-й тензорной степенью кольца многочленов от одной переменной при помощи канонического изоморфизма из прим. 1.1 на стр. 7:

$$\varkappa :\ \mathbb{Z}[x_1, \dots , x_n] \simeq \mathbb{Z}[t]^{\otimes n}\,, \quad x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} \mapsto t^{m_1} \otimes t^{m_2} \otimes \dots \otimes t^{m_n}\,, \tag{4-2}$$

(косо)симметрические многочлены превращаются в точности в (косо)симметричные тензоры, а умножение многочленов — в покомпонентное умножение

$$\big(f_1 \otimes \dots \otimes f_n\big) \cdot \big(g_1 \otimes \dots \otimes g_n\big) \overset{\text{def}}{=} (f_1g_1) \otimes (f_2g_2) \otimes \dots \otimes (f_ng_n)\,.$$

Упражнение 4.1. Проверьте, что такое умножение наделяет $\mathbb{Z}$-модуль $\mathbb{Z}[t]^{\otimes n}$ структурой коммутативного кольца с единицей $1 \otimes \dots \otimes 1$.

Описанные в n° 2.2.1 на стр. 17 и n° 3.2.1 на стр. 29 стандартные базисы в $\mathbb{Z}$-модулях симметричных тензоров $\operatorname{Sym}^n(\mathbb{Z}[t])$ и знакопеременных тензоров $\operatorname{Alt}^n(\mathbb{Z}[t])$ переносятся изоморфизмом (4-2) в базисы $\mathbb{Z}$-модулей симметрических и кососимметрических многочленов, которые принято называть соответственно *мономиальным* и *детерминантным* базисами.

4.1.1. Мономиальный базис модуля симметрических многочленов. Поскольку симметрический многочлен вместе с каждым своим мономом содержит с тем же самым коэффициентом и все мономы из его S_n-орбиты, а S_n-орбита любого монома однозначно определяется своим лексикографически старшим мономом, показатели которого нестрого возрастают слева направо, всякий симметрический многочлен единственным способом представляется в виде целочисленной линейной комбинации многочленов

$$m_\lambda = (\text{сумма всех мономов из } S_n\text{-орбиты монома } x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n})\,, \tag{4-3}$$

где $\lambda = (\lambda_1, \dots , \lambda_n)$ пробегает диаграммы Юнга из n строк (часть из которых может быть нулевой длины). Многочлен (4-3) называется *мономиальным симметрическим многочленом*. При изоморфизме (4-2) он переходит в стандартный базисный симметрический тензор[2], равный сумме всех различных тензорных произведений, содержащих $m_0(\lambda)$ сомножителей $1 = t^0$, $m_1(\lambda)$ сомножителей t^1, $m_2(\lambda)$ сомножителей t^2 и т. д., где через $m_i(\lambda)$ здесь и далее всегда обозначается количество строк длины i в диаграмме Юнга λ.

[1] Ибо при умножении кососимметрического многочлена на симметрический получается кососимметрический многочлен.

[2] См. n° 2.2.1 на стр. 17.

4.1.2. Детерминантные базисы. Так как при транспозиции любых двух переменных кососимметрический многочлен меняет свой знак, в каждом мономе такого многочлена степени всех переменных попарно различны. Поэтому базис $\mathbb{Z}$-модуля кососимметрических многочленов образуют альтернированные S_n-орбиты вида

$$\Delta_\nu = \sum_{g\in S_n} \operatorname{sgn}(g)\, x_{g(1)}^{\nu_1} \dots x_{g(n)}^{\nu_n}\,, \tag{4-4}$$

занумерованные диаграммами Юнга ν из n строк строго убывающей длины

$$\nu_1 > \nu_2 > \dots > \nu_n \geqslant 0\,.$$

Все такие диаграммы ν содержат в себе минимальную треугольную диаграмму

$$\delta = \big((n-1),\,(n-2),\,\dots\,,\,1,\,0\big)$$

из n строк разной длины, и разности

$$\lambda = \nu - \delta \overset{\text{def}}{=} \big((\nu_1 - n + 1),\,(\nu_2 - n + 2),\,\dots\,,\,(\nu_{n-1} - 1),\,\nu_n\big)$$

имеют $\lambda_i = \nu_i - n + i$ и пробегают множество всех диаграмм Юнга из n строк безо всяких ограничений на их длины (которые могут быть и нулевыми). Часто бывает удобно нумеровать базис (4-4) именно такими диаграммами λ, и тогда мы будем писать $\Delta_{\lambda+\delta}$ вместо Δ_ν.

Легко усмотреть, что многочлен (4-4) представляет собою определитель[1]

$$\Delta_\nu = \det(x_j^{\nu_i}) = \det\begin{pmatrix} x_1^{\nu_1} & x_2^{\nu_1} & \dots & x_n^{\nu_1} \\ x_1^{\nu_2} & x_2^{\nu_2} & \dots & x_n^{\nu_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{\nu_n} & x_2^{\nu_n} & \dots & x_n^{\nu_n} \end{pmatrix} \tag{4-5}$$

Упражнение 4.2. Убедитесь в этом прямым раскрытием правой части (4-5).

В частности, при $\nu = \delta$ получаем *определитель Вандермонда*

$$\Delta_\delta = \det(x_j^{n-i}) = \det\begin{pmatrix} x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \prod_{i<j}(x_i - x_j)\,. \tag{4-6}$$

Упражнение 4.3. Убедитесь в справедливости равенства $\Delta_\delta = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$.

[1]Здесь и далее запись $(f(i,j))$, где $f(i,j)$ — какая-либо функция от i, j, означает матрицу, в i-й строке и j-м столбце которой стоит результат применения функции f к данным i и j.

4.1.3. Базис Шура. Поскольку любой кососимметрический многочлен f обращается в нуль при подстановке $x_i = x_j$, он делится в кольце $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ на $(x_i - x_j)$, а так как каждая из разностей $(x_i - x_j)$ неприводима, f делится на их произведение $\Delta_\delta = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$, и частное от деления $f/\Delta_\delta \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ является симметрическим многочленом. Мы получаем

Предложение 4.1
Умножение на определитель Вандермонда Δ_δ задаёт биекцию между симметричными и кососимметричными многочленами. Эта биекция является изоморфизмом модулей над кольцом симметрических многочленов (и в частности — $\mathbb{Z}$-модулей). □

Следствие 4.1
Многочлены[1] $s_\lambda = \Delta_{\delta+\lambda}/\Delta_\delta$, где λ пробегает все диаграммы Юнга из не более n строк, образуют базис $\mathbb{Z}$-модуля симметрических многочленов.

4.2. Элементарные симметрические многочлены. Коэффициенты многочлена от t

$$E(t) = \prod_i (1 + x_i t) = \sum_{k=0}^{n} e_k(x) \cdot t^k \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n][t] \tag{4-7}$$

называются *элементарными симметрическими многочленами*. Раскрыв скобки в (4-7), заключаем, что $e_0 = 1$ и

$$e_k(x) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \tag{4-8}$$

(сумма всех произведений из k различных переменных, где $k \geqslant 1$). Эти же многочлены e_k возникают и в *формулах Виета*: если $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ являются корнями приведённого многочлена

$$t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n = \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i)\,, \tag{4-9}$$

то $a_i = (-1)^i e_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

4.2.1. Разложение по мономиальному базису. Для диаграммы Юнга $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ положим $e_\lambda \overset{\text{def}}{=} e_{\lambda_1} \dots e_{\lambda_k} = \prod_{i=1}^{k} e_{\lambda_i}$. Это всего лишь другое обозначение для монома $e_1^{m_1} \dots e_n^{m_n}$, показатель m_i которого равен количеству строк длины i в диаграмме λ, причём диаграмма Юнга λ и набор неотрицательных показателей $m = (m_1, \dots, m_n)$ взаимно однозначно определяются друг другом из равенства $e_{\lambda_1} \dots e_{\lambda_k} = e_1^{m_1} \dots e_n^{m_n}$. Запись мономов от букв e_i в виде e_λ часто упрощает многие вычисления. Например, лексикографически старший по переменным $x_1, \dots, x_n$ мономом в симметрическом многочлене e_λ получается при перемножении монома $x_1 \dots x_{\lambda_1}$ из e_{λ_1}, монома $x_1 \dots x_{\lambda_2}$ из e_{λ_2} и т. д. вплоть до $x_1 \dots x_{\lambda_k}$ из e_{λ_k}. Его удобно представлять себе как результат перемножения переменных x_i, вписанных в клетки диаграммы Юнга λ так, что номер переменной совпадает с номером столбца, в котором она стоит. Моном от x, который получится в результате перемножения всех переменных из диаграммы λ, имеет вид $x_1^{\lambda_1^t} x_2^{\lambda_2^t} \dots x_n^{\lambda_n^t}$, где $\lambda^t = (\lambda_1^t, \dots, \lambda_n^t)$ — это диаграмма Юнга, транспонированная[2] к λ. Мы заключаем, что разложение многочлена e_λ по базису из мономиальных симметрических многочленов[3] m_λ имеет вид:

$$e_\lambda = m_{\lambda^t} + (\text{лексикографически младшие члены}) \tag{4-10}$$

[1] Многочлены $s_\lambda = \Delta_{\delta+\lambda}/\Delta_\delta$ называются (*детерминантными*) *многочленами Шура*.
[2] строками которой служат столбцы диаграммы λ, как при транспонировании матрицы.
[3] См. формулу (4-3) на стр. 36.

Предложение 4.2
Многочлены $e_\lambda = e_{\lambda_1} \dots e_{\lambda_m}$, где λ пробегает диаграммы Юнга из n столбцов (длины столбцов могут быть и нулевыми), образуют базис $\mathbb{Z}$-модуля симметрических функций.

Доказательство. Мономиальные многочлены m_μ из форм. (4-3) на стр. 36 нумеруются диаграммами Юнга из n строк[1]. Выпишем их в строку в порядке лексикографического возрастания диаграмм μ. Многочлены e_λ, занумерованные диаграммами λ из n столбцов[2], также выпишем в строку, но в порядке лексикографического возрастания транспонированных диаграмм λ^t. Формула (4-10) утверждает, что вторая строка получается из первой умножением справа на квадратную целочисленную верхнегортанную матрицу с единицами по главной диагонали. Поскольку такая матрица обратима над $\mathbb{Z}$, многочлены e_λ также образуют базис. □

Следствие 4.2
Многочлены $e_1, \dots, e_n$ алгебраически независимы в $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ и любой симметрический многочлен однозначно записывается в виде многочлена от $e_1, \dots, e_n$.

Доказательство. Вспоминаем, что каждое произведение $e_\lambda = e_{\lambda_1} \dots e_{\lambda_k}$ представляет собою моном $e^m \overset{\text{def}}{=} e_1^{m_1} \dots e_n^{m_n}$, у которого показатель m_i равен количеству строк длины i в диаграмме λ, и что множество многочленов e_λ — это в точности множество всех различных мономов от $e_1, \dots, e_n$. □

Следствие 4.3
Всякий симметрический многочлен от корней приведённого многочлена $f(t)$ можно переписать как многочлен от коэффициентов f. □

4.3. Полные симметрические многочлены. Сумма всех мономов степени k в $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ обозначается h_k и называется *полным симметрическим многочленом* степени k. Он равен коэффициенту при t^k у формального степенного ряда $H(t) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]\,[[t]]$, возникающего при перемножении n бесконечных геометрических прогрессий[3]

$$H(t) = \prod_i \frac{1}{1 - x_i t} = \prod_i \left(1 + x_i t + x_i^2 t^2 + x_i^3 t^3 + \ \dots\right) = \sum_{k \geqslant 0} h_k(x) \cdot t^k . \tag{4-11}$$

Поэтому $H(t)E(-t) = 1$. Вычисляя в этом равенстве коэффициент при t^k получаем рекурсивные формулы, выражающие e_i и h_i друг через друга:

$$h_k = e_1 h_{k-1} - e_2 h_{k-2} + \dots + (-1)^{k-2} e_{k-1} h_1 + (-1)^{k-1} e_k \tag{4-12}$$
$$e_k = h_1 e_{k-1} - h_2 e_{k-2} + \dots + (-1)^{k-2} h_{k-1} e_1 + (-1)^{k-1} h_k . \tag{4-13}$$

Предложение 4.3
Отображение ω, переводящее многочлен e_k в многочлен h_k при $k = 1, \dots, n$) является инволютивным[4] автоморфизмом кольца симметрических многочленов.

[1] Длины некоторых из них могут быть нулевыми.
[2] Длины некоторых из них тоже могут быть нулевыми.
[3] Выбирая в i-й скобке m_i-е слагаемое, получаем после их перемножения моном $x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$.
[4] Т. е. обратным самому себе.

Доказательство. Так как кольцо симметрических функций изоморфно кольцу многочленов от $e_1, \dots, e_n$, отображение $e_k \mapsto h_k$ однозначно продолжается до гомоморфизма ω из кольца симметрических функций в себя. Из рекурсивных формул (4-12) и (4-13) вытекает, что этот гомоморфизм переводит h_k обратно в e_k, т. е. является инволютивной биекцией. □

Следствие 4.4
Многочлены $h_1, \dots, h_n$ алгебраически независимы в $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ и любой симметрический многочлен (в том числе h_m с $m > n$) однозначно записывается в виде многочлена от $h_1, \dots, h_n$.

4.4. Степенные суммы Ньютона. Сумма k-тых степеней всех переменных

$$p_k(x) = \sum_i x_i^k \tag{4-14}$$

называется k-тым *симметрическим многочленом Ньютона*. Многочлены $p_k(x)$ с $k \geqslant 1$ удобно воспринимать как коэффициенты ряда

$$\begin{aligned} P(t) = \sum_{k\geqslant 1} p_k(x)\, t^{k-1} = \sum_i \sum_{k\geqslant 1} x_i^k\, t^{k-1} = \sum_i \frac{d}{dt} \sum_{k\geqslant 1} x_i^k \frac{t^k}{k} = \\ = -\frac{d}{dt} \sum_i \ln(1 - x_i\, t) = \frac{d}{dt} \ln \prod_i \frac{1}{1 - x_i\, t} = \frac{d}{dt} \ln H(t) \end{aligned} \tag{4-15}$$

который является логарифмической производной от ряда $H(t) = 1/E(-t)$. Таким образом,

$$P(t) = H'(t)/H(t) = E'(-t)/E(-t)\,.$$

Сравнивая коэффициенты при t^{k-1} в равенствах $H(t)P(t) = H'(t)$ и $E(-t)P(t) = E'(-t)$, получаем *формулы Ньютона*, рекурсивно выражающие p_k через h_k или через e_k:

$$p_k = kh_k - h_{k-1}p_1 - h_{k-2}p_2 - \ \dots\ - h_1 p_{k-1} \tag{4-16}$$

$$(-1)^{k-1}p_k = ke_k - e_{k-1}p_1 + e_{k-2}p_2 - \ \dots\ + (-1)^{k-1}e_1 p_{k-1}\,. \tag{4-17}$$

Индукция по k показывает, что многочлен p_k является собственным вектором инволюции ω из предл. 4.3 с собственным значением $(-1)^{k-1}$:

$$\omega(p_k) = (-1)^{k-1} p_k\,. \tag{4-18}$$

Следствие 4.5
Многочлены $p_1, \dots, p_n$ алгебраически независимы в $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ и любой симметрический многочлен с рациональными коэффициентами (в том числе p_m с $m > n$) однозначно записывается в виде многочлена с рациональными коэффициентами от $p_1, \dots, p_n$.

Доказательство. Из формулы (4-17) вытекает, что при любом $N \in \mathbb{N}$ в пространстве многочленов степени $\leqslant N$ от $x_1, \dots, x_n$ с рациональными коэффициентами $\mathbb{Q}$-линейная оболочка всевозможных мономов от $p_1, \dots, p_n$ совпадает с $\mathbb{Q}$-линейной оболочкой всевозможных мономов от $e_1, \dots, e_n$. Поскольку при фиксированном N количества этих мономов одинаковы и мономы от $e_1, \dots, e_n$ образуют базис, то и мономы от $p_1, \dots, p_n$ тоже образуют базис. В частности, они линейно независимы над $\mathbb{Q}$. □

4.4.1. Явное выражение e_k и h_k через p_k. Как и в n° 4.2.1 выше, для каждой диаграммы Юнга $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, состоящей из m_1 единиц, m_2 двоек, m_3 троек[1] и т. д., положим

$$\begin{aligned} e_\lambda &\overset{\text{def}}{=} e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} e_{\lambda_3} \dots = e_1^{m_1} e_2^{m_2} e_3^{m_3} \dots \\ h_\lambda &\overset{\text{def}}{=} h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} h_{\lambda_3} \dots = h_1^{m_1} h_2^{m_2} h_3^{m_3} \dots \\ p_\lambda &\overset{\text{def}}{=} p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} p_{\lambda_3} \dots = p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3} \dots \end{aligned} \tag{4-19}$$

и условимся более не различать между собою диаграммы λ, получающиеся друг из друга добавлением или удалением строк нулевой длины, т. е. приписыванием к $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ или удалением оттуда любого количества нулей справа. Таким образом, множество многочленов вида p_λ — это в точности множество всевозможных мономов[2] от формальных переменных p_i, и то же самое справедливо для многочленов e_λ и h_λ.

Многочлены p_λ являются собственными векторами инволюции ω из предл. 4.3 на стр. 39:

$$\omega(p_\lambda) = \varepsilon_\lambda \cdot p_\lambda\,, \quad \text{где} \quad \varepsilon_\lambda = (-1)^{\sum (k-1)m_k} = (-1)^{|\lambda|}(-1)^{\sum m_k} = (-1)^{\sum(\lambda_i - 1)}\,. \tag{4-20}$$

Далее, для каждой диаграммы Юнга λ обозначим через

$$z_\lambda \overset{\text{def}}{=} \prod_k \left(m_k! \cdot k^{m_k}\right) \tag{4-21}$$

порядок централизатора перестановки циклового типа[3] λ в симметрической группе $S_{|\lambda|}$.

Упражнение 4.4. Убедитесь, что количество перестановок, коммутирующих с данной перестановкой циклового типа λ, действительно равно (4-21), и покажите, что в $S_{|\lambda|}$ имеется всего $|\lambda|!/z_\lambda$ перестановок циклового типа λ.

Предложение 4.4

Многочлены e_k и h_k выражаются через $\mathbb{Q}$-базис p_λ по формулам:

$$h_k = \sum_{|\lambda|=k} z_\lambda^{-1} p_\lambda\,, \quad e_k = \sum_{|\lambda|=k} \varepsilon_\lambda z_\lambda^{-1} p_\lambda\,, \tag{4-22}$$

где суммирование ведётся по всем k-клеточным диаграммам Юнга.

Доказательство. Докажем левую формулу, правая получается из неё применением инволюции ω из предл. 4.3. Согласно форм. (4-15) на стр. 40,

$$H(t) = e^{\int P(t)\,dt} = e^{\sum p_i t^i/i} = \prod e^{p_i t^i/i} = \prod_{i \geqslant 1} \sum_{m \geqslant 0} \frac{p_i^m}{i^m m!}\, t^{im}\,.$$

Если выбрать в i-м сомножителе m_i-е слагаемое, то их произведение даст вклад в коэффициент при t^k если и только если $\sum_i i \cdot m_i = k$. Такие выборы биективно соответствуют k-клеточным диаграммам Юнга λ с m_1 строками длины 1, m_2 строками длины 2 и т. д., а вклад произведения, отвечающего такой диаграмме, равен p_λ / z_λ. □

[1] Отметим, что $\sum_k k \cdot m_k = |\lambda|$.

[2] Напомню, что переход от нумерации мономов диаграммами Юнга к их обычной нумерации показателями степеней — это переход от неубывающей последовательности $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ неотрицательных целых чисел к вектору $m(\lambda) = (m_1, \dots, m_n)$ с неотрицательными целочисленными координатами, у которого i-тая координата m_i равна количеству строк длины i в диаграмме λ.

[3] См. http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2021/lec_11.pdf, раздел 9.1.2 на стр. 150.

4.5. Формула Джамбелли выражает детерминантные многочленами Шура s_λ через полные симметрические многочлены h_k в кольце $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$. Для её получения обозначим через

$$e_k^{(p)} = e_k^{(p)}(x_1, \dots, \hat{x}_p, \dots, x_n)\,,$$

симметрическую функцию от $(n-1)$ переменных[1], которая получается из элементарного симметрического многочлена $e_k = e_k(x_1, \dots, x_n)$ подстановкой $x_p = 0$. При фиксированном p производящая функция для многочленов $e_k^{(p)}$ имеет вид $E^{(p)}(t) = \sum_k e_k^{(p)}(x) \cdot t^k = \prod_{i \neq p}(1 + x_i t)$. Поэтому $H(t)E^{(p)}(-t) = (1 - x_p t)^{-1}$. Сравнивая коэффициенты при t^k в обеих частях, получаем для каждого целого неотрицательного k соотношение

$$\begin{aligned} x_p^k &= h_{k-n+1} \cdot (-1)^{n-1} e_{n-1}^{(p)} + h_{k-n+2} \cdot (-1)^{n-2} e_{n-2}^{(p)} + \dots + h_k \cdot e_0^{(p)} = \\ &= \sum_{j=1}^{n} h_{k-n+j} \cdot (-1)^{n-j} e_j^{(p)}\,, \end{aligned} \tag{4-23}$$

в правой части которого стоит произведение n-мерных строки $(h_{k-n+1}, \dots, h_k)$ и столбца

$$\begin{pmatrix} (-1)^{n-1} e_{n-1}^{(p)} \\ \vdots \\ e_2^{(p)} \\ -e_1^{(p)} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Для данных $\nu_1 > \nu_2 > \dots > \nu_n$ организуем h-строки, отвечающие $k = \nu_1, \dots, \nu_n$, в матрицу[2]

$$H_\nu = \left(h_{\nu_i - n + j}\right) = \begin{pmatrix} h_{\nu_1 - n+1} & h_{\nu_1 - n+2} & \dots & h_{\nu_1} \\ h_{\nu_2 - n+1} & h_{\nu_2 - n+2} & \dots & h_{\nu_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{\nu_n - n+1} & h_{\nu_n - n+2} & \dots & h_{\nu_n} \end{pmatrix},$$

а $e^{(p)}$-столбцы, отвечающие $p = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ n$, — в матрицу

$$M = \left((-1)^{n-i} e_{n-i}^{(j)}\right) = \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} e_{n-1}^{(1)} & (-1)^{n-1} e_{n-i}^{(2)} & \dots & (-1)^{n-1} e_{n-1}^{(n)} \\ (-1)^{n-2} e_{n-2}^{(1)} & (-1)^{n-2} e_{n-i}^{(2)} & \dots & (-1)^{n-2} e_{n-2}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда формула (4-23) превратится в матричное равенство $D_\nu = H_\nu \cdot M$, где

$$D_\nu = (x_j^{\nu_i}) = \begin{pmatrix} x_1^{\nu_1} & x_2^{\nu_1} & \dots & x_n^{\nu_1} \\ x_1^{\nu_2} & x_2^{\nu_2} & \dots & x_n^{\nu_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{\nu_n} & x_2^{\nu_n} & \dots & x_n^{\nu_n} \end{pmatrix}.$$

[1] Как обычно, крышка над x_p означает пропуск этой переменной.

[2] В которой мы для унификации записи полагаем $h_j = 0$ при $j < 0$.

Таким образом, для любой диаграммы Юнга ν со строго убывающими длинами строк

$$\Delta_\nu = \det D_\nu = \det H_\nu \cdot \det M \,.$$

Так как при $\nu = \delta$ матрица H_δ верхняя унитреугольная, $\det H_\delta = 1$ и $\Delta_\delta = \det M$. Мы получаем искомое выражение полиномов Шура через полные симметрические функции:

$$s_\lambda = \Delta_{\delta+\lambda}/\Delta_\delta = (\det H_{\delta+\lambda} \cdot \det M)/\det M = \det H_{\delta+\lambda} = \det\left(h_{\lambda_i+j-i}\right) . \tag{4-24}$$

Предложение 4.5 (формула Джамбелли)

$$s_\lambda = \det\begin{pmatrix} h_{\lambda_1} & h_{\lambda_1+1} & \cdots & h_{\lambda_1+n-1} \\ h_{\lambda_2-1} & h_{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & h_{\lambda_{n-1}+1} \\ h_{\lambda_n-n+1} & \cdots & h_{\lambda_n-1} & h_{\lambda_n} \end{pmatrix} \tag{4-25}$$

где по главной диагонали стоят $h_{\lambda_1}, \dots , h_{\lambda_n}$, и в каждой строке индексы у h увеличиваются слева направо на единицу от клетки к клетке. □

4.5.1. Примеры. При $n = 2$ в $\mathbb{Z}[x_1, x_2]$ получаем соотношение

$$s_{(2,1)} = \det\begin{pmatrix} h_2 & h_3 \\ 1 & h_1 \end{pmatrix} = h_1h_2 - h_3 = e_1e_2 - e_3 \,.$$

При $n = 3$ в $\mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$ получаем соотношение

$$s_{(2,1)} = s_{(2,1,0)} = \det\begin{pmatrix} h_2 & h_3 & h_4 \\ 1 & h_1 & h_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} h_2 & h_3 \\ 1 & h_1 \end{pmatrix} \,,$$

дающее то же самое выражение $s_{(2,1)}$ через h_i, что и при $n = 2$.

Упражнение 4.5. Убедитесь, что выражение s_λ через h_k, полученное при числе переменных n, равном высоте диаграммы λ, сохраняется и при любом большем числе переменных.

Беря $\lambda = (k)$, т. е. одну строку длины k, получаем равенство $s_{(k)} = h_k$, очевидное при $n = 1$ и по упр. 4.5 справедливое для всех n. Отметим, что при непосредственном вычислении определителей $\Delta_{\delta+(k)}$ и Δ_δ произвольного размера $n \times n$ равенство $\Delta_{\delta+(k)} = h_k \cdot \Delta_\delta$ не вполне очевидно.

4.6. Формула Пьери выражает произведение $s_\lambda \cdot h_k = s_\lambda \cdot s_{(k)}$ через многочлены s_μ. Для её вывода нам придётся слегка обобщить сказанное в n° 4.1. Рассмотрим кольцо формальных степенных рядов $\mathbb{Z}[\![x_1, \dots , x_n]\!]$, а в нём — симметрические и кососимметрические ряды (первые образуют подкольцо, вторые — модуль над этим подкольцом). То же рассуждение, что и в n° 4.1.2 показывает, что всякий кососимметричный ряд A однозначно записывается в виде бесконечной целочисленной линейной комбинации альтернированных S_n-орбит мономов:

$$A = \sum_{\nu_1>\nu_2>\ldots>\nu_n} c_\nu \cdot \Delta_\nu \,, \quad \text{где} \quad \Delta_\nu = \sum_{g\in S_n} \operatorname{sgn}(g)\, x_{g(1)}^{\nu_1} x_{g(2)}^{\nu_2} \,\dots\, x_{g(n)}^{\nu_n} \,, \tag{4-26}$$

суммирование происходит по всем диаграммам Юнга $\nu = (\nu_1, \dots , \nu_n)$ из n строк строго убывающей длины, и коэффициенты $c_\nu \in \mathbb{Z}$.

Лемма 4.1
Разложение (4-26) для произведения базисного кососимметрического многочлена Δ_ν на симметрический ряд $H(x) = \prod_{i=1}^n (1-x_i)^{-1} = \prod_{i=1}^n (1 + x_i + x_i^2 + x_i^3 + \ldots) = \sum_{k\geqslant 0} h_k(x)$ имеет вид $\Delta_\nu \cdot H = \sum_\eta \Delta_\eta$, где суммирование идёт по всем таким $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, что

$$\eta_1 \geqslant \nu_1 > \eta_2 \geqslant \nu_2 > \ \ldots\ \eta_n \geqslant \nu_n\,.$$

Доказательство. Для любых n рядов $f_1(t), \ldots, f_n(t) \in \mathbb{Z}[\![t]\!]$ положим

$$f_1 \wedge \ldots \wedge f_n = \sum_{g\in S_n} \mathrm{sgn}(g) f_1(x_{g(1)}) \ldots f_n(x_{g(n)})\,.$$

Ряд $f_1 \wedge \ldots \wedge f_n \in \mathbb{Z}[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$ кососимметричен и полилинейно и кососимметрично зависит от $f_1, \ldots, f_n$. В частности, $f_1 \wedge \ldots \wedge f_n$ не изменяется при добавлении к любому из рядов любой линейной комбинации остальных.

Упражнение 4.6. Убедитесь, что $t^{\nu_1} \wedge \ldots \wedge t^{\nu_n} = \Delta_\nu$.

В этих обозначениях

$$\Delta_\nu \cdot H = \sum_{g\in S_n} \mathrm{sgn}(g) \prod_{i=1}^n x_{g(i)}^{\nu_i} \left(1 - x_{g(i)}\right)^{-1} = f_1 \wedge \ldots \wedge f_n$$

для $f_i(t) = t^{\nu_i}/(1-t) = t^{\nu_i} + t^{\nu_i+1} + t^{\nu_i+2} + \ldots$. Вычитая f_1 из всех остальных рядов, мы обрезаем их до многочленов степени $< \nu_1$. Вычитая второй из полученных многочленов из всех последующих, мы обрезаем последние до многочленов степени $< \nu_2$. Действуя в таком духе, приходим к равенству $f_1 \wedge \ldots \wedge f_n = \overline{f}_1 \wedge \ldots \wedge \overline{f}_n$, в котором $\overline{f}_1 = f_1 = \sum_{j\geqslant\nu_1} t^j$, а

$$\overline{f}_i = t^{\nu_i} + t^{\nu_i+1} + \ \ldots\ + t^{\nu_{i-1}-1} \text{ при } 2 \leqslant i \leqslant n\,.$$

В силу полилинейности $\overline{f}_1 \wedge \ldots \wedge \overline{f}_n = \sum_\eta t^{\eta_1} \wedge t^{\eta_2} \wedge \ \ldots\ \wedge t^{\eta_n} = \sum_\eta \Delta_\eta$, где суммирование идёт по всем $\eta_1 \geqslant \nu_1 > \eta_2 \geqslant \nu_2 > \eta_3 \geqslant \nu_3 > \ \ldots\ \eta_n \geqslant \nu_n$. □

Следствие 4.6 (формула Пьери)
$s_\lambda \cdot h_k = \sum_\mu s_\mu$, где суммирование происходит по всем диаграммам μ из $\leqslant n$ строк, которые можно получить, добавляя к диаграмме λ ровно k клеток так, чтобы никакие две из них не попали в один столбец.

Доказательство. По лем. 4.1 имеем равенство $\Delta_{\delta+\lambda} \sum_{k\geqslant 0} h_k = \sum_\tau \Delta_{\delta+\mu}$, где суммирование происходит по всем таким диаграммам μ, что[1] $\mu_1 \geqslant \lambda_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ \ldots$. Деля обе части на Δ_δ и беря в полученном равенстве однородную компоненту степени $|\lambda| + k$ по x, получаем требуемую формулу. □

Замечание 4.1. Если диаграмма λ состоит из $k < n$ строк, т. е. $\lambda_i = 0$ при $i > k$, диаграммы μ в формуле Пьери могут содержать на одну ненулевую строку больше, чем λ. Например, при $n = 2$ получаем $s_{(2)} \cdot h_1 = s_{(2,1)} + s_{(3)}$, что вновь приводит к выражению $s_{(2,1)} = h_2 h_1 - h_3$ из n° 4.5.1 на стр. 43.

[1] Напомним (см. n° 4.1.2), что $\lambda_i = \nu_i - n + i$, $\mu_i = \eta_i - n + i$, поэтому неравенства $\eta_i \geqslant \nu_i > \eta_{i+1}$ равносильны неравенствам $\mu_i \geqslant \lambda_i \geqslant \mu_{i+1}$.

4.7. Кольцо симметрических функций. Удобно думать про симметрические многочлены не привязываясь к конкретному числу переменных, но считая, что их достаточно много для того, чтобы все нужные функции были определены. Формализуется это так. Условимся не различать между собою две диаграммы λ', λ'', а также два набора показателей m', m'', если они получаются друг из друга дописыванием справа любого числа нулей. Для каждого набора занумерованных натуральными числами $i \in \mathbb{N}$ букв q_i положим

$$q_\lambda = q_{\lambda_1} q_{\lambda_2} q_{\lambda_3} \dots \quad \text{и} \quad q^m = q_1^{m_1} q_2^{m_2} q_3^{m_3} \dots \,.$$

Мы пишем $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots) = (1^{m_1}, 2^{m_2}, 3^{m_3}, \dots)$ если диаграмма Юнга λ содержит m_i строк длины i при каждом $i \in \mathbb{N}$, что равносильно равенству $q_\lambda = q^m$. Для симметрических многочленов m_λ и s_λ мы полагаем $m_\lambda = s_\lambda = 0$ всякий раз, когда число переменных меньше количества строк в диаграмме λ, а для элементарных симметрических многочленов e_λ мы полагаем $e_\lambda = 0$, когда число переменных меньше количества столбцов в диаграмме λ. При таких соглашениях каждый из симметрических многочленов $m_\lambda(x)$, $s_\lambda(x)$, $e_\lambda(x)$, $h_\lambda(x)$ и $p_\lambda(x)$ становится определён для переменной $x = (x_1, \dots, x_r)$ любой размерности r, причём при $r > s$ подстановка

$$x_{s+1} = x_{s+2} = \dots = x_r = 0 \tag{4-27}$$

превращает каждый из этих многочленов в одноимённый многочлен от меньшего набора переменных $x = (x_1, \dots, x_s)$. Подстановка (4-27) задаёт сюрьективный гомоморфизм колец

$$\zeta_{sr} : \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_r] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_s]\,. \tag{4-28}$$

Будем называть последовательность симметрических многочленов $f^{(n)} \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ *симметрической функцией степени* d, если выполняются следующие два условия:

$$1)\ \forall\, n \text{ многочлен } f^{(n)} \text{ однороден степени } d \qquad 2)\ \zeta_{rs}\left(f^{(r)}\right) = f^{(s)} \text{ при } r > s.$$

Поскольку в выражении $f^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ верхний индекс у f равен числу подставляемых переменных, писать его не имеет смысла, и мы всегда будем сокращать предыдущую запись до

$$f(x_1, \dots, x_n) \overset{\text{def}}{=} f^{(n)}(x_1, \dots, x_n)\,.$$

Так, для фиксированной диаграммы λ веса $|\lambda| = d$ последовательность мономиальных многочленов $m_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ образует симметрическую функцию степени d, которая обозначается m_λ. Например, кубическая симметрическая функция $m_{(2,1)}$ на наборах из одной, двух и трёх переменных имеет вид

$$\begin{aligned} m_{(2,1)}(x_1) &= 0 \\ m_{(2,1)}(x_1, x_2) &= x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 \\ m_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2\,. \end{aligned}$$

Аналогичным образом определяются и симметрические функции s_λ, e_λ, h_λ и p_λ степени $|\lambda|$.

Симметрические функции степени d образуют $\mathbb{Z}$-модуль. Его принято обозначать Λ_d. Из сказанного в предыдущих разделах вытекает, что симметрические функции m_λ, s_λ, e_λ и h_λ, занумерованные всевозможными диаграммами Юнга веса $|\lambda| = d$, являются базисами в Λ_d, а симметрические функции p_λ составляют базис векторного пространства $\mathbb{Q} \otimes \Lambda_d$ симметрических функций с рациональными коэффициентами. Таким образом, Λ_d является свободным модулем *конечного* ранга, равного количеству диаграмм Юнга веса d. Это количество принято обозначать $p(d)$ и называть *числом разбиений* натурального числа d. Произведение симметрических функций степеней d_1 и d_2 является симметрической функцией степени $d_1 d_2$, так что прямая сумма $\Lambda = \bigoplus_{d\geqslant 0} \Lambda_d$ является градуированным кольцом. Оно называется *кольцом симметрических функций*. Все доказанные выше соотношения между функциями m_λ, s_λ, e_λ, h_λ и рекурсивные выражения p_i через e_j и h_j являются тождествами в кольце Λ, а выражения h_i и e_i через p_λ — тождествами в кольце $\mathbb{Q} \otimes \Lambda$ симметрических функций с рациональными коэффициентами.

§5. Исчисление массивов, таблиц и диаграмм

5.1. Массивы и элементарные операции над ними. Зафиксируем два конечных упорядоченных множества $I = \{1, \dots, n\}$ и $J = \{1, \dots, m\}$ из n и m элементов и будем рассматривать прямоугольные таблицы из n столбцов и m строк, занумерованных элементами I и J соответственно. Такую таблицу a мы будем называть *массивом* и размещать в *первом* квадранте декартовой системы координат так, чтобы элементы из I росли слева направо по горизонтальной оси, а элементы из J росли снизу вверх по вертикальной оси. Содержимое $a(i,j)$ клетки с координатами (i,j) у нас всегда будет целым неотрицательным числом, которое стоит воспринимать как «количество» или «массу». Весь массив удобно представлять себе как набор шариков одинаковой массы, наделённых двумя группами признаков и в соответствии с этим разложенных по ячейкам массива. Мы никогда не будем проделывать с величинами $a(i,j)$ вычисления, но будем перекладывать шарики из ячейки в ячейку, меняя тем самым их принадлежность к тому или иному признаку каждой из двух групп и соответственно меняя значения $a(i,j)$.

С массивом a связан *столбцовый вес* (или *I-вес*)

$$w^I = \Big(\sum_j a(1,j)\,,\ \sum_j a(2,j)\,,\ \dots\ ,\ \sum_j a(n,j) \Big) \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}\,. \tag{5-1}$$

Это n-мерный целочисленный вектор, i-тая координата которого равна общему количеству шариков в i-том столбце. Аналогично определяется *строчный вес* (или *J-вес*)

$$w^J = \Big(\sum_i a(i,1)\,,\ \sum_i a(i,2)\,,\ \dots\ ,\ \sum_i a(i,m) \Big) \in \mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}\,. \tag{5-2}$$

Массивы можно транспонировать относительно диагонали $i = j$:

$$a \mapsto a^t \ :\ a^t(i,j) = a(j,i)\,. \tag{5-3}$$

На множестве $\mathcal{M}$ всех массивов действуют четыре набора *уплотняющих операций*

$$D_j\,,\quad U_j\,,\quad L_i\,,\quad R_i\,,\quad \text{где } 1 \leqslant i \leqslant n-1,\ 1 \leqslant j \leqslant m-1.$$

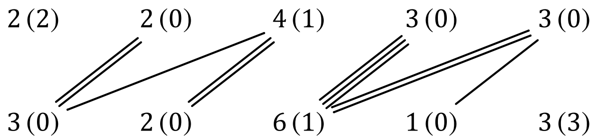
При применении любой из этих операций к данному массиву $a \in \mathcal{M}$ массив a либо никак не меняется, либо ровно один его шарик перемещается ровно на одну клетку вниз (Down), вверх (Up), влево (Left) или вправо (Right) в соответствии с обозначением для операции.

5.1.1. Вертикальные операции $\boldsymbol{D_j}$ и $\boldsymbol{U_j}$ перемещают один шар по вертикали в пределах соседних j-й и $(j+1)$-й строк или ничего не делают. Чтобы узнать, какой именно шар следует передвинуть или убедиться в том, что такого шара нет, следует вначале установить между этими строками *устойчивое паросочетание*[1]. Делается это следующим образом.

Будем последовательно перебирать шары в $(j+1)$-й строке двигаясь слева направо и либо назначать им партнёров в j-й строке, либо объявлять *свободными*. Пусть очередной шар $\boldsymbol{ш}$ лежит в клетке $(i, j+1)$. Его партнёром называем *самый правый* шар из тех, что лежат в j-й строке *строго левее* i-го столбца и ещё не назначены никому партнёрами. Если таких шаров нет, шар $\boldsymbol{ш}$ объявляется свободным. После того, как все шары $(j+1)$-й строки будут разделены на свободные

[1] По-английски: *stable matching*.

и имеющие партнёров, все шары j-й строки, не являющиеся ничьими партнёрами, также объявляются свободными. Вот пример такого паросочетания (в скобках указано число свободных шаров):



(5-4)

Операция D_j опускает на одну клетку вниз самый правый свободный шар $(j+1)$-й строки или ничего не делает, если свободных шаров в $(j+1)$-й строчке нет. Операция U_j поднимает на одну клетку вверх самый левый свободный шар j-й строки или ничего не делает, если в j-й строке нет свободных шаров. Так, в примере (5-4) операция D_j (соотв. U_j) опускает вниз (соотв. поднимает вверх) верхний (соотв. нижний) свободный шар в третьей колонке.

Если операция изменяет массив, мы будем говорить, что она действует на этот массив *эффективно*. Из конструкции устойчивого паросочетания видно, что все свободные шары j-й строки лежат нестрого правее свободных шаров $(j+1)$-й строки, и когда операция D_j действует на массив a эффективно, опущенный ею шар становится самым левым свободным шаром j-й строки в устойчивом паросочетании между преобразованными строками. Поэтому операция U_j, применённая к массиву $D_j a$ поднимет этот опущенный шар назад, т. е. $U_j D_j a = a$ всякий раз, когда D_j действует на a эффективно. Аналогично, если U_j действует эффективно, то $D_j U_j a = a$. Говоря неформально, набор вертикальных операций D, U образует структуру, близкую к групповой — исходный массив a однозначно восстанавливается из результата применения к нему слова $D = D_{j_1} \dots D_{j_k}$ по формуле $a = U_{j_k} \dots U_{j_1} D_{j_1} \dots D_{j_k} a$ при условии, что каждая буква D_j действует эффективно. Мы будем называть такие D-слова *a-эффективными* или просто *эффективными*, если понятно, о каком a идёт речь.

5.1.2. Горизонтальные операции L_i и R_i определяются симметричным образом: они действуют в i-м и $(i+1)$-м столбцах и превращаются в операции D и U при транспонировании массива, т. е. $L_i(a) = \left(D_i(a^t)\right)^t$ и $R_i(a) = \left(U_i(a^t)\right)^t$.

Упражнение 5.1. Проговорите это определение явно: объясните, как установить устойчивое паросочетание между i-м и $(i+1)$-м столбцом, и укажите какой именно шар перемещают горизонтальные операции R_i и L_i.

Отметим, что операции D, L сохраняют столбцовый вес, а операции R, L — строчный.

Лемма 5.1 (лемма о коммутировании)
Каждая из горизонтальных операций L_i, R_i перестановочна с каждой из вертикальных операций D_j, U_j.

Доказательство. Мы покажем, что D_j и U_j перестановочны с L_i — остальные случаи разбираются аналогично. Пусть действие операции L_i заключается в перемещении шара ***ш*** на одну клетку влево. Достаточно убедиться, что устойчивое паросочетание между $(j+1)$-й и j-й строками можно организовать так, что после перемещения шара ***ш*** связанными в пары будут ровно те же самые шары, что и до его перемещения. Это очевидно, когда ***ш*** лежит вне $(j+1)$-й и j-й строк. Рассмотрим оставшиеся два случая.

Пусть ***ш*** лежит в $(j+1)$-й строчке, т. е. в клетке $(i+1, j+1)$, как на левом из рис. 5◊1. Тогда все шары из клетки (i, j) имеют партнёров в клетке $(i+1, j+1)$, иначе шар ***ш*** получил бы себе партнёра в клетке (i, j) в паросочетании между i-м и $(i+1)$-м столбцом. Поэтому, если в строчном паросочетании у шара *ш* был партнёр, то он был строго левее клетки (i, j), а значит, останется партнёром после перемещения *ш* на клетку влево. А если партнёра у *ш* не было, то он и не появится. Таким образом, при перемещении *ш* строчное паросочетание не изменяется.

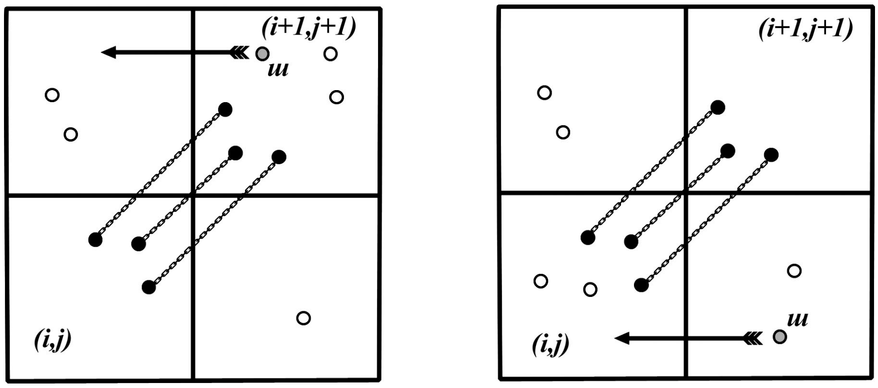


Рис. 5⋄1. Действие L_i не меняет устойчивого вертикального паросочетания.

Пусть теперь *ш* лежит в j-й строчке, как на правом из рис. 5⋄1. Поскольку он является самым верхним свободным шаром в столбцовом паросочетании, все шары из клетки $(i+1, j+1)$ имеют партнёров в клетке (i, j). Но тогда и в строчном паросочетании все шары из $(i+1, j+1)$-й клетки имеют партнёров в клетке (i, j). Поэтому если после перемещения на клетку влево у шара *ш* имеется партнёр в строчном паросочетании, то он находится строго правее клетки $(i+1, j+1)$, а значит, является партнёром шара *ш* и до его перемещения. А если у перемещённого шара *ш* нет партнёра в строчном паросочетании, то его не было и до перемещения. □

Следствие 5.1
Слово H, составленное из горизонтальных операций, тогда и только тогда эффективно действует на массив a, когда оно эффективно действует на любой массив, получающийся из a вертикальными операциями. Симметричным образом, слово V, составленное из вертикальных операций, эффективно действует на a если и только если оно эффективно действует на любой массив, получающийся из a горизонтальными операциями.

Доказательство. Мы докажем первое утверждение, второе получается из него транспонированием. Достаточно проверить, что для любых i, j операция L_i эффективно действует на a тогда и только тогда, когда она эффективно действует на $D_j a$, и только тогда, когда она эффективно действует на $U_j a$. Если $L_i a = a$, то $L_i D_j a = D_j L_i a = D_j a$, и $L_i U_j a = U_j L_i a = U_j a$. Наоборот, если $L_i a \neq a$, то i-тая компонента столбцового веса $w^I(L_i a)$ будет строго больше i-й компоненты $w^I(a)$, а так как D_j и U_j не меняют столбцовый вес, то $L_i D_j a = D_j L_i a \neq D_j a$, и $L_i U_j a = U_j L_i a \neq U_j a$. □

5.2. Уплотнение массивов. Будем называть массив D-, L-, R- или U-*плотным* (т. е. плотным вниз, влево, вправо или вверх), если все элементарные операции соответствующего типа действуют на него тождественно. Применение к произвольному массиву достаточно большого числа операций одного из типов приводит к плотному в соответствующую сторону массиву. Такое уплотнение, как правило, можно производить многими разными способами. На рис. 5⋄2 на стр. 50 показаны два пути уплотнения достаточно произвольного массива 3×2. Обратите внимание, что результат уплотнения оказался не зависящим от способа уплотнения. Мы докажем это фундаментальное свойство уплотнений в предл. 5.1, но прежде сделаем одно важное замечание о связи массивов с диаграммами Юнга.

$$\begin{tikzcd}
& \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \arrow[dl, "D_1"'] \arrow[dr, "D_2^3"] & \\
\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} \arrow[d, "D_2^4"'] & & \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline 4 & 1 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \arrow[d, "D_1^4"] \\
\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0 \\ \hline 3 & 2 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} \arrow[dr, "D_1^3"'] & & \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 5 & 2 \\ \hline \end{array} \arrow[dl, "D_2"] \\
& \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 \\ \hline 5 & 2 \\ \hline \end{array} &
\end{tikzcd}$$

Рис. 5◇2. Два пути уплотнения вниз.

5.2.1. Биплотные массивы и диаграммы Юнга. Из сл. 5.1 вытекает, что при действии вертикальных операций на плотный влево или вправо массив этот массив будет оставаться плотным в ту же сторону. То же самое справедливо для действия горизонтальных операций на массив, который плотен вниз или вверх. Поэтому любой массив можно сделать плотным одновременно в каком-нибудь вертикальном и в каком-нибудь горизонтальном направлении. Мы будем называть такие массивы DL-плотными, DR-плотными, и т. п. Поскольку далее мы будем заниматься в основном DL-уплотнениями, условимся называть просто *биплотными* массивы, плотные одновременно *вниз* и *влево*. Все шары в биплотном массиве лежат лишь в клетках главной диагонали $i = j$, причём их количества нестрого убывают с ростом i. Поэтому столбцовый вес биплотного массива равен строчному и представляет собой диаграмму Юнга $\lambda = w^I(b) = w^J(b)$, т. е. биплотные массивы b взаимно однозначно соответствуют диаграммам Юнга[1]. Диаграмма Юнга, отвечающая биплотному массиву, который получается DU-уплотнением данного массива a, называется *формой* массива a и обозначается $\Phi(a)$. Докажем теперь, что это понятие корректно.

Предложение 5.1
Результат D- , L- , R- или U- уплотнения не зависит от выбора последовательности уплотняющих операций.

Доказательство. Мы рассмотрим только случай D-уплотнения. Если массив a плотен влево, то результат его D-уплотнения — это биплотный массив, отвечающий диаграмме Юнга $w^I(a)$. Поскольку $w^I(a)$ не меняется при вертикальных уплотняющих операциях, результат D-уплотнения

[1]Здесь и далее в этом параграфе мы отождествляем между собою две конечных последовательности неотрицательных целых чисел, получающиеся одна из другой приписыванием справа любого числа нулей. Например, мы считаем равными диаграммы $(2, 1, 1)$ и $(2, 1, 1, 0, 0, 0)$.

L-плотного массива не зависит от способа уплотнения. Пусть теперь a произволен. Зафиксируем какое-нибудь слово $L = L_{i_k} \dots L_{i_1}$, эффективно уплотняющее a влево до L-плотного массива $a' = La$. Тогда для любого такого слова $D = D_{j_m} \dots D_{j_1}$, что Da плотен вниз, действие L на Da тоже будет эффективным, а массив $LDa = DLa$ будет биплотен[1]. Таким образом, мы можем записать Da как $L^{-1}DLa$. Поскольку массив DLa является D-уплотнением L-плотного массива La, он по уже доказанному не зависит от выбора уплотняющего слова D, а значит и массив $Da = L^{-1}DLa$ тоже не зависит от выбора D. □

5.2.2. Плотные массивы и таблицы Юнга. Из любого массива высоты m и ширины n можно изготовить m слов (по одному слову из каждой строки массива), записанных алфавитом $\{1, \dots, n\}$. Делается это при помощи процедуры, которая называется *строчной развёрткой* массива и состоит в следующем. Интерпретируем все шарики массива как буквы, равные номеру того столбца, где стоит шарик. После этого пройдём по каждой строке слева направо, выписывая подряд все встречающиеся буквы. В результате j-тая строка массива развернётся в слово

$$\underbrace{1 \dots 1}_{a(1,j)} \underbrace{2 \dots 2}_{a(2,j)} \dots \dots \dots \underbrace{n \dots n}_{a(n,j)} .$$

Получающиеся m слов запишем друг под другом в столбик, *сверху вниз*[2], выровняв их по левому краю. Например:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&0&1\\\hline 0&0&1&1&0\\\hline 0&4&0&0&0\\\hline 3&1&0&0&1\\\hline\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{lllll} 1&1&1&2&5\\ 2&2&2&2&\\ 3&4&&&\\ 5&&&& \end{array}, \qquad \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 2&0&3&0&1\\\hline 0&2&1&1&0\\\hline 0&1&0&2&3\\\hline 1&1&2&0&1\\\hline\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{llllll} 1&1&3&3&3&5\\ 2&2&3&4&&\\ 2&4&4&5&5&5\\ 1&2&3&3&5& \end{array}.$$

Очевидно, что буквы в каждом слове строчной развёртки нестрого возрастают. Условие плотности массива вниз (как в левом примере выше) означает, что под каждой буквой «i» в j-том слове, т. е. под шариком, пришедшим из клетки $a(i,j)$, стоит строго большая, чем «i», буква из $(j+1)$-го слова — партнёр этого шарика при устойчивом паросочетании между j-й и $(j+1)$-й строками. Следовательно, длины слов строчной развёртки плотного вниз массива нестрого убывают сверху вниз, т. е. образуют диаграмму Юнга, а буквы $\{1, \dots, n\}$ заполняют эту диаграмму нестрого возрастая по строкам и *строго* возрастая по столбцам. Такие заполнения данной диаграммы λ называются *таблицами Юнга* формы λ на алфавите $I = \{1, \dots, n\}$. Мы доказали следующий комбинаторный факт:

Лемма 5.2
Строчная развёртка задаёт биекцию между плотными вниз массивами размера $m \times n$ и таблицами Юнга из не более m строк на алфавите $\{1, \dots, n\}$. □

5.2.3. Плотные массивы и тексты Яманучи. L-плотность массива a можно воспринимать как D-плотность транспонированного массива a^t и формулировать в терминах столбцовой развёртки: плотные влево массивы размера $m \times n$ биективно соответствуют таблицам Юнга из не более n строк в алфавите J. Полезно, однако, охарактеризовать L-плотность в терминах *строчной* развёртки. Для этого будем читать слова строчной развёртки L-плотного массива a *справа налево* одно за другим, сверху вниз. Условие плотности влево означает тогда, что в любом начальном куске получающейся последовательности букв единиц будет не меньше, чем двоек,

[1]Ибо применение L сохраняет свойство массива Da быть плотным вниз, а применение D сохраняет свойство массива La быть плотным влево.

[2]Таким образом, из нижней строки массива получается верхнее слово и т. д.

двоек — не меньше, чем троек, и т. д. для всех пар последовательных букв «i» и «$(i+1)$» из I. В комбинаторике такой текст называют *текстом Яманучи*. Например, левая из двух строчных развёрток

$$\begin{matrix} 1 & & \\ 1 & 2 & \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & \end{matrix}\;, \qquad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \\ 2 & 3 & 3 & \\ 1 & 2 & & \end{matrix}$$

является текстом Яманучи, а правая — нет. Итак, нами установлена

Лемма 5.3
Строчная развёртка задаёт биекцию между плотными влево массивами размера $m \times n$ и текстами Яманучи из не более m слов в алфавите $\{1, \dots, n\}$. □

5.2.4. Послойное произведение. Если заданы два отображения множеств $\varphi : X \to Z$ и $\psi : Y \to Z$, то дизъюнктное объединение прямых произведений их слоёв над всеми точками $z \in Z$ обозначается

$$X \underset{Z}{\times} Y \stackrel{\text{def}}{=} \bigsqcup_{z \in Z} \varphi^{-1}(z) \times \psi^{-1}(z)$$

и называется *послойным* (или *расслоенным*) произведением множеств X и Y над Z по отображениям φ и ψ. Послойные проекции $\pi_X : (x, y) \mapsto x$ и $\pi_Y : (x, y) \mapsto y$ включаются в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & X \underset{Z}{\times} Y \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[dr, "\pi_Y"] & \\ X \arrow[dr, "\varphi"'] & & Y \arrow[dl, "\psi"] \\ & Z & \end{tikzcd} \tag{5-5}$$

которая называется *декартовым квадратом*. Она универсальна в том смысле, что для любого другого коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\xi"'] \arrow[dr, "\eta"] & \\ X \arrow[dr, "\varphi"'] & & Y \arrow[dl, "\psi"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

имеется единственное такое отображение $\alpha : M \to X \underset{Z}{\times} Y$, что $\xi = \pi_X \circ \alpha$ и $\eta = \pi_Y \circ \alpha$.

Упражнение 5.2. Убедитесь в этом и покажите, что универсальное свойство определяет верхний угол квадрата (5-5) однозначно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного со всеми стрелками квадрата.

Теорема 5.1
Множество всех массивов $\mathcal{M}$ является послойным произведением множеств плотных влево массивов $\mathcal{L}$ и плотных вниз массивов $\mathcal{D}$ над множеством биплотных массивов $\mathcal{B}$ по отображениям

уплотнения влево и уплотнения вниз, т. е. коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{M} \arrow[dl, "L"'] \arrow[dr, "D"] & \\
\mathcal{L} \arrow[dr, "D"'] & & \mathcal{D} \arrow[dl, "L"] \\
& \mathcal{B} &
\end{tikzcd}$$

в котором стрелки L и D переводят массив в его уплотнения влево и вниз, является декартовым.

Доказательство. По предл. 5.1 стрелки L и D корректно определены и перестановочны друг с другом. Надо показать, что отображение $\mathcal{M} \to \mathcal{L} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{D}$, сопоставляющее массиву a пару (La, Da) со свойством $DLa = LDa \in \mathcal{B}$, взаимно однозначно. Докажем его инъективность. Пусть массивы a и a' таковы, что $La = La'$ и $Da = Da'$, а слово Λ эффективно уплотняет массив $Da = Da'$ влево. Тогда Λ эффективно действует на a и a' так, что $\Lambda a = La = La' = \Lambda a'$, откуда $a = \Lambda^{-1}La = \Lambda^{-1}La' = a'$. Теперь докажем сюрьективность. Для любой пары массивов (a_ℓ, a_d), в которой a_ℓ плотен влево, a_d плотен вниз, и $Da_\ell = La_d$, рассмотрим слово Λ, эффективно уплотняющее a_d влево до La_d. Обратное слово Λ^{-1} эффективно действует на $La_d = Da_\ell$, а значит, и на a_ℓ. Массив $a = \Lambda^{-1}a_\ell$ таков, что $La = a_\ell$ и $Da = D\Lambda^{-1}a_\ell = \Lambda^{-1}Da_\ell = \Lambda^{-1}La_d = a_d$. □

Пример 5.1 (графики отображений и стандартные таблицы)
График отображения множеств $a : I \to J$ — это массив, в каждом столбце которого имеется ровно один шарик. По теор. 5.1 такие массивы взаимно однозначно параметризуются парами (a_ℓ, a_d) в которой a_ℓ плотен влево, a_d плотен вниз, причём оба этих массива имеют одинаковую форму $Da_\ell = La_d$, и $w^I(a_d) = (1, \dots, 1)$. Согласно n° 5.2.2, каждая такая пара однозначно описывается следующим набором данных:

- форма $\Phi(a)$ массива a, т. е. диаграмма Юнга $\lambda = DLa$ веса $|\lambda| = n$
- строчная развёртка D-уплотнения a_d массива a, т. е. таблица Юнга формы λ на алфавите I, в которой каждая буква встречается ровно один раз
- столбцовая развёртка L-уплотнения[1] a_ℓ массива a, т. е. таблица Юнга формы λ на алфавите J.

Число всех таблиц Юнга формы λ на m-буквенном алфавите принято обозначать через $d_\lambda(m)$. Таблицы формы λ заполненные без повторений числами от 1 до $|\lambda|$ называются *стандартными таблицами* формы λ, и их число обозначается просто через d_λ. Так как всего имеется m^n отображений $I \to J$, мы получаем соотношение

$$\sum_\lambda d_\lambda \cdot d_\lambda(m) = m^n \,, \tag{5-6}$$

где суммирование идёт по всем n-клеточным диаграммам Юнга и числа $d_\lambda(m)$ отличны от нуля только для диаграмм из $\leqslant m$ строк. В ситуации, когда $\#J = \#I = n$ и рассматриваются только взаимно однозначные отображения $I \xrightarrow{\sim} J$, предыдущая конструкция устанавливает биекцию

[1]Т. е. строчная развёртка транспонированного массива a_ℓ^t.

между $n!$ элементами симметрической группы S_n и парами стандартных таблиц одинаковой формы веса n, откуда

$$\sum_\lambda d_\lambda^2 = n!\,, \tag{5-7}$$

где сумма идёт о всем n-клеточным диаграммам. Эта биекция индуцирует взаимно однозначное соответствие между инволютивными перестановки[1] $\sigma \in S_n$ и самосопряжёнными массивами $a = a^t$, которым в по теор. 5.1 отвечают пары одинаковых стандартных таблиц. Поэтому

$$\sum_\lambda d_\lambda = \#\{\sigma \in S_n \mid \sigma^2 = 1\}\,. \tag{5-8}$$

5.3. Действие симметрической группы на DU-множествах. Всякое множество массивов, которое переводится в себя вертикальными операциями D и U, называется *DU-множеством*. Гомоморфизмы DU-множеств — это отображения, перестановочные с действием операций D и U на этих множествах. DU-множество, на котором операции D и U действуют транзитивно, называется *DU-орбитой*. DU-орбиты взаимно однозначно соответствуют плотным вниз массивам. Орбита O такого массива a_d состоит из всевозможных массивов, которые можно получить из a_d эффективными U-словами. Мы будем называть a_d *нижним концом* орбиты O.

Лемма 5.4
Объединения, пересечения и разности DU-множеств также являются DU-множествами. Всякое DU-множество является дизъюнктным объединением DU-орбит.

Доказательство. Не вполне очевидно, разве что, утверждение про разности. Пусть A' и A'' DU-инвариантны и $a' \in A' \smallsetminus A''$. Если $D_j a' \in A''$, то D_j действует эффективно, и тогда $a' = U_j D_j a'$ тоже лежит в A''. □

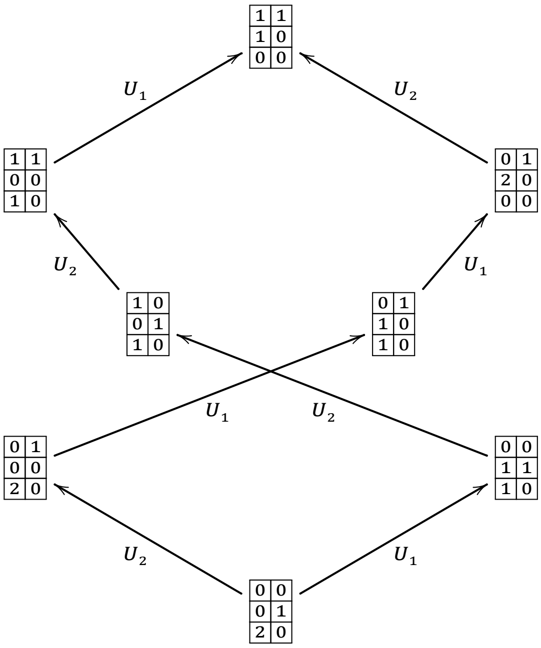


Рис. 5◇3. Стандартная DU-орбита $O_{(2,1)}$.

[1]Т. е. такие, что $\sigma^2 = 1$.

5.3.1. Стандартные орбиты. DU-орбиты O_λ биплотных массивов λ называются *стандартными*. Например, при $m = 3$ стандартная орбита $O_{(2,1)}$, отвечающая диаграмме – таблице – массиву

$$\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline \\ \cline{1-1}\end{array} \quad - \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad - \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 \\ \hline\end{array}$$

состоит из восьми массивов, представленных на рис. 5◇3.

Из теоремы о биекции вытекает, что уплотнение влево задаёт изоморфизм любой DU-орбиты O со стандартной орбитой O_λ, нижний конец которой является биуплотнением нижнего конца орбиты O. Мы будем называть диаграмму λ *типом* орбиты O. Количество орбит типа λ в данном DU-множестве M равно количеству плотных вниз массивов строчного веса λ, имеющихся в M.

5.3.2. Действие симметрической группы $S_m = \mathrm{Aut}(J)$. На каждом DU-множестве массивов M имеется действие элементарных транспозиций $\sigma_j = (j, j+1)$, порождающих симметрическую группу S_m перестановок вертикального множества индексов J. Оно определяется следующим образом. Пусть после установления устойчивого паросочетания между j-й и $(j+1)$-й строками в них оказалось s_j и s_{j+1} свободных шаров соответственно. Положим

$$\sigma_j = D_j^{s_{j+1}-s_j} = U_j^{s_j - s_{j+1}}\,. \tag{5-9}$$

Подробнее эту процедуру можно описать так. Свернём массив в вертикальный цилиндр, приклеив правую границу n-го столбца к левой границе первого, и продолжим устойчивое паросочетание по кругу, т. е. назначим в пару самому правому нижнему свободному шару самый левый свободный верхний и т. д. В результате останется ровно $|s_{j+1} - s_j|$ свободных шаров и все они будут располагаться или только в верхней или только в нижней строке — там где их вначале было больше. Операция σ_j просто передвигает их по вертикали в другую строку или ничего не делает, если $s_j = s_{j+1}$. В частности, действие σ_j на строчный вес w^J состоит в перестановке j-й и $(j+1)$-й координаты.

Из предыдущего описания видно, что $\sigma_j^2 = \mathrm{Id}$, а также, что σ_j *коммутирует с циклическими перестановками столбцов*. Очевидно также, что σ_j перестановочна с горизонтальными операциями R, L и со всеми σ_k с $|k - j| \geqslant 2$. Чтобы действие σ_j непротиворечиво продолжалось на всю симметрическую группу S_m достаточно проверить *соотношения треугольника* $\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j = \sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}$. При этом можно считать массив трёхстрочным. Левое уплотнение L и циклическая перестановка столбцов C превращает любой трёхстрочный массив в одностолбцовый:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline * & * & * & * & * & * \\ \hline * & * & * & * & * & * \\ \hline * & * & * & * & * & * \\ \hline\end{array} \xrightarrow{L} \begin{array}{|c|c|c|}\hline * & * & * \\ \hline * & * & 0 \\ \hline * & 0 & 0 \\ \hline\end{array} \xrightarrow{C} \begin{array}{|c|c|c|}\hline * & * & * \\ \hline * & 0 & * \\ \hline 0 & 0 & * \\ \hline\end{array} \xrightarrow{L} \begin{array}{|c|c|c|}\hline * & * & 0 \\ \hline * & 0 & 0 \\ \hline * & 0 & 0 \\ \hline\end{array} \xrightarrow{C} \begin{array}{|c|c|}\hline * & * \\ \hline 0 & * \\ \hline 0 & * \\ \hline\end{array} \xrightarrow{L} \begin{array}{|c|c|}\hline * & 0 \\ \hline * & 0 \\ \hline * & 0 \\ \hline\end{array}$$

на который σ_j и σ_{j+1} действуют перестановками строк, и соотношение треугольника, таким образом, выполняется.

5.4. Полиномы Шура. Интерпретируем все шары в j-й строке как переменные x_j и сопоставим каждому массиву a моном $x^a \overset{\text{def}}{=} x_1^{w_1^J(a)} x_2^{w_2^J(a)} \dots x_m^{w_m^J(a)}$, равный произведению всех его шаров. Сумма этих мономов по всем массивам данного DU-множества M обозначается

$$s_M(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{a \in M} x^a \in \Bbbk[x_1, \dots, x_m]$$

и называется (*комбинаторным*) *многочленом Шура* DU-множества M. Симметрическая группа S_m переставляет координаты весового вектора и действует на мономы x^a перестановками переменных. Таким образом, все многочлены Шура являются симметрическими.

Поскольку каждое DU-множество M является объединением непересекающихся орбит, а всякая орбита изоморфна стандартной орбите O_λ, произвольный полином Шура является линейной комбинацией с неотрицательными целыми коэффициентами *стандартных* многочленов Шура $s_\lambda(x)$, отвечающих биплотным массивам (диаграммам Юнга) λ:

$$s_M(x) = \sum_{\lambda \in \Phi(M)} c_M^\lambda \cdot s_\lambda(x)\,, \tag{5-10}$$

где суммирование происходит по всем формам λ массивов из M, и коэффициент c_M^λ равен числу DU-орбит, изоморфных O_λ, т. е. количеству всех плотных вниз массивов J-веса λ в M. Согласно n° 5.2.2, элементы стандартной орбиты O_λ суть всевозможные L-плотные массивы формы λ, и столбцовая развёртка устанавливает биекцию между такими массивами и таблицами Юнга формы λ в алфавите $\{x_1, \dots, x_m\}$. Таким образом, стандартный полином Шура имеет вид

$$s_\lambda(x) = \sum_\eta K_{\lambda,\eta} \cdot x^\eta = \sum_\eta K_{\lambda,\eta} \cdot x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} \, \dots \, x_m^{\eta_m}\,, \tag{5-11}$$

где $\eta \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}^m$ пробегает m-мерные целочисленные векторы с неотрицательными координатами, а коэффициент $K_{\lambda,\eta}$ равен числу таблиц формы λ, заполненных η_1 единицами, η_2 двойками и т. д. Мы будем говорить, что такая таблица имеет *состав* η.

Например, при $m = 3$ из представленной на рис. 5◇3 на стр. 54 схемы получаем

$$s_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + 2\, x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2\,.$$

Число $K_{\lambda,\eta}$ таблиц формы λ и состава η называется *числом Костки*. Отметим, что $K_{\lambda,(1^{|\lambda|})} = d_\lambda$ равно числу стандартных таблиц формы λ, все $K_{\lambda,\lambda} = 1$, и $K_{\lambda,\eta} \neq 0$ только когда при каждом $j = 1, 2, 3, \dots$ выполняется неравенство $\lambda_1 + \ldots + \lambda_j \geqslant \eta_1 + \ldots + \eta_j$. В этой ситуации говорят, что диаграмма λ *доминирует* вектор η и пишут $\lambda \trianglerighteq \eta$.

Упражнение 5.3. Покажите, что отношение доминирования задаёт на множестве диаграмм Юнга заданного веса n частичный порядок, полный при $n \leqslant 5$, и приведите пример двух несравнимых между собою диаграмм Юнга веса 6.

Из (5-11) видно, что стандартные полиномы Шура $s_\lambda(x_1, \dots, x_m)$, где λ пробегает все диаграммы Юнга из не более m строк, выражаются через базисные мономиальные симметрические многочлены m_μ при помощи унитреугольной матрицы

$$s_\lambda = \sum_{\mu \trianglelefteq \lambda} K_{\lambda,\mu} \cdot m_\mu\,. \tag{5-12}$$

Поскольку такая матрица обратима над $\mathbb{Z}$, многочлены s_λ тоже образуют базис $\mathbb{Z}$-модуля симметрических функций.

Пример 5.2 (полные и элементарные симметрические многочлены)
Многочлен $s_{(k)}(x)$, отвечающий DU-орбите одностолбцового массива формы

$$\lambda = (k) = (k, 0, \dots, 0) = \underbrace{\square\square \dots \square\square}_{k}\,,$$

представляет собой *полный симметрический многочлен* $h_k(x)$ — сумму всех мономов общей степени k от $x_1, \dots, x_n$. В самом деле, столбцовая развёртка плотного влево массива из орбиты $O_{(k)}$ — это однострочная таблица Юнга, и для любого содержания η веса $|\eta| = k$ имеется ровно одна такая таблица[1]. Эквивалентно: DU-орбита одностолбцового массива веса k образована всеми возможными расположениями k шариков по m ящикам столбца.

Симметричным образом, многочлен $s_{(1^k)}$ DU-орбиты k-столбцового массива формы

$$\lambda = 1^k = (\underbrace{1, \dots, 1}_{k}) = \left.\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \vdots \\ \hline \\ \hline\end{array}\right\} k$$

это *элементарный симметрический многочлен* $e_k(x)$, т. е. сумма всех линейных по каждой переменной мономов общей степени k от $x_1, \dots, x_n$. Причина та же, только теперь столбцовая развёртка каждого плотного влево массива из орбиты O_{1^k} представляет собою одностолбцовую таблицу Юнга, в которой все номера переменных строго возрастают сверху вниз.

Пример 5.3 (тождества Коши и Шура.)
Интерпретируем каждый шарик в клетке (i, j) массива a как билинейный моном $x_i y_j$ от двух наборов переменных $x = x^I = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = y^J = (y_1, \dots, y_m)$. Перемножая вместе все шарики массива a, мы получим (в обозначениях n° 5.4) моном $x^{a^t} y^a$. По теореме о биекции из теор. 5.1 сумма таких мономов по всем массивам a фиксированной формы $\lambda = \Phi(a)$ равна произведению многочленов Шура $s_\lambda(x) \cdot s_\lambda(y)$, и значит сумма мономов $x^{a^t} y^a$ по вообще всем массивам a формата $I \times J$ равна сумме таких произведений по всем диаграммам Юнга λ. С другой стороны, сумма всех мономов $x^{a^t} y^a$ по всем массивам a получается при раскрытии скобок в произведении геометрических прогрессий $\prod_{I \times J} \left(1 + x_i y_j + (x_i y_j)^2 + (x_i y_j)^3 + \dots\right)$, поскольку выбирая из (i, j)-го сомножителя слагаемое $(x_i y_j)^{a(i,j)}$, мы получаем моном $x^{a^t} y^a$, отвечающий массиву a. Мы получили *тождество Коши*:

$$\sum\nolimits_\lambda s_\lambda(x) \cdot s_\lambda(y) = \prod\nolimits_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j} \,. \tag{5-13}$$

Если взять $I = J$, ограничиться только симметричными массивами $a = a^t$, положить $x = y = \xi$, извлечь из каждого полученного a-монома корень $\xi^a = \sqrt{\xi^{a^t} \xi^a}$ и просуммировать по всем симметричным массивам a заданной формы λ, мы получим многочлен $s_\lambda(\xi)$, а суммируя по вообще всем симметричным массивам a — сумму $\sum_\lambda s_\lambda(\xi)$. Тот же ответ даст раскрытие скобок в произведении $\prod_k (1 + \xi_k + (\xi_k)^2 + (\xi_k)^3 + \dots) \cdot \prod_{i<j} (1 + \xi_i \xi_j + (\xi_i \xi_j)^2 + (\xi_i \xi_j)^3 + \dots)$. Записывая геометрические прогрессии рациональными дробями, получаем *тождество Шура*:

$$\sum\nolimits_\lambda s_\lambda(\xi) = \prod\nolimits_i \frac{1}{1 - \xi_i} \cdot \prod\nolimits_{i<j} \frac{1}{1 - \xi_i \xi_j} \,. \tag{5-14}$$

5.5. Правило Литтлвуда – Ричардсона. Произведение $s_M(x) \cdot s_N(x)$ полиномов Шура DU-множеств M и N является полиномом Шура для DU-множества, состоящего из всевозможных массивов вида ab размера $(2n) \times m$, получающихся приписыванием какого-нибудь массива $b \in N$ справа к какому-нибудь массиву[2] $a \in M$. Множество таких массивов естественно обозначить

[1] В которой все переменные упорядочены по нестрогому возрастанию номеров.

[2] При этом вертикальный J-алфавит не меняется, а горизонтальный I-алфавит заменяется дизъюнктным объединением I-алфавитов массивов a и b.

через $M \otimes N$ и называть *тензорным произведением* DU-множеств M и N. Итак,

$$s_M(x) \cdot s_N(x) = \left(\sum\nolimits_{a \in M} x^a\right) \cdot \left(\sum\nolimits_{b \in N} x^b\right) = \sum\nolimits_{a \in M, b \in N} x^{ab} = \sum\nolimits_{c \in M \otimes N} x^c .$$

Поскольку стандартные полиномы s_λ образуют базис модуля симметрических функций, произведение $s_\lambda s_\mu$ можно записать как

$$s_\lambda \cdot s_\mu = \sum\nolimits_\nu c^\nu_{\lambda\mu} \cdot s_\nu . \tag{5-15}$$

Теорема 5.2 (правило Литтлвуда – Ричардсона)
Суммирование в формуле (5-15) происходит по всем диаграммам ν, получающимся добавлением $|\mu|$ клеток к диаграмме λ, а коэффициент $c^\nu_{\lambda\mu}$ равен количеству таких заполнений этих дописанных клеток μ_1 единицами, μ_2 двойками, μ_3 тройками и т. д., что вдоль строк «косой диаграммы» $\nu \smallsetminus \lambda$ числа возрастают нестрого, а вдоль столбцов — строго (как в таблице Юнга), и одновременно текст, получающееся при прочтении этой «косой диаграммы» строку за строкой справа налево сверху вниз, содержит в каждом своём начальном куске единиц не меньше, чем двоек, двоек не меньше, чем троек и т. д. (т. е. является текстом Яманучи[1]).

Упражнение 5.4. Пользуясь правилом Литтлвуда – Ричардсона, вычислите[2] $s_{(1)} \cdot s_{(1,1)}$ и $s^2_{2,1}$.

Доказательство. Мы должны подсчитать в DU-множестве $O_\lambda \otimes O_\mu$ количество DU-орбит, которые уплотняются влево до стандартной орбиты O_ν. Пусть массив ab лежит в такой орбите. Поскольку массивы a, b получены из биплотных массивов λ, μ вертикальными операторами, оба они плотны влево и имеют I-веса λ и μ соответственно. Заметим, что действие вертикальной уплотняющей операции D_j на «толстый» массив ab состоит либо в её действии отдельно на[3] b , либо в её действии отдельно на[4] a. Поэтому при уплотнении вниз «толстого» массива ab мы получим массив вида $a'b'$, в котором a' плотен вниз, и оба массива a', b' по прежнему плотны влево и имеют I-веса λ, μ. Таким образом, a' биплотен формы λ. Если форма массива $a'b' = \lambda b'$ равна ν, то строки горизонтальной развёртки массива b' — это выровненные по левому краю строки «косой таблицы» $\nu \smallsetminus \lambda$, заполненные именно так, как требует правило Литтлвуда – Ричардсона: первое, «табличное», ограничение выражает плотность вниз «толстого» массива ab, а второе, «текстовое», ограничение выражает, согласно n° 5.2.3, плотность влево массива b'. □

Упражнение 5.5 (формулы Пьери). Выведите из теор. 5.2 *формулы Пьери*:

$$s_\lambda \cdot e_k = s_\lambda \cdot s_{(1^k)} = \sum\nolimits_\mu s_\mu \tag{5-16}$$

$$s_\lambda \cdot h_k = s_\lambda \cdot s_{(k)} = \sum\nolimits_\nu s_\nu \tag{5-17}$$

где μ и ν пробегают все диаграммы, которые можно получить приписыванием k новых клеток к диаграмме λ так, чтобы никакие две новые клетки не попали в одну строку μ и в один столбец ν.

[1] См. n° 5.2.3 на стр. 51.

[2] При этом поучительно убедиться в том, что применение теор. 5.2 к $s_{(1)} \cdot s_{(1,1)}$ и к $s_{(1,1)} \cdot s_{(1)}$ (что не всё равно) приводит к одному и тому же результату.

[3] Если самый правый свободный шар при паросочетании внутри «толстого» массива ab лежит в b, то он подавно будет самым правым свободным шаром и для паросочетания, установленного отдельно внутри b.

[4] Если в b нет свободных шаров при паросочетании внутри «толстого» массива ab.

5.5.1. Тождество Якоби – Труди. Из формулы Пьери (5-17) и формулы Пьери из сл. 4.6 на стр. 44 вытекает, что детерминантные полиномы Шура $s_\lambda = \Delta_{\delta+\lambda} / \Delta_\delta$ из сл. 4.1 на стр. 38 и комбинаторные полиномы Шура s_λ стандартных DU-орбит O_λ — это одни и те же полиномы. В самом деле, формулы Пьери позволяют однозначно выразить все многочлены Шура через многочлены h_k. Например, согласно (5-17)

$$\begin{aligned}
s_{(2,2,1)} &= s_{(2,2)}h_1 - s_{(3,2)}\\
s_{(3,2)} &= s_{(3)}h_2 - s_{(5)} - s_{(4,1)} = h_3h_2 - h_5 - s_{(4,1)}\\
s_{(2,2)} &= s_{(2)}h_2 - s_{(3,1)} - s_{(4)} = h_2^2 - h_4 - s_{(3,1)}\\
s_{(4,1)} &= s_{(4)}h_1 - s_{(5)} = h_4h_1 - h_5\\
s_{(3,1)} &= s_{(3)}h_1 - s_{(4)} = h_3h_1 - h_4
\end{aligned}$$

откуда[1] $s_{(2,2,1)} = -h_3h_2 + h_4h_1 + h_1(h_2^2 - h_1h_3)$. В общем случае, оставляя в правой части формулы (5-17) диаграмму с самой длинной нижней строкой среди всех диаграмм с наибольшим количеством строк, мы выражаем её через h_k (где k равно длине этой нижней строки) и диаграммы, имеющие то же число строк, но более короткую нижнюю строчку, или строго меньшее число строк. Далее используем убывающую индукцию по количеству строк диаграммы Юнга и длине её нижней строки. Совпадение детерминантного и комбинаторного полиномов Шура известно как *тождество Якоби – Труди*.

5.5.2. Выражение e_λ и h_λ через s_λ. Напомним, что для диаграммы Юнга μ мы обозначаем через m_i количество строк длины i в этой диаграмме и полагаем

$$\begin{aligned}
e_\mu &= e_{\mu_1} e_{\mu_2} \dots e_{\mu_r} = e_1^{m_1} e_2^{m_2} \dots e_n^{m_n}\\
h_\mu &= h_{\mu_1} h_{\mu_2} \dots h_{\mu_r} = h_1^{m_1} h_2^{m_2} \dots h_n^{m_n} ,
\end{aligned}$$

где для $k \in \mathbb{N}$ многочлены $e_k(x) = s_{(1^k)}(x_1, \dots, x_m)$ и $h_k(x) = s_{(k)}(x_1, \dots, x_m)$ суть элементарный[2] и полный[3] симметрические многочлены. Для произвольной диаграммы η многочлен $h_\eta = s_{(\eta_1)} \dots s_{(\eta_r)}$ является полиномом Шура DU-множества $O_{(\eta_1)} \otimes \dots \otimes O_{(\eta_r)}$. Орбиты формы ν в этом множестве биективно соответствуют своим нижним концам, которые в свою очередь, взаимно однозначно описываются таблицами формы ν и содержания η. Тем самым,

$$h_\eta = \sum\nolimits_\nu K_{\nu,\eta} \cdot s_\nu . \tag{5-18}$$

Многочлен $e_\eta = s_{(1^{\eta_1})} \dots s_{(1^{\eta_r})}$ — это многочлен Шура DU-множества $O_{(1^{\eta_1})} \otimes \dots \otimes O_{(1^{\eta_r})}$, каждый массив в котором имеет $|\eta|$ столбцов, разбитых на вертикальные подмассивы $a_1, \dots, a_r$ ширины $\eta_1, \dots, \eta_r$, причём в каждом столбце находится ровно один шар, и j-номера этих шаров строго возрастают внутри каждого вертикального подмассива a_i. При уплотнении вниз последнее свойство сохранится, и в результате такого уплотнения мы получим массив $a_1' \dots a_r'$, в котором шары каждого подмассива a_i' располагаются в разных строках, номера которых строго возрастают слева направо. Тем самым, каждый подмассив a_i' внесёт не более одного шара в каждую компоненту J-веса. Если суммарный J-вес при этом получится ν, то записывая в каждую строку

[1] Читателю рекомендуется проверить этот результат по формуле Джамбелли (4-25).
[2] См. n° 4.2 на стр. 38.
[3] См. n° 4.3 на стр. 39.

диаграммы ν последовательно номера i тех подмассивов a_i', которые дают вклад в эту компоненту J-веса, мы получим таблицу содержания η и формы ν^t, *сопряжённой*[1] к форме ν: в силу вышесказанного номера будут строго возрастать по строкам диаграммы ν, а поскольку массив плотен вниз, они также должны не строго возрастать по столбцам; кроме того, по построению, каждый номер i будет представлен ровно в η_i различных строчках. Итак,

$$e_\eta = \sum\nolimits_\nu K_{\nu^t,\eta} \cdot s_\nu \,. \tag{5-19}$$

Следствие 5.2

Инволюция ω из предл. 4.3, переводящая e_k и h_k друг в друга, действует на полиномы Шура по правилу $\omega(s_\lambda) = s_{\lambda^t}$, т. е. переводит друг в друга многочлены, отвечающие транспонированным диаграмм Юнга.

Доказательство. Так как многочлены s_λ образуют базис $\mathbb{Z}$-модуля симметрических функций, отображение $s_\lambda \mapsto s_{\lambda^t}$ однозначно задаёт на модуле симметрических функций $\mathbb{Z}$-линейную инволюцию. Из формул (5-18) и (5-19) следует, что эта инволюция переводит e_k в h_k и наоборот, т. е. совпадает с ω. □

Следствие 5.3 (вторая формула Джамбелли)

$$s_{\lambda^t} = \det \begin{pmatrix} e_{\lambda_1} & e_{\lambda_1+1} & \ddots & e_{\lambda_1+n-1} \\ e_{\lambda_2-1} & e_{\lambda_2} & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & e_{\lambda_{n-1}+1} \\ e_{\lambda_n-n+1} & \ddots & e_{\lambda_n-1} & e_{\lambda_n} \end{pmatrix}, \tag{5-20}$$

где по главной диагонали стоят $e_{\lambda_1}, \dots, e_{\lambda_n}$, и при движении вдоль строк слева направо индексы у e с каждым шагом увеличиваются на единицу. □

Доказательство. Применяем инволюцию ω к форм. (4-25) на стр. 43. □

5.6. Скалярное произведение на модуле симметрических функций. Введём на $\mathbb{Z}$-модуле симметрических функций[2] Λ евклидово скалярное произведение $\langle \, * \, , \, * \, \rangle$, для которого базис из полиномов Шура s_λ является ортонормальным. Из формул (5-18) и (5-12)

$$h_\lambda = \sum\nolimits_{\mu \trianglerighteq \lambda} K_{\mu,\lambda} \cdot s_\mu \,, \quad s_\mu = \sum\nolimits_{\lambda \trianglerighteq \mu} K_{\mu,\lambda} \cdot m_\lambda$$

вытекает, что $\langle \, h_\lambda \, , \, s_\mu \, \rangle = K_{\mu,\lambda} = \langle \, m_\lambda^* \, , \, s_\mu \, \rangle$, где m_λ^* — базис, евклидово двойственный к m_λ. Таким образом, $m_\lambda^* = h_\lambda$, т. е. базисы h_λ и m_λ двойственны друг другу:

$$\langle \, h_\lambda \, , \, m_\mu \, \rangle = \delta_{\lambda\mu} \,. \tag{5-21}$$

Из сл. 5.2 вытекает, что инволюция ω является ортогональным оператором.

Предложение 5.2

Многочлены Ньютона p_λ составляют ортогональный базис пространства $\mathbb{Q} \otimes \Lambda$ симметрических функций с рациональными коэффициентами и имеют скалярные квадраты $\langle \, p_\lambda \, , \, p_\lambda \, \rangle = z_\lambda$, где[3] $z_\lambda = \prod_k \left(m_k! \cdot k^{m_k} \right)$.

---

[1] Или *транспонированной*, т. е. симметрично отражённой относительно главной диагонали.

[2] См. n° 4.7 на стр. 45.

[3] Ср. с форм. (4-21) на стр. 41.

Доказательство. Выразим произведение геометрических прогрессий в правой части тождества Коши (5-13) через функции Ньютона от наборов переменных x и y:

$$\sum_{\lambda} s_\lambda(x)s_\lambda(y) = \prod_{i,j} \frac{1}{1-x_i y_j} = \prod_j H(y_j) = \prod_j \exp\left(\int_0^{y_j} P(t)\,dt\right) =$$
$$= \exp\left(\sum_j \sum_k \frac{1}{k}\, p_k(x) y_j^k\right) = \exp\left(\sum_k \frac{p_k(x)p_k(y)}{k}\right) = \prod_k \exp\left(\frac{p_k(x)p_k(y)}{k}\right) =$$
$$= \prod_k \sum_{\ell\geqslant 0} \frac{1}{\ell!\cdot k^\ell} \left(p_k(x)p_k(y)\right)^\ell = \sum_\lambda \frac{1}{z_\lambda}\, p_\lambda(x)p_\lambda(y)$$

(последнее равенство объясняется точно также, как в доказательстве предл. 4.4 на стр. 41). Если обозначить через $C_{\lambda\mu} = \langle\, s_\lambda\,,\, p_\mu \,\rangle$ коэффициенты разложений Ньютоновских полиномов по базису из полиномов Шура, так что $p_\mu = \sum_\lambda C_{\lambda\mu} s_\lambda$, то подставляя эти разложения в правую часть полученного выше равенства и приравнивая коэффициенты при $s_\lambda(x)s_\eta(y)$ в левой и правой части, получаем соотношения

$$\sum_\nu C_{\nu\lambda}C_{\nu\eta} = \begin{cases} z_\lambda & \text{при } \eta = \lambda \\ 0 & \text{при } \eta \neq \lambda, \end{cases}$$

т. е. матрица Грама $\left(\langle\, p_\lambda\,,\, p_\mu \,\rangle\right) = C^t \cdot C$ диагональна с диагональными элементами z_λ. □

§6. Основные понятия теории представлений.

6.1. Представления множества операторов. Для произвольного множества R условимся обозначать через $R \otimes \Bbbk$ векторное пространство с базисом R над полем $\Bbbk$, состоящее из всевозможных конечных формальных линейных комбинаций элементов из R с коэффициентами в $\Bbbk$, а через $A_R \stackrel{\text{def}}{=} T(R \otimes \Bbbk)$ — тензорную алгебру этого векторного пространства, т. е. свободную ассоциативную $\Bbbk$-алгебру, порождённую множеством R.

Например, если множество $R = \{t\}$ состоит из одного элемента t, то векторное пространство $t \otimes \Bbbk = \Bbbk\, t$ одномерно с базисом t, а ассоциативная алгебра $A_t = T(\Bbbk\, t)$, т. е. тензорная алгебра одномерного векторного пространства, изоморфна алгебре $\Bbbk[t]$ многочленов от одной переменной: изоморфизм сопоставляет базисному тензору $t \otimes \ldots \otimes t \in (\Bbbk\, t)^{\otimes n}$ моном t^n.

Отображение $\varrho : R \to \mathrm{End}(W)$ множества R в алгебру линейных эндоморфизмов какого-нибудь векторного пространства W над полем $\Bbbk$ называется *линейным представлением* множества R эндоморфизмами пространства W. По универсальному свойству свободной алгебры A_R, линейные представления $\varrho : R \to \mathrm{End}(W)$ биективно соответствуют гомоморфизмам ассоциативных алгебр $\tilde{\varrho} : A_R \to \mathrm{End}(W)$. Последние называются *линейными представлениями* алгебры A_R в пространстве W. Пространство W с фиксированным на нём представлением множества R или алгебры A_R называется, соответственно, R-модулем или A_R-модулем. И то, и другое равносильно сопоставлению каждому элементу $f \in R$ линейного оператора $\varrho(f) : W \to W$. Произвольные тензоры $f = \sum_{f_1,\ldots f_m \in R} x_{f_1 \ldots f_m} f_1 \otimes \ldots \otimes f_m \in A_R$ с $f_\nu \in R$, $x_{f_1 \ldots f_m} \in \Bbbk$ при этом представляются линейными операторами $\tilde{\varrho}(f) = \sum x_{f_1 \ldots f_m} \varrho(f_1) \circ \varrho(f_2) \circ \ldots \circ \varrho(f_m) : W \to W$, а образ гомоморфизма алгебр $\tilde{\varrho} : A_R \to \mathrm{End}(W)$ состоит из всех операторов $W \to W$, которые можно получить из представляющих элементы множества R операторов $\varrho(f)$ при помощи композиций, сложения и умножения на числа. Он называется *ассоциативной оболочкой* множества операторов $\varrho(R) \subset \mathrm{End}(W)$ и обозначается $\mathrm{Ass}\big(\varrho(R)\big) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{im}\, \tilde{\varrho}$.

Когда понятно, о каком представлении ϱ идёт речь, мы обозначаем результат применения оператора $\tilde{\varrho}(f)$, где $f \in A_R$, к вектору $w \in W$ просто через fw. Для подпространства $U \subset W$ и набора операторов $F \subset A_R$ мы полагаем $FU \stackrel{\text{def}}{=} \{fu \mid f \in F,\, u \in U\}$.

6.1.1. Разложимость, приводимость и полупростота. Векторное подпространство U в R-модуле W называется *R-подмодулем* или *R-инвариантным подпространством*, если $RU \subset U$.

Упражнение 6.1 (фактор модули). Убедитесь, что для всякого R-подмодуля $U \subseteq W$ на фактор пространстве $V = W/U$ имеется структура R-модуля, на котором элементы $f \in R$ действуют по правилу $f[w] \stackrel{\text{def}}{=} [fw]$, где $[w] = w + U$ означает класс вектора $w \in W$ по модулю U.

Отличные от W подмодули $U \subsetneq W$ называются *собственными*.

Ненулевой R-модуль W называется *простым*, если у него нет ненулевых собственных подмодулей. Задающее такой модуль представление $\varrho : R \to \mathrm{End}(W)$ называется *неприводимым*.

Ненулевой R-модуль W и соответствующее ему представление называются *разложимыми*, если W является прямой суммой своих ненулевых собственных R-подмодулей. Всякий конечномерный R-модуль является прямой суммой неразложимых, однако бывают неразложимые непростые модули. Если R-модуль W является прямой суммой простых R-подмодулей, то он называется *полупростым*, а соответствующее представление $\varrho : R \to \mathrm{End}(W)$ — *вполне приводимым*. Обратите внимание, что каждый неприводимый R-модуль по определению полупрост и неразложим, и что прямая сумма любого множества полупростых модулей полупроста.

Упражнение 6.2. Убедитесь, что для заданных подпространств $U_1, U_2 \subset W$ условия $RU_1 \subset U_2$ и $A_R U_1 \subset U_2$ равносильны, и выведите отсюда, что простота, полупростота и разложимость пространства W относительно произвольного множества операторов $S \subset \mathrm{End}(W)$ и относительно ассоциативной оболочки $\mathrm{Ass}(S)$ этих операторов означают одно и то же.

Пример 6.1 (пространство с одним оператором)
Если множество R состоит из одного элемента t, то $A_R \simeq \Bbbk[t]$ является кольцом многочленов от этого элемента. Представление $\varrho : R \to \mathrm{End}\, W$ заключается в выборе на пространстве W линейного оператора $f = \varrho(t) : W \to W$ и наделяет пространство W структурой модуля над кольцом многочленов, которая задаётся гомоморфизмом

$$\tilde{\varrho} = \mathrm{ev}_f : \Bbbk[t] \to \mathrm{End}(W)\,,\ \ t \mapsto f\,, \tag{6-1}$$

переводящим многочлен $F \in \Bbbk[t]$ в результат подстановки в него оператора f вместо переменной t. Если пространство W конечномерно, гомоморфизм (6-1) имеет ненулевое ядро — главный идеал (μ_f), порождённый приведённым многочленом наименьшей степени, аннулирующим оператор[1] f. Ассоциативная оболочка оператора f, т. е. образ гомоморфизма (6-1), представляет собою множество всех многочленов от оператора f и изоморфна фактор алгебре $\Bbbk[t]/(\mu_f)$. По теореме о строении конечно порождённых модулей над кольцом главных идеалов[2] конечномерный $\Bbbk[t]$-модуль W, будучи модулем кручения, изоморфен прямой сумме фактор модулей

$$\frac{\Bbbk[t]}{(p_1^{m_1})} \oplus \ldots \oplus \frac{\Bbbk[t]}{(p_s^{m_s})}\,, \tag{6-2}$$

где все многочлены $p_i \in \Bbbk[t]$ неприводимы и приведены, а действие оператора состоит в умножении на t, и два таких модуля изоморфны если и только если они отличаются друг от друга перестановкой прямых слагаемых. В частности, всякое неразложимое пространство с оператором изоморфно пространству $\Bbbk[t]/(p^m)$ с оператором умножения на t, и два таких пространства с разными p или m не изоморфны друг другу.

Упражнение 6.3. Убедитесь, что $\Bbbk[t]$-модуль $\Bbbk[t]/(p^m)$ неприводим если и только если $m = 1$.

Тем самым, всякое неприводимое пространство с оператором изоморфно $\Bbbk[t]/(p)$, где $p \in \Bbbk[t]$ приведён и неприводим, а оператор действует умножением на t, а всякое полупростое — прямой сумме нескольких таких пространств.

Упражнение 6.4. Докажите, что оператор f над произвольным полем $\Bbbk$ диагонализуем если и только если он аннулируется многочленом, полностью разлагающимся в $\Bbbk[t]$ в произведение попарно различных линейных множителей[3].

Пример 6.2 (коммутирующие операторы)
Если линейные операторы $f, g : V \to V$ на векторном пространстве V над произвольным полем $\Bbbk$ коммутируют друг с другом, то ядро и образ любого многочлена $\varphi(f)$ от оператора f переводятся оператором g в себя, поскольку из $\varphi(f)u = 0$ вытекает, что $\varphi(f)gu = g\varphi(f)u = 0$, а из $u = \varphi(f)w$ вытекает, что $gu = g\varphi(f)w = \varphi(f)gw$. В частности, все собственные подпространства $V_\lambda = \ker(f - \lambda \mathrm{Id})$ оператора f инвариантны относительно любого перестановочного с f оператора g. Отсюда получается простое, но полезное

[1] Напомню, что он называется *минимальным многочленом* оператора f.

[2] См. лекцию http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2223/lec_06.pdf.

[3] В частности, если оператор диагонализуем на всём пространстве, то он диагонализуем и на любом своём инвариантном подпространстве

Предложение 6.1
В конечномерном векторном пространстве V над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ любое множество коммутирующих друг с другом операторов обладает общим для всех операторов собственным вектором. Над произвольным полем $\Bbbk$ любое множество коммутирующих друг с другом диагонализуемых операторов на V можно одновременно диагонализовать в одном общем для всех операторов базисе.

Доказательство. Индукция по $\dim V$. Если все операторы скалярны (что так при $\dim V = 1$), то доказывать нечего — подойдут, соответственно, любой ненулевой вектор и любой базис. Если среди операторов есть хоть один нескалярный оператор F, то над замкнутым полем у него есть собственное подпространство строго меньшей размерности, чем V, а в диагонализуемом случае V является прямой суммой таких собственных подпространств. Каждое собственное подпространство оператора F инвариантно для всех операторов, причём если операторы диагонализуемы на всём пространстве, то их ограничения на собственные подпространства оператора F останутся диагонализуемы по упр. 6.4. Применяя к собственным подпространствам оператора F предположение индукции, получаем требуемое. □

Лемма 6.1
Пусть R-модуль[1] W линейно порождается над $\Bbbk$ некоторым множеством $\mathcal{S}$ своих неприводимых R-подмодулей. Тогда для любого собственного R-подмодуля $U \subsetneq W$ найдётся такой R-подмодуль $V \subset W$, что[2] $W = U \oplus V$, причём в качестве V можно взять прямую сумму подходящих подмодулей из множества $\mathcal{S}$. Для нулевого подмодуля $U = 0$ это утверждение означает, что весь модуль W является прямой суммой подходящих подмодулей из множества $\mathcal{S}$. В частности, такой модуль W автоматически полупрост.

Доказательство. Так как $U \neq W$ и W линейно порождается подмодулями $S \in \mathcal{S}$, в множестве $\mathcal{S}$ найдётся подмодуль $S \not\subset U$. Сумма $U + S$ является прямой, поскольку пересечение $S \cap U \subsetneq S$, будучи собственным подмодулем неприводимого модуля S, равно нулю. Обозначим через $\mathcal{S}'$ множество всех полупростых подмодулей $M \subset W$, разложимых в прямую сумму модулей из $\mathcal{S}$ и таких, что сумма $U + M$ прямая. По предыдущему, множество $\mathcal{S}'$ непусто. Введём на нём частичный порядок, полагая $M_1 < M_2$, когда $M_2 = M_1 \oplus M$ для некоторого $M \in \mathcal{S}'$.

Упражнение 6.5. Убедитесь, что $\mathcal{S}'$ является полным чумом[3].

По лемме Цорна[4] в множестве $\mathcal{S}'$ имеется максимальный элемент V. Покажем, что $U \oplus V = W$. Если $U \oplus V \neq W$, то повторяя проведённое в начале доказательства рассуждение для подмодуля $U \oplus V$ в роли подмодуля U, мы найдём в $\mathcal{S}$ такой подмодуль $S \subset W$, что сумма $(U \oplus V) + S$ прямая. Это означает, что $V \oplus S \in \mathcal{S}'$ строго больше, чем V. Всё сказанное работает и для $U = 0$. □

Теорема 6.1
Модуль W полупрост если и только если каждый ненулевой подмодуль в W содержит простой ненулевой подмодуль и для каждого ненулевого собственного R-подмодуля $U \subset W$ найдётся такой R-подмодуль $V \subset W$, что $W = U \oplus V$.

[1] Не обязательно конечномерный как векторное пространство над $\Bbbk$.
[2] Всякий подмодуль V с таким свойством называется *дополнительным* к U.
[3] Т. е. каждое линейно упорядоченное подмножество в $\mathcal{S}'$ имеет верхнюю грань, см. раздел 1.7 на стр. 15 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2021/lec_01.pdf.
[4] См. раздел 1.9 на стр. 17 той же лекции.

Доказательство. Если модуль W полупрост, т. е. является прямой суммой простых подмодулей, подмодуль $V \subset W$, дополнительный к произвольно заданному подмодулю $U \subset W$, существует по лем. 6.1, применённой к множеству $\mathcal{S}$ всех простых подмодулей в W.

Упражнение 6.6. Убедитесь, что проекция $\pi : W = U \oplus V \twoheadrightarrow U$, $u + v \mapsto u$, перестановочна с действием операторов из R, т. е. $\pi(fw) = f\pi(w)$ для всех $f \in R$ и $w \in W$.

Так как W линейно порождается простыми подмодулями, проекция π переводит хотя бы один из них в ненулевое векторное подпространство в U.

Упражнение 6.7. Убедитесь, что это подпространство является простым R-подмодулем в U.

Это доказывает прямую импликацию «только если». Чтобы доказать обратную импликацию, обозначим через $\mathcal{S}$ множество всех полупростых ненулевых подмодулей $S \subseteq W$. Это множество непусто, поскольку содержит ненулевой простой подмодуль, имеющийся в W по условию. Зададим на $\mathcal{S}$ частичный порядок, полагая $S_1 < S_2$ когда $S_2 = S_1 \oplus S$ для некоторого $S \in \mathcal{S}$.

Упражнение 6.8. Убедитесь, что чум $\mathcal{S}$ полон.

По лемме Цорна, в $\mathcal{S}$ есть максимальный элемент M. Если он не совпадает с W, то найдётся такой ненулевой подмодуль $V \subset W$, что $W = M \oplus V$. Поскольку в V есть ненулевой простой подмодуль $S \subset V$, сумма $M \oplus S \in \mathcal{S}$ будет строго больше, чем M. Тем самым, $M = W$. □

Следствие 6.1 (критерии полупростоты)
Пусть каждый ненулевой R-подмодуль в R-модуле[1] W содержит в себе конечномерный ненулевой R-подмодуль. Тогда следующие свойства модуля W эквивалентны:

1) W полупрост

2) W линейно порождается над $\Bbbk$ простыми R-подмодулями

3) для любого ненулевого собственного R-подмодуля $U \subset W$ существует такой R-подмодуль $V \subset W$, что $W = U \oplus V$.

Доказательство. Если R-подмодуль конечномерен как векторное пространство над $\Bbbk$, то каждый его R-подмодуль минимальной положительной размерности автоматически прост. Поэтому каждый ненулевой подмодуль в W обладает простым ненулевым подмодулем, и условия (1) и (3) эквивалентны по теор. 6.1. Импликация (1) ⇒ (2) очевидна. Импликация (2) ⇒ (3) была установлена в лем. 6.1. □

6.1.2. Гомоморфизмы представлений. Линейное отображение $\varphi : W_1 \to W_2$ между R-модулями, отвечающими линейным представлениям $\varrho_1 : R \to \mathrm{End}(W_1)$ и $\varrho_2 : R \to \mathrm{End}(W_2)$, называется гомоморфизмом R-модулей[2], если оно перестановочно с действием всех операторов из R, т. е. для всех $f \in R$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} W_1 \arrow[r, "\varphi"] & W_2 \\ W_1 \arrow[u, "\varrho_1(f)"] \arrow[r, "\varphi"] & W_2 \arrow[u, "\varrho_2(f)"'] \end{tikzcd} .$$

[1]Который не предполагается конечномерным.

[2]А также *сплетающим оператором*, *гомоморфизмом представлений* или *R-линейным отображением*.

Примером R-линейного отображения является проекция разложимого R-модуля $U \oplus V$ на подмодуль U вдоль подмодуля V из упр. 6.6 на стр. 65. Множество всех R-линейных гомоморфизмов обозначается через $\mathrm{Hom}_R(W_1, W_2) \overset{\text{def}}{=} \{\varphi: W_1 \to W_2 \mid \forall\, w \in W_1, \forall\, f \in R\ \varphi(fw) = f\varphi(w)\}$.

Упражнение 6.9. Убедитесь, что а) $\mathrm{Hom}_R(W_1, W_2) = \mathrm{Hom}_{A_R}(W_1, W_2)$ является векторным подпространством в $\mathrm{Hom}(W_1, W_2)$ б) композиция R-линейных отображений R-линейна в) ядро и образ гомоморфизма R-модулей являются R-подмодулями г) образ и полный прообраз любого R-модуля относительно гомоморфизма R-модулей являются R-модулями.

Лемма 6.2 (лемма Шура)
Всякий ненулевой гомоморфизм неприводимых R-модулей является изоморфизмом. Если основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, то все R-линейные эндоморфизмы неприводимого R-модуля скалярны, т. е. имеют вид $\lambda\,\mathrm{Id}$, где $\lambda \in \Bbbk$.

Доказательство. Пусть представления $\varrho_1: R \to \mathrm{End}(W_1)$, $\varrho_2: R \to \mathrm{End}(W_2)$ неприводимы, а линейное отображение $\varphi: W_1 \to W_2$ перестановочно со всеми операторами из R. Поскольку $\ker\varphi \subset W_1$ и $\operatorname{im}\varphi \subset W_2$ являются подмодулями простых модулей, либо $\ker\varphi = W_1$ и $\varphi = 0$, либо $\ker\varphi = 0$. Во втором случае, если $\varphi \neq 0$, то подмодуль $\operatorname{im}\varphi \subset W_2$ отличен от нуля, и значит, совпадает с W_2, т. е. φ одновременно инъективно и сюрьективно.

Рассмотрим теперь R-линейный эндоморфизм $\varphi: W \to W$. Для каждого $\lambda \in \Bbbk$ эндоморфизм $\lambda\,\mathrm{Id} - \varphi$ тоже R-линеен. Если поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, существует такое $\lambda_0 \in \Bbbk$, что R-подмодуль $\ker(\lambda_0\mathrm{Id} - \varphi) \neq 0$. Если W прост, то $\ker(\lambda_0\mathrm{Id} - \varphi) = W$ и $\varphi = \lambda_0\mathrm{Id}$. □

Следствие 6.2
Если основное поле алгебраически замкнуто, а R-модули U и W неприводимы, то

$$\dim \mathrm{Hom}_R(U, W) = \begin{cases} 0 & \text{если } U \text{ и } W \text{ не изоморфны} \\ 1 & \text{если } U \text{ и } W \text{ изоморфны.} \end{cases}$$

Доказательство. Любые два ненулевых изоморфизма $\varphi, \psi: U \xrightarrow{\sim} W$ пропорциональны, поскольку $\psi^{-1}\varphi = \lambda \cdot \mathrm{Id}_U$ для некоторого $\lambda \in \Bbbk^*$. □

Следствие 6.3
Фактор модуль любого полупростого R-модуля W тоже полупрост.

Доказательство. По лемме Шура образ любого простого R-подмодуля $S \subset W$ при любой R-линейной сюрьекции $\pi: W \twoheadrightarrow U$ либо нулевой, либо изоморфен S и, стало быть, прост. Поскольку W линейно порождается простыми подмодулями $S \subset W$, модуль U линейно порождается ненулевыми подмодулями $\pi(S)$. □

Предложение 6.2
В условиях сл. 6.1 на стр. 65 полупростота R-модуля W равносильна тому, что для любого подмодуля $U \subset W$ существует такой R-линейный эндоморфизм $\pi_U \in \mathrm{End}_R(W)$, что $\pi_U^2 = \pi_U$ и $\operatorname{im}\pi_U = U$.

Доказательство. Если $W = U \oplus V$ для некоторого R-подмодуля $V \subset W$, то проектор

$$\pi_U: U \oplus V \to U \oplus V, \quad (u, v) \mapsto (u, 0),$$

обладает требуемыми свойствами. Наоборот, если эндоморфизм π_U имеет $\pi_U^2 = \pi_U$, то он тождественно действует на своём образе: $\pi_U \pi_U w = \pi_U w$. Поэтому $\ker \pi_U \cap \operatorname{im} \pi_U = 0$. Так как каждый вектор $w \in W$ имеет разложение $w = \pi_U w + (w - \pi_U w)$, в котором $\pi_U w \in \operatorname{im} \pi_U$, а $w - \pi_U w \in \ker \pi_U$, мы заключаем, что $W = \operatorname{im} \pi_U \oplus \ker \pi_U$. В силу R-линейности π_U его ядро $\ker \pi_U$ является R-подмодулем в W. □

Следствие 6.4
Каждый подмодуль полупростого R-модуля тоже полупрост.

Доказательство. Пусть R-модуль L является ненулевым собственным подмодулем полупростого R-модуля W. Каждый R-подмодуль $U \subset L$, будучи подмодулем и в W, является образом R-линейного проектора $W \twoheadrightarrow U$. Ограничение этого проектора на подмодуль L является R-линейным проектором $L \twoheadrightarrow U$. □

6.2. Представления ассоциативной алгебры. Пусть A — ассоциативная алгебра над произвольным полем $\Bbbk$, а V — любое векторное пространство над $\Bbbk$. Гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр

$$\varrho : A \to \operatorname{End} V$$

называется *линейным представлением* алгебры A в векторном пространстве V. Пространство V называется в этой ситуации A-модулем. Представления ассоциативных алгебр являются специальными примерами представлений множеств операторов, и к ним в полной мере приложима вся терминология из n° 6.1.1 на стр. 62. Для двух A-модулей U, W мы полагаем

$$\operatorname{Hom}_A(U,V) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi : U \to W \mid \forall f \in A, \forall u \in U \ \varphi(fu) = f\varphi(u)\}$$

и называем такие отображения $\varphi : U \to W$ *A-линейными*. Когда $U = W$ все A-линейные эндоморфизмы A-модуля W образуют ассоциативную $\Bbbk$-подалгебру $\operatorname{End}_A(W) \subset \operatorname{End}_{\Bbbk}(W)$ в $\Bbbk$-алгебре всех $\Bbbk$-линейных эндоморфизмов векторного пространства W. Подалгебру $\operatorname{End}_A(W)$ обычно называют *централизатором* A в $\operatorname{End}_{\Bbbk}(W)$.

Пусть $W = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$ является прямой суммой своих A-подмодулей V_ν. Обозначим через $\iota_\nu : V_\nu \hookrightarrow W$ вложение каждого из них в W, а через $\pi_\mu : W \twoheadrightarrow V_\mu$ — проекцию прямой суммы $V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$ на μ-е слагаемое.

Упражнение 6.10. Убедитесь, что $\sum_\nu \iota_\nu \pi_\nu = \mathrm{Id}_W$, $\pi_\nu \iota_\nu = \mathrm{Id}_{V_\nu}$ для всех ν, $\pi_\nu \iota_\mu = 0$ и $\iota_\mu \pi_\nu = 0$ для всех $\mu \neq \nu$.

Для каждого $\varphi \in \operatorname{End}(W)$ положим $\varphi_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \pi_\mu \circ \varphi \circ \iota_\nu$ и организуем эндоморфизмы $\varphi_{\mu\nu} : V_\nu \to V_\mu$ в квадратную матрицу $(\varphi_{\mu\nu})$. Исходный эндоморфизм φ восстанавливается из этой матрицы как

$$\varphi = \mathrm{Id}_W \circ \varphi \circ \mathrm{Id}_W = \left(\sum\nolimits_\mu \iota_\mu \pi_\mu\right) \circ \varphi \circ \left(\sum\nolimits_\nu \iota_\nu \pi_\nu\right) = \sum\nolimits_{\mu,\nu} \iota_\mu \varphi_{\mu\nu} \pi_\nu \,.$$

При этом $\varphi \in \operatorname{End}_A(W)$ если и только если все $\varphi_{\mu\nu} \in \operatorname{Hom}_A(V_\nu, V_\mu)$. Таким образом, имеет место изоморфизм векторных пространств

$$\operatorname{End}_A(W) \xrightarrow{\sim} \bigoplus\nolimits_{\mu,\nu} \operatorname{Hom}_A(V_\nu, V_\mu)\,, \quad \varphi \mapsto (\varphi_{\mu\nu}) \,. \tag{6-3}$$

Упражнение 6.11. Убедитесь, что изоморфизм (6-3) переводит композицию эндоморфизмов в произведение матриц.

В ситуации, когда все слагаемые $V_\nu = V$ являются копиями одного и того же A-модуля V, изоморфизм (6-3) превращается в изоморфизм $\Bbbk$-алгебр

$$\mathrm{End}_A\left(V^{\oplus n}\right) \simeq \mathrm{Mat}_n\left(\mathrm{End}_A(V)\right) . \tag{6-4}$$

Теорема 6.2 (теорема о двойном централизаторе)
Пусть конечномерное векторное пространство V полупросто над ассоциативной подалгеброй $A \subset \mathrm{End}(V)$, и $B = \mathrm{End}_A(V)$. Тогда $\mathrm{End}_B(V) = A$.

Доказательство. Включение $A \subset \mathrm{End}_B(V)$ очевидно из определений. Чтобы установить обратное включение, зафиксируем в V базис $e_1, \dots, e_n$ и покажем, что для каждого B-линейного оператора $\varphi \in \mathrm{End}_B(V)$ найдётся такой оператор $a \in A$, что $\varphi e_i = a e_i$ при всех i — это обеспечит равенство $\varphi = a$. Рассмотрим n-кратную прямую сумму $W = V^{\oplus n}$ и введём на ней структуру модуля над алгебрами A, B и $\mathrm{End}_B(V)$, полагая $f\,(v_1, \dots, v_n) = (f v_1, \dots, f v_n)$ для каждого оператора f из A, из B или из $\mathrm{End}_B(V)$. Обозначим вектор $(e_1, \dots, e_n) \in W$ через e. Достаточно убедиться, что $\varphi e \in Ae$. Поскольку W полупрост как A-модуль, его A-подмодуль $Ae \subset W$ является образом некоторого A-линейного проектора $\pi : W \twoheadrightarrow Ae$, тождественно действующего на Ae. Если π коммутирует с φ, то $\varphi(e) = \varphi(\pi e) = \pi(\varphi e) \in Ae$, что и требуется. Покажем, что π действительно коммутирует с φ. Для этого запишем эндоморфизм $\pi : V^{\oplus n} \to V^{\oplus n}$ матрицей (π_{ij}) с элементами $\pi_{ij} \in \mathrm{End}(V)$, как это объяснялось выше. Так как π перестановочен с действием A на W, каждая компонента π_{ij} перестановочна с действием A на V, т. е. лежит в $\mathrm{End}_A(V) = B$. Поэтому диагональная матрица, по диагонали которой стоят одинаковые элементы $\varphi \in \mathrm{End}_B(V)$, коммутирует с π. □

Следствие 6.5 (теорема Бернсайда)
Если основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, а конечномерное векторное пространство V неприводимо как модуль над множеством операторов $R \subset \mathrm{End}(V)$, то ассоциативная оболочка $\mathrm{Ass}(R) \subset \mathrm{End}_\Bbbk(V)$ этих операторов совпадает со всей алгеброй эндоморфизмов $\mathrm{End}_\Bbbk(V)$. В частности, все конечномерные неприводимые представления $A \to \mathrm{End}(V)$ любой ассоциативной алгебры A эпиморфны.

Доказательство. По лемме Шура[1] $\mathrm{End}_{\mathrm{Ass}(R)}(V) = \Bbbk$, откуда $\mathrm{End}_\Bbbk(V) = \mathrm{Ass}(R)$. □

Упражнение 6.12. Докажите, что обратная импликация: если $\mathrm{Ass}(R) = \mathrm{End}(V)$, то R-модуль V неприводим, имеет место над любым полем $\Bbbk$.

6.3. Изотипные компоненты. Зафиксируем ассоциативную алгебру A. Для произвольных A-модулей U, W на тензорном произведении $\mathrm{Hom}_A(U, W) \otimes U$ имеется естественная структура A-модуля, на котором элементы $a \in A$ действуют по правилу $a(\varphi \otimes u) \overset{\text{def}}{=} \varphi \otimes (au)$. При этом каноническая свёртка

$$c_{WU} : \ \mathrm{Hom}_A(U, W) \otimes U \to W \,, \ \ \varphi \otimes u \mapsto \varphi(u) \,, \tag{6-5}$$

является A-линейным гомоморфизмом.

Упражнение 6.13. Убедитесь в этом.

[1] См. лем. 6.2 на стр. 66.

Для простого A-модуля U образ канонической свёртки (6-5) обозначается $W_U = \operatorname{im} c_{WU} \subset W$ и называется *U-изотипной компонентой* модуля W. Он равен сумме всех имеющихся в W неприводимых подмодулей, изоморфных модулю U. Действительно, всякий ненулевой гомоморфизм $\psi : U \to W$ инъективен, и любой вектор вида $\sum \psi_i(u_i) \in W$ с $u_i \in U$ и $\psi_i \in \operatorname{Hom}_A(U, W)$ лежит в сумме подмодулей $\psi_i(U) \subset W$, каждый из которых изоморфен U, и наоборот, если векторы $v_i = \psi_i(u_i)$ лежат в образах A-линейных вложений $\psi_i : U \hookrightarrow W$, то $\sum v_i = c(\sum \psi_i \otimes u_i)$.

Предложение 6.3
Всякий гомоморфизм A-модулей $\varphi : V \to W$ переводит U-изотипную компоненту $V_U \subset V$ в U-изотипную компоненту $W_U \subset W$. В частности, для любого подмодуля $V \subset W$ выполнено равенство $V_U = V \cap W_U$.

Доказательство. Гомоморфизм φ переводит любой лежащий в $\operatorname{im} c_{VU}$ вектор $\sum \psi_i(u_i)$, у которого $\psi_i \in \operatorname{Hom}_A(U, V)$, а $u_i \in U$, в вектор $\sum \varphi\psi_i(u_i) \in \operatorname{im} c_{WU}$, ибо $\varphi\psi_i \in \operatorname{Hom}_A(U, W)$. □

Предложение 6.4
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ для любого неприводимого A-модуля U и произвольного A-модуля W каноническая свёртка (6-5) инъективна и, тем самым, задаёт изоморфизм

$$c_{WU} : \operatorname{Hom}_A(U, W) \otimes U \xrightarrow{\sim} W_U .$$

Доказательство. Будучи линейно порождённым простыми подмодулями, изоморфными U, модуль W_U полупрост и раскладывается в прямую сумму $W_U = \bigoplus_i V_i$ простых подмодулей V_i, каждый из которых изоморфен U. Зафиксируем для каждого i вложение $\psi_i : U \hookrightarrow W$, изоморфно отображающее U на подмодуль $V_i \subset W$. По сл. 6.2 пространство $\operatorname{Hom}_A(U, W) = \operatorname{Hom}_A(U, W_U) = \bigoplus_i \operatorname{Hom}_A(U, V_i)$ является прямой суммой одномерных пространств, порождённых вложениями ψ_i. Поэтому каждый элемент модуля $\operatorname{Hom}_A(U, W) \otimes U$ однозначно записывается в виде $\sum \psi_i \otimes u_i$ с $u_i \in U$. Если $c_{WU}(\sum \psi_i \otimes u_i) = \sum \psi_i(u_i) = 0$, то каждое слагаемое $\psi_i(u_i) \in V_i$ равно нулю в отдельности, ибо сумма $W_U = \bigoplus_i V_i$ прямая. Так как все ψ_i инъективны, все $u_i = 0$. □

Предложение 6.5 (изотипное разложение)
Если A-модуль W полупрост, то в любом его разложении в прямую сумму простых подмодулей сумма тех слагаемых, что изоморфны U, совпадает с U-изотипной компонентой $W_U \subset W$. В частности, она не зависит от выбора разложения W в прямую сумму простых подмодулей, и если зафиксировать в каждом классе изоморфных простых модулей какой-нибудь представитель U, то всякий полупростой модуль будет иметь каноническое *изотипное разложение*

$$W = \bigoplus_U W_U , \tag{6-6}$$

где суммирование происходит по всем неизоморфным друг другу неприводимым A-модулям U, для которых $\operatorname{Hom}_A(U, W) \neq 0$.

Доказательство. Пусть $W = \bigoplus_i W_i$, где все W_i просты. Так как $\operatorname{Hom}_A(U, W) = \bigoplus_i \operatorname{Hom}_A(U, W_i)$ и $\operatorname{Hom}_A(U, W_j) = 0$ для всех $W_j \not\simeq U$, образ канонической свёртки (6-5) лежит в сумме тех подмодулей W_i, что изоморфны U. □

Определение 6.1
Для простого модуля U и полупростого модуля W количество изоморфных U слагаемых в любом разложении модуля W в прямую сумму неприводимых подмодулей, обозначается

$$m_U(W) \overset{\text{def}}{=} \dim W_U / \dim U \,, \tag{6-7}$$

и называется *кратностью* простого модуля U в полупростом модуле W.

Следствие 6.6
Над алгебраически замкнутым полем для всех конечномерных полупростых A-модулей V, W выполняются равенства $\dim \mathrm{Hom}_A(V,W) = \sum_U m_U(V)\, m_U(W) = \dim \mathrm{Hom}_A(W,V)$, где суммирование происходит по всем представителям U различных классов изоморфных простых модулей.

Доказательство. Пусть $V = \bigoplus_i V_i$ и $W = \bigoplus_j W_j$, где все V_i и W_j неприводимы. По лемме Шура пространства $\mathrm{Hom}_A(V_i, W_j)$ нулевые при $V_i \not\simeq W_j$ и одномерные при $V_i \simeq W_j$. Поэтому размерность пространства $\mathrm{Hom}_A(V,W) = \bigoplus_{ij} \mathrm{Hom}_A(V_i, W_j)$ равна $\sum_U m_U(U)\, m_U(W)$, и то же самое верно для $\mathrm{Hom}_A(W,V)$. □

Следствие 6.7
Над алгебраически замкнутым полем для любого конечномерного A-модуля W и каждого простого A-модуля W выполняется равенство $m_U(W) = \dim \mathrm{Hom}_A(U,W) = \dim \mathrm{Hom}_A(W,U)$.

6.4. Представления групп. Действие группы G линейными преобразованиями на векторном пространстве V над полем $\Bbbk$ или, что то же самое, гомоморфизм групп $\varrho : G \to \mathrm{GL}(V)$, называется *линейным представлением* группы G в векторном пространстве V. Пространство V называется в этом случае G-модулем. Прямая сумма, тензорное произведение, а также внешние и симметрические степени G-модулей U, W канонически наделяются такими структурами G-модулей, что операторы $g \in G$ действуют по правилам

$$g(u \dotplus w) \overset{\text{def}}{=} (gu) \dotplus (gw) \qquad g(u \otimes w) \overset{\text{def}}{=} (fu) \otimes (gw)$$
$$g(u_1 \wedge u_2) \overset{\text{def}}{=} (gu_1) \wedge (gu_2) \qquad g(u_1 \cdot u_2) \overset{\text{def}}{=} (gu_1) \cdot (gu_2)\,.$$

Для любого G-подмодуля $V \subset W$ фактор пространство W/V также является G-модулем с действием $g[v] \overset{\text{def}}{=} [gv]$.

Упражнение 6.14. Убедитесь, что все эти формулы корректно задают гомоморфизмы группы G в $\mathrm{GL}(U \oplus W)$, $\mathrm{GL}(U \otimes W)$, $\mathrm{GL}\big(\Lambda(U)\big)$, $\mathrm{GL}\big(S(U)\big)$ и $\mathrm{GL}(W/V)$ соответственно.

Для каждого представления $\varrho : G \to \mathrm{GL}(V)$ *двойственное представление* $\varrho^* : G \to \mathrm{GL}(V^*)$ определяется таким образом, чтобы свёртка векторов с ковекторами была G-инвариантна, т. е.

$$\forall\, g \in G,\ \forall\, \xi \in V^*,\ \forall\, w \in V \quad \langle\, \varrho^*(g)\,\xi\,,\, \varrho(g)\,w\,\rangle = \langle\, \xi\,,\, w\,\rangle\,. \tag{6-8}$$

Так как каждый оператор $\varrho(g)$ обратим, равенство (6-8) равносильно равенству

$$\langle\, \varrho^*(g)\xi\,,\, v\,\rangle = \langle\, \xi\,,\, \varrho(g^{-1})v\,\rangle\,,$$

которое означает, что оператор $\varrho^*(g) = \varrho(g^{-1})^*$ двойствен оператору $\varrho(g)^{-1}$ и переводит ковектор $\xi \in V^*$ в композицию $\xi \circ g^{-1} : v \mapsto \xi(g^{-1}v)$. В частности, матрица оператора $\varrho^*(g)$ в двойственном базисе получается из матрицы $\varrho(g)$ обращением и транспонированием.

Упражнение 6.15. Убедитесь, что $\varrho^* : G \to \mathrm{GL}(V^*)$ является гомоморфизмом групп.

Для любых двух представлений $\varrho : G \to \mathrm{GL}(U)$ и $\lambda : G \to \mathrm{GL}(W)$ представление $\varrho^* \otimes \lambda$ задаёт действие группы G на пространстве $U^* \otimes V \simeq \mathrm{Hom}(U, V)$ всех линейных операторов $\varphi : U \to V$ по правилу

$$g : \varphi \mapsto g\varphi g^{-1} . \tag{6-9}$$

Упражнение 6.16. Убедитесь в этом.

Подпространство неподвижных векторов представления (6-9) обозначается

$$\mathrm{Hom}_G(U, V) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi : U \to V \mid \forall\, g \in G \;\; g\varphi = \varphi g\}$$

и называется пространством G-*инвариантных* операторов[1].

Пример 6.3 (проектор на инварианты)

Пусть имеется линейное представление группы G в векторном пространстве V. Векторы, неподвижные относительно всех преобразований из G, образуют в V подмодуль G-*инвариантов* $V^G \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid gv = v \;\; \forall\, g \in G\}$, на котором группа G действует тривиально. Если группа G конечна и её порядок не делится на характеристику поля $\Bbbk$, то любое линейное представление V группы G допускает G-линейную проекцию на подмодуль G-инвариантов, которая сопоставляет вектору $v \in V$ центр тяжести

$$v^\natural \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|} \sum\nolimits_{g \in G} gv \tag{6-10}$$

его G-орбиты[2] в аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$.

Упражнение 6.17. Убедитесь прямым вычислением, что при $\mathrm{char}(\Bbbk) \nmid |G|$ оператор $v \mapsto v^\natural$ перестановочен с действием G и линейно проектирует V на V^G.

Теорема 6.3

Каждое линейное представление V конечной группы G над полем, характеристика которого не делит $|G|$, вполне приводимо[3].

Доказательство. Покажем, что любой G-подмодуль $U \subset V$ является образом G-линейного проектора[4]. Группа G действует на пространстве всех $\Bbbk$-линейных отображений $\mathrm{Hom}(V, U)$ по правилу $g : \varphi \mapsto g\varphi g^{-1}$. Достаточно убедиться в том, что проекция на инварианты этого действия

$$\mathrm{Hom}(V, U) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_G(V, U) , \quad \varphi \mapsto \varphi^\natural = |G|^{-1} \sum\nolimits_{g \in G} g\varphi g^{-1}$$

переводит проекторы V на U в проекторы V на U. Пусть $\pi : V \twoheadrightarrow U$ — любой $\Bbbk$-линейный проектор. Тогда $\mathrm{im}\, \pi^\natural \subset U$, так как $g\pi g^{-1} U \subset U$ для всех $g \in G$, а любой вектор $u \in U$ неподвижен относительно $\pi^\natural$, ибо $g^{-1}U \subset U$ и $\pi|_U = \mathrm{Id}_U$ влекут $g\pi g^{-1} u = g g^{-1} u = u$. □

---

[1] А также *сплетающих* операторов, G-*линейных* операторов или G-*гомоморфизмов*.

[2] Если $|G| \vdots \mathrm{char}(\Bbbk)$, то сумма весов элементов орбиты нулевая, и центр тяжести не определён.

[3] Т. е. является прямой суммой неприводимых представлений или, что то же самое, полупростым G-модулем.

[4] См. предл. 6.2 на стр. 66.

Лемма 6.3
Пусть $|G| = n$ и основное поле $\Bbbk$ имеет $\operatorname{char}\Bbbk \nmid n$ и содержит все[1] n корней n-й степени из единицы. Тогда все элементы группы G действуют в любом её конечномерном линейном представлении диагонализуемыми операторами.

Доказательство. Каждый оператор из группы G аннулируются многочленом $t^n - 1$, который в силу сделанных предположений не имеет кратных корней[2] и полностью раскладывается в $\Bbbk[t]$ на линейные множители. По упр. 6.4 такой оператор диагонализуем. □

Следствие 6.8
Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}\Bbbk \nmid n$, содержащем все n корней n-й степени из единицы, и $G \subset \mathrm{GL}(V)$ — конечная группа. Все операторы из G одновременно диагонализуются в одном базисе если и только если группа G абелева.

Доказательство. Так как все диагональные матрицы коммутируют друг с другом, любая группа одновременно диагонализованных операторов абелева. Наоборот, в силу предл. 6.1 на стр. 64 любое множество коммутирующих диагонализуемых операторов можно диагонализовать одновременно. □

6.5. Пример: представления конечных абелевых групп. Из сл. 6.8 вытекает, что каждое конечномерное линейное представление конечной абелевой группы G над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики $\operatorname{char}(\Bbbk) \nmid |G|$ является прямой суммой одномерных представлений. Поскольку на одномерном пространстве V все линейные операторы действуют скалярно, каждый оператор $g \in G$ действуют на векторы $v \in V$ по правилу

$$gv = \chi(g)\, v\,, \text{ где } \chi : G \to \Bbbk^* \text{ — мультипликативный гомоморфизм,} \tag{6-11}$$

сопоставляющий элементу $g \in G$ ту константу, на которую оператор g умножает все векторы из V. Гомоморфизмы абелевой группы G в мультипликативную группу поля $\Bbbk$ называются *мультипликативными характерами* группы G. Одномерный G-модуль, на котором G действует по формуле (6-11) обозначается через V_χ.

Упражнение 6.18. Убедитесь, что $V_\chi \simeq V_\psi$ как G-модули если и только если $\chi = \psi$ как гомоморфизмы из G в $\Bbbk^*$.

Поскольку $\chi(g)^{|G|} = \chi\left(g^{|G|}\right) = \chi(e) = 1$ для всех $g \in G$, множество значений любого мультипликативного характера $\chi : G \to \Bbbk^\times$ лежит в группе $\boldsymbol{\mu}_{|G|}(\Bbbk) \subset \Bbbk^*$ корней $|G|$-той степени из 1 в поле $\Bbbk$. Множество всех мультипликативных характеров $\chi : G \to \Bbbk^\times$ является мультипликативной абелевой подгруппой в алгебре $\Bbbk^G$ всех функций на группе G со значениями в поле $\Bbbk$. Эта подгруппа обозначается $G^\wedge$ и называется *двойственной по Понтрягину* к группе G. Единицей в $G^\wedge$ служит *тривиальный характер* $\chi_{\mathbb{1}} \equiv 1$, отвечающий тривиальному представлению. Обратный к $\chi \in G^\wedge$ характер χ^{-1} действует по правилу $\chi^{-1}(g) \overset{\text{def}}{=} \chi(g)^{-1} = \chi(g^{-1})$.

Упражнение 6.19. Проверьте, что характер тензорного произведения одномерных представлений абелевой группы равен произведению их характеров, а характер двойственного представления обратен характеру исходного.

[1] Если $\operatorname{char}\Bbbk \nmid n$, то у многочлена $t^m - 1$ нет кратных корней, поскольку его производная $mt^{m-1} \neq 0$ не имеет с ним общих корней.

[2] См. предыдущую сноску.

6.5.1. Представление в пространстве функций на группе. Любая группа G действует на пространстве $\Bbbk^G$ функций $G \to \Bbbk$ по правилу $g : f(x) \mapsto f(g^{-1}x)$.

Упражнение 6.20. Убедитесь, что это правило задаёт гомоморфизм любой[1] группы G в группу линейных автоморфизмов пространства $\Bbbk^G$.

Если группа G абелева, то для каждого характера $\chi \in G^\wedge$ изотипная компонента $\Bbbk^G_\chi$ представления группы G в пространстве $\Bbbk^G$ состоит из всех таких функций $f : G \to \Bbbk$, что

$$f(g^{-1}x) = \chi(g) f(x) \text{ для всех } x, g \in G. \tag{6-12}$$

Полагая в этом равенстве $x = e$, получаем $f(g^{-1}) = \chi(g)\,f(e)$ для всех $g \in G$ и, переобозначая g^{-1} через h, заключаем, что $f(h) = f(e)\chi(h^{-1}) = f(e)\chi^{-1}(h)$ для всех $h \in G$. Иными словами, каждая функция (6-12) пропорциональна характеру χ^{-1}, обратному к χ в группе $G^\wedge$. Мы заключаем, что изотипное разложение пространства функций на группе G имеет вид

$$\Bbbk^G = \bigoplus\nolimits_{\chi \in G^\wedge} \Bbbk\,\chi\,,$$

т. е. каждое из неприводимых представлений группы G содержится в представлении группы G на пространстве функций $G \to \Bbbk$ с кратностью один. В частности, $|G^\wedge| = |G|$ и характеры образуют базис пространства функций на группе G со значениями в поле $\Bbbk$.

Упражнение 6.21. Для произвольной[2] группы G покажите, что любое множество различных гомоморфизмов $G \to \Bbbk^*$ линейно независимо в пространстве $\Bbbk^G$.

Теорема 6.4 (двойственность Понтрягина)
Для каждого $g \in G$ функция вычисления $\mathrm{ev}_g : G^\wedge \to \Bbbk$, $\chi \mapsto \chi(g)$, является характером группы $G^\wedge$, а отображение $G \to G^{\wedge\wedge}$, $g \mapsto \mathrm{ev}_g$ является изоморфизмом групп.

Доказательство. Первое утверждение проверяется выкладкой

$$\mathrm{ev}_g(\chi_1\chi_2) = \chi_1(g)\,\chi_2(g) = \mathrm{ev}_g(\chi_1)\cdot \mathrm{ev}_g(\chi_2)\,.$$

Равенства $\mathrm{ev}_{g_1g_2}(\chi) = \chi(g_1g_2) = \chi(g_1)\cdot\chi(g_2) = \mathrm{ev}_{g_1}(\chi)\ \mathrm{ev}_{g_2}(\chi)$ показывают, что отображение $g \mapsto \mathrm{ev}_g$ является гомоморфизмом групп. Если элемент $g \in G$ лежит в его ядре, то $\chi(g) = 1$ для всех $\chi \in G^\wedge$ и g тривиально действует в любом конечномерном представлении группы G. Поэтому $f(g^{-1}x) = f(x)$ для любой функции $f : G \to \Bbbk$, что возможно только при $g = e$. Поскольку $|G^{\wedge\wedge}| = |G|$, инъективность гомоморфизма $g \mapsto \mathrm{ev}_g$ влечёт его биективность. □

6.5.2. Преобразование Фурье. На самом деле двойственность Понтрягина имеет место для всех локально компактных топологических абелевых групп, и конечные абелевы группы являются лишь первыми, простейшими примерами таких групп. В качестве двойственной к произвольной локально компактной топологической абелевой группе G берётся группа G *непрерывных* гомоморфизмов $G \to \mathbb{C}^*$. Например, мультипликативная группа $\mathrm{U}(1)$ комплексных чисел единичной длины двойственна по Понтрягину аддитивной группе целых чисел $\mathbb{Z}$: каждому $n \in \mathbb{Z}$ отвечает характер $\mathrm{U}(1) \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^n$, а каждому $e^{2\pi i t} \in \mathrm{U}(1)$ — характер $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$, $m \mapsto e^{2\pi i m t}$. Аддитивная группа $\mathbb{R}$ вещественных чисел двойственна сама себе: каждому $\alpha \in \mathbb{R}$ отвечает характер $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$, $x \mapsto e^{2\pi i \alpha x}$.

[1] В том числе неабелевой.
[2] Не обязательно абелевой.

Каждая достаточно регулярная функция $f : G \to \mathbb{C}$ на локально компактной топологической абелевой группе G имеет единственное «линейное выражение» через характеры. Для группы $\mathrm{U}(1)$ это выражение представляет собою разложение функции $f : \mathrm{U}(1) \to \mathbb{C}$ в бесконечный ряд Фурье

$$f(z) = \sum\nolimits_{m \in \mathbb{Z}} f^\wedge(m)\, z^m$$

с коэффициентами $f^\wedge(m) \in \mathbb{C}$, которые можно воспринимать как функцию $f^\wedge : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ на двойственной по Понтрягину группе. Для аддитивной группы $\mathbb{R}$ «линейное выражение» через характеры означает представление функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ в виде интеграла Фурье

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^\wedge(\alpha)\, e^{2\pi i \alpha x}\, d\alpha\,,$$

в котором «семейство коэффициентов» $f^\wedge(\alpha)$ представляет собою функцию $f^\wedge : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ на двойственной по Понтрягину группе. Функции $f : G \to \mathbb{C}$ и $f^\wedge : G^\wedge \to \mathbb{C}$ однозначно восстанавливаются друг по другу по простым явным формулам, и с учётом двойственности Понтрягина $f^{\wedge\wedge} = f$. Инволюция $f \leftrightarrow f^\wedge$ называется *преобразованием Фурье*.

§7. Представления конечных групп.

Всюду в этом параграфе мы по умолчанию считаем, что G — конечная группа, $\Bbbk$ — алгебраически замкнутое поле, и $\operatorname{char}(\Bbbk) \nmid |G|$.

7.1. Групповая алгебра. Обозначим через $\Bbbk[G] = \Bbbk \otimes G$ векторное пространство с базисом G, состоящее из формальных линейных комбинаций $\sum_{g\in G} c_g g$ с коэффициентами $c_g \in \Bbbk$. Групповая операция в G задаёт на $\Bbbk[G]$ структуру ассоциативной $\Bbbk$-алгебры с умножением

$$\left(\sum\nolimits_g a_g g\right)\left(\sum\nolimits_h b_h h\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\nolimits_{gh} a_g b_h gh = \sum\nolimits_f c_f f\,, \quad \text{где} \quad c_f = \sum\nolimits_{gh=f} a_g b_h\,. \tag{7-1}$$

Эта алгебра называется *групповой алгеброй* группы G над полем $\Bbbk$. Группа G вложена в алгебру $\Bbbk[G]$ в качестве мультипликативной подгруппы. Всякое линейное представление $G \to \operatorname{GL}(V)$ однозначно продолжается по линейности до представления групповой алгебры $\Bbbk[G] \to \operatorname{End}(V)$, образ которого является одновременно и линейной, и ассоциативной оболочкой всех операторов из группы G.

Упражнение 7.1. Убедитесь, что правило $m \mapsto t^m$ задаёт изоморфизмы

$$\Bbbk[\mathbb{Z}] \simeq \Bbbk[t, t^{-1}] \quad \text{и} \quad \Bbbk[\mathbb{Z}/(n)] \simeq \Bbbk[t]/(t^n - 1)\,.$$

Если $\operatorname{char}(\Bbbk) \nmid |G|$, то в групповой алгебре $\Bbbk[G]$ имеется *оператор усреднения*

$$e_{\mathbb{1}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|} \sum\nolimits_{g\in G} g \in \Bbbk[G]\,. \tag{7-2}$$

Каждое линейное представление $\varrho : \Bbbk[G] \to \operatorname{End}(V)$ переводит элемент (7-2) в проектор (6-10) на подмодуль $V^G \subset V$ инвариантов представления ϱ.

Упражнение 7.2. Покажите, что элемент (7-2) лежит в центре[1] алгебры $\Bbbk[G]$.

7.1.1. Центр групповой алгебры

$$Z(\Bbbk[G]) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \Bbbk[G] \mid \forall\, x \in \Bbbk[G]\ zx = xz\} = \{z \in \Bbbk[G] \mid \forall\, g \in G\ gzg^{-1} = z\}$$

состоит из всех таких линейных комбинаций $z = \sum_h z_h h \in \Bbbk[G]$, коэффициенты которых z_h постоянны на классах сопряжённости. Поэтому элементы

$$z_C = \sum\nolimits_{h\in C} h\,, \tag{7-3}$$

где C пробегает множество $\operatorname{Cl}(G)$ классов сопряжённости группы G, образуют базис векторного пространства $Z(\Bbbk[G])$ над $\Bbbk$. В частности, $\dim_{\Bbbk} Z(\Bbbk[G]) = |\operatorname{Cl}(G)|$. Мы будем называть это число *числом классов*. Каждое линейное представление $\Bbbk[G] \to \operatorname{End}(V)$ переводит все центральные элементы групповой алгебры в эндоморфизмы пространства V, перестановочные со всеми операторами из группы G. Из теоремы Бернсайда[2] вытекает, что в любом неприводимом представлении над алгебраически замкнутым полем все центральные элементы действуют умножениями на скаляры.

[1] Напомню, что *центром* кольца или группы K называется множество всех элементов, мультипликативно коммутирующих со всеми элементами K.

[2] См. сл. 6.5 на стр. 68.

7.1.2. Изотипное разложение. Зафиксируем в каждом классе изоморфных неприводимых представлений группы G какого-нибудь представителя $\lambda : G \to \mathrm{GL}(U_\lambda)$ и обозначим множество всех таких представителей через $\mathrm{Ir}(G)$. По теор. 6.3 на стр. 71 и предл. 6.5 на стр. 69 всякий конечномерный G-модуль V обладает *изотипным разложением*

$$V = \bigoplus\nolimits_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} V_\lambda \,, \tag{7-4}$$

каждая компонента V_λ которого является суммой всех простых подмодулей в V, изоморфных данному $U_\lambda \in \mathrm{Ir}(G)$, и совпадает с образом канонической свёртки

$$c : \ \mathrm{Hom}_G(U_\lambda, W) \otimes U_\lambda \to V \,, \ \ \varphi \otimes u \mapsto \varphi(u) \,. \tag{7-5}$$

Для каждого $\lambda \in \mathrm{Ir}(G)$ обозначим через $I_\lambda \subset \Bbbk[G]$ λ-изотипную компоненту *левого регулярного представления* группы G в $\Bbbk[G]$ по правилу $g : x \mapsto gx$. Таким образом,

$$\Bbbk[G] = \bigoplus\nolimits_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} I_\lambda \,. \tag{7-6}$$

Будучи G-подмодулем левого регулярного представления, изотипная компонента I_λ является левым идеалом алгебры $\Bbbk[G]$. Так как правое умножение $h : \Bbbk[G] \xrightarrow{\sim} \Bbbk[G]$, $x \to xh$, на любой элемент $h \in G$ перестановочно с левым действием G на $\Bbbk[G]$, каждая изотипная компонента левого регулярного представления переводится в себя правым умножением на любой элемент группы. Таким образом, каждая изотипная компонента I_λ является двусторонним идеалом алгебры $\Bbbk[G]$. Так как $I_\lambda \cap I_\varrho = 0$ при $\lambda \neq \varrho$, и $I_\lambda I_\varrho \subset I_\lambda \cap I_\varrho$, мы заключаем, что

$$I_\lambda I_\varrho = 0 \quad \text{при} \quad \lambda \neq \varrho \,. \tag{7-7}$$

Обозначим через $e_\lambda \in I_\lambda$ компоненту единичного элемента $e \in G$ в разложении (7-6), так что

$$e = \sum\nolimits_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} e_\lambda \,, \quad \text{где} \quad e_\lambda \in I_\lambda \,. \tag{7-8}$$

Из (7-7) вытекает, что $e_\lambda e_\varrho = 0$ при $\varrho \neq \lambda$, откуда $e_\lambda^2 = e_\lambda$ для каждого λ в силу равенства $e^2 = e$, и $x_\lambda e_\lambda = e_\lambda x_\lambda = x_\lambda$ для всех $x_\lambda \in I_\lambda$ в силу равенств $x_\lambda e = e x_\lambda = x_\lambda$. Элементы e_λ называются *изотипными проекторами* или *неприводимыми идемпотентами* групповой алгебры $\Bbbk[G]$. Записывая произвольный элемент $x \in \Bbbk[G]$ в виде суммы $x = \sum_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} x_\lambda$ компонент $x_\lambda \in I_\lambda$ его разложения (7-6), мы заключаем, что $x e_\lambda = e_\lambda x = x_\lambda$. Тем самым, все неприводимые идемпотенты e_λ лежат в центре групповой алгебры, а каждая изотипная компонента $I_\lambda = (e_\lambda)$ является главным двусторонним идеалом, порождённым изотипным проектором e_λ.

Лемма 7.1

Любое линейное представление $\varrho : \Bbbk[G] \to \mathrm{End}(V)$ с нулевой λ-изотипной компонентой переводит изотипный идеал $I_\lambda \subset \Bbbk[G]$ в нуль.

Доказательство. Поскольку I_λ является левым идеалом в $\Bbbk[G]$, для любого вектора $v \in V$ подпространство $I_\lambda v = \{ fv \mid f \in I_\lambda \}$ является G-подмодулем в V, и правило $f \mapsto fv$ задаёт сюрьективный гомоморфизм G-модулей $I_\lambda \twoheadrightarrow I_\lambda v$. Поскольку такой гомоморфизм переводит λ-изотипный подмодуль в λ-изотипный, подмодуль $I_\lambda v$ содержится в изотипной компоненте V_λ представления V. Если она нулевая, то $I_\lambda v = 0$ для всех $v \in V$. $\square$

Теорема 7.1 (теорема Машке)
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ гомоморфизм алгебр

$$\mathfrak{rep}: \Bbbk[G] \to \prod\nolimits_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} \mathrm{End}(U_\lambda), \tag{7-9}$$

переводящий элемент $f \in \Bbbk[G]$ в набор операторов $\lambda_f : U_\lambda \to U_\lambda$, которыми он действует во всех неприводимых представлениях группы G, является изоморфизмом алгебр. Ограничение гомоморфизма (7-9) на изотипный идеал $I_\lambda \subset \Bbbk[G]$ задаёт изоморфизм алгебр $I_\lambda \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(U_\lambda)$.

Доказательство. Сначала установим инъективность гомоморфизма $\mathfrak{rep}$. Если элемент $h \in \Bbbk[G]$ действует нулевым оператором во всех неприводимых представлениях, то он действует нулевым оператором вообще на любом конечномерном G-модуле, в частности — в левом регулярном представлении. Но $f \cdot 1 = 0$ влечёт $f = 0$. Для доказательства последнего утверждения заметим, что по лем. 7.1 на стр. 76 каждое неприводимое представление $\lambda : \Bbbk[G] \to \mathrm{End}(U_\lambda)$ отображает в нуль все прямые слагаемые разложения (7-6) за исключением I_λ. Однако по теореме Бернсайда[1] оно эпиморфно. Поэтому ограничение $\mathfrak{rep}|_{I_\lambda} = \lambda|_{I_\lambda} : I_\lambda \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(U_\lambda)$ является изоморфизмом. В частности, неприводимых представлений U_λ имеется лишь конечное число, и каждое из них присутствует в изотипном разложении левого регулярного представления с кратностью $m_\lambda(\Bbbk[G]) = \dim(I_\lambda)/\dim(U_\lambda) = \dim \mathrm{End}(U_\lambda)/\dim U_\lambda = \dim U_\lambda$. Для доказательства сюрьективности гомоморфизма $\mathfrak{rep}$ остаётся заметить, что по уже доказанному для любого набора операторов $\varphi_\lambda \in \mathrm{End}(U_\lambda)$ найдутся такие элементы $f_\lambda \in I_\lambda$, что $\lambda(f_\lambda) = \varphi_\lambda$. Поскольку $\varrho(f_\lambda) = 0$ для всех неприводимых $\varrho \neq \lambda$, мы заключаем, что $\mathfrak{rep}(\sum_\lambda f_\lambda) = \prod_\lambda \varphi_\lambda$. □

Следствие 7.1
Число неприводимых представлений конечной группы G над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$, характеристика которого не делит $|G|$, конечно и равно числу классов сопряжённости $|\mathrm{Cl}(G)|$ группы G, а сумма квадратов размерностей всех неприводимых равна порядку $|G|$. При этом $m_\lambda(\Bbbk[G]) = \dim U_\lambda$.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из того, что размерность центра прямой суммы матричных алгебр равна количеству слагаемых, второе — из равенства размерностей правого и левого пространств в (7-9). □

Следствие 7.2
Неприводимые идемпотенты $e_\lambda \in I_\lambda$ из форм. (7-8) на стр. 76 образуют базис в центре групповой алгебры и действуют тождественным оператором в неприводимом представлении λ и нулевым оператором во всех остальных неприводимых представлениях. Произвольное линейное представление $\Bbbk[G] \to \mathrm{End}(V)$ переводит e_λ в G-инвариантный проектор на λ-изотипную компоненту $V_\lambda \subset V$.

Доказательство. Так как $x_\lambda e_\lambda = e_\lambda x_\lambda = x_\lambda$ для всех $x_\lambda \in I_\lambda$, изоморфизм

$$\mathfrak{rep}|_{I_\lambda} = \lambda|_{I_\lambda} : I_\lambda \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(U_\lambda)$$

переводит e_λ в единицу Id_{U_λ} алгебры $\mathrm{End}(U_\lambda)$. Все остальные неприводиные представления переводят $e_\lambda \in I_\lambda$ в нуль по лем. 7.1 на стр. 76. Это доказывает второе и третье утверждения.

[1] См. сл. 6.5 на стр. 68.

Первое утверждение вытекает из второго по теор. 7.1, ибо центр прямой суммы $\bigoplus \mathrm{End}(U_\lambda)$ состоит из наборов скалярных операторов $c_\lambda \mathrm{Id}_{U_\lambda}$, где $c_\lambda \in \Bbbk$, и операторы $\mathfrak{rep}(e_\lambda)$ образуют базис этого пространства. □

Пример 7.1 (простенькие представления симметрических групп)
Сопоставление перестановке $g \in S_n$ её циклового типа устанавливает биекцию между классами сопряжённых элементов в S_n и n-клеточными диаграммами Юнга[1]. Таким образом, неприводимые представления симметрической группы S_n биективно соответствуют диаграммам Юнга из n клеток. Каждая симметрическая группа S_n имеет два одномерных представления: тривиальное и *знаковое*, в котором каждая перестановка g действует умножением на знак $\mathrm{sgn}(g)$. Если характеристика поля не делит n, операторы симметризации и альтернирования

$$\mathrm{sym}_n = \frac{1}{n!}\sum\nolimits_{g\in S_n} g \quad \text{и} \quad \mathrm{alt}_n = \frac{1}{n!}\sum\nolimits_{g\in S_n} \mathrm{sgn}(g)\, g$$

являются S_n-инвариантными проекторами на тривиальную и знаковую изотипные компоненты любого S_n-модуля.

Упражнение 7.3. Убедитесь в этом.

Тавтологическое n-мерное представление группы S_n перестановками стандартных базисных векторов e_i пространства $\Bbbk^n$ имеет тривиальный одномерный подмодуль, порождённый суммой $e = e_1 + \ldots + e_n$ всех базисных векторов. Индуцированное $(n-1)$-мерное представление в фактор пространстве $\Bbbk^n/\Bbbk\, e$ называется *симплициальным*[2], поскольку над полем $\mathbb{R}$ его образ представляет собою полную группу правильного $(n-1)$-мерного симплекса в $\mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{R}^n/\mathbb{R}\cdot e$ с центром в нуле и вершинами в классах векторов e_i по модулю e.

Упражнение 7.4. Покажите, что симплициальное представление неприводимо.

Неприводимые представления группы S_3, имеющей ровно три класса сопряжённости, исчерпываются тривиальным и знаковым одномерными представлениями и двумерным представлением U_Δ группой треугольника, что согласуется с равенством $1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$. Инвариантный проектор на U_Δ-изотипную компоненту любого представления задаётся оператором

$$\pi_\Delta \overset{\text{def}}{=} 1 - \mathrm{sym}_3 - \mathrm{alt}_3 = 1 - \frac{1}{6}\sum\nolimits_{g\in S_3}(1+\mathrm{sgn}(g))g = 1 - \frac{1}{3}\left(1+\tau+\tau^2\right),$$

где $\tau = |123\rangle \in S_3$ это цикл длины 3.

Упражнение 7.5. Проверьте прямым вычислением в групповой алгебре, что π_Δ идемпотентен и лежит в центре, аннулирует тривиальный и знаковый модули, и тождественно действует в представлении группой треугольника.

У группы S_4, имеющей 5 классов сопряжённости, кроме одномерного тривиального, одномерного знакового и 3-мерного представления несобственной группой тетраэдра имеется ещё одно трёхмерное представление собственной группой куба, а также двумерное представление группой треугольника, возникающее из факторизации $S_4 \twoheadrightarrow S_3$ по подгруппе Клейна $V_2 \subset S_4$. Равенство $2\cdot 1^2 + 2\cdot 3^2 + 2^2 = 24$ указывает на то, что это хорошие кандидаты на полный список всех неприводимых представлений.

Упражнение 7.6. Покажите, что два трёхмерных представления неприводимы, не изоморфны и получаются друг из друга тензорным умножением на знаковое представление.

[1] Длины строк диаграммы суть длины независимых циклов, на которые раскладывается перестановка.
[2] При $n = 2$ оно совпадает со знаковым.

7.1.3. Скалярное произведение. Левое регулярное представление $L : \Bbbk[G] \hookrightarrow \mathrm{End}(\Bbbk[G])$, в котором каждый элемент $f \in \Bbbk[G]$ действует левым умножением $x \mapsto fx$, инъективно вкладывает алгебру $\Bbbk[G]$ в алгебру линейных эндоморфизмов векторного пространства $\Bbbk[G]$. На последней имеется каноническая симметричная билинейная форма — след композиции.

Упражнение 7.7. Убедитесь, что для конечномерного векторного пространства V билинейная форма $\mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(V) \to \Bbbk$, $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}(AB)$, принимает на паре разложимых операторов $A = \alpha \otimes a$ и $B = \beta \otimes b$ значение $\alpha(b) \cdot \beta(a)$, и выведите отсюда, что эта форма симметрична и невырождена.

Ограничение следа композиции на образ $L(\Bbbk[G]) \subset \mathrm{End}(\Bbbk[G])$ левого регулярного представления задаёт на $\Bbbk[G]$ симметричное скалярное произведение

$$(f, g) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{tr}(L_f L_g) = \mathrm{tr}(L_{fg}) . \tag{7-10}$$

Упражнение 7.8. Покажите, что левое и правое умножение на заданный элемент сопряжены другу другу относительно скалярного произведения: $(fg, h) = (f, gh)$ и выведите отсюда, что ортогональное дополнение к любому левому идеалу в $\Bbbk[G]$ является правым идеалом, а ортогональное дополнение к правому — левым[1].

Так как след левого умножения на единицу группы равен $|G|$, а умножение на любой другой элемент группы бесследно, скалярные произведения элементов группы задаются формулой

$$(g, h) = \begin{cases} |G| & \text{при } h = g^{-1} \\ 0 & \text{при } h \neq g^{-1}. \end{cases} \tag{7-11}$$

Таким образом, скалярное произведение невырождено[2], и двойственным базисом к базису из групповых элементов g является базис из элементов $g^* = g^{-1}/|G|$. В частности, каждый элемент $z \in \Bbbk[G]$ разлагается по базису из групповых элементов в виде

$$z = \frac{1}{|G|} \sum\nolimits_{g \in G} (g^{-1}, z) \cdot g \tag{7-12}$$

Изоморфизм $\mathfrak{rep} : \Bbbk[G] \xrightarrow{\sim} \prod_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} \mathrm{End}(U_\lambda)$ из теоремы Машке[3] позволяет выразить скалярное произведение (7-10) через следы действий в неприводимых представлениях.

Предложение 7.1 (формула Планшереля)
Для всех $f, g \in \Bbbk[G]$ $\quad (f, g) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} \dim(U_\lambda) \cdot \mathrm{tr}\big(\lambda(fg)\big)$.

Доказательство. Вычислим $\mathrm{tr}(L_{fg})$ в алгебре $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} \mathrm{End}(U_\lambda)$. Он равен сумме следов левого умножения на $\lambda(fg)$ в $\mathrm{End}(U_\lambda)$ по всем неприводимым представлениям λ. След левого умножения на матрицу M в матричной алгебре $\mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$ равен $n \cdot \mathrm{tr}(M)$, поскольку каждая матричная единица E_{ij} входит в ME_{ij} с коэффициентом m_{ii}. □

Следствие 7.3
Базисные идемпотенты составляют ортогональный базис центра групповой алгебры и имеют скалярные квадраты $(e_\lambda, e_\lambda) = \dim^2 U_\lambda$. □

[1] Тем самым, ортогональное дополнение к любому двустороннему идеалу тоже двусторонний идеал.
[2] Отметим, что если характеристика поля делит порядок группы, то это не так.
[3] См. теор. 7.1 на стр. 77.

Следствие 7.4
Разложение $\Bbbk[G] = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Ir}(G)} I_\lambda$ левого регулярного представления в прямую сумму изотипных подмодулей является *ортогональным* разложением, и неприводимые идемпотенты являются *ортогональными проекциями* единицы $e \in \Bbbk[G]$ на изотипные подпространства I_λ.

Следствие 7.5
Базисный идемпотент e_λ выражается через элементы группы по формуле

$$e_\lambda = \frac{\dim U_\lambda}{|G|} \sum\nolimits_{g\in G} \mathrm{tr}\left(\lambda(g^{-1})\right) \cdot g\,, \tag{7-13}$$

и каждое представление $\Bbbk[G] \to \mathrm{End}(V)$ переводит правую часть этого равенства в G-инвариантный проектор на λ-изотипный подмодуль $V_\lambda \subset V$.

Доказательство. Комбинируя формулу (7-12) с формулой Планшереля из предл. 7.1, получаем

$$e_\lambda = |G|^{-1} \sum_{g\in G)} (g^{-1}, e_\lambda) \cdot g = |G|^{-1} \sum_{g\in G)} \sum_{\mu\in\mathrm{Ir}(G)} \dim(U_\mu) \cdot \mathrm{tr}\big(\mu(g^{-1}e_\lambda)\big) = \frac{\dim(U_\lambda)}{|G|}\,\mathrm{tr}\big(\lambda(g^{-1})\big)$$

(в последнем равенстве мы воспользовались тем, что $\mu(g^{-1}e_\lambda) = \mu(g^{-1})\mu(e_\lambda)$, где $\mu(e_\lambda) = 0$ при $\mu \neq \lambda$, а $\lambda(e_\lambda) = \mathrm{Id}_{U_\lambda}$ по сл. 7.2 на стр. 77). □

7.2. Характеры. Линейная форма на $\Bbbk[G]$, сопоставляющая элементу групповой алгебры след его действия на пространстве V линейного представления $\varrho :\ G \to \mathrm{GL}(V)$ называется *характером*[1] представления ϱ и обозначается

$$\chi_\varrho :\ \Bbbk[G] \to \Bbbk\,, \quad \chi_\varrho(f) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{tr}\,\varrho(f)\,. \tag{7-14}$$

Так как след оператора не меняется при сопряжении, характер любого представления постоянен на классах сопряжённых элементов, и изоморфные представления имеют равные характеры. Формула (7-13) для проектора на λ-изотипную компоненту переписывается в терминах характеров как

$$e_\lambda = \frac{\dim U_\lambda}{|G|} \sum\nolimits_{g\in G} \chi_\lambda\left(g^{-1}\right) \cdot g\,, \tag{7-15}$$

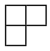
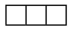
Пример 7.2 (характеры перестановочных представлений)
Если группа G действует на векторном пространстве перестановками базисных векторов, то значение характера такого представления на элементе $g \in G$ равно числу неподвижных элементов перестановки g. В частности, характер регулярного представления имеет вид

$$\chi_L(g) = \begin{cases} |G| & \text{если} \quad g = e \\ 0 & \text{если} \quad g \neq e\,. \end{cases}$$

Значение характера тавтологического представления симметрической группы S_n перестановками базисных векторов координатного пространства $\Bbbk^n$ на перестановке циклового типа λ равно $m_1(\lambda)$, т. е. числу строк длины 1 в диаграмме λ. Поскольку это представление является прямой суммой тривиального одномерного, с тождественно единичным характером, и симплициального, мы заключаем, что значение симплициального характера группы S_n на классе сопряжённости C_λ, состоящем из перестановок циклового типа λ, равно $\chi_\Delta(C_\lambda) = m_1(\lambda) - 1$.

[1] Не следует путать эти *аддитивные* характеры с мультипликативными характерами абелевых групп, обсуждавшимися в n° 6.5 на стр. 72.

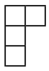
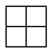
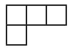
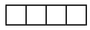
Упражнение 7.9. Убедитесь, что характеры неприводимых представлений симметрической группы S_3 задаются таблицей

классы			
число элементов	1	3	2
значения характеров:			
тривиального	1	1	1
знакового	1	−1	1
треугольного	2	0	−1

(7-16)

и что проекторы на изотипные компоненты, вычисленные при помощи этой таблицы по формуле (7-15), совпадают с описанными ранее в прим. 7.1 на стр. 78.

Пример 7.3 (неприводимые характеры S_4)
В геометрически заданных представлениях следы можно вычислять складывая собственные значения соответствующих поворотов и отражений. Например, значения характеров пяти представлений симметрической группы S_4 из прим. 7.1 задаются таблицей:

классы					
число элементов	1	6	3	8	6
значения характеров:					
тривиального	1	1	1	1	1
знакового	1	−1	1	1	−1
тетраэдрального	3	1	−1	0	−1
кубического	3	−1	−1	0	1
треугольного	2	0	2	−1	0

(7-17)

четвёртая строка которой объясняется так: след единицы равен размерности представления; одна транспозиция и пара независимых транспозиций действуют поворотами на 180° вокруг прямой, и собственные числа такого вращения суть 1, −1 и −1; цикл длины 3 и цикл длины 4 действуют поворотами на 120° и 90° соответственно, и их собственные числа суть 1, ω, ω^2 и 1, i, $-i$.

Лемма 7.2
Для любых двух представлений V, W группы G с характерами χ_U и χ_V

$$\chi_{V\oplus W}(g) = \chi_V(g) + \chi_W(g) \tag{7-18}$$

$$\chi_{V\otimes W}(g) = \chi_V(g)\chi_W(g) \tag{7-19}$$

$$\chi_{V^*}(g) = \chi_V(g^{-1}) \tag{7-20}$$

$$\chi_{\mathrm{Hom}(V,W)}(g) = \chi_V(g^{-1})\chi_W(g) \tag{7-21}$$

Доказательство. Поскольку любой оператор g из конечной группы полупрост, в пространствах V и W имеются базисы $\{v_i\}$ и $\{w_j\}$ из собственных векторов g. Пусть α_i и β_j — соответствующие наборы собственных чисел. Набор собственных чисел g в представлении $V \oplus W$ получается объединением этих наборов, откуда следует (7-18). Собственными числами g в представлении $V \otimes W$ являются всевозможные попарные произведения $\alpha_i\beta_j$, что даёт (7-19). Формула (7-20) следует из того, что матрица g в двойственном представлении транспонирована к матрице g^{-1} в исходном (см. n° 6.4). Последняя формула следует из двух предыдущих. □

Упражнение 7.10. Докажите, что производящие функции для характеров симметрических и внешних степеней представления $\varrho : G \to \mathrm{GL}(V)$ имеют вид:

$$\sum\nolimits_{\nu\geqslant 0} \chi_{\Lambda^\nu V}(g)\, t^\nu = \det(1 + t\,\varrho(g)) \quad \text{и} \quad \sum\nolimits_{\nu\geqslant 0} \chi_{S^\nu V}(g)\, t^\nu = \det(1 - t\,\varrho(g))^{-1}.$$

Следствие 7.6

Характер любого представления V выражается через неприводимые характеры χ_λ как

$$\chi_V = \sum\nolimits_{\lambda\in\mathrm{Ir}(G)} m_\lambda(V)\cdot\chi_\lambda \tag{7-22}$$

где $m_\lambda(V) = \dim V_\lambda / \dim U_\lambda$ обозначает кратность простого G-модуля U_λ в V. □

7.3. Преобразование Фурье и функции на группе. Так как любая линейная форма на векторном пространстве однозначно задаётся своими значениями на базисных векторах, пространство $\Bbbk^G$ функций $G \to \Bbbk$ двойственно пространству $\Bbbk[G]$: каждая функция $\varphi : G \to \Bbbk$ задаёт линейную форму $\varphi(\sum x_g \cdot g) = \sum x_g \varphi(g)$, $\Bbbk$-линейно продолжающую φ с G на $\Bbbk[G]$. С другой стороны, скалярное произведение[1] на $\Bbbk[G]$ задаёт невырожденную корреляцию

$$\Bbbk[G] \xrightarrow{\sim} \Bbbk[G]^*, \quad f \mapsto (f, *), \tag{7-23}$$

которая сопоставляет каждому вектору $f \in \Bbbk[G]$ линейную форму $\Bbbk[G] \to \Bbbk$, задаваемую скалярным умножением на этот вектор. Согласно формулам (7-11) и (7-12) на стр. 79 изоморфизм (7-23) переводит элементы $g^* = g^{-1}/|G| \in \Bbbk[G]$ в базис векторного пространства $\Bbbk[G]^*$, двойственный к состоящему из элементов группы базису в $\Bbbk[G]$. Комбинируя обратный к (7-23) изоморфизм $\Bbbk[G]^* \xrightarrow{\sim} \Bbbk[G]$ с описанным выше отождествлением $\Bbbk^G \simeq \Bbbk[G]^*$, получаем изоморфизм векторных пространств

$$\Phi : \Bbbk^G \xrightarrow{\sim} \Bbbk[G], \quad \varphi \mapsto \widehat{\varphi} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|}\sum\nolimits_{g\in G} \varphi\left(g^{-1}\right)\cdot g, \tag{7-24}$$

который называется *преобразованием Фурье*. По форм. (7-15) на стр. 80 преобразование Фурье переводит неприводимые характеры в кратности неприводимых идемпотентов:

$$\widehat{\chi}_\lambda = e_\lambda / \dim U_\lambda. \tag{7-25}$$

Перенесём с помощью изоморфизма (7-24) скалярное произведение из $\Bbbk[G]$ в пространство функций на группе, т. е. положим

$$(\varphi,\psi) \overset{\text{def}}{=} (\widehat{\varphi},\widehat{\psi}) = \frac{1}{|G|^2}\sum\nolimits_{g,h\in G} \varphi(g^{-1})\psi(h^{-1})(g,h) = \frac{1}{|G|}\sum\nolimits_{g\in G}\varphi(g^{-1})\psi(g). \tag{7-26}$$

Из формулы (7-25) и сл. 7.3 на стр. 79 немедленно вытекают следующие результаты, полностью сводящие анализ представлений к формальным линейным вычислениям с характерами.

[1] См. формулу (7-10) на стр. 79.

Следствие 7.7
Неприводимые характеры образуют ортонормальный базис в пространстве функций, постоянных на классах сопряжённых элементов. □

Следствие 7.8
$\dim \mathrm{Hom}_G(V, W) = (\chi_V, \chi_W)$ для всех G-модулей V и W.

Доказательство. Обе части равны $\sum_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} m_\lambda(V) m_\lambda(W)$: левая — по сл. 6.6 на стр. 70, правая — в силу сл. 7.6 и ортонормальности характеров. □

Следствие 7.9
Кратность вхождения неприводимого представления U_λ в произвольное представление V равна скалярному произведению их характеров: $m_\lambda(V) = (\chi_\lambda, \chi_V)$.

Доказательство. Скалярно умножаем обе части (7-22) на χ_λ и пользуемся ортонормальностью характеров. □

Следствие 7.10
Представление V неприводимо тогда и только тогда, когда $(\chi_V, \chi_V) = 1$.

Доказательство. В силу ортонормальности неприводимых характеров из сл. 7.6 вытекает, что $(\chi_V, \chi_V) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Ir}(G)} m_\lambda^2(V)$, где все $m_\lambda(V)$ целые неотрицательные. Такая сумма равна единице только если она состоит из одного слагаемого, равного единице. □

Упражнение 7.11. Опишите все неприводимые представления и вычислите их характеры для групп: а) D_n б) A_4 в) A_5 г) S_5.

Замечание 7.1. (скалярное произведение комплексных характеров) Так как собственные числа всех операторов из конечной группы G являются корнями $|G|$-й степени из единицы, в любом представлении группы G над полем $\mathbb{C}$ следы обратных друг другу элементов g и g^{-1} комплексно сопряжены. Поэтому $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ для любого характера χ. Это позволяет переписать скалярное произведение комплексных характеров в виде стандартной эрмитовой структуры:

$$(\chi_1, \chi_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_1(g)} \cdot \chi_2(g) \,.$$

Замечание 7.2. (скалярное произведение характеров группы S_n) Обратные друг другу перестановки $g, g^{-1} \in S_n$ имеют одинаковый цикловой тип и, стало быть, сопряжены в S_n. Поэтому $\chi(g^{-1}) = \chi(g)$ для любого характера χ. Это позволяет переписать скалярное произведение характеров симметрической группы виде стандартной евклидовой структуры:

$$(\chi_1, \chi_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_1(g) \cdot \chi_2(g) \,.$$

В частности, над полями $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ оно *положительно определено*.

Пример 7.4 (внешние степени симплициального представления S_n)
Покажем, что все внешние степени симплициального представления Δ симметрической группы S_n неприводимы. Разложение тавтологического представления τ группы S_n перестановками

базисных векторов в $\mathbb{Q}^n$ на неприводимые имеет вид $\tau = \Delta \oplus \mathbb{1}$. Поэтому его m-тая внешняя степень $\Lambda^m\tau \simeq \Lambda^m\Delta \oplus \Lambda^{m-1}\Delta$.

Упражнение 7.12. Покажите, что $\Lambda^m(U \oplus W) \simeq \bigoplus_{\alpha+\beta=m} \Lambda^\alpha U \otimes \Lambda^\beta W$.

Достаточно убедиться, что скалярный квадрат $\left(\chi_{\Lambda^m\tau}, \chi_{\Lambda^m\tau}\right) = 2$. В стандартном базисе

$$e_I = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_m}$$

пространства $\Lambda^m(\mathbb{k}^n)$ след перестановки σ равен сумме знаков $\operatorname{sgn} \sigma|_I$ ограничений перестановки σ на все такие подмножества I, что $\sigma(I) \subset I$. Поэтому

$$\left(\chi_{\Lambda^k\tau}, \chi_{\Lambda^k\tau}\right) = \frac{1}{n!} \sum\nolimits_{\sigma\in S_n} \left(\sum\nolimits_{I\,:\,\sigma(I)\subset I} \operatorname{sgn}(\sigma|_I)\right) \cdot \left(\sum\nolimits_{J\,:\,\sigma(J)\subset J} \operatorname{sgn}(\sigma|_J)\right) =$$
$$= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in S_n} \sum_{\substack{I,J\,:\,\sigma(I)\subset I\\ \sigma(J)\subset J}} \operatorname{sgn}(\sigma|_I)\cdot \operatorname{sgn}(\sigma|_J) = \frac{1}{n!} \sum_{I,J} \sum_{\substack{\sigma\,:\,\sigma(I)\subset I\\ \sigma(J)\subset J}} \operatorname{sgn}(\sigma|_I)\cdot \operatorname{sgn}(\sigma|_J)\,.$$

Совокупность всех таких перестановок σ, что $\sigma(I) \subset I$ и $\sigma(J) \subset J$, представляет собою прямое произведение симметрических групп, независимо переставляющих элементы в подмножествах $I \cap J$, $I \smallsetminus (I \cap J)$, $J \smallsetminus (I \cap J)$, $\{1, 2, \ldots, n\} \smallsetminus (I \cup J)$ и изоморфное $S_k \times S_{m-k} \times S_{m-k} \times S_{n-2m+k}$, где $k = k(I, J) = |I \cap J|$. Поскольку $\operatorname{sgn}(\sigma|_I) \cdot \operatorname{sgn}(s|_J) = \operatorname{sgn}(\sigma|_{I\cap J})^2 \cdot \operatorname{sgn}(\sigma|_{I\smallsetminus(I\cap J)}) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma|_{J\smallsetminus(I\cap J)}) = \operatorname{sgn}(\sigma|_{I\smallsetminus(I\cap J)}) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma|_{J\smallsetminus(I\cap J)})$, предыдущую сумму можно переписать как

$$\frac{1}{n!} \sum\nolimits_{I,J} k! \cdot (n-2m+k)! \cdot \left(\sum\nolimits_{g\in S_{m-k}} \operatorname{sgn}(g)\right) \cdot \left(\sum\nolimits_{h\in S_{m-k}} \operatorname{sgn}(h)\right). \tag{7-27}$$

Последние два множителя отличны от нуля только при $k = m$ и $k = m - 1$. Проверим, что вклад всех слагаемых с такими значениями $k = |I \cap J|$ в сумму (7-27) равен по единице в каждом из двух случаев. В первом случае $I = J$ и соответствующий кусок суммы (7-27) имеет вид

$$\frac{1}{n!} \sum\nolimits_I m! \cdot (n-m)!\,.$$

Он состоит из $\binom{n}{m}$ одинаковых слагаемых $\binom{m}{n}^{-1}$, сумма которых равна 1. Во втором случае $|I\cap J| = (m-1)$ и соответствующий кусок суммы (7-27) равен

$$\frac{1}{n!} \sum\nolimits_{I\cap J} \sum\nolimits_{i\neq j,\, i,j\notin I\cap J} (m-1)! \cdot (n-m-1)!\,.$$

Он состоит из $(n-m+1)(n-m)\binom{n}{m-1}$ одинаковых слагаемых вида

$$\frac{(m-1)! \cdot (n-m-1)!}{n!} = \binom{n}{m-1}^{-1} \cdot \frac{1}{(n-m+1)(n-m)}\,,$$

сумма которых тоже равна 1.

Пример 7.5 (кольцо представлений)

Целочисленные линейные комбинации неприводимых характеров конечной группы G образуют коммутативное подкольцо с единицей в алгебре $\mathbb{k}[G]$ всех функций $G \to \mathbb{k}$ с операциями поточечного сложения и умножения значений. Это подкольцо называется *кольцом представлений* группы G и обозначается $RG \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{\lambda\in\operatorname{Ir}(G)} \mathbb{Z} \cdot \chi_\lambda \subset \mathbb{k}^G$. Название связано с тем, что в силу предыдущего линейные комбинации неприводимых характеров с неотрицательными коэффициентами взаимно однозначно соответствуют представлениям группы G. При этом сложению и умножению в RG отвечают прямая сумма и тензорное произведение соответствующих представлений. Элементы кольца RG, содержащие отрицательные кратности неприводимых характеров, называются *виртуальными представлениями*.

7.4. Индуцированные представления. Пусть ассоциативная $\Bbbk$-алгебра A с единицей является подалгеброй ассоциативной $\Bbbk$-алгебры B с той же единицей, что и в A. Любое представление W алгебры B одновременно является и представлением алгебры A. Пространство W, рассматриваемое как модуль над A, называется *ограничением* B-модуля W на A и обозначается $\operatorname{res} W$ или $\operatorname{res}_A^B W$, если важно указать, о каких B и A идёт речь. Простейшим примером этой ситуации является овеществление комплексных векторных пространств: если $\Bbbk = A = \mathbb{R}$, а $B = \mathbb{C}$, то n-мерное векторное пространство W над полем $\mathbb{C}$ может рассматриваться как вещественное векторное пространство $W_{\mathbb{R}} = \operatorname{res}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}} W$ размерности $2n$.

Наоборот, по любому A-модулю V можно построить B-модуль $\operatorname{ind} V = B \otimes_A V$, который называется *индуцированным* с A-модуля V и определяется как фактор тензорного произведения векторных пространств $B \otimes V$ по подпространству, порождённому всевозможными разностями

$$ba \otimes v - b \otimes av\,, \text{ где } b \in B\,,\ a \in A\,,\ v \in V\,.$$

По построению, в пространстве $B \otimes_A V$ выполняются равенства $ba \otimes_A v = b \otimes_A av$, т. е. элементы алгебры A «проносятся» через знак тензорного произведения. Поэтому такое произведение называется *тензорным произведением над* A. Структура модуля над B задаётся правилом

$$b\,(b' \otimes v) \overset{\text{def}}{=} (bb')\otimes v\,.$$

Простейшим примером этой ситуации является комплексификация вещественного векторного пространства: если $\Bbbk = A = \mathbb{R}$, а $B = \mathbb{C}$, то из n-мерного вещественного векторного пространства V можно изготовить комплексное векторное пространство $\mathbb{C} \otimes V$ той же размерности n, но уже над полем $\mathbb{C}$. Если важно указать алгебры B и A явно, мы пишем $\operatorname{ind}_A^B V$.

Предложение 7.2
Отображение $\tau_A : V \to B \otimes_A V\,,\ v \mapsto 1 \otimes_A v$, является A-гомоморфизмом, и для любого A-гомоморфизма $\varphi : V \to W$ в любой B-модуль W существует единственный такой B-гомоморфизм $\psi : B \otimes_A V \to W$, что $\psi \circ \tau_A = \varphi$. Иначе говоря, для всех A-модулей V и B-модулей W имеется канонический изоморфизм

$$\operatorname{Hom}_B(\operatorname{ind} V, W) ⥲ \operatorname{Hom}_A(V, \operatorname{res} W)\,, \quad \psi \mapsto \psi \circ \tau_A\,. \tag{7-28}$$

Доказательство. Для каждого B-гомоморфизма $\psi : B \otimes_A U \to V$ композиция

$$\varphi = \psi \circ \tau_A : V \to W\,, \quad v \mapsto \psi(1 \otimes_A u)\,,$$

является A-гомоморфизмом, поскольку $\varphi(av) = \psi(1 \otimes_A av) = \psi(a \otimes_A v) = a\psi(1 \otimes_A v) = a\varphi(v)$. Тем самым, отображение (7-28) определено корректно. Для данного A-гомоморфизма $\varphi : V \to W$ такой B-гомоморфизм $\psi : B \otimes_A V \to W$, что $\varphi = \psi \circ \tau_A$, обязан действовать на разложимые тензоры по правилу $b \otimes v \mapsto b\varphi(v)$. Тем самым, он единствен. Будучи билинейным по b и v, это правило корректно задаёт линейный оператор $B \otimes V \to W$, который переводит соотношения $ba \otimes v - b \otimes av$ в нуль: $ba\psi(v) - b\psi(av) = 0$ в силу A-линейности ψ. Поэтому он корректно спускается до линейного отображения $B \otimes_A V \to W$, перестановочность которого с левым умножением на элементы $b \in B$ очевидна. □

Упражнение 7.13. Убедитесь, что универсальное свойство из предл. 7.2 определяет B-модуль $B \otimes_A V$ вместе с A-линейным отображением τ_A однозначно с точностью до единственного B-линейного изоморфизма, перестановочного с τ_A, и проверьте, что ограничение и индуцирование представлений перестановочны с прямыми суммами и с тензорными произведениями представлений.

7.4.1. Индуцированные представления групп. В ситуации, когда $B = \Bbbk[G]$ и $A = \Bbbk[H]$ являются групповыми алгебрами конечной группы G и произвольной её подгруппы $H \subset G$, ограничение и индуцирование сопоставляют каждому линейному представлению $\varrho : G \to \mathrm{GL}(W)$ его *ограничение* $\operatorname{res}\varrho \stackrel{\text{def}}{=} \varrho|_H : H \to \mathrm{GL}(W)$ на подгруппу H, а каждому линейному представлению $\lambda : H \to \mathrm{GL}(V)$ — *индуцированное* им представление $\operatorname{ind}\lambda : G \to \mathrm{GL}(\Bbbk[G] \otimes_{k[H]} V)$ группы G, так что имеет место канонический изоморфизм $\mathrm{Hom}_G(\operatorname{ind} V, W) \simeq \mathrm{Hom}_H(V, \operatorname{res} W)$. Если нужно подчеркнуть, о каких G и $H \subset G$ идёт речь, мы пишем res^G_H и ind^G_H. На языке характеров сопряжение и индуцирование являются встречными гомоморфизмами колец представлений

$$\mathfrak{rep}(H) \underset{\text{res}}{\overset{\text{ind}}{\rightleftarrows}} RG$$

сопряжёнными относительно канонического скалярного произведения (7-26) на $\Bbbk^G$

$$(\chi_{\operatorname{ind} V}, \chi_W)_{\Bbbk^G} = (\chi_V, \chi_{\operatorname{res} W})_{\Bbbk^H} .$$

В частности, кратность неприводимого G-модуля $\lambda : G \to \mathrm{GL}(U)$ в разложении представления, индуцированного с неприводимого H-модуля $\mu : H \to \mathrm{GL}(S)$, равна кратности S в разложении ограничения V на подгруппу H:

$$m_\lambda(\operatorname{res}\mu) = m_\mu(\operatorname{ind}\lambda) . \tag{7-29}$$

Это равенство называется *законом взаимности Фробениуса*[1].

Предложение 7.3 (транзитивность индуцирования)
Для пары вложенных подгрупп $K \subset H \subset G$ и любого представления $\varrho : K \to \mathrm{GL}(U)$ имеется канонический изоморфзм G-модулей $\operatorname{ind}^G_H \operatorname{ind}^H_K U \xrightarrow{\sim} \operatorname{ind}^G_H U$.

Доказательство. Поскольку для любого G-модуля W имеется канонический изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_K(U, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_H(\operatorname{ind}^H_K U, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_G(\operatorname{ind}^G_H \operatorname{ind}^H_K U, W), \quad \psi \mapsto \psi \circ \tau_K \circ \tau_H ,$$

отображение $\tau_K \circ \tau_H : U \to \operatorname{ind}^G_H \operatorname{ind}^H_K U$ универсально в смысле предл. 7.2. По упр. 7.13 оно отождествляется с отображением $U \to \operatorname{ind}^G_K U$ единственным изоморфизмом. □

7.4.2. Строение индуцированного представления. Тензорное произведение

$$\Bbbk[G] \otimes U = \bigoplus\nolimits_{g \in G} (\Bbbk \cdot g) \otimes V$$

представляет собою прямую сумму $|G|$ копий пространства V, занумерованных элементами $g \in G$. Факторизация по соотношениям $(gh) \otimes v = g \otimes (vu)$ склеивает между собою все прямые слагаемые, занумерованные элементами из одного смежного класса gH так, что $gh \otimes v$ отождествляется с $g \otimes hv$. В результате тензорное произведение над $\Bbbk[H]$ оказывается изоморфно прямой сумме $r = [G : H]$ копий пространства V занумерованных какой-либо фиксированной системой $\{g_1, \dots, g_r\}$ представителей классов смежности

$$\Bbbk[G] \bigoplus\nolimits_{\Bbbk[H]} V \simeq g_1 V \oplus g_2 V \oplus \ldots \oplus g_r V . \tag{7-30}$$

[1] Или *двойственностью Фробениуса*.

В этом разложении каждое $g_\nu V$ представляет собой копию пространства V, а стоящий слева значок g_ν указывает, что данная копия соответствует смежному классу $g_\nu H$. Если писать $g_\nu v$ для обозначения вектора $v \in V$, лежащего в g_ν-й копии $g_\nu V$ пространства V, то каждый вектор $w \in \Bbbk[G] \otimes_{k[H]} V$ однозначно запишется в виде суммы $\sum_{\nu=1}^{r} g_\nu v_\nu$, где $v_\nu \in V$. Левое умножение на элемент $g \in G$ в группе G осуществляет перестановку смежных классов: для каждых $g \in G$ и $\nu \in \{1, \dots, r\}$ найдутся единственные такие $h = h(g,\nu) \in H$ и $\mu = \mu(g,\nu) \in \{1, \dots, r\}$, что $gg_\nu = g_\mu h$. В этих обозначениях действие элемента $g \in G$ на вектор $g_\nu v \in g_\nu V$ происходит по правилу $gg_\nu v = g_\mu hv \in g_\mu V$, где $hv \in V$ есть результат действия оператора $h \in H$ на вектор $v \in V$ согласно представлению подгруппы H в $\mathrm{GL}(V)$.

Пример 7.6
Пусть $G = S_3$ и $H \simeq S_2$ — подгруппа, порождённая транспозицией $\sigma = |12\rangle$. В качестве представителей смежных классов G/H выберем e, τ и τ^2, где $\tau = |123\rangle$. Представление $W = \operatorname{ind} \mathbb{1}$, индуцированное тривиальным одномерным представлением, трёхмерно с базисом e, τ, τ^2 и образующие $\sigma, \tau \in S_3$ действуют на этот базис матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

соответственно. Тем самым, W изоморфно тавтологическому представлению S_3 и является суммой тривиального одномерного представления и двумерного представления группой треугольника. Представление $W' = \operatorname{ind} \operatorname{sgn}$, индуцированное одномерным знаковым представлением, также трёхмерно с тем же базисом, но σ и τ теперь действуют на него матрицами

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Это представление является прямой суммой знакового представления в одномерном пространстве, натянутом на $e + \tau + \tau^2$ и треугольного представления в ортогональной плоскости. Представление, индуцированное с двумерного левого регулярного представления $\Bbbk[S_2]$, это 6-мерное левое регулярное представление группы S_3 в $\Bbbk[S_3] = e \cdot \Bbbk[S_2] \oplus \tau \cdot \Bbbk[S_2] \oplus \tau^2 \cdot \Bbbk[S_2]$.

Упражнение 7.14. Убедитесь, что регулярное представление любой подгруппы всегда индуцирует регулярное представление объемлющей группы.

Предложение 7.4
Если группа G имеет абелеву подгруппу $H \subset G$, то размерность любого неприводимого представления группы G не превышает[1] индекса $[G : H]$.

Доказательство. Пусть представление U группы G неприводимо, и L — одномерный H-подмодуль в $\operatorname{res} U$. В силу взаимности Фробениуса $\operatorname{ind} L$ содержит U с ненулевой кратностью, откуда $\dim U \leqslant \dim \operatorname{ind} L = [G : H]$. □

[1]Ниже, в **??** на стр. **??** мы увидим, что если абелева подгруппа H нормальна в G, то размерности всех неприводимых группы G делят индекс $[G : H]$.

Предложение 7.5

Пусть пересечение класса сопряжённых элементов $C \subset G$ с подгруппой $H \subset G$ раскладывается в объединение $C \cap H = D_1 \sqcup \ldots \sqcup D_m$ различных классов H-сопряжённости. Тогда для любого представления V подгруппы H характер индуцированного им представления принимает на классе C значение $\chi_{\operatorname{ind} V}(C) = [G : H] \cdot \sum_{i=1}^{m} \chi_V(D_i) \cdot |D_i| / |C|$. В частности, для тривиального одномерного представления $V = \mathbb{1}$ имеем

$$\chi_{\operatorname{ind} \mathbb{1}}(C) = [G : H] \cdot |C \cap H| / |C| . \tag{7-31}$$

Доказательство. Поскольку элемент $g \in C$ переставляет слагаемые $g_\nu V$ разложения (7-30), след его действия равен сумме следов действий на тех слагаемых $g_\nu V$, которые остаются при этой перестановке на месте, что означает равенство $gg_\nu = g_\nu h$ для некоторого $h = g_\nu^{-1} g g_\nu \in H$. При этом действие элемента g на таком слагаемом $g_\nu V$ совпадает с действием элемента h на пространстве V, и его след равен $\chi_V(h) = \chi_V(g_\nu^{-1} g g_\nu)$. Поэтому

$$\chi_{\operatorname{ind} V}(g) = \sum_{\substack{\nu:\\ g_\nu^{-1} g g_\nu \in H}} \chi_V(g_\nu^{-1} g g_\nu) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{s \in G:\\ s^{-1} g s \in H}} \chi_V(s^{-1} g s) = \frac{1}{|H|} \sum_{i=1}^{m} \sum_{\substack{s \in G:\\ s^{-1} g s \in D_i}} \chi_V(D_i) ,$$

где во втором равенстве мы заменили каждое слагаемое левой суммы на $|H|$ равных друг другу слагаемых, получающихся заменой элемента g_ν на всевозможные $s \in g_\nu H$, а в третьем — собрали вместе все слагаемые, у которых $s^{-1} g s$ лежит в одном классе H-сопряжённости D_i. Поскольку различных произведений $s^{-1} g s \in D_i$ имеется $|D_i|$ штук, и по формуле для длины орбиты каждое из них получается из $|G| / |C|$ различных $s \in G$, мы заключаем, что $\chi_{\operatorname{ind} V}(g) = |H|^{-1} \sum_{i=1}^{m} \chi_V(D_i) \cdot |D_i| \cdot |G| / |C|$. □

Упражнение 7.15 (формула проекции). Убедитесь, что для любых G-модуля W и H-модуля V имеется канонический изоморфизм G-модулей[1] $\operatorname{ind}\big((\operatorname{res} W) \otimes V\big) \simeq W \otimes \operatorname{ind} V$.

7.4.3. Коиндуцированные представления. В теории представлений ассоциативных алгебр имеется ещё один способ сопоставить A-модулю V модуль над алгеброй B, содержащей A в качестве подалгебры, а именно — *коиндуцированный модуль* $\operatorname{coind} V \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}_A(B, V)$, на котором имеется *левое* действие алгебры B *правым* умножением аргумента $b : \psi \mapsto b\psi$, где $b\psi(b') \overset{\text{def}}{=} \psi(b'b)$.

Упражнение 7.16. Проверьте равенство $(b_1 b_2)\, \psi = b_1 (b_2 \psi)$.

Коиндуцированный модуль обладает двойственным к описанному в предл. 7.2 универсальным свойством: каноническое отображение $\tau^A : \operatorname{Hom}_A(B, V) \to V$, $\varphi \mapsto \varphi(1)$, A-линейно, и для любых B-модуля W и A-гомоморфизма $\varphi : W \to V$ существует единственный такой B-гомоморфизм $\psi : W \to \operatorname{Hom}_A(B, V)$, что $\tau^A \circ \psi = \varphi$, т. е. для всех A-модулей V и B-модулей W имеется канонический изоморфизм

$$\operatorname{Hom}_B (W, \operatorname{coind} V) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A (\operatorname{res} W, V) , \quad \psi \mapsto \tau^A \circ \psi , \tag{7-32}$$

сопоставляющий B-гомоморфизму $\psi : W \to \operatorname{Hom}_A(B, V)$, $w \mapsto \psi_w$, A-гомоморфизм

$$\tau^A \circ \psi : W \to V , \quad w \mapsto \psi_w(1) .$$

[1]Тензорные произведения в обеих частях суть тензорные произведения представлений групп H и G, описанные в n° 6.4 на стр. 70.

Обратное отображение переводит A-гомоморфизм $\varphi\colon W \to V$ в B-гомоморфизм

$$\psi\colon W \to \mathrm{Hom}_A(B,V), \quad w \mapsto \psi_w, \quad \text{где} \quad \psi_w\colon B \to V, \quad b \mapsto \varphi(bw).$$

Упражнение 7.17. Убедитесь, что оба отображения корректно определены и взаимно обратны.

В ситуации, когда $A = \Bbbk[H]$, $B = \Bbbk[G]$ суть групповые алгебры конечной группы G и её подгруппы $H \subset G$, преобразование Фурье[1] индуцирует изоморфизм векторных пространств

$$\Phi \otimes \mathrm{Id}_V\colon \ \mathrm{Hom}(\Bbbk[G],V) \simeq \Bbbk[G]^* \otimes V \xrightarrow{\sim} \Bbbk[G] \otimes V,$$

который переводит разложимый оператор $\varphi = \xi \otimes v\colon g \mapsto \xi(g)\,v$ ранга 1 в оператор

$$\hat{\xi} \otimes v = \frac{1}{|G|}\sum\nolimits_{g\in G} \xi(g^{-1})\,g \otimes v = \frac{1}{|G|}\sum\nolimits_{g\in G} g \otimes (\xi(g^{-1})\,v) = \frac{1}{|G|}\sum\nolimits_{g\in G} g \otimes \varphi(g^{-1})$$

и, стало быть, действует на произвольный линейный оператор $\varphi\colon \Bbbk[G] \to V$ по правилу

$$\varphi \mapsto \widehat{\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|}\sum\nolimits_{g\in G} g^{-1} \otimes \varphi(g).$$

Оператор $\widehat{\varphi}$ называется *преобразованием Фурье* оператора φ. Преобразование Фурье перестановочно с левым действием G, ибо для всех $s \in G$

$$\widehat{s\varphi} = \frac{1}{|G|}\sum\nolimits_{g\in G} g^{-1} \otimes s\varphi(g) = \frac{1}{|G|}\sum\nolimits_{g\in G} g^{-1} \otimes \varphi(gs) = \frac{1}{|G|}\sum\nolimits_{g\in G} sg^{-1} \otimes \varphi(g) = s\widehat{\varphi},$$

а его композиция с проекцией $\Bbbk[G] \otimes V \twoheadrightarrow \Bbbk[G] \otimes_{\Bbbk[H]} V$ устанавливает изоморфизм подпространства H-инвариантных операторов $\mathrm{Hom}_H(\Bbbk[G],V) \subset \mathrm{Hom}(\Bbbk[G],V)$ с индуцированным G-модулем $\mathrm{ind}\,V = \Bbbk[G] \otimes_{\Bbbk[H]} V$.

Упражнение 7.18. Докажите последнее утверждение.

Таким образом, индуцированное и коиндуцированное представления конечной группы канонически изоморфны друг другу посредством преобразования Фурье.

[1] См. формулу (7-24) на стр. 82.

§8. Представления симметрических групп

8.1. Действие S_n на заполненных диаграммах Юнга. Будем называть диаграмму Юнга λ, в каждой клетке которой стоит какая-нибудь буква[1] алфавита $\{1, \dots, m\}$ *заполнением* формы λ. Заполнение T называется *стандартным*, если $m = |\lambda|$, т. е. число букв совпадает с числом клеток диаграммы, и каждая буква используется ровно один раз. Заполнение T называется *таблицей*, если стоящие в клетках диаграммы буквы нестрого возрастают слева направо в каждой строке и строго возрастают сверху вниз в каждом столбце. Число всех таблиц формы λ в алфавите $\{1, \dots, m\}$ обозначается через $d_\lambda(m)$, а число всех стандартных таблиц формы λ — через d_λ. Числа $d_\lambda(m) \neq 0$ только для диаграмм из $\leqslant m$ строк. Как мы видели в прим. 5.1 на стр. 53

$$\sum_\lambda d_\lambda d_\lambda(m) = m^n \quad \text{и} \quad \sum_\lambda d_\lambda^2 = n!\,, \tag{8-1}$$

где суммирование в обоих случаях идёт по всем диаграммам Юнга веса $|\lambda| \overset{\text{def}}{=} \sum \lambda_i = n$. С каждым стандартным заполнением T формы $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ и веса n связаны *строчная подгруппа* $R_T \subset S_n$, состоящая из всех перестановок, переводящих элементы каждой строки заполнения T в элементы из той же самой строки, и *столбцовая подгруппа* $C_T \subset S_n$, состоящая из всех перестановок, переводящих элементы каждого столбца заполнения T в элементы из того же самого столбца. Таким образом, $R_T \simeq S_{\lambda_1} \times \dots \times S_{\lambda_k}$ и $C_T \simeq S_{\lambda_1^t} \times \dots \times S_{\lambda_m^t}$, где $\lambda^t = (\lambda_1^t, \dots, \lambda_m^t)$ здесь и далее означает транспонированную к λ диаграмму.

Упражнение 8.1. Убедитесь, что S_n транзитивно действует на стандартных заполнениях фиксированной формы λ и что $R_{gT} = gR_Tg^{-1}$ и $C_{gT} = gC_Tg^{-1}$ для всех $g \in S_n$.

Мы пишем $\lambda \trianglerighteq \mu$ и говорим, что диаграмма λ *доминирует* диаграмму μ, если[2]

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_k \geqslant \mu_1 + \dots + \mu_k \text{ при всех } k \in \mathbb{N}\,.$$

Мы пишем $\lambda > \mu$, если $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ лексикографически больше, чем $\mu = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$. Отметим, что диаграмма μ не может доминировать никакую диаграмму $\lambda > \mu$, и что в отличие от доминирования лексикографический порядок является линейным.

Лемма 8.1 (ключевая комбинаторная лемма)
Пусть стандартное заполнение T формы λ и стандартное заполнение U формы μ имеют одинаковый вес $|\lambda| = |\mu|$, и диаграмма μ не является строго доминирующей диаграмму λ. Тогда имеет место ровно одна из двух взаимоисключающих возможностей:

- либо найдутся два числа, стоящие в одной строке заполнения T и в одном столбце заполнения U
- либо $\lambda = \mu$ и $pT = qU$ для некоторых $p \in R_T$ и $q \in C_U$.

Доказательство. Пусть все элементы каждой из строк заполнения T находятся в разных столбцах заполнения U. Из того, что все элементы первой строки T лежат в разных столбцах U, вытекает неравенство $\lambda_1 \leqslant \mu_1$ и существование перестановки $q_1 \in C_U$, переводящей все элементы из первой строки заполнения T в первую строку заполнения q_1U. Из того, что все элементы

[1] При этом могут использоваться не все буквы, а используемые буквы могут повторяться.
[2] См. обсуждение перед упр. 5.3 на стр. 56 и само это упражнение.

второй строки T тоже лежат в разных столбцах U, вытекает существование такой не затрагивающей элементов из первой строки заполнения T перестановки $q_2 \in C_{q_1U} = C_U$, что в заполнении q_2q_1U каждый элемент второй строки заполнения T стоит либо во второй строке, либо в первой[1], что влечёт неравенство $\lambda_1 + \lambda_2 \leqslant \mu_1 + \mu_2$. Продолжая в том же духе, мы получим последовательность перестановок $q_1, \dots, q_k \in C_U$, где k — количество строк в диаграмме μ и каждая перестановка $q_i \in C_{q_{i-1}\dots q_1U} = C_U$ оставляет на месте все элементы из первых $i-1$ строк заполнения T, а также все те элементы из i-той строки T, которые в заполнении $q_{i-1}\dots q_1U$ лежат в столбцах меньшей, чем i высоты, а все остальные элементы из i-той строки T переводит в i-тую строку заполнения $q_iq_{i-1}\dots q_1U$. В частности, при каждом i выполняется неравенство $\lambda_1 + \dots + \lambda_i \leqslant \mu_1 + \dots + \mu_i$, что по условию леммы возможно только при $\lambda = \mu$. Но тогда каждая перестановка q_i переводит элементы i-той строки заполнения T в точности в i-тую строку заполнения $q_i \dots q_1U$. Поэтому $q_k \dots q_1U = pT$ для некоторого $p \in R_T$. □

Следствие 8.1

Перестановка $g \in S_n$ тогда и только тогда имеет вид $g = pq$ для некоторых $p \in R_T$, $q \in C_T$, когда никакие два элемента из одной строки T не лежат в одном столбце gT, и в этом случае представление перестановки $g \in S_n$ в виде $g = pq$ с $p \in R_T$ и $q \in C_T$ единственно.

Доказательство. Для любых $p \in R_T$ и $q \in C_T$ элементы из одной строки заполнения T лежат в разных столбцах заполнения qT, и p переставляет эти элементы между собою, оставляя их лежать в разных столбцах заполнения pqT. Наоборот, если никакие два элемента из одной строки заполнения T не лежат в одном столбце заполнения $U = gT$, то по лем. 8.1 найдутся такие $p \in R_T$ и $q' \in C_U$, что $pT = q'U = q'gT$. Поэтому $p = q'g$. Записывая перестановку $q' \in C_{gT} = gC_Tg^{-1}$ в виде gqg^{-1}, где $q \in C_T$, получаем $g = pq^{-1}$, как и требовалось. Единственность разложения $g = pq$ вытекает из того, что $R_T \cap C_T = \{e\}$. □

Упражнение 8.2. Покажите, что перестановка $g \in S_n$ имеет вид $g = q'p'$ для некоторых $q' \in C_T$, $p' \in R_T$ если и только если никакие два элемента из одной строки gT не лежат в одном столбце T, и в этом случае представление $g = q'p'$ тоже единственно.

8.2. Симметризаторы Юнга. Лежащие в групповой алгебре $\mathbb{C}[S_n]$ элементы

$$r_T = \sum\nolimits_{\sigma\in R_T} \sigma\,, \quad c_T = \sum\nolimits_{\sigma\in C_T} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\,, \tag{8-2}$$

$$s_T = r_Tc_T = \sum\nolimits_{p\in R_T} \sum\nolimits_{q\in C_T} \operatorname{sgn}(q)pq \tag{8-3}$$

называются, соответственно, *строчным*, *столбцовым* и *полным симметризаторами Юнга*. Они обладают следующими очевидными свойствами:

$$\forall g \in S_n \quad r_{gT} = gr_Tg^{-1}\,, \quad c_{gT} = gc_Tg^{-1} \quad \text{и} \quad s_{gT} = gs_Tg^{-1} \tag{8-4}$$

$$\forall p \in R_T \; pr_T = r_Tp = r_T \quad \text{и} \quad \forall q \in C_T \; \operatorname{sgn}(q)qc_T = \operatorname{sgn}(q)c_Tq = c_T \tag{8-5}$$

$$\forall p \in R_T \quad \text{и} \quad \forall q \in C_T \quad \operatorname{sgn}(q)ps_Tq = s_T\,. \tag{8-6}$$

Замечательно, что полный симметризатор $s_T \in \mathbb{C}[S_n]$ однозначно с точностью до пропорциональности *определяется* свойством (8-6).

[1]Последнее происходит, когда этот элемент изначально находится в столбце высоты 1.

Лемма 8.2

Векторное подпространство $E_T = \{f \in \mathbb{C}[S_n] \mid \forall p \in R_T\ \forall q \in C_T\ \ \operatorname{sgn}(q)\, pfq = f\}$ одномерно и линейно порождается симметризатором s_T .

Доказательство. Пусть $f = \sum_{g\in S_n} x_g g \in E_T$. Покажем, что $f = x_e s_T$. Условие $\operatorname{sgn}(q)\, pfq = f$ означает, что $x_{pgq} = \operatorname{sgn}(q) x_g$ для всех $g \in S_n$, $p \in R_T$ и $q \in C_T$. Полагая $g = e$, заключаем, что $x_{pq} = \operatorname{sgn}(q) x_e$ и $f = x_e s_T + \sum_{g\notin R_T C_T} x_g g$. Остаётся убедиться, что в последней сумме все $x_g = 0$. Если $g \notin R_T C_T$, то по сл. 8.1 найдутся два элемента, лежащие в одной строке заполнения T и в одном столбце заполнения gT. Транспозиция $\tau \in S_n$ этих двух элементов лежит и в R_T, и в $C_{gT} = gC_T g^{-1}$. Из второго вытекает, что $g^{-1}\tau g \in C_T$. Полагая $p = \tau$, $q = g^{-1}\tau g$ в равенстве $x_{pgq} = \operatorname{sgn}(q) x_g$, получаем $x_g = -x_g$, откуда $x_g = 0$. □

Лемма 8.3

Имеют место равенства $s_T\mathbb{C}[S_n]\, s_T = \mathbb{C}\, s_T$ и $s_T^2 = n_\lambda s_T$, где число $n_\lambda = n!/\dim\left(\mathbb{C}[S_n]\, s_T\right)$ рационально, положительно и зависит только от формы $\lambda = \lambda(T)$ заполнения T.

Доказательство. Из равенств (8-5) – (8-6) вытекает, что при любом $f \in \mathbb{C}[S_n]$ элемент $s_T f s_T$ обладает свойством (8-6) и, тем самым, лежит в одномерном пространстве $E_T = \mathbb{C}\, s_T$ из лем. 8.2. В частности, $s_T^2 = n_T s_T$ для некоторого $n_T \in \mathbb{C}$. Чтобы найти n_T, вычислим двумя способами след оператора $\mathbb{C}[S_n] \to \mathbb{C}[S_n]$ правого умножения на элемент $s_T : f \mapsto f s_T$. С одной стороны, из формулы (8-3) вытекает[1], что для любого $g \in S_n$ коэффициент при g у произведения $g s_T$ равен единице, откуда $\operatorname{tr}(s_T) = |S_n| = n!$. С другой стороны, левый идеал $\mathbb{C}[S_n]\, s_T$ является S_n-подмодулем левого регулярного представления S_n. Так как последнее вполне приводимо, существует такой S_n-подмодуль $W \subset \mathbb{C}[S_n]$, что $\mathbb{C}[S_n] = W \oplus \mathbb{C}[S_n]\, s_T$. Правое умножение на s_T переводит $W \subset \mathbb{C}[S_n]$ внутрь $\mathbb{C}[S_n]\, s_T$, а на идеале $\mathbb{C}[S_n]\, s_T$ действует как умножение на n_T. Поэтому $\operatorname{tr}(s_T) = n_T \dim(\mathbb{C}[S_n]\, s_T)$. Следовательно, число $n_T = n!/\dim(\mathbb{C}[S_n]\, s_T)$ рационально и положительно. Наконец, из равенства $s_{gT} = g s_T g^{-1}$ вытекает, что $s_{gT}^2 = g s_T^2 g^{-1} = n_T g s_T g^{-1} = n_T s_{gT}$. Поэтому число $n_T = n_{\lambda(T)}$ зависит только от формы $\lambda = \lambda(T)$ заполнения T. □

Лемма 8.4

Если форма стандартного заполнения T лексикографически больше, чем форма стандартного заполнения U, то $r_T\mathbb{C}[S_n]\, c_U = c_U\mathbb{C}[S_n]\, r_T = s_T\mathbb{C}[S_n]\, s_U = 0$.

Доказательство. Достаточно убедиться, что $r_T g c_U = c_U g r_T = 0$ для всех $g \in S_n$. Пусть для начала $g = e$. По лем. 8.1 какие-то два элемента из одной строки заполнения T лежат в одном столбце заполнения U. Транспозиция $\tau \in S_n$ этих двух элементов лежит как в R_T, так и в C_U. Поэтому $r_T c_U = (r_T\tau)c_U = r_T(\tau c_U) = -r_T c_U$ и $c_U r_T = -(c_U\tau) r_T = -c_U(\tau r_T) = -c_U r_T$, откуда $r_T c_U = c_U r_T = 0$. Теперь и для любого $g \in S_n$ получаем $r_T g c_U = r_T g c_U g^{-1} g = \left(r_T c_{gU}\right) g = 0$ и $c_U g r_T = c_U g r_T g^{-1} g = \left(c_U r_{gT}\right) g = 0$. □

Теорема 8.1

Представление S_n левыми умножениями в идеале $V_T = \mathbb{C}[S_n]\, s_T$ неприводимо. Два таких представления V_T и V_U изоморфны тогда и только тогда, когда заполнения T и U имеют одинаковую

[1] Так как $R_T \cap C_T = \{e\}$, все слагаемые в сумме (8-3) являются *различными* элементами группы S_n, взятыми со знаком ± 1, причём элемент $e = ee$ берётся с плюсом.

форму $\lambda = \lambda(T) = \lambda(U)$. Если для каждой n-клеточной диаграммы Юнга λ произвольным образом зафиксировать некоторое стандартное заполнение T_λ, то неприводимые представления $V_\lambda = V_{T_\lambda}$ составят полный список попарно неизоморфных неприводимых представлений S_n.

Доказательство. Пусть $W \subset V_T$ является S_n-инвариантным подмодулем. Перестановочный с левым умножением на S_n проектор $\pi_W : \mathbb{C}[S_n] \twoheadrightarrow W$ представляет собою оператор правого умножения на элемент $w = \pi_W(1) \in W$, поскольку $\pi_W(x) = x\pi_W(1) = xw$ для всех $x \in \mathbb{C}[S_n]$. Так как $s_T W \subset s_T V_T = s_T \mathbb{C}[S_n]\, s_T = \mathbb{C}\, s_T$, для левого действия элемента s_T на подмодуле W имеются ровно две возможности: либо $s_T W = 0$, либо $s_T W = \mathbb{C}\, s_T$. В первом случае $WW \subset V_T W = \mathbb{C}[S_n]\, s_T W = 0$, откуда $w^2 = 0$, а значит, и $W = 0$, поскольку правое умножение на w тождественно действует на $W = \mathbb{C}[S_n]\, w$. Во втором случае $s_T \in s_T W \subset W$, откуда $V_T = \mathbb{C}[S_n]\, s_T \subset W$, т. е. $W = V_T$. Таким образом, модуль V_T неприводим. Если заполнения T и U имеют разные формы — скажем, форма заполнения T лексикографически больше формы заполнения U, то по лем. 8.4 левое умножение на s_T аннулирует модуль V_U, тогда как на модуле V_T оно, согласно лем. 8.3, действует нетривиально: элемент $s_T \in V_T$ является собственным вектором левого умножения на s_T с ненулевым собственным значением $n_{\lambda(T)}$. Поэтому представления V_T и V_U не изоморфны. Отсюда следует последнее утверждение теоремы: число попарно неизоморфных неприводимых представлений V_{T_λ} равно числу классов сопряжённости в S_n. Если заполнение U имеет ту же форму λ, что и T_λ, то неприводимое представление V_U, будучи неизоморфным ни одному из представлений V_{T_μ} с $\mu \neq \lambda$, изоморфно именно представлению V_{T_λ}. □

8.2.1. Симметризаторы $s'_T = c_T r_T$. Множества $R_T C_T$ и $C_T R_T$, вообще говоря, различны. Например, для стандартного заполнения $T = \begin{smallmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} \\ \boxed{3} & \end{smallmatrix}$ цикл $|132\rangle = |12\rangle \circ |13\rangle$ входит в $R_T C_T$ и не входит в $C_T R_T$, а цикл $|123\rangle = |13\rangle \circ |12\rangle$, наоборот, входит в $C_T R_T$ и не входит в $R_T C_T$. Поэтому перестановка сомножителей в симметризаторе $s_T = r_T c_T$ даёт *другой* симметризатор

$$s'_T = c_T r_T = \sum\nolimits_{p \in R_T} \sum\nolimits_{q \in C_T} \operatorname{sgn}(q)\, qp\,, \tag{8-7}$$

получающийся применением к $s_T \in \mathbb{C}[S_n]$ *антиподального антиавтоморфизма*

$$\alpha : \mathbb{C}[S_n] \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[S_n]\,, \quad \sum\nolimits_{g \in G} x_g g \mapsto \sum\nolimits_{g \in G} x_g g^{-1}\,, \tag{8-8}$$

который оборачивает порядок сомножителей в произведениях, но переводит в себя строчный и столбцовый симметризаторы r_T и c_T.

Упражнение 8.3. Сформулируйте и докажите для s'_T аналог форм. (8-6) на стр. 91, а также аналоги лем. 8.2–лем. 8.4 и теор. 8.1 на стр. 92.

Предложение 8.1
Представления S_n левыми умножениями в идеалах $V_T = \mathbb{C}[S_n]\, s_T$ и $V'_T = \mathbb{C}[S_n]\, s'_T$ изоморфны.

Доказательство. Правые умножения на c_T и r_T задают гомоморфизмы левых S_n-модулей

$$V'_T = \mathbb{C}[S_n]\, c_T r_T \underset{x r_T \leftarrow\!\shortmid x}{\overset{x \mapsto x c_T}{\rightleftarrows}} \mathbb{C}[S_n]\, r_T c_T = V_T$$

Композиция $x \mapsto x r_T c_T = x s_T$ действует на $V_T = \mathbb{C}[S_n]\, s_T$ умножением на ненулевую константу $n_{\lambda(T)}$. Таким образом, операторы правого умножения на $n_\lambda^{-1/2} c_T$ и $n_\lambda^{-1/2} r_T$ являются взаимно обратными изоморфизмами представлений. □

Следствие 8.2
Неприводимые представления V_λ и V_{λ^t}, отвечающие транспонированным диаграммам λ и λ^t, получаются друг из друга тензорным умножением на одномерное знаковое представление.

Доказательство. Фиксируем какое-либо стандартное заполнение T формы λ и транспонированное заполнение T^t транспонированной диаграммы λ^t. Тогда $R_{T^t} = C_T$, $C_{T^t} = R_T$ и

$$s_{T^t} = \sum\nolimits_{p\in R_T} \sum\nolimits_{q\in C_T} \operatorname{sgn}(p)qp = \sum\nolimits_{p\in R_T} \sum\nolimits_{q\in C_T} \operatorname{sgn}(q)\operatorname{sgn}(pq)qp = \sigma\left(s'_T\right) ,$$

где $\sigma : \mathbb{C}[S_n] \to \mathbb{C}[S_n]$ обозначает *знаковый автоморфизм* групповой алгебры, действующий на базис из групповых элементов по правилу $g \mapsto \operatorname{sgn}(g)g$. Тензорное произведение представления V_λ на одномерное знаковое представление изоморфно представлению в левом идеале $V'_T = \mathbb{C}[S_n]\, s'_T$ по правилу $g : xs'_T \mapsto \operatorname{sgn}(g)gxs'_T$. Знаковый автоморфизм σ изоморфно отображает пространство этого представления на $V_{\lambda^t} = \mathbb{C}[S_n]\, s_{T^t}$, превращая действие в левое умножение на $g : \sigma(x)s_{T^t} \mapsto g\sigma(x)s_{T^t}$. □

8.3. Модуль таблоидов. Орбита стандартного заполнения T под действием строчной подгруппы R_T называется *таблоидом* формы λ и обозначается через $\{T\}$. Действие симметрической группы на заполнениях $g : T \mapsto gT$ корректно спускается до действия $g : \{T\} \mapsto \{gT\}$ на таблоидах, так как $gR_TT = gR_Tg^{-1}gT = R_{gT}gT$. Возникающее таким образом перестановочное представление группы S_n на пространстве формальных комплексных линейных комбинаций таблоидов формы λ называется *модулем таблоидов* и обозначается M_λ. Так как таблоиды формы λ биективно соответствуют левым смежным классам $gR_T \in S_n/R_T$ и действие S_n на таблоидах совпадает с действием на смежные классы, модуль таблоидов $M_\lambda = \operatorname{ind}_{R_T}^{S_n} \mathbb{1}$ индуцирован тривиальным одномерным представлением подгруппы $R_T \subset S_n$.

Упражнение 8.4. Покажите, что представление S_n в пространстве M_λ изоморфно представлению S_n левыми умножениями в идеале $\mathbb{C}[S_n]\, r_T$.

Характер модуля M_λ обозначается через ψ_λ.

Предложение 8.2
Значение $\psi_\lambda(C_\mu)$ на классе сопряжённости $C_\mu \in \operatorname{Cl}(S_n)$, состоящем из всех перестановок циклового типа μ, равно коэффициенту при m_λ в разложении симметрического многочлена Ньютона[1] $p_\mu(x_1, \dots , x_n)$ по стандартному мономиальному базису[2] $m_\lambda(x_1, \dots , x_n)$.

Доказательство. Как обычно, обозначим через m_i количество строк длины i в диаграмме μ. Тогда $p_\mu = p_{\mu_1} \cdots p_{\mu_n} = p_1(x)^{m_1} \dots p_n(x)^{m_n}$, где

$$p_i(x)^{m_i} = (x_1^i + \dots + x_n^i)^{m_i} = \sum \frac{m_i!}{\varrho_{i1}! \dots \varrho_{in}!} x_1^{i\varrho_{i1}} \dots x_n^{i\varrho_{in}}$$

и суммирование идёт по всевозможным наборам неотрицательных целых чисел $\varrho_{i1}, \dots , \varrho_{in}$ с суммой $\sum_j \varrho_{ij} = m_i$. Таким образом, коэффициент при $x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$ у многочлена $p_\mu = p_1^{m_1} \dots p_n^{m_n}$ равен

$$\sum_{\varrho_{ij}} m_1! \dots m_n! / \prod\nolimits_{ij} \varrho_{ij}! , \tag{8-9}$$

[1] См. формулу (4-14) на стр. 40.
[2] См. формулу (4-3) на стр. 36.

где суммирование идёт по всем таким наборам целых чисел $\varrho_{ij} \geqslant 0$, где $1 \leqslant i, j \leqslant n$, что

$$\sum\nolimits_j \varrho_{ij} = m_i \quad \text{и} \quad \sum\nolimits_i i\varrho_{ij} = \lambda_j \,. \tag{8-10}$$

С другой стороны, согласно установленной в предл. 7.5 на стр. 88 формуле (7-31) для характера индуцированного представления,

$$\psi_\lambda(C_\mu) = [S_n : R_T]\,|C_\mu \cap R_T| / |C_\mu|\,, \tag{8-11}$$

где $[S_n : R_T] = n!/\prod_j \lambda_j!$, $|C_\mu| = n!/\prod_i i^{m_i} m_i!$, а пересечение $C_\mu \cap R_T$ распадается в объединение непересекающихся классов R_T-сопряжёности D_ϱ, каждый из которых состоит из перестановок циклового типа μ, в которых ϱ_{ij} из m_i циклов длины i заполнены элементами j-той строки из T. Эти классы также нумеруются удовлетворяющими условиям (8-10) наборами неотрицательных целых чисел $\varrho = \{\varrho_{ij}\}$ с $1 \leqslant i, j \leqslant n$. При сопряжении подгруппой R_T стабилизатор перестановки $g \in D_\varrho$ является прямым произведением $\prod \varrho_{ij}!$ перестановок циклов одинаковой длины между собою как единого целого и $\prod i^{m_i}$ циклических сдвигов внутри этих циклов. Тем самым, $|C_\mu \cap R_T| = \sum_\varrho |D_\varrho| = \sum_\varrho \prod_j \lambda_j!/\prod_{ij} i^{m_i} \varrho_{ij}!$. Подставляя всё это в (8-11) и сокращая общие множители числителя и знаменателя, получаем (8-9). □

8.4. Модуль Шпехта. Для каждого заполнения T формы λ рассмотрим в модуле таблоидов M_λ вектор

$$v_T = c_T\{T\} = \sum\nolimits_{q \in C_T} \operatorname{sgn}(q)\{qT\}\,. \tag{8-12}$$

Поскольку ни при каком $q \in C_T$ никакие два элемента из одного столбца T не могут оказаться в одной строке qT, равенство $q_1T = pq_2T$ невозможно ни при каких $q_1, q_2 \in C_T$ и $p \in R_{q_2T}$, т. е. все слагаемые в правой сумме (8-12) суть *различные* базисные векторы пространства таблоидов M_λ, взятые с коэффициентами ± 1. В частности, каждый из векторов v_T отличен от нуля. Линейная оболочка векторов (8-12), полученных из всех возможных заполнений T формы λ, является S_n-подмодулем в M_λ, так как $gv_T = gc_T\{T\} = gc_Tg^{-1}\{gT\} = c_{gT}\{gT\} = v_{gT}$ для всех $g \in S_n$. Этот подмодуль обозначается S_λ и называется *модулем Шпехта*.

Лемма 8.5

Если форма λ заполнения T не является строго доминирующей диаграмму μ, то

$$c_T M_\mu = \begin{cases} 0 & \text{при } \mu \neq \lambda \\ \mathbb{C}v_T & \text{при } \mu = \lambda\,. \end{cases}$$

Доказательство. Если в пересечении $R_U \cap C_T$ имеется хоть одна транспозиция τ, то

$$c_T\{U\} = c_T\{\tau U\} = c_T\tau\{U\} = -c_T\{U\}\,, \tag{8-13}$$

откуда $c_T\{U\} = 0$. Если в условиях нашей леммы такой транспозиции нет, то по лем. 8.1 на стр. 90 заполнения U и T имеют одинаковую форму λ и $pU = qT$ для некоторых $p \in R_U$ и $q \in C_T$. В этом случае $c_T\{U\} = c_T\{pU\} = c_T\{qT\} = c_Tq\{T\} = \operatorname{sgn}(q)c_T\{T\} = \pm v_T$. □

Теорема 8.2

Модуль Шпехта S_λ изоморфен неприводимому представлению V_λ левыми умножениями в идеале $\mathbb{C}[S_n]\,s_T$, построенному по произвольному заполнению T формы λ.

Доказательство. Покажем сначала, что S_λ неприводим. Пусть имеется разложение $S_\lambda = V \oplus W$ в сумму S_n-подмодулей. Тогда оператор c_T, построенный по заполнению T формы λ, переводит каждое из слагаемых в себя. Так как $c_T S_\lambda \subset c_T M_\lambda = \mathbb{C} v_T$ по лем. 8.5, ненулевой вектор v_T лежит ровно в одном из слагаемых — скажем, в V. Но тогда V содержит и все остальные векторы $v_{gT} = g v_T$, а значит, совпадает с S_λ. При $\mu \neq \lambda$ неприводимые представления S_λ и S_μ не изоморфны: если λ лексикографически меньше μ, то по лем. 8.5 оператор c_T аннулирует подмодуль $S_\mu \subset M_\mu$, а на модуле S_λ действует нетривиально, ибо $c_T v_T = c_T c_T \{T\} = |C_T| c_T \{T\} = |C_T| v_T$. Из сказанного вытекает, что модуль S_λ изоморфен ровно одному из неприводимых представлений $V_\mu = \mathbb{C}[S_n]\, s_U$, где U — любое заполнение формы μ. Поскольку по лем. 8.4 левое умножение на c_T аннулирует все идеалы V_μ с лексикографически меньшими, чем λ диаграммами μ, мы заключаем, что $S_\lambda \simeq V_\lambda$. □

Следствие 8.3
В разложении представления M_λ в сумму неприводимых встречаются только модули S_μ с $\mu \rhd \lambda$, а также модуль S_λ, входящий в M_λ с кратностью 1.

Доказательство. Так как оператор c_T переводит M_λ в подмодуль Шпехта и нетривиально действует на последнем, в разложении модуля M_λ в прямую сумму простых есть ровно одно слагаемое, изоморфное S_λ. Если существует S_n-линейное вложение $S_\mu \hookrightarrow M_\lambda$, то оператор c_U, отвечающий произвольному заполнению U формы μ, нетривиально действует на M_λ. Но в силу лем. 8.5 $c_U M_\lambda = 0$, когда μ не доминирует λ. □

8.4.1. Табличный базис модуля Шпехта. Назовём *столбцовой развёрткой* заполнения T диаграммы λ слово, которое получится при прочтении заполнения T по столбцам, так что каждый столбец читается снизу вверх, а сами столбцы перебираются слева направо. Например, столбцовая развёртка стандартной таблицы

$$T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\ \hline 2&5\\ \cline{1-2}\end{array}$$

это слово 21534. Скажем, что $T \succ U$, если наибольшее из чисел, стоящих в заполнениях T и U в разных клетках, встречается в столбцовой развёртке заполнения T раньше, чем в столбцовой развёртке заполнения U.

Упражнение 8.5. Проверьте, что это отношение задаёт линейный порядок на стандартных заполнениях формы λ.

Например, 120 стандартных заполнений формы $\begin{array}{|c|c|}\hline &\\ \hline &\\ \hline \\ \cline{1-1}\end{array}$ выстроятся по убыванию так:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 3&1\\ \hline 4&2\\ \hline 5\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 3&2\\ \hline 4&1\\ \hline 5\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 2&1\\ \hline 4&3\\ \hline 5\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\ \hline 4&3\\ \hline 5\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 2&3\\ \hline 4&1\\ \hline 5\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\ \hline 4&2\\ \hline 5\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 4&1\\ \hline 3&2\\ \hline 5\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \dots$$

$$\dots \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 4&5\\ \hline 2&3\\ \hline 1\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&5\\ \hline 2&4\\ \hline 3\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 2&5\\ \hline 1&4\\ \hline 3\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 2&5\\ \hline 3&4\\ \hline 1\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&5\\ \hline 3&4\\ \hline 2\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 3&5\\ \hline 1&4\\ \hline 2\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 3&5\\ \hline 2&4\\ \hline 1\\ \cline{1-1}\end{array}.$$

Обратите внимание, что этот порядок отличается от лексикографического порядка на столбцовых развёртках. Главная его особенность состоит в том, что для любой *стандартной таблицы*[1] T и любых $p \in R_T$, $q \in C_T$ выполнены строгие неравенства $pT \succ T \succ qT$. Действительно, самое большое число в любом цикле перестановки p сдвигается влево, а самое большое число

[1] См. n° 8.1 на стр. 90.

в любом цикле перестановки q сдвигается вверх. В частности, каждая стандартная таблица T является минимальным элементом своей R_T-орбиты $R_T T$. Из этого вытекает, что для любого заполнения $U \prec T$ таблоид $\{U\} \neq \{T\}$ в модуле M_λ.

Упражнение 8.6. Покажите, что $c_T\{U\} = 0$ для любых стандартных таблиц $U \succ T$.

Теорема 8.3
Векторы v_T, где T пробегает множество стандартных таблиц формы λ, образуют базис модуля Шпехта S_λ. В частности, $\dim S_\lambda = d_\lambda$.

Доказательство. Покажем, что d_λ векторов v_T, построенных по всем стандартным таблицам T, линейно независимы. Выражение вектора $v_T = \sum_{q\in C_T} \operatorname{sgn}(q)\{qT\}$ через базисные векторы $\{U\}$ пространства M_λ имеет вид $v_T = \{T\} + \sum_{U<T} \varepsilon_U\{U\}$, где $\varepsilon_U = -1, 0, 1$, а всякая линейная зависимость между ними может быть записана в виде[1] $v_T = \sum_{U<T} x_U v_U$. Раскладывая векторы v_T и v_U по базису из таблоидов, мы получаем равенство вида $\{T\} = \sum_{U<T} y_U\{U\}$, невозможное в силу того, что $\{T\} \neq \{U\}$ ни для какого $U \prec T$. Из линейной независимости векторов v_T вытекает неравенство $\dim S_\lambda \geqslant d_\lambda$. С другой стороны, второе равенство из форм. (8-1) на стр. 90 и соотношение на сумму квадратов размерностей неприводимых представлений из сл. 7.1 на стр. 77 влекут равенство $\sum d_\lambda^2 = n! = \sum \dim^2 S_\lambda$. Поэтому $\dim S_\lambda = d_\lambda$. □

8.5. Кольцо представлений симметрических групп. Обозначим через $\mathfrak{R}_n$ аддитивную группу абелеву кольца представлений[2] группы S_n, т. е. свободный $\mathbb{Z}$-модуль с базисом $[V_\lambda]$, где V_λ пробегает множество попарно неизоморфных представителей всех неприводимых представлений S_n. Иначе $\mathfrak{R}_n$ можно описать как целочисленную линейную оболочку неприводимых характеров группы S_n в пространстве всех функций $S_n \to \mathbb{C}$. Положим $\mathfrak{R}_0 \overset{\text{def}}{=} \mathbb{Z}$. На прямой сумме

$$\mathfrak{R} \overset{\text{def}}{=} \bigoplus\nolimits_{n\geqslant 0} \mathfrak{R}_n$$

имеется коммутативное *умножение Литтлвуда – Ричардсона*[3] со свойством $\mathfrak{R}_k\mathfrak{R}_m \subset \mathfrak{R}_{k+m}$, т. е. наделяющее $\mathfrak{R}$ структурой *градуированного* коммутативного кольца с единицей.

8.5.1. Умножение Литтлвуда – Ричардсона в кольце $\mathfrak{R}$. Каждая пара линейных представлений $\varphi : S_k \to \mathrm{GL}(U)$ и $\psi : S_m \to \mathrm{GL}(W)$ задаёт представление

$$\varphi\times\psi : S_k\times S_m \to \mathrm{GL}(U\otimes W), \quad (g,h) : u\otimes w \mapsto gu\otimes hw. \tag{8-14}$$

Вложим $S_k \times S_m$ в S_{k+m} в качестве подгруппы, сохраняющей разбиение

$$\{1,\dots,k+m\} = \{1,\dots,k\} \sqcup \{k+1,\dots,k+m\}, \tag{8-15}$$

образуем представление $\operatorname{ind}(\varphi\times\psi)$ группы S_{k+m}, индуцированное представлением (8-14), и положим $[\varphi]\,[\psi] \overset{\text{def}}{=} [\operatorname{ind}(\varphi\times\psi)]$. Если вместо разбиения (8-15) воспользоваться другим разбиением $\{1,\dots,k+m\} = I\sqcup J$ на непересекающихся подмножества из k и m элементов, получится другая

[1] Для этого надо оставить слева ненулевой член с максимальным индексом T, а все остальные члены перенести направо.

[2] См. прим. 7.5 на стр. 84.

[3] Оно *отличается* от имеющегося на каждом кольце представлений $\mathfrak{R}_n$ в отдельности умножения $[U], [W] \mapsto [U\otimes W]$ из прим. 7.5 на стр. 84.

подгруппа $S_k \times S_m \subset S_{k+m}$, сопряжённая к использованной выше, и представление $\mathrm{ind}(\varphi \times \psi)$, индуцированное с этой подгруппы, будет изоморфно предыдущему.

Упражнение 8.7. Убедитесь в этом.

Таким образом, класс $[\varphi]\,[\psi]$ не зависит от выбора разбиения (8-15), используемого для его построения. В частности, умножение (8-14) коммутативно. Его ассоциативность вытекает из того, что для любых трёх представлений ξ, η и ζ групп S_k, S_ℓ и S_m, оба класса $([\xi]\,[\eta])[\zeta]$ и $[\xi]\,([\eta]\,[\zeta])$ совпадают с классом представления S_{m+n+k}, индуцированного с представления подгруппы $S_k \times S_\ell \times S_m \subset S_{m+n+k}$ в тензорном произведении пространств представлений ξ, η и ζ по правилу $(g_1, g_2, g_3) \mapsto \xi(g_1) \otimes \eta(g_2) \otimes \zeta(g_3)$.

Упражнение 8.8. Убедитесь в этом.

Дистрибутивность умножения по отношению к прямым суммам представлений следует из дистрибутивности тензорных произведений.

Лемма 8.6

Кольцо $\mathfrak{R}$ изоморфно кольцу многочленов с целыми коэффициентами от счётного числа переменных, отвечающих классам тривиальных одномерных представлений $[\mathbb{1}_k]$ групп S_k для всех $k \in \mathbb{N}$. При этом классы модулей таблоидов $[M_\lambda] = [\mathbb{1}_{\lambda_1}] \dots [\mathbb{1}_{\lambda_n}] = [\mathbb{1}_1]^{\ell_1} \dots [\mathbb{1}_n]^{\ell_n}$, где ℓ_i означает количество строк длины i в диаграмме λ, образуют базис кольца $\mathfrak{R}$ как модуля над $\mathbb{Z}$.

Доказательство. Из сл. 8.3 вытекает, что классы таблоидных представлений $[M_\lambda]$ выражаются через неприводимые классы $[S_\lambda]$ при помощи верхней треугольной матрицы с целыми коэффициентами и единицами по главной диагонали. Поэтому классы $[M_\lambda]$ образуют базис $\mathfrak{R}$ как модуля над $\mathbb{Z}$. Поскольку представление M_λ, отвечающее диаграмме $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, индуцировано с тривиального одномерного представления подгруппы $S_{\lambda_1} \times \dots \times S_{\lambda_n} \subset S_{|\lambda|}$, класс $[M_\lambda]$ является произведением классов тривиальных одномерных представлений $[\mathbb{1}_{\lambda_i}]$ групп S_{λ_i}. При этом $[\mathbb{1}_{\lambda_i}] = [M_{(\lambda_i)}]$ — это тоже модуль таблоидов, состоящих из одной строки длины λ_i. Поэтому совокупность мономов от классов тривиальных представлений в точности совпадает с совокупностью классов модулей таблойдов, а их формальное перемножение как мономов, совпадает с умножением в кольце $\mathfrak{R}$. □

8.5.2. Скалярное произведение в кольце $\mathfrak{R}$. Обозначим через $([U], [W])$ евклидово скалярное произведение на $\mathfrak{R}$, для которого базис из классов неприводимых представлений $[V_\lambda]$ является ортонормальным. Сумма $\mathfrak{R} = \bigoplus \mathfrak{R}_k$ является ортогональной относительно такого скалярного произведения, а для любых двух классов $[U] = \sum k_\lambda [V_\lambda]$ и $[W] = \sum m_\lambda [V_\lambda]$, лежащих в одной и той же компоненте $\mathfrak{R}_n$, выполняется равенство

$$([U], [W]) = \sum\nolimits_{|\lambda|=n} k_\lambda m_\lambda = \dim \mathrm{Hom}_{S_n}(U, W) = (\chi_U, \chi_W)_n\,, \tag{8-16}$$

где $(\chi_U, \chi_W)_n$ означает скалярное произведение характеров в алгебре функций[1] $\mathbb{C}^{S_n}$. Как обычно, для каждой диаграммы μ обозначим через m_i число её строк длины i и положим

$$z_\mu = \prod\nolimits_i m_i!\, i^{m_i}\,, \tag{8-17}$$

так что число элементов в классе сопряжённости $C_\mu \subset S_n$, состоящем из всех перестановок циклового типа μ, равно $|C_\mu| = n!/z_\mu$. В силу зам. 7.2. на стр. 83 скалярное произведение характеров

[1] См. зам. 7.2. на стр. 83.

в правой части (8-16) переписывается в виде

$$\frac{1}{n!}\sum\nolimits_{g\in S_n}\chi_U(g)\chi_W(g)=\frac{1}{n!}\sum\nolimits_{\mu}|C_\mu|\chi_U(C_\mu)\chi_W(C_\mu)=\sum\nolimits_{\mu}z_\mu^{-1}\chi_U(C_\mu)\chi_W(C_\mu)\,.$$

Таким образом, скалярное произведение классов представлений $[U],[W]\in\mathfrak{R}_n$ равно

$$([U],[W])=\sum\nolimits_{\mu}z_\mu^{-1}\chi_U(C_\mu)\chi_W(C_\mu)\,. \tag{8-18}$$

8.5.3. Изоморфизм кольца $\mathfrak{R}$ с кольцом симметрических функций. В n° 5.6 на стр. 60 мы ввели на кольце Λ симметрических функций с целыми коэффициентами скалярное произведение $\langle *\,,*\rangle$, для которого базис из полиномов Шура s_λ является ортонормальным, базис из полных симметрических функций h_λ является двойственным к мономиальному базису m_λ, а полиномы Ньютона p_λ образуют ортогональный базис векторного пространства $\mathbb{Q}\otimes\Lambda$ со скалярными квадратами $\langle\,p_\lambda\,,\,p_\lambda\,\rangle=z_\lambda$. Согласно предл. 8.2 на стр. 94 значения $\psi_\lambda(C_\mu)$ характера ψ_λ таблоидного представления M_λ совпадают с коэффициентами разложения ньютоновской симметрической функции $p_\mu=\sum_\lambda\psi_\lambda(C_\mu)m_\lambda$ по мономиальному базису m_λ, а значит, равны скалярным произведениям симметрических функций p_λ с элементами двойственного к мономиальному базиса из полных симметрических многочленов: $\psi_\lambda(C_\mu)=\langle\,p_\mu\,,\,h_\lambda\,\rangle$, которые в свою очередь являются коэффициентами разложения полных симметрических многочленов h_λ по ортогональному базису $z_\mu^{-1}p_\mu$:

$$h_\lambda=\sum\nolimits_{\mu}z_\mu^{-1}\langle\,p_\mu\,,\,h_\lambda\,\rangle p_\mu=\sum\nolimits_{\mu}z_\mu^{-1}\chi_{M_\lambda}(C_\mu)\,p_\mu\,. \tag{8-19}$$

Сопоставление равенств (8-19) и (8-18) подсказывает следующий результат:

Теорема 8.4
Существует изометрический изоморфизм колец $\mathrm{ch}:\mathfrak{R}\xrightarrow{\sim}\Lambda$, переводящий классы таблоидных представлений $[M_\lambda]$ в полные симметрические многочлены h_λ, классы неприводимых представлений $[S_\lambda]$ — в многочлены Шура s_λ, а инволюцию на классах представлений, заданную тензорным умножением на одномерное знаковое представление, — в каноническую инволюцию[1] ω на Λ, переводящую друг в друга s_λ и s_{λ^t}, а также h_λ и e_λ. Этот изоморфизм корректно задаётся формулой[2]

$$\mathrm{ch}([U])\overset{\text{def}}{=}\sum\nolimits_{\mu}z_\mu^{-1}\chi_U(C_\mu)p_\mu\,. \tag{8-20}$$

Доказательство. Отображение (8-20) очевидно линейно по $[U]$:

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}([U]+[W])=\mathrm{ch}([U\oplus W])=\sum\nolimits_{\mu}z_\mu^{-1}\chi_{U\oplus W}(C_\mu)p_\mu=\\ =\sum\nolimits_{\mu}z_\mu^{-1}\left(\chi_U(C_\mu)+\chi_W(C_\mu)\right)p_\mu=\mathrm{ch}([U])+\mathrm{ch}([W])\,.\end{aligned}$$

Согласно лем. 8.6 на стр. 98 и сл. 4.4 на стр. 40 оба кольца $\mathfrak{R}$ и Λ являются кольцами многочленов от счётного числа переменных: первое — от классов тривиальных одномерных представлений $[\mathbb{1}_k]$ групп S_k, второе — от простейших полных симметрических многочленов[3] h_k, где в обоих случаях k пробегает $\mathbb{N}$. В силу соотношения (8-19) отображение ch переводит каждый

[1] См. сл. 5.2 на стр. 60.

[2] Не смотря на то, что она содержит знаменатели.

[3] Напомню, что $h_k(x)$ представляет собою сумму всех мономов полной степени k, см. n° 4.3 на стр. 39.

базисный моном $[M_\lambda] = [\mathbb{1}_{\lambda_1}] \dots [\mathbb{1}_{\lambda_n}] = [\mathbb{1}_1]^{\ell_1} \dots [\mathbb{1}_n]^{\ell_n}$, где ℓ_i равно количеству строк длины i в диаграмме λ, в базисный моном $h_\lambda = h_{\lambda_1} \dots h_{\lambda_n} = h_1^{\ell_1} \dots h_n^{\ell_n}$ с сохранением мультипликативной структуры, ибо $\mathrm{ch}([\mathbb{1}_k]) = h_k$. Тем самым, отображение (8-20) является корректно определённым изоморфизмом колец. Ортогональность отображения ch вытекает из формулы (8-18) и того, что полиномы Ньютона p_λ образуют в ортогональный базис $\mathbb{Q} \otimes \Lambda$ со скалярными квадратами[1] $\langle p_\lambda, p_\lambda \rangle = z_\lambda$. А именно:

$$\langle \mathrm{ch}([U]), \mathrm{ch}([W]) \rangle = \sum\nolimits_{\lambda,\mu} z_\lambda^{-1} z_\mu^{-1} \chi_U(C_\lambda)\chi_W(C_\mu) \langle p_\mu, p_\lambda \rangle = \sum\nolimits_\mu z_\mu^{-1} \chi_U(g)\chi_W(g) = ([U],[W]).$$

Из сл. 8.3 на стр. 96 вытекает, что ортонормальный базис $[S_\lambda]$ выражается через таблоидный базис $[M_\lambda]$ при помощи нижней унитреугольной матрицы: $[S_\lambda] = [M_\lambda] + \sum_{\mu \rhd \lambda} x_{\mu\lambda}[M_\mu]$. По форм. (5-18) на стр. 59 полные симметрические многочлены h_λ выражаются через многочлены Шура s_λ также при помощи нижней унитреугольной матрицы[2]: $h_\lambda = s_\lambda + \sum_{\mu \rhd \lambda} K_{\mu,\lambda} s_\mu$. Поэтому $\mathrm{ch}([S_\lambda])$ выражается через полиномы Шура тоже посредством нижней унитреугольной матрицы: $\mathrm{ch}\big([S_\lambda]\big) = \mathrm{ch}\big([M_\lambda] + \sum_{\mu \rhd \lambda} x_{\mu\lambda}[M_\mu]\big) = h_\lambda + \sum_{\mu \rhd \lambda} x_{\mu\lambda} h_\mu = s_\lambda + \sum_{\mu \rhd \lambda} y_{\mu\lambda} s_\mu$. Из равенств $1 = \big([S_\lambda],[S_\lambda]\big) = \langle \mathrm{ch}([S_\lambda]), \mathrm{ch}([S_\lambda]) \rangle = \langle s_\lambda, s_\lambda \rangle + \sum_{\mu \rhd \lambda} y_{\mu\lambda}^2 \langle s_\mu, s_\mu \rangle = 1 + \sum_{\mu \rhd \lambda} y_{\mu\lambda}^2$ мы заключаем, что все $y_{\mu\lambda} = 0$ и $\mathrm{ch}([S_\lambda]) = s_\lambda$. Утверждение об инволюциях вытекает из сл. 8.2 на стр. 94 и сл. 5.2 на стр. 60. □

Следствие 8.4 (правило Юнга)
Кратность вхождения неприводимого представления S_μ в модуль таблоидов M_λ равна числу Костки $K_{\mu,\lambda}$.

Следствие 8.5 (правило Литтлвуда – Ричардсона)
Кратность вхождения $[S_\nu]$ в $[S_\lambda][S_\mu]$ равна коэффициенту Литтлвуда – Ричардсона[3] $c_{\lambda\mu}^\nu$ из разложения $s_\lambda s_\mu = \sum_\nu c_{\lambda\mu}^\nu s_\nu$.

Следствие 8.6 (правило ветвления индуцированных представлений)
Представление группы S_{n+1}, индуцированное неприводимым представлением S_λ подгруппы $S_n \subset S_{n+1}$, является прямой суммой однократных неприводимых представлений S_μ, диаграмма μ которых получается добавлением одной клетки к диаграмме λ.

Доказательство. Поскольку $[\mathrm{ind}(S_\lambda)] = [S_\lambda][\mathbb{1}_1]$, утверждение вытекает из предыдущего следствия и формулы Пьери[4] для вычисления $s_\lambda h_1$. □

Следствие 8.7 (правило ветвления ограниченных представлений)
Ограничение неприводимого представления S_λ группы S_n на подгруппу $S_{n-1} \subset S_n$ является прямой суммой однократных неприводимых представлений S_μ, диаграмма μ которых получается выкидыванием одной клетки из диаграммы λ.

Доказательство. Это получается из предыдущего следствия и взаимности Фробениуса: кратность вхождения неприводимого представления S_μ в $\mathrm{res}\, S_\lambda$ равна кратности вхождения неприводимого представления S_λ в $\mathrm{ind}\, S_\mu$. □

[1] См. предл. 5.2 на стр. 60.

[2] Напомню, что *число Костки* $K_{\mu,\lambda}$ равно количеству таблиц формы μ, заполненных λ_1 единицами, λ_2 двойками, и т. д. Оно ненулевое лишь при $\mu \trianglerighteq \lambda$, и все $K_{\lambda,\lambda} = 1$. См. пояснения к форм. (5-11) на стр. 56.

[3] См. теор. 5.2 на стр. 58.

[4] См. упр. 5.5 на стр. 58.

Следствие 8.8 (формула Фробениуса для характеров S_n)
Значение характера χ_λ неприводимого представления S_λ симметрической группы S_n на классе сопряжённости $C_\mu \subset S_n$ равно каждому из следующих трёх чисел:

- коэффициенту при $z_\mu^{-1} p_\mu(x)$ в разложении многочлена Шура $s_\lambda(x)$ по базису $z_\mu^{-1} p_\mu(x)$ в векторном пространстве $\mathbb{Q} \otimes \Lambda$
- коэффициенту при $s_\lambda(x)$ в разложении многочлена Ньютона $p_\mu(x)$ по базису Шура $s_\lambda(x)$ в $\mathbb{Z}$-модуле Λ
- коэффициенту при одночлене $x^{\lambda+\delta} = x_1^{\lambda_1+n-1} x_2^{\lambda_2+n-2} \dots x_n^{\lambda_n}$ в многочлене
$$p_\mu(x)\Delta_\delta(x) = p_1(x)^{m_1} \dots p_n(x)^{m_n} \prod\nolimits_{i<j}(x_i - x_j)\,,$$
где $p_k(x) = \sum_i x_i^k$ суть степенные суммы Ньютона, число m_i равно количеству строк длины i в диаграмме μ, а $\Delta_\delta(x) = \det\left(x_j^{n-i}\right)$ — это определитель Вандермонда.

Доказательство. Первое вытекает прямо из теор. 8.4. Второе — из свойств скалярного произведения на кольце симметрических функций: поскольку система многочленов p_μ ортогональна со скалярными квадратами z_μ, коэффициент при $z_\mu^{-1} p_\mu(x)$ в разложении s_λ по базису p_μ равен скалярному произведению $\langle\, s_\lambda\,,\, p_\mu \,\rangle$, которое в свою очередь равно коэффициенту при s_λ в разложении p_μ по ортонормальному базису s_λ. Для доказательства третьего запишем s_λ по формуле Якоби – Труди как отношение определителей $s_\lambda(x) = \Delta_{\lambda+\delta}(x) \,/\, \Delta_\delta(x)$ и умножим обе части разложения $p_\mu(x) = \sum_\lambda \chi_\lambda(C_\mu)\Delta_{\lambda+\delta}(x) \,/\, \Delta_\delta(x)$ на Δ_δ. Получим равенство $p_\mu(x)\Delta_\delta(x) = \sum_\lambda \chi_\lambda(C_\mu)\Delta_{\lambda+\delta}(x)$, означающее, что $\chi_\lambda(C_\mu)$ равен коэффициенту разложения кососимметрического многочлена $p_\mu(x)\Delta_\delta(x)$ по стандартному детерминантному базису[1] $\Delta_{\lambda+\delta}(x)$. □

8.5.4. Размерности неприводимых представлений. По формуле Фробениуса размерность $\dim S_\lambda = \chi_\lambda(1)$ равна коэффициенту при $x^{\lambda+\delta} = x_1^{\lambda_1+n-1} x_2^{\lambda_2+n-2} \dots x_n^{\lambda_n}$ в многочлене
$$p_1^n \Delta_\delta = \left(\sum x_i\right)^n \det\left(x_j^{n-i}\right) = \sum_{m_1 \dots m_n} \frac{n!}{m_1! \dots m_n!} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) x_1^{n-\sigma(1)} \dots x_n^{n-\sigma(n)}\,.$$
Обозначим строго убывающие длины строк диаграммы $\eta = \lambda + \delta$ через $\eta_i = \lambda_i + n - i$. Коэффициент при $x^\eta = x_1^{\eta_1} \dots x_n^{\eta_n}$ в предыдущем произведении равен
$$\sum_\sigma \frac{\operatorname{sgn}(\sigma) n!}{\prod_j \left(\eta_j - n + \sigma(j)\right)!} = \frac{n!}{\eta_1! \dots \eta_n!} \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_j \eta_j(\eta_j - 1) \dots (\eta_j - n + \sigma(j) + 1)\,,$$
где суммирование происходит по всем перестановкам $\sigma \in S_n$, для которых каждое из n чисел $\eta_j - n + \sigma(j) \geqslant 0$, и j-тый сомножитель последнего произведения сам является произведением $n - \sigma(j)$ последовательно убывающих чисел, начиная с η_j. Такая сумма равна
$$\det\begin{pmatrix} \eta_1 \dots (\eta_1 - n + 1) & \eta_2 \dots (\eta_2 - n + 1) & \dots & \eta_n \dots (\eta_n - n + 1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \eta_1(\eta_1 - 1) & \eta_2(\eta_2 - 1) & \cdots & \eta_n(\eta_n - 1) \\ \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

[1] См. n° 4.1.2 на стр. 37.

Упражнение 8.9. Покажите, что этот определитель равен $\prod_{i<j}(\eta_i - \eta_j)$.

Таким образом, нами установлено

Следствие 8.9 (формула Фробениуса для размерностей)
Пусть $\eta = \lambda + \delta$, т. е. $\eta_i = \lambda_i + n - i$. Тогда $\dim S_\lambda = \frac{n!}{\eta_1!\ldots\eta_n!}\prod_{i<j}(\eta_i - \eta_j)$. □

Упражнение 8.10 (формула крюков). Назовём *крюком* клетки a в диаграмме Юнга λ Г-образную поддиаграмму, состоящую из клетки a и всех клеток ниже a в том же столбце и всех клеток правее a в той же строке. Количество клеток в таком крюке обозначим через $\Gamma(a)$ и назовём *длиной крюка* клетки a. Докажите, что $\dim S_\lambda = n!/\prod_{a\in\lambda}\Gamma(a)$.

Например, длины крюков диаграммы $\lambda = (4,2,1)$ суть $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 6&4&2&1\\ \hline 3&1\\ \cline{1-2} 1\\ \cline{1-1}\end{array}$, откуда размерность модуля Шпехта $S_{(4,2,1)}$ группы S_7 равна $7!/(6\cdot4\cdot3\cdot2) = 7\cdot5 = 35$. Довольно нетривиальным следствием из упр. 8.10 и теор. 8.3 на стр. 97 является возможность подсчитать количество стандартных таблиц формы λ по формуле крюков. К примеру, только что проделанное вычисление показывает, что стандартных таблиц формы $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \ &\ &\ &\ \\ \hline \ &\ \\ \cline{1-2} \ \\ \cline{1-1}\end{array}$ имеется ровно 35 штук.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 1.2. В силу биективности отображения Сегре, соотношения инцидентности между прямыми на квадрике Сегре такие же, как между координатными прямыми на $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$. Так как всякая проходящая через заданную точку p прямая, целиком лежащая на квадрике Сегре S, лежит в пересечении $S \cap T_p S$ этой квадрики с её касательной плоскостью в точке p, и плоская коника $S \cap T_p S$ уже полностью исчерпывается парой пересекающихся в точке p прямых из разных семейств, никаких других прямых на квадрике Сегре нет.

Упр. 1.3. Это делается дословно также, как в лем. 1.1 на стр. 5.

Упр. 1.4. Выберем базис E в $U \cap W$, дополним его множествами E' и E'' до базисов в U и W соответственно, и зафиксируем в V базис вида $E \sqcup E' \sqcup E'' \sqcup E'''$. Пространство $U^{\otimes n} \cap W^{\otimes n}$ состоит из линейных комбинаций тензорных мономов, составленных из базисных векторов, лежащих в E, и стало быть, совпадает с $(U \cap W)^{\otimes n}$.

Упр. 2.1. Для любых $x, y \in I$ произведение $(a + x)(b + y) = ab + (ay + xb + xy) \cong ab \pmod{I}$. Обратите внимание, что для только левых или только правых идеалов это может быть неверно.

Упр. 2.2. Каждое линейное отображение $f : V \to A$ в коммутативную $\Bbbk$-алгебру A однозначно поднимается по универсальному свойству тензорной алгебры до гомоморфизма алгебр $\tilde{f} : TV \to A$ по формуле $\tilde{f}(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = f(v_1) \ldots f(v_n)$. Так как в коммутативной алгебре $f(u)f(w) = f(w)f(u)$ для всех $u, w \in V$, гомоморфизм $\tilde{f}$ аннулирует все разности $u \otimes w - w \otimes u$ и пропускается через факторизацию $TV \twoheadrightarrow T / \mathcal{I}_{\text{sym}} \simeq SV$. Это доказывает выполнение универсального свойства. То, что SV и ι однозначно им определяются, устанавливается дословно так же, как в лем. 1.1 на стр. 5.

Упр. 2.3. Дословно те же аргументы, что и для тензорного произведения, см. лем. 1.1 на стр. 5.

Упр. 2.4. Ответ: $\binom{n+d-1}{d-1}$. Это число решений уравнения $m_1 + \ldots + m_d = n$ в неотрицательных целых числах $m_1, \ldots, m_d$.

Упр. 2.5. Для любого конечного набора векторов в $\Bbbk^n$ (над любым полем $\Bbbk$) существует многочлен, принимающий на этих векторах любые наперёд заданные значения. Многочлен $x^p - x$ задаёт тождественно нулевую функцию на прямой над полем $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$.

Упр. 2.6. Стабилизатор каждого монома из обиты $E_{\boldsymbol{m}}$ в группе S_n состоит из $m_1!\, m_2! \, \ldots \, m_k!$ независимых перестановок одинаковых тензорных сомножителей между собою. Остаётся применить формулу для длины орбиты.

Упр. 2.7. Это стандартный факт из курса линейной алгебры и геометрии. Например, см. раздел 14.3 на стр. 205 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2021/lec_14.pdf.

Упр. 2.8. Используйте те же аргументы, что и в примере 1.2 из части I.

Упр. 2.10. Так как утверждение линейно по v, f, g, его достаточно проверить для $v = e_i$, $f = x_1^{m_1} \ldots x_d^{m_d}$, $g = x_1^{k_1} \ldots x_d^{k_d}$.

Упр. 3.1. Модифицируйте решение упр. 2.2.

Упр. 3.3. Форма α меняет знак при транспозиции любых двух аргументов, поскольку

$$0 = \alpha(\ldots, (v + w), \ldots, (v + w), \ldots) = \alpha(\ldots, v, \ldots, w, \ldots) + \alpha(\ldots, w, \ldots, v, \ldots).$$

Упр. 3.4. Дословно те же аргументы, что и в лем. 1.1 на стр. 5.

Упр. 3.5. Отправляя линейную форму $\xi : \Lambda^n V \to \Bbbk$ в её композицию с антикоммутативным умножением $\alpha_n : V \times \ldots \times V \to \Lambda^n V$, мы получаем линейное отображение $(\Lambda^n V)^* \to \mathrm{Alt}^n(V, \Bbbk)$, являющееся изоморфизмом в силу универсального свойства α_n.

Упр. 3.6. Фиксируем в V базис $e_1, \ldots, e_d$. Если $\omega \notin \Lambda^d V$, то в ω есть моном e_I, не содержащий какого-нибудь базисного вектора, скажем, e_j. Тогда $e_j \wedge \omega \neq 0$, ибо содержит ненулевой моном $e_{j \sqcup I}$. Наоборот, если $\omega \in \Lambda^d U$, то $\omega = \lambda \cdot e_1 \wedge \ldots \wedge e_d$, и $e_i \wedge \omega = 0$ для всех i, откуда $v \wedge \omega = 0$ для всех $v \in V$. При чётном d центр алгебры ΛV линейно порождается мономами чётных степеней, при нечётном d — мономами чётных степеней и старшим мономом $e_1 \wedge \ldots \wedge e_d$, который в этом случае имеет нечётную степень.

Упр. 3.7. Знак *тасующей перестановки* $(j_1, \ldots, j_m, i_1, \ldots, i_{n-m})$, где $j_1 < \ldots < j_m$ и $i_1 < \ldots < i_{n-m}$, вычисляется по *правилу ниточек*, см. пример 8.1 на стр. 131 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2223/lec_08.pdf.

Упр. 3.8. Это сразу следует из равенства $\det A = \det A^t$.

Упр. 3.9. Если все $A_{ij} = 0$, положим $A = 0$, если, скажем, $A_{12} \neq 0$, положим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -A_{23}/A_{12} & -A_{24}/A_{12} \\ 0 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \end{pmatrix}.$$

Обратите внимание, что равенство

$$A_{34} = \det \begin{pmatrix} -A_{23}/A_{12} & -A_{24}/A_{12} \\ A_{13} & A_{14} \end{pmatrix}$$

эквивалентно соотношению Плюккера из форм. (3-13) на стр. 28.

Упр. 3.12. Аналогично упр. 2.10.

Упр. 3.13. Убедитесь, что $\Lambda^n U \cap \Lambda^n W = \Lambda^n(U \cap W)$ в $\Lambda^n V$ для любых подпространств $U, W \subset V$.

Упр. 3.16. Каждый моном $e_i \wedge e_j$ поляризуется в билинейную форму

$$\frac{1}{2}(e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i) : V^* \times V^* \to \Bbbk, \quad (x_k, x_m) \mapsto \begin{cases} 1/2 & \text{при } k = i, m = j \\ -1/2 & \text{при } k = j, m = i \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

поэтому каждая пара слагаемых $a_{ij}\left(e_i \wedge e_j - e_i \wedge e_j\right)$, где $i < j$, поляризуется в квадратичную форму, матрица Грама которой имеет a_{ij} и $-a_{ij}$, соответственно, в клетках (i, j) и (j, i), и нули в остальных местах.

Упр. 3.17. Пусть $U_1 \neq U_2$. Выберем базис в $U_1 \cap U_2$, дополним его до базисов в U_1, U_2, и включим все эти векторы в некоторый базис пространства V. Тогда $\Lambda^k U_1$ и $\Lambda^k U_2$ будут порождаться различными базисными мономами пространства $\Lambda^k V$.

Упр. 3.18. По условию, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{e} \cdot X_{\boldsymbol{w}}^t$, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e} \cdot X_{\boldsymbol{u}}^t$, $\boldsymbol{w} = u \cdot C_{\boldsymbol{uw}}$, где $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{w}$ суть строки из базисных векторов в V и U. Следовательно, $X_{\boldsymbol{w}}^t = X_{\boldsymbol{u}}^t C_{\boldsymbol{uw}}$.

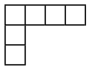
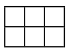
Упр. 3.19. См. http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2021/lec_08.pdf, раздел 8.4.2 на стр. 118.

Упр. 4.3. Поскольку Δ_δ обращается в нуль при подстановке $x_i = x_j$, он делится в кольце $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ на $(x_i - x_j)$. Так как каждая из разностей $(x_i - x_j)$ неприводима, f делится на $\prod_{i<j}(x_i - x_j)$. Сравнивая лексикографически старшие мономы в этом произведении и в Δ_δ, заключаем, что частное равно 1.

Упр. 4.4. Разложим перестановку g циклового типа λ в произведение независимых циклов и запишем их по строкам диаграммы так, чтобы действие перестановки g циклически сдвигало все элементы вдоль строк на единицу влево. Сопряжение перестановки g перестановкой h состоит в замене содержимого клеток диаграммы по правилу $i \mapsto h(i)$. Стабилизатор g состоит из всех перестановок, независимо циклически сдвигающих номера вдоль строк и переставляющих строки одинаковой длины между собою как единое целое.

Упр. 4.5. В правом нижнем углу матрицы $\left(h_{\lambda_i+j-i}\right)$, начиная с позиции $(m+1, m+1)$, где m — высота диаграммы λ, будет стоять верхняя унитреугольная матрица, левее которой все элементы в строках будут нулевые.

Упр. 5.1. Устойчивое паросочетание между i-м и $(i+1)$-м столбцом устанавливается так: последовательно перебираем шарики в $(i+1)$-ом столбце двигаясь снизу вверх и назначаем очередному шарику $\boldsymbol{ш}$ партнёром самый верхний шар i-го столбца, лежащий строго ниже $\boldsymbol{ш}$ и ещё не назначенный никому партнёром, а если таких шаров нет, объявляем $\boldsymbol{ш}$ свободным. После того, как все шары $(i+1)$-го столбца разделены на свободные и имеющие партнёров, все шары i-го столбца, не являющиеся ничьими партнёрами, тоже объявляются свободными. Операция L_i перемещает на одну клетку влево самый верхний свободный шар $(i+1)$-го столбца или ничего не делает, если свободных шаров в $(i+1)$-ом столбце нет. Операция R_i перемещает на одну клетку вправо самый нижний свободный шар i-го столбца или ничего не делает, если в i-ом столбце нет свободных шаров.

Упр. 5.3. Диаграммы  и  несравнимы по отношению $\trianglerighteq$.

Упр. 5.4. $s_{(1)} \cdot s_{(1,1)} = s_{(2,1)} + s_{(1,1,1)} = s_{(1,1)} \cdot s_{(1)}$

Упр. 5.5. Для вычисления $s_\lambda \cdot e_k$ к диаграмме λ надо дописать k клеток и заполнить их без повторений числами от 1 до k. Попадание двух таких клеток в одну строку противоречит либо табличному ограничению, либо ограничению Ямаручи. Для вычисления $s_\lambda \cdot h_k$ к диаграмме λ надо дописать k клеток, заполненных единицами. Попадание двух таких клеток в один столбец противоречит табличному ограничению.

Упр. 6.1. Для всех $w \in W$ и $u \in U$ вектор $f(w+u) = fw + fu$ лежит в том же классе, что и fw, поскольку $fu \in U$.

Упр. 6.3. При $m \geqslant 2$ классы многочленов, делящихся на p, составляют ненулевой собственный подмодуль в $\Bbbk[t]\,/\,(p^m)$. При $m = 1$ фактор кольцо $\Bbbk[t]\,/\,(p)$ является полем, т. е. для любого ненулевого класса $[g] \in \Bbbk[t]\,/\,(p)$ существует такой многочлен $h \in \Bbbk[t]$, что $h \cdot [g] = [1]$. Поэтому любой класс $[f] \in \Bbbk[t]/(p)$ получается из класса $[g]$ применением оператора $h(t) \cdot f(t)$.

Упр. 6.4. Диагональный оператор с собственными числами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ аннулируется многочленом $\prod(t-\lambda_i)$. Наоборот, поскольку многочлен, аннулирующий модуль (6-2), делится все многочлены p^ν, стоящие в знаменателях разложения из форм. (6-2) на стр. 63, все эти многочлены p имеют вид $t - \lambda$ и входят в разложение (6-2) только в первых степенях, что и означает диагонализуемость оператора умножения на t в прямой сумме (6-2).

Упр. 6.5. Верхней гранью цепи из $\mathcal{S}'$ является объединение всех модулей цепи.

Упр. 6.6. Пусть $w = u + v$. Тогда $fw = fu + fv$ и $fv \in V$. Поэтому $\pi(fw) = fu = f\pi(w)$.

Упр. 6.7. Пусть $\pi(S) \neq 0$ для простого подмодуля $U \subset W$. Поскольку $f\pi(s) = \pi(fs) \in \pi(S)$ для всех $f \in R$ и $s \in S$, подпространство $\pi(S)$ является R-подмодулем. Для любого R-подмодуля $M \subset \pi(S)$ пересечение

$$S \cap \pi^{-1}(M) = \{s \in S \mid \pi(s) \in M\}$$

является R-подмодулем в S: если $\pi(s) \in M$, то $\pi(fs) = f\pi(s) \in M$ для всех $f \in R$ и $s \in S$. Так как в S нет ненулевых собственных подмодулей, их нет и в $\pi(S)$.

Упр. 6.8. Верхней гранью цепи из $\mathcal{S}$ является объединение или, что то же самое, прямая сумма всех модулей цепи.

Упр. 6.9. (а) и (б) проверяются непосредственно; (в) проверяется так: если $\varphi(v) = 0$, то $\varphi(fv) = f\varphi(v) = f(0) = 0$ для всех $f \in R$, а если $v = \varphi(u)$, то $fv = f\varphi(u) = \varphi(fu)$ для всех $g \in R$; (г) фактически было доказано в упр. 6.7.

Упр. 6.11. $\varphi\psi = \sum_{\alpha,\beta} \iota_\alpha \varphi_{\alpha\beta}\pi_\beta \circ \sum_{\mu,\nu} \iota_\mu \varphi_{\mu\nu}\pi_\nu = \sum_{\alpha,\nu} \iota_\alpha p_{\alpha\nu}\pi_\nu$, где $p_{\alpha\nu} = \sum_\eta \varphi_{\alpha\eta}\psi_{\eta\nu}$, так как

$$\pi_\beta\iota_\mu = \begin{cases} \mathrm{Id}_{V_\eta} & \text{если } \beta = \mu = \eta \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Упр. 6.12. Из равенства $\mathrm{Ass}(R) = \mathrm{End}(V)$ вытекает, что A_R действует транзитивно на ненулевых векторах пространства V, т. е. A_R-орбита любого ненулевого вектора совпадает со всем пространством V.

Упр. 6.16. Поскольку правило $g: \varphi \mapsto g\varphi g^{-1}$ линейно по φ, его достаточно проверять только на разложимых $\varphi = \xi \otimes w$ с $\xi \in U^*$, $w \in W$. По определению

$$\varrho^* \otimes \lambda(g): \xi \otimes w \mapsto \varrho(g^{-1})^*\xi \otimes \lambda(g)w = (\xi \circ g^{-1}) \otimes (gw)\,.$$

Этот оператор переводит $u \in U$ в $\xi(g^{-1}u) \cdot gw = g\left(\xi(g^{-1}u) \cdot w\right) = g \circ (\xi \otimes w) \circ g^{-1}(u)$.

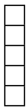
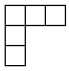
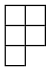
Упр. 6.21. Пусть множество различных гомоморфизмов $\psi_\nu: G \to \Bbbk^*$ линейно зависимо. Рассмотрим линейную зависимость $\lambda_1\psi_1 + \ldots + \lambda_n\psi_n = 0$ с минимально возможным числом слагаемых и какой-нибудь элемент $h \in G$, на котором $\psi_1(h) \neq \psi_2(h)$. Поскольку для каждого $g \in G$ выполняется равенство $\sum_i \lambda_i\psi_i(h)\psi_i(g) = \sum_i \lambda_i\psi_i(hg) = 0$, имеется ещё одно линейное соотношение между функциями ψ_i с коэффициентами $\lambda_i\,\psi_i(h)$. Деля все коэффициенты на $\psi_1(h)$ и вычитая из первой зависимости, получаем линейную зависимость между ψ_i с нулевым коэффициентом при ψ_1 и ненулевым коэффициентом при ψ_2. Она нетривиальна и содержит меньше слагаемых. Противоречие.

Упр. 7.6. Диагонали двумерных граней куба являются рёбрами двух центрально симметричных тетраэдров. Движения куба, осуществляющие чётную перестановку диагоналей, переводят каждый из этих двух тетраэдров в себя, осуществляя чётные перестановки их вершин. Каждое движение куба, осуществляющее нечётную перестановку его диагоналей, переводит тетраэдры друг в друга. Тензорное произведение такого движения со знаковым представлением есть ни что иное, как его композиция с центральной симметрией. Такая композиция переводит каждый из двух тетраэдров в себя и осуществляет нечётную перестановку их вершин.

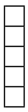
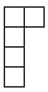
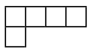
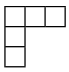
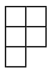
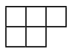
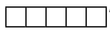
Упр. 7.10. Поскольку каждый оператор $g \in G$ диагонализуем, в V существует базис $e_1, \ldots, e_d$ из собственных векторов оператора g. Обозначим их собственные числа через $x_1, \ldots, x_n$. Тогда базисы из мономов $e_1^{m_1} \ldots e_d^{m_d}$ и грассмановых мономов $e_1 \wedge \ldots \wedge e_{i,n}$ в пространствах S^nV и Λ^nV будут собственными для операторов S^ng и Λ^ng соответственно, и их собственными числами будут всевозможные мономы $x_1^{m_1} \ldots x_d^{m_d}$ с $m_1 + \ldots + m_d = n$ и всевозможные полилинейные мономы $x_{i_1} \ldots x_{i_n}$, откуда $\mathrm{tr}\, S^ng = h_n(x_1, \ldots, x_d)$ и $\mathrm{tr}\, \Lambda^ng = e_n(x_1, \ldots, x_d)$. С другой стороны, $\det(1 + tg) = \prod_i (1 + tx_i) = E(t)$ и $\det(1 - tg)^{-1} = 1/E(-t) = H(t)$ суть производящие функции для многочленов[1] e_n и h_n.

[1]См. n° 4.2 на стр. 38 и n° 4.3 на стр. 39.

Упр. 7.11. Группа A_5 имеет два трёхмерных неприводимых представления вращениями икосаэдра (отличающиеся на композицию с внешним автоморфизмом A_5, который задаётся сопряжением любой транспозицией внутри S_5) и четырёхмерное представление вращениями симплекса. Полная таблица неприводимые характеров A_5 такова:

классы				(12345)	(21345)
число элементов	1	20	15	12	12
значения характеров:					
тривиальный	1	1	1	1	1
икосаэдр-1	3	0	−1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
икосаэдр-2	3	0	−1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
симплициальный	4	1	0	−1	−1
пятимерный	5	−1	1	0	0

Группа S_5 имеет знаковое одномерное представление sgn и симплициальное представление $\varDelta$. Представления $\operatorname{sgn}\otimes\varDelta$ и $\Lambda^2\varDelta$ тоже неприводимы, а $S^2\varDelta = \operatorname{sgn}\oplus\varDelta\oplus\zeta$, где ζ — неприводимое пятимерное представление, которое геометрически описывается как действие $S_5 \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ на пространстве функций на $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_5)$ с нулевой суммой значений. Изоморфизм $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5) \xrightarrow{\sim} S_5$ задаётся действием группы $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ сопряжениями на множестве нелинейных[1] инволюций без неподвижных точек на $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_5)$. Ответ:

классы							′
число элементов	1	10	30	20	15	20	24
значения характеров:							
тривиальный	1	1	1	1	1	1	1
знаковый α	1	−1	−1	1	1	−1	1
симплициальный ϑ	4	2	0	1	0	−1	−1
четырёхмерный $\vartheta\otimes\alpha$	4	−2	0	1	0	1	−1
шестимерный $\Lambda^2\vartheta$	6	0	0	0	−2	0	1
пятимерный $\zeta\subset S^2\vartheta$	5	1	−1	−1	1	1	0
пятимерный $\zeta\otimes\alpha$	5	−1	1	−1	1	−1	0

Упр. 7.12. Выберите в $U\otimes W$ базис, согласованный с этим прямым разложением и рассмотрите соответствующий ему базис из мономов m-й степени.

Упр. 7.14. Каноническое отображение B-модулей $B\otimes_A A\to B$, ассоциированное с вложением A-модулей $A\hookrightarrow B$, является изоморфизмом для любого расширения $A\subset B$ ассоциативных алгебр с единицами.

[1] Т. е. не лежащих в $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$. На шеститочечном множестве $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{F}_5^2)$ имеется 15 инволюций без неподвижных точек, и ровно 10 из них лежат в $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$. Последние находятся в биекции с такими точками плоскости $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2\mathbb{F}_5^2)$, которые не являются произведениями ab точек $a,b\in\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{F}_5^2)$. Ср. с примером 18.5 на стр. 233 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/geom_ru/2021/lec_18.pdf.

Упр. 7.18. Зафиксируем систему представителей $\{g_1, \dots, g_r\}$ смежных классов G/H. Тогда $G = g_1H \sqcup \dots \sqcup g_rH = Hg_1^{-1} \sqcup \dots \sqcup Hg_r^{-1}$, и каждый H-инвариантный оператор $\varphi : \Bbbk[G] \to V$ однозначно задаётся указанием s векторов $v_\nu = \varphi\left(g_\nu^{-1}\right) \in V$ ибо действует на остальные базисные векторы по правилу $\varphi\left(hg_\nu^{-1}\right) = hv_\nu$. Поэтому

$$\dim \mathrm{Hom}_H(\Bbbk[G], V) = [G : H] \cdot \dim V = \dim \Bbbk[G] \otimes_{\Bbbk[H]} V\,.$$

Преобразование Фурье от H-инвариантного оператора $\varphi : g_\nu^{-1} \mapsto v_\nu$ равно

$$\frac{1}{|G|}\sum\nolimits_{g\in G} g^{-1} \otimes_{\Bbbk[H]} \varphi(g) = \frac{1}{|G|}\sum\nolimits_\nu \sum\nolimits_{h\in H} g_\nu h^{-1} \otimes_{\Bbbk[H]} \varphi\left(hg_\nu^{-1}\right) = \frac{|H|}{|G|}\sum\nolimits_\nu g_\nu v_\nu \in \bigoplus\nolimits_\nu g_\nu V$$

и зануляется только когда все $v_\nu = 0$.

Упр. 8.2. Примените сл. 8.1 на стр. 91 к перестановке g^{-1}.

Упр. 8.3. Аналогом равенства (8-6) и лем. 8.2 является равенство $\mathrm{sgn}(q)qs'_Tp = s'_T$, справедливое для всех $p \in R_T$, $q \in C_T$, и утверждение о том, что пространство

$$E'_T = \{f \in \mathbb{C}[S_n] \mid \forall p \in R_T\ \forall q \in C_T\ \ \mathrm{sgn}(q)qfp = f\}$$

одномерно и порождается симметризатором s'_T. Последнее доказывается при помощи упр. 8.2 дословно также, как лем. 8.2. Дополнением к лем. 8.4 на стр. 92 является равенство $s'_T\mathbb{C}[S_n]\,s'_U = 0$, справедливое при $\lambda(T) > \lambda(U)$ и непосредственно вытекающее из оригинальной лем. 8.4. Утверждения из лем. 8.3 и теор. 8.1 на стр. 92, как и их доказательства, сохраняют силу после замены s на s'.

Упр. 8.5. Будем писать $T \succ_a U$, если $T \succ U$, и наибольшее из чисел, стоящих в заполнениях T и U в разных клетках, равно a. Если $T \succ_a U$ и $U \succ_b W$, то $T \succ_a W$ при $a \geqslant b$ и $T \succ_b W$ при $a \leqslant b$.

Упр. 8.6. Для всех $q \in R_T$ и $p \in C_U$ выполнено строгое неравенство $pU \succ qT$. По лем. 8.1 существует транспозиция $\tau \in R_U \cap C_T$, и вычисление (8-13) показывает, что $c_T\{U\} = 0$.

Упр. 8.9. Вычисление аналогично вычислению определителя Вандермонда: в кольце многочленов $\mathbb{Z}[\eta_1, \dots, \eta_n]$ определитель делится на каждую из разностей $\eta_i - \eta_j$, а значит, и на $\prod_{i<j}(\eta_i - \eta_j)$. Сравнение лексикографически старших мономов показывает, что частное равно 1.

Упр. 8.10. Индукцией по количеству столбцов покажите, что произведение длин крюков любой диаграммы λ равно $\prod_i \eta_i!/\prod_{i<j}(\eta_i - \eta_j)$, где $\eta = \lambda + \delta$, и воспользуйтесь формулой Фробениуса. Индуктивный переход основан на том, что длина крюка i-той сверху клетки первого столбца равна $\eta_i - n + \ell$, где ℓ — число строк в диаграмме.