§2. Алгебра многочленов

2.1. Симметрическая алгебра векторного пространства. Напомню, что в некоммутативном кольце R бывают идеалы трёх типов. Подкольцо $I \subset R$ называется *левым идеалом*, если $xa \in I$ для всех $a \in I$, $x \in R$. Симметричным образом, I называется *правым идеалом*, если $ax \in I$ для всех $a \in I$, $x \in R$. Идеал $I \subset R$ называется *двусторонним*, если он одновременно и левый, и правый. Иначе двусторонние идеалы можно охарактеризовать как ядра гомоморфизмов колец. Действительно, если элемент $a \in R$ аннулируется гомоморфизмом $\varphi : R \to S$, то для любых $x, y \in R$ выполняется равенство $\varphi(xay) = \varphi(x)\varphi(a)\varphi(y) = 0$. Наоборот, если аддитивная подгруппа $I \subset R$ является двусторонним идеалом, то на фактор группе R/I можно корректно задать умножение правилом $[a][b] \overset{\text{def}}{=} [ab]$.

Упражнение 2.1. Убедитесь в этом.

При этом аддитивный гомоморфизм фактризации $R \twoheadrightarrow R/I$ становится гомоморфизмом колец с ядром I. Из теоремы о строении гомоморфизма абелевых групп[1] вытекает, что каждый гомоморфизм колец $\varphi : R \to S$ является композицией сюрьективного гомоморфизма факторизации $R \twoheadrightarrow R/\ker\varphi \simeq \operatorname{im}\varphi$ и вложения $R/\ker\varphi \simeq \operatorname{im}\varphi \hookrightarrow S$.

Рассмотрим в тензорной алгебре TV произвольного векторного пространства V над любым полем $\Bbbk$ двусторонний идеал $\mathcal{J}_{\text{sym}} \subset TV$, порождённый всевозможными разностями

$$u \otimes w - w \otimes u \in V \otimes V\,. \tag{2-1}$$

Он состоит из конечных линейных комбинаций тензоров, которые можно получить умножая разности (2-1) с обеих сторон на любые элементы тензорной алгебры. Таким образом, пересечение $\mathcal{J}_{\text{sym}} \cap V^{\otimes n}$ линейно порождается разностями вида

$$(\ \dots \otimes v \otimes w \otimes \ \dots\ ) - (\ \dots \otimes w \otimes v \otimes \ \dots\ )\,,$$

где оба заключённых в скобки тензора разложимы и обозначенные многоточиями фрагменты у них одинаковы. Весь идеал $\mathcal{J}_{\text{sym}}$ является прямой сумой таких однородных компонент:

$$\mathcal{J}_{\text{sym}} = \bigoplus_{n \geqslant 2} (\mathcal{J}_{\text{sym}} \cap V^{\otimes n})\,.$$

Фактор алгебра $SV \overset{\text{def}}{=} TV/\mathcal{J}_{\text{sym}}$ называется *симметрической алгеброй* пространства V. Умножение, индуцированное в ней тензорным произведением векторов, называется *коммутативным умножением* и обозначается точкой, которую, как правило, опускают. Как векторное пространство симметрическая алгебра является прямой суммой своих однородных компонент:

$$SV = \bigoplus_{n \geqslant 0} S^n V\,, \quad \text{где} \quad S^n V \overset{\text{def}}{=} V^{\otimes n}/(\mathcal{J}_{\text{sym}} \cap V^{\otimes n})\,.$$

Пространство $S^n V$ называется *n-й симметрической степенью* пространства V. Обратите внимание, что $S^0 V = \Bbbk$ и $S^1 V = V$. Включение $\iota : V \hookrightarrow SV$ в качестве прямого слагаемого $S^1 V$ обладает следующим универсальным свойством.

[1] См. http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2223/lec_02.pdf, предложение 2.1 на стр. 28.

Упражнение 2.2. Убедитесь, что для любого линейного отображения $f : V \to A$ пространства V в произвольную коммутативную $\Bbbk$-алгебру A имеется единственный такой гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр $\tilde{f} : SV \to A$, что $f = \tilde{f} \circ \iota$, причём SV и ι определяются этим свойством однозначно с точностью до единственного перестановочного с ι изоморфизма $\Bbbk$-алгебр.

По этой причине симметрическую алгебру SV иначе называют *свободной* коммутативной $\Bbbk$-алгеброй с единицей, порождённой векторным пространством V.

2.1.1. Симметричные полилинейные отображения. Полилинейное отображение

$$\varphi : V \times \ldots \times V \to U \tag{2-2}$$

называется *симметричным*, если $\varphi(v_{g_1}, \ldots, v_{g_n}) = \varphi(v_1, \ldots, v_n)$ для всех перестановок $g \in S_n$. Симметричные полилинейные отображения образуют векторное подпространство в пространстве всех n-линейных отображений (2-2). Взятие композиции фиксированного симметричного n-линейного отображения (2-2) со всевозможными линейными отображениями $F : U \to W$ представляет собою линейное по F отображение из $\mathrm{Hom}(U, W)$ в пространство симметричных полилинейных отображений $V \times \ldots \times V \to W$, переводящее F в $F \circ \varphi$. Если оно является изоморфизмом для всех пространств W, отображение φ называется *универсальным* симметричным n-линейным отображением или *коммутативным произведением* векторов.

Упражнение 2.3. Покажите, что коммутативное произведение единственно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с коммутативным произведением.

Предложение 2.1

Композиция $\sigma_n = \pi_{S^n} \circ \tau$ тензорного произведения $\tau : V \times \ldots \times V \to V^{\otimes n}$ с последующей проекцией $\pi_{S^n} : V^{\otimes n} \twoheadrightarrow S^n V$ является универсальным симметричным n-линейным отображением.

Доказательство. В силу универсального свойства тензорного произведения любое n-линейное отображение $\varphi : V \times \ldots \times V \to W$ однозначно раскладывается в композицию $\varphi = \widetilde{F} \circ \tau$ с линейным отображением $\widetilde{F} : V^{\otimes n} \to W$. Если φ симметрично, то $\widetilde{F}$ аннулирует соотношения коммутативности (2-1), ибо $\widetilde{F}\big((\ldots \otimes v \otimes w \otimes \ldots) - (\ldots \otimes w \otimes v \otimes \ldots)\big) = \widetilde{F}(\ldots \otimes v \otimes w \otimes \ldots) - \widetilde{F}(\ldots \otimes w \otimes v \otimes \ldots) = \varphi(\ldots, v, w, \ldots) - \varphi(\ldots, w, v, \ldots) = 0$, и значит, корректно факторизуется до линейного отображения $F : S^n V \to W$, $v_1 \ldots v_n \mapsto \varphi(v_1, \ldots, v_n)$. Таким образом, $\varphi = \widetilde{F} \circ \tau = F \circ \pi_{S^n} \circ \tau = F \circ \sigma_n$. Из-за универсальности τ любое линейное отображение $F' : S^n V \to W$, для которого $\varphi = F' \circ \sigma_n = F' \circ \pi_{S^n} \circ \tau$, удовлетворяет равенству $F' \circ \pi_{S^n} = F \circ \pi_{S^n}$, влекущему равенство $F' = F$ в силу сюрьективности проекции π_{S^n}. □

Следствие 2.1

Для любого[1] векторного пространства V над произвольным полем $\Bbbk$ пространство симметричных n-линейных форм $V \times \ldots \times V \to \Bbbk$ канонически двойственно n-той симметрической степени $S^n V$.

Доказательство. Отправляя линейную форму $\xi : S^n V \to \Bbbk$ в её композицию с коммутативным умножением $\sigma_n : V \times \ldots \times V \to S^n V$, мы получаем линейное отображение $(S^n V)^* \to \mathrm{Sym}^n(V, \Bbbk)$, являющееся изоморфизмом в силу универсального свойства σ_n. □

[1] В том числе бесконечномерного.

Следствие 2.2

Если зафиксировать в пространстве V базис $E \subset V$, то конечные коммутативные мономы

$$e^{\boldsymbol{m}} \overset{\text{def}}{=} \prod\nolimits_{e \in E} e^{m(e)},$$

занумерованные всевозможными функциями $\boldsymbol{m} : E \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $e \mapsto m(e)$, с конечным носителем и суммой значений $\sum_{e \in E} m(e) = n$, составят базис в $S^n V$. Иначе говоря, выбор базиса в V задаёт изоморфизм симметрической алгебры SV с алгеброй многочленов от базисных векторов, причём каждое пространство $S^n V$ переводится этим изоморфизмом в пространство однородных многочленов степени n.

Доказательство. Обозначим через U векторное пространство с базисом из мономов $e^{\boldsymbol{m}}$, которые мы будем воспринимать как формальные символы, и рассмотрим симметричное полилинейное отображение $\mu : V \times \ldots \times V \to U$, значение которого на каждом наборе базисных векторов равно моному, в котором каждый базисный вектор представлен в степени, равной числу его вхождений в набор. Это отображение универсально, поскольку для симметричного полилинейного отображения $\varphi : V \times \ldots \times V \to W$ и линейного ображения $F : U \to W$ равенство $\varphi = F \circ \mu$ равносильно выполнению равенств

$$\varphi(\underbrace{e_1, \ldots, e_1}_{m_1}, \ldots, \underbrace{e_k, \ldots, e_k}_{m_k}) = F(e_1^{m_1} \ldots e_k^{m_k}) \tag{2-3}$$

для всех конечных подмножеств $\{e_1, \ldots, e_k\} \subset E$ и всех функций $m : \{e_1, \ldots, e_k\} \to \mathbb{N}$, $e_i \mapsto m_i$, с суммой значений $\sum_i m_i = n$, и равенства (2-3) однозначно определяют F, если задано φ, и наоборот. По упр. 2.3 существует изоморфизм $U \xrightarrow{\sim} S^n V$, переводящий каждый базисный вектор $e_1^{m_1} \ldots e_k^{m_k} \in U$ в коммутативное произведение $e_1^{m_1} \ldots e_k^{m_k} \in S^n V$. Стало быть, такие произведения образуют базис в $S^n V$. □

Упражнение 2.4. Найдите $\dim S^n V$ если $\dim V = d$.

2.1.2. Вычисление значения многочлена на векторе. Обозначим через $\Bbbk^V$ пространство всех функций $V \to \Bbbk$. Сопоставим каждому разложимому симметрическому тензору

$$f = \xi_1 \ldots \xi_n \in S^n V^*$$

функцию $f : V \to \Bbbk$, $v \mapsto \prod_{i=1}^n \xi_i(v)$. Поскольку эта функция полилинейно и симметрично зависит от ковекторов $\xi_1, \ldots, \xi_n$, сопоставление функций разложимым тензорам корректно продолжается до линейного отображения $S^n : \Bbbk^V$, и далее до гомоморфизма алгебр

$$\varepsilon : SV^* \to \Bbbk^V, \quad (f \in SV^*) \mapsto (f : V \to \Bbbk), \tag{2-4}$$

который канонически сопоставляет каждому многочлену $f \in S^n V^*$ полиномиальную функцию $f : V \to \Bbbk$. Образ гомоморфизма (2-4) называется *алгеброй полиномиальных функций* на пространстве V. Обратите внимание, что это определение не зависит от выбора базиса и имеет смысл также и для бесконечномерных пространств V. Для конечномерного пространства V с базисом $e_1, \ldots, e_d$ алгебра SV^* изоморфна по сл. 2.2 алгебре многочленов $\Bbbk[x_1, \ldots, x_d]$ от элементов двойственного базиса $x_1, \ldots, x_d$ пространства V^*. Для однородного полинома $f(x_1, \ldots, x_d)$ степени n и вектора $v = \sum \alpha_i e_i \in V$ значение $f(v) = f(a_1, \ldots, a_d)$ является результатом подстановки в f значений $x_i = \alpha_i$. В качестве следствия мы заключаем, что результат подстановки в многочлен $f(x_1, \dots, x_d)$ координат вектора v зависит только от $f \in SV$ и $v \in V$, но не от выбора пары двойственных друг другу базисов V и V^*, используемых для записи f в виде многочлена от координат и вычисления значений координат вектора v.

Предложение 2.2
Для конечномерного пространства V гомоморфизм (2-4) инъективен если и только если основное поле $\Bbbk$ бесконечно.

Доказательство. Пусть $\dim V = n$. Если поле $\Bbbk$ конечно и состоит из q элементов, пространство $\Bbbk^V$ тоже конечно и состоит из q^{q^n} элементов. Так как алгебра многочленов бесконечна, гомоморфизм (2-4) имеет ненулевое ядро. Инъективность гомоморфизма (2-4) над бесконечным полем $\Bbbk$ доказывается индукцией по n. Так как ненулевой многочлен $f(x)$ от одной переменной имеет не более $\deg f$ корней, он не может тождественно обращаться в нуль на одномерном пространстве $V \simeq \Bbbk$, если $\Bbbk$ бесконечно. Запишем многочлен от n переменных $x_1, \dots, x_n$ как многочлен от x_n с коэффициентами из $\Bbbk[x_1, \dots, x_{n-1}]$:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum\nolimits_{\nu=0}^{d} \varphi_\nu(x_1, \dots, x_{n-1}) \cdot x_n^{d-\nu} .$$

Вычисляя коэффициенты φ_ν в произвольной точке $(p_1, \dots, p_{n-1}) \in \Bbbk^{n-1}$, получаем многочлен от x_n с постоянными коэффициентами, задающий тождественно нулевую функцию на прямой $(x_1, \dots, x_{n-1}) = (p_1, \dots, p_{n-1})$. По уже доказанному он нулевой. Тем самым, все многочлены φ_ν являются тождественно нулевыми функциями на $\Bbbk^{n-1}$. По предположению индукции, они являются нулевыми многочленами. □

Упражнение 2.5. Покажите, что для конечномерного векторного пространства V над конечным полем $\Bbbk$ гомоморфизм (2-4) сюрьективен и приведите пример ненулевого полинома $f \in S^n V^*$, задающего нулевую функцию $V \to \Bbbk$.

2.2. Симметрические тензоры. Начиная с этого места и до конца §2 мы будем по умолчанию считать, что основное поле $\Bbbk$ имеет характеристику нуль. Симметрическая группа S_n действует на тензорной степени $V^{\otimes n}$ любого векторного пространства V над полем $\Bbbk$ перестановками сомножителей в разложимых тензорах. А именно, для каждого $g \in S_n$ положим

$$g(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = v_{g(1)} \otimes v_{g(2)} \otimes \ldots \otimes v_{g(n)} . \tag{2-5}$$

Поскольку правая часть полилинейно зависит от $v_1, \dots, v_n$, формула (2-5) корректно определяет линейный оператор $g : V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$. Подпространство

$$\mathrm{Sym}^n V \overset{\text{def}}{=} \{ t \in V^{\otimes n} \mid \forall\, g \in S_n \;\; g(t) = t \}$$

называется пространством *симметричных* тензоров в $V^{\otimes n}$.

2.2.1. Стандартный базис пространства симметричных тензоров. Зафиксируем в пространстве V некоторый базис E, а $V^{\otimes n}$ — базис из тензорных мономов $e_1 \otimes \ldots \otimes e_n$ с $e_i \in E$. В разложении произвольного симметричного тензора $t \in \mathrm{Sym}^n V$ по последнему базису все мономы, составляющие одну орбиту группы S_n, входят с одним и тем же коэффициентом, зависящим только от орбиты. Орбиты группы S_n на базисных мономах нумеруются функциями $\boldsymbol{m} : E \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $e \mapsto m(e)$ с конечным носителем и суммой значений $\sum_{e \in E} m(e) = n$. Орбита $E_{\boldsymbol{m}}$, отвечающая такой функции, состоит из всех тензорных мономов, в которые каждый вектор

$e \in E$ входит ровно $m(e)$ раз. Сумма всех мономов из орбиты $E_{\boldsymbol{m}}$ обозначается $e_{\boldsymbol{m}}$ и называется *полным симметрическим тензором* показателя m. Таким образом, всевозможные полные симметрические тензоры степени $|\boldsymbol{m}| \overset{\text{def}}{=} \sum_{e \in E} m(e) = n$ образуют базис пространства $\mathrm{Sym}^n(V)$.

Упражнение 2.6. Пусть функция $\boldsymbol{m} : E \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ принимает ненулевые значения $m(e_i) = m_i$ только на базисных векторах $e_1, \dots, e_d$. Покажите, что орбита $E_{\boldsymbol{m}}$ состоит из

$$|E_{\boldsymbol{m}}| = \frac{n!}{m_1! \dots m_d!}$$

различных тензорных мономов.

Предложение 2.3
Над полем характеристики нуль ограничение проекции $\pi_{S^n} : V^{\otimes n} \twoheadrightarrow S^n V$ на подпространство $\mathrm{Sym}^n \subset V^{\otimes n}$ и ограничение проекции $\pi_{\Lambda^n} : V^{\otimes n} \twoheadrightarrow \Lambda^n V$ на подпространство $\mathrm{Alt}^n \subset V^{\otimes n}$ являются изоморфизмами векторных пространств.

Доказательство. Для каждой функции $\boldsymbol{m} : E \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ с конечным носителем

$$\mathrm{supp}(\boldsymbol{m}) = \{e_1, \dots, e_k\}$$

и значениями $\boldsymbol{m}(e_i) = m_i$, все $\frac{n!}{m_1!m_2!\dots m_k!}$ тензоров из орбиты $E_{\boldsymbol{m}}$ отобразятся проекцией

$$\pi_{S^n} : V^{\otimes n} \twoheadrightarrow S^n V$$

в один и тот же коммутативный моном $e_1^{m_1} \dots e_k^{m_k}$. Тем самым, образы стандартных базисных симметричных тензоров пропорциональны базисным коммутативным и грассмановым мономам:

$$\pi_{S^n}(e_{\boldsymbol{m}}) = \frac{n!}{m_1!m_2! \dots m_d!} \cdot e_1^{m_1} e_2^{m_2} \dots e_k^{m_k} . \tag{2-6}$$

□

Предостережение 2.1. Не смотря на предл. 2.3, подпространство $\mathrm{Sym}^n V \subset V^{\otimes n}$ не следует путать с фактор пространством $S^n V = V^{\otimes n} / (\mathcal{J}_{\mathrm{sym}} \cap V^{\otimes n})$, которое получаются из $V^{\otimes n}$ отождествлением некоторых тензоров между собою. Над полем характеристики $p > 0$ многие симметричные тензоры аннулируются проекцией π_{S^n}. Даже в характеристике нуль изоморфизм из предл. 2.3 переводит стандартный базис в $\mathrm{Sym}^n V$ не в стандартный базис $S^n V$, а в перескалированный. Возникающие при этом поправочные комбинаторные множители приходится учитывать как при подъёме на пространство $\mathrm{Sym}\, V$ коммутативного умножения, имеющегося в алгебре SV, так и при спуске на пространства SV и SV^* операций свёртки, которые имеются между пространствами $\mathrm{Sym}\, V$ и $\mathrm{Sym}\, V^*$.

2.3. Поляризация многочленов. Обратное к изоморфизму из предл. 2.3 отображение

$$\pi_{S^n}^{-1} : S^n V^* \xrightarrow{\sim} V^{*\otimes n}$$

называется *полной поляризацией*. Оно сопоставляет однородному многочлену $f \in S^n V$ единственный такой симметричный тензор $\tilde{f} \in \mathrm{Sym}^n V^*$, который проектируется в f при факторизации по соотношениям коммутирования. Если интерпретировать многочлен f как полиномиальную функцию[1] $f : V \to \Bbbk$, а тензор $\tilde{f}$ — как симметричную n-линейную форму

$$\tilde{f} : V \times \dots \times V \to \Bbbk , \quad \tilde{f}(v_1, \dots, v_n) \overset{\text{def}}{=} \langle\, v_1 \otimes \dots \otimes v_n \,,\, \tilde{f} \,\rangle ,$$

[1]См. n° 2.1.2 на стр. 15.

то для всех $v \in V$ будет выполнено равенство $f(v) = \tilde f(v, \dots, v)$. Полной поляризацией базисного монома $x_1^{m_1} \dots x_k^{m_k}$ степени $\sum_i m_i = n$ является симметрический тензор

$$\frac{m_1! \dots m_k!}{n!} \cdot x_{\boldsymbol{m}}\,, \tag{2-7}$$

пропорциональный сумме всех тензорных мономов, состоящих из m_1 ковекторов x_1, m_2 ковекторов x_2, … , m_k ковекторов x_k. Полная поляризация произвольного многочлена может быть вычислена отсюда по линейности. Ниже, в n° 2.3.1 и в форм. (2-12) на стр. 20 мы приведём более явные рецепты для вычисления значения $\tilde f(v_1, \dots, v_n)$ в терминах многочлена f.

Упражнение 2.7. Убедитесь, что билинейная форма $\tilde f : V \times V \to \Bbbk$, задающая полную поляризацию однородного многочлена второй степени $q \in S^2 V^*$ удовлетворяет равенству

$$2\tilde f(u, w) = f(u + w) - f(u) - f(w)\,.$$

2.3.1. Комбинаторная формула для полной поляризации. Поскольку значение симметричной n-линейной формы не меняется при перестановках её аргументов, мы будем обозначать через $\tilde f\left(v_1^{m_1}, \dots, v_n^{m_k}\right)$ значение полной поляризации $\tilde f$ многочлена f на наборе векторов, содержащем $m_i \geqslant 0$ копий вектора v_i для каждого $i = 1, \dots, k$, так что $\sum_{i=1}^k m_i = \deg f = n$. В этих обозначениях, для всех $f \in S^n V^*$ и любых $v_1, \dots, v_k \in V$ выполняется ровно та же мультиномиальная формула, что и при раскрытия скобок в выражении $(v_1 + \dots + v_k)^n$, а именно,

$$f(v_1 + \dots + v_k) = \tilde f\big((v_1 + \dots + v_k)^n\big) = \sum_{m_1, \dots, m_k} \frac{n!}{m_1! \dots m_k!} \cdot \tilde f\left(v_1^{m_1}, \dots, v_k^{m_k}\right)\,, \tag{2-8}$$

где суммирование идёт по всем таким наборам целых чисел $m_1, \dots, m_k$, что $0 \leqslant m_i \leqslant n$ при каждом i и $m_1 + \dots + m_k = n$.

Упражнение 2.8. Убедитесь в этом.

Предложение 2.4

Значение полной поляризации любого однородного многочлена $f \in S^n V^*$ на (необязательно конечномерном) векторном пространстве V над полем характеристики нуль можно вычислять по формуле

$$n! \cdot \tilde f(v_1, \dots, v_n) = \sum_{I \subsetneq \{1, \dots, n\}} (-1)^{\ell(I)} f\Big(\sum_{i \notin I} v_i\Big)\,, \tag{2-9}$$

где суммирование идёт по всем собственным подмножествам $I \subsetneq \{1, \dots, n\}$, включая пустое подмножество $I = \varnothing$, а $\ell(I)$ означает число элементов в I. Например, для $f \in S^3 V^*$ получаем

$$6\,\tilde f(u, v, w) = f(u + v + w) - f(u + v) - f(u + w) - f(v + w) + f(u) + f(v) + f(w)\,.$$

Доказательство. Воспользуемся разложением (2-8) для $k = n$. Сумма в правой части формулы содержит ровно один член, зависящий от всех n векторов v_i, а именно, $n! \cdot \tilde f(v_1, \dots, v_n)$. Для каждого собственного подмножества $I \subsetneq \{1, \dots, n\}$ не зависящие от векторов v_i с $i \in I$ слагаемые из правой части формулы (2-8) входят в неё ровно с тем же самым коэффициентом, что и в разложение (2-8) для $f\left(\sum_{i \notin I} v_i\right)$, поскольку последнее получается из разложения для $f(v_1 + \dots + v_n)$ подстановкой $v_i = 0$ для всех $i \in I$. Таким образом, все слагаемые, не содержащие хотя бы один из векторов v_i, могут быть удалены из (2-8) при помощи стандартной процедуры включения-исключения, что и даёт искомую формулу

$$n! \cdot \tilde f(v_1, \dots, v_n) = f\Big(\sum_{\nu} v_\nu\Big) - \sum_{\{i\}} f\Big(\sum_{\nu \neq i} v_\nu\Big) + \sum_{\{i,j\}} f\Big(\sum_{\nu \neq i,j} v_\nu\Big) - \sum_{\{i,j,k\}} f\Big(\sum_{\nu \neq i,j,k} v_\nu\Big) + \dots\,. \qquad \square$$

2.4. Двойственность и свёртки. Для конечномерного пространства V над полем характеристики нуль полная свёртка между $V^{\otimes m}$ и $V^{*\otimes m}$ индуцирует невырожденное спаривание между пространствами $S^m V$ и $S^m V^*$, сопоставляющее многочленам $f \in S^n V$ и $g \in S^n V^*$ полную свёртку их полных поляризаций $\tilde{f} \in V^{\otimes m}$ и $\widetilde{g} \in V^{*\otimes m}$.

Упражнение 2.9. Проверьте, что ненулевые спаривания между мономами, составленными из элементов двойственных базисов пространств V и V^*, исчерпываются значениями

$$\langle\, e_1^{m_1} \dots e_d^{m_d}\,,\, x_1^{m_1} \dots x_d^{m_d}\,\rangle = \frac{m_1! \cdot m_2! \cdot \ \dots\ \cdot m_d!}{n!}\,. \tag{2-10}$$

2.4.1. Производная многочлена в направлении вектора. Внутреннее умножение[1] на фиксированный вектор $v \in V$ задаёт линейное отображение $i_v :\ V^{*\otimes n} \to V^{*\otimes(n-1)}$. Применяя его к полной поляризации $\tilde{f}$ многочлена $f \in S^n V^*$ и затем проектируя результат из $V^{*\otimes(n-1)}$ в $S^{n-1}V^*$, мы получаем линейное отображение $\mathrm{pl}_v :\ S^n V^* \to S^{n-1} V^*$, которое называется *поляризацией* вдоль v и включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} V^{*\otimes n} \supset \mathrm{Sym}^n V^* \arrow[r, "i_v"] \arrow[d, "\pi_{S^n}"', "\wr"] & V^{*\otimes(n-1)} \arrow[d, "\pi_{S^{n-1}}"] \\ S^n V^* \arrow[r, "\mathrm{pl}_v"] & S^{n-1} V^*\,. \end{tikzcd}$$

Поляризация переводит многочлен $f(x) = \tilde{f}(x^n) \in S^n V^*$ в билинейно зависящий от f и v многочлен $\mathrm{pl}_v f(x) = \tilde{f}(v, x^{n-1}) \in S^{n-1}V^*$, который называется *полярой* вектора v относительно f. При $n = 2$ мы получаем в точности полярное преобразование относительно проективной квадрики $V(f) \subset \mathbb{P}(V)$, которое сопоставляет точке v её полярную гиперплоскость.

Рассмотрим двойственные базисы $e_1, \dots, e_d \in V$, $x_1, \dots, x_d \in V^*$ и базисный симметричный тензор[2] $x_{(m_1,\dots,m_d)} \in \mathrm{Sym}^n V^*$, равный сумме всех тензорных мономов, в которые каждый базисный ковектор x_ν входит ровно m_ν раз. Свёртка $x_{(m_1,\dots,m_d)}$ с базисным вектором $e_i \in V$ по первому тензорному сомножителю зануляется при $m_i = 0$, а во всех остальных случаях равна базисному симметричному тензору $x_{(m_1',\dots,m_d')} \in \mathrm{Sym}^{n-1} V^*$, имеющему $m_i' = m_i - 1$ и $m_\nu' = m_\nu$ при $\nu \neq i$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathrm{pl}_{e_i} x_1^{m_1} \dots x_d^{m_d} &= \frac{m_1! \dots m_d!}{n!}\, \pi_{S^{n-1}} \left(x_{(m_1',\dots,m_d')} \right) = \\ &= \frac{m_i}{n}\, x_1^{m_1} \dots x_{i-1}^{m_{i-1}} x_i^{m_i - 1} x_{i+1}^{m_{i+1}} \dots x_d^{m_d} = \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\, x_1^{m_1} \dots x_d^{m_d}\,. \end{aligned}$$

Так как многочлен $\mathrm{pl}_v f$ билинейно зависит от v и f, поляра произвольного вектора $v = \sum \alpha_i e_i$ относительно любого однородного многочлена f равна разделённой на степень $\deg f$ *частной производной* от многочлена f в направлении вектора v:

$$\mathrm{pl}_v f = \frac{1}{\deg(f)}\, \partial_v f = \frac{1}{\deg(f)} \sum \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\,.$$

Обратите внимание, что поскольку левая часть этой формулы определена инвариантно, правая часть тоже не зависит от выбора двойственных координат в V и V^*. Из равенств

$$\mathrm{pl}_u \mathrm{pl}_w f(v) = \tilde{f}\left(u, w, v^{n-1}\right) = \mathrm{pl}_w \mathrm{pl}_u f(v)$$

[1] См. прим. 1.4 на стр. 11.
[2] См. n° 2.2.1 на стр. 16.

вытекает, что частные производные коммутируют: $\partial_u\partial_w = \partial_w\partial_u$ для всех $u, w \in V$. Кроме того, для любых векторов $u, w \in V$, целых неотрицательных чисел k, m и многочлена $f \in S^{k+m}V^*$ выполняется равенство

$$k!\,\partial_u^k f(w) = (k+m)!\,\tilde{f}\left(u^k, w^m\right) = m!\,\partial_w^m f(u)\,. \tag{2-11}$$

Наконец, мы получаем ещё одну формулу для полной поляризации:

$$\tilde{f}(v_1, \dots, v_n) = \frac{1}{n!}\,\partial_{v_1}\dots\partial_{v_n} f \tag{2-12}$$

для любого многочлена $f \in S^nV^*$ и любых n векторов $v_1, \dots, v_n \in V$.

Упражнение 2.10. Докажите *правило Лейбница*: $\partial_v(fg) = g\partial_v(f) + f\partial_v(g)$.

Пример 2.1 (разложение Тейлора)
Для любых двух векторов $u, w \in V$ и многочлена $f \in S^nV^*$ по формуле бинома[1] получаем

$$f(u+w) = \tilde{f}\left((u+w)^n\right) = \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\cdot\tilde{f}(u^m, w^{n-m})\,.$$

Формула (2-11) позволяет переписать это равенство в виде *разложения Тейлора*

$$f(u+w) = \sum_{m=0}^{\deg f}\frac{1}{m!}\,\partial_w^m f(u)\,. \tag{2-13}$$

Обратите внимание, что это *точное равенство* в S^nV^*, причём его правая часть *явно* симметрична по u и w в силу соотношений (2-11).

2.4.2. Линейный носитель многочлена. Линейный носитель[2] $\operatorname{supp}(\tilde{f}) \subset V^*$ полной поляризации $\tilde{f}$ многочлена $f \in S^nV^*$ называется *линейным носителем многочлена* f. Обратите внимание, что линейный носитель является векторным подпространством в V^*, а не в V.

Упражнение 2.11. Убедитесь, что каждый многочлен f корректно задаёт полиномиальную функцию на $V/\operatorname{Ann}\big(\operatorname{supp}(f)\big)$ по правилу $f([v]) = f(v)$.

Согласно теор. 1.2 на стр. 12, подпространство $\operatorname{supp}(f) \subset V^*$ является образом полной свёртки $c_f : V^{\otimes(n-1)} \to V^*$ с тензором $\tilde{f}$, причём из-за симметричности тензора $\tilde{f}$ эта свёртка не зависит от выбора индексов, по которым она производится. Иначе говоря, $\operatorname{supp}(f)$ линейно порождается всеми частными производными порядка $n-1$ от f:

$$\frac{\partial^{m_1}}{\partial x_1^{m_1}}\frac{\partial^{m_2}}{\partial x_2^{m_2}}\dots\frac{\partial^{m_d}}{\partial x_d^{m_d}}f(x)\,,\quad \text{где}\quad \sum m_\nu = n-1\,. \tag{2-14}$$

Вклад в коэффициент при x_i у линейной формы (2-14) вносит лишь тот коэффициент многочлена f, что стоит при $x_1^{m_1}\dots x_{i-1}^{m_{i-1}}x_i^{m_i+1}x_{i+1}^{m_{i+1}}\dots x_d^{m_d}$. Записывая многочлен f в виде

$$f = \sum_{\nu_1\dots\nu_d}\frac{n!}{\nu_1!\dots\nu_d!}\,a_{\nu_1\dots\nu_d}\,x_1^{\nu_1}\dots x_d^{\nu_d}\,, \tag{2-15}$$

[1] См. формулу (2-8) на стр. 18.
[2] См. n° 1.5.2 на стр. 11.

мы получаем для линейной формы (2-14) следующее выражение:

$$n! \cdot \sum_{i=1}^{d} a_{m_1 \dots m_{i-1}(m_i+1)m_{i+1}\dots m_d} x_i \,, \tag{2-16}$$

и всего таких линейных форм имеется[1] $\binom{n+d-2}{d-1}$.

Предложение 2.5

Однородный многочлен f вида (2-15) над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики нуль тогда и только тогда является n-той степенью линейной формы, когда $d \times \binom{n+d-2}{d-1}$-матрица из коэффициентов линейных форм (2-16) имеет ранг 1. В этом случае есть ровно n линейных форм φ, удовлетворяющих уравнению $\varphi^n = f$, все они пропорциональны формам (2-16) и получаются друг из друга умножением на корни n-той степени из единицы в поле $\Bbbk$.

Доказательство. Равенство $f = \varphi^n$ означает, что $\operatorname{supp}(f)$ одномерен и порождён формой φ. В этом случае все формы (2-16) пропорциональны форме φ, и уравнение $t^n = f$ имеет в целостном кольце $\Bbbk[x_1, \dots, x_d]$ ровно n корней вида $\zeta \cdot \varphi$, где ζ пробегает множество корней из единицы в поле $\Bbbk$. Наоборот, если все формы (2-16) пропорциональны, и $\psi \neq 0$ — одна из них, то $\operatorname{supp}(f) = \Bbbk \cdot \psi$ и $f = \lambda\psi^n$ для некоторого $\lambda \in \Bbbk$, а $\varphi = \sqrt[n]{\lambda} \cdot \psi$. □

Пример 2.2 (бинарные формы ранга 1)

Однородный многочлен степени n от двух переменных $f(x_0, x_1) = \sum_k a_k \cdot \binom{n}{k} \cdot x_0^{n-k} x_1^k$ представляется в виде $(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1)^n$ если и только если $a_i : a_{i+1} = \alpha_0 : \alpha_1$ не зависит от i, что равносильно условию

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} = 1 \,, \tag{2-17}$$

и выражается квадратичными соотношениями $a_i a_{j+1} = a_{i+1} a_j$ на коэффициенты f.

Упражнение 2.12. Убедитесь, что столбцы матрицы (2-17) суть делённые на $n!$ коэффициенты n линейных форм $\frac{\partial^k}{\partial x_0^k} \frac{\partial^m}{\partial x_1^m} f$, где $k + m = n - 1$.

[1] Это количество разложений числа $n-1$ в сумму d занумерованных целых неотрицательных слагаемых $m_1, \dots, m_d$.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 2.1. Для любых $x, y \in I$ произведение $(a + x)(b + y) = ab + (ay + xb + xy) \cong ab \pmod{I}$. Обратите внимание, что для только левых или только правых идеалов это может быть неверно.

Упр. 2.2. Каждое линейное отображение $f : V \to A$ в коммутативную $\Bbbk$-алгебру A однозначно поднимается по универсальному свойству тензорной алгебры до гомоморфизма алгебр $\tilde{f} : TV \to A$ по формуле $\tilde{f}(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = f(v_1)\ldots f(v_n)$. Так как в коммутативной алгебре $f(u)f(w) = f(w)f(u)$ для всех $u, w \in V$, гомоморфизм $\tilde{f}$ аннулирует все разности $u \otimes w - w \otimes u$ и пропускается через факторизацию $TV \twoheadrightarrow T/\mathcal{I}_{\text{sym}} \simeq SV$. Это доказывает выполнение универсального свойства. То, что SV и ι однозначно им определяются, устанавливается дословно так же, как в лем. 1.1 на стр. 4.

Упр. 2.3. Дословно те же аргументы, что и для тензорного произведения, см. лем. 1.1 на стр. 4.

Упр. 2.4. Ответ: $\binom{n+d-1}{d-1}$. Это число решений уравнения $m_1 + \ldots + m_d = n$ в неотрицательных целых числах $m_1, \ldots, m_d$.

Упр. 2.5. Для любого конечного набора векторов в $\Bbbk^n$ (над любым полем $\Bbbk$) существует многочлен, принимающий на этих векторах любые наперёд заданные значения. Многочлен $x^p - x$ задаёт тождественно нулевую функцию на прямой над полем $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$.

Упр. 2.6. Стабилизатор каждого монома из обиты $E_{\boldsymbol{m}}$ в группе S_n состоит из $m_1!\, m_2! \,\ldots\, m_k!$ независимых перестановок одинаковых тензорных сомножителей между собою. Остаётся применить формулу для длины орбиты.

Упр. 2.7. Это стандартный факт из курса линейной алгебры и геометрии. Например, см. раздел 14.3 на стр. 205 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/2021/lec_14.pdf.

Упр. 2.8. Используйте те же аргументы, что и в примере 1.2 из части I.

Упр. 2.10. Так как утверждение линейно по v, f, g, его достаточно проверить для $v = e_i$, $f = x_1^{m_1} \ldots x_d^{m_d}$, $g = x_1^{k_1} \ldots x_d^{k_d}$.