А. Л. Городенцев, А. С. Лосев

Квантовые системы и геометрия: туда и обратно

семестровый спецкурс для начинающих, с множеством задач;
занятия по средам в 17-00, первое занятие — 9 февраля

Нам хотелось бы, следуя от частного к общему (т. е. от примеров к общей теории), показать, как классическая гамильтонова механика и её симплекто-геометрическая модель (понимаемые в духе книги В. И. Арнольда) возникают из более фундаментальных квантовой механики и её алгебро-геометрической модели переходом к «квазиклассическому пределу», а также обсудить и обратную задачу: как по данной геометрической и/или механической модели построить квантовую теорию, квазиклассическим пределом которой она является. Курс не требует никаких специальных познаний, выходящих за рамки стандартного *первого курса математики* НМУ (т. е. требуется знание линейной алгебры, опыт вычислений с матрицами и многочленами, плюс идея многообразия как «чего-то склеенного из стандартных локальных карт»).

Примерная программа курса

1) Квантовая механика с конечномерным пространством состояний (динамика унитарных преобразований конечномерного пространства; наблюдаемые как эрмитовы операторы; теоретико-вероятностная интерпретация измерений).

2) Представления $\mathfrak{su}(2)$ как квантово-механическая система (структура неприводимых представлений; когерентные состояния и описание динамики в терминах когерентных состояний).

3) Алгебраические векторные расслоения на $\mathbb{CP}_1$ и геометрия кривых Веронезе (описание обратимых пучков и его связь с теорией представлений $\mathfrak{su}(2)$; когерентные состояния и проективные вложения кривой Веронезе; проективная координатная алгебра $\mathbb{P}_1$).

4) Квазиклассический предел в представленческих и геометрических терминах, а так же с точки зрения когерентных состояний (как коммутативная проективная алгебра возникает из квантовой; описание универсальной обёртывающей алгебры $\mathfrak{su}(2)$ как деформации коммутативной алгебры; возникновение симплектической структуры на пространстве инфинитезимальных деформаций; классическая гамильтонова динамика как предел квантовой).

5) Локализация в неподвижной точке действия $\mathbb{C}^*$ (и/или $\mathrm{U}(1)$) на $\mathbb{CP}_1$ и гармонический осциллятор (возникновение гильбертова пространства состояний квантового осциллятора как заданного специальными асимптотическими условиями подпространства в прямом пределе конечномерных пространств квантовых состояний; классический предел этого соответствия как локализация гамильтоновой динамики в неподвижной точке действия $\mathbb{C}^*$).

6) Расширение круга геометрических примеров: $\mathbb{P}_n$ и флаги в $\mathbb{P}_3$ (голоморфные сечения линейных расслоений и теория представлений, соответствие между голоморфным квантованием по Березину и представленческим квантованием по Кириллову, квазиклассический предел).

7) Торические многообразия: алгебраическая геометрия (язык точек и язык функций, спектр торической алгебры, глобальные однородные координаты и проективные алгебры, линейные расслоения на торических многообразиях)

8) Торические многообразия: симплектическая геометрия (гамильтонова редукция торического действия, модель Дельцана, сравнение вещественной и комплексной поляризации)

9) Квантовая проективная алгебра торического многообразия. Квазиклассический предел.

10) На сколько позволит время: построение голоморфных сечений расслоений квантования по бор-зоммерфельдовым слоям вещественных поляризаций ($\mathrm{U}(1)$-связности на симплектическом многообразии, комплексная и вещественная поляризации, лагранжевы, специальные лагранжевы, бор-зоммерфельдовы и планковы циклы и их алгебро--геометрические свойства).