Векторные расслоения на $\mathbb{P}_1$

Векторные расслоения по Чеху. Локально тривиальное векторное расслоение ранга r на многообразии X задаётся указанием открытого покрытия $X = \cup U_\nu$, набора базисных сечений $e_\nu = (e_1^\nu, e_2^\nu, \dots, e_r^\nu)$ над каждым U_ν и правил склейки — набора матриц перехода $\varphi_{\mu\nu}$ (по одной матрице $\varphi_{\mu\nu}$ для *каждой пары карт*[1] U_μ, U_ν) между базисными сечениями: $e_\nu = e_\mu \varphi_{\mu\nu}$, таких что каждая матрица $\varphi_{\mu\nu}$ имеет в качестве элементов функции, регулярные на $U_\mu \cap U_\nu$, а вся совокупность матриц $\{\varphi_{\mu\nu}\}$ удовлетворяет очевидным соотношениям[2]

$$\varphi_{\mu\nu}\varphi_{\nu\mu} = \mathrm{Id}\,, \quad \varphi_{\mu\nu}\varphi_{\nu\tau}\varphi_{\tau\mu} = \mathrm{Id}\,.$$

Два расслоения *изоморфны*, если для некоторого общего для обоих расслоений покрытия (может быть более мелкого, чем те, что участвовали в исходном определении каждого из расслоений) базисные сечения этих расслоений можно выбрать так, чтобы функции склейки сделались одинаковыми.

5◇1 (алгебраические расслоения). В этой задаче мы рассматриваем *алгебраические расслоения*, матричные элементы в матрицах перехода которых суть *регулярные алгебраические* функции (определение см. в зад. 3◇3).

а) Вычислите функцию перехода *тавтологическкого* подрасслоения[3] $S \subset \mathbb{P}_1 \times U$ тривиального двумерного расслоения со слоем U (таким, что $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$).

б) Вычислите функции перехода касательного и кокасательного расслоений к сфере $\mathbb{P}_1$.

в*) Покажите, что всякое расслоение ранга 1 на $\mathbb{A}_1$ тривиально[4].

г) Пусть расслоение L ранга 1 на $\mathbb{P}_1$ тривиализовано над стандартными аффинными картами U_0, U_1 посредством базисных сечений e_0, e_1 соответственно (по предыдущей задаче такие тривиализации всегда существуют). Покажите, что в однородных координатах $\varphi_{01} = (z_1/z_0)^n$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$, и вычислите размерность пространства глобальных регулярных сечений такого расслоения.

д) Покажите, что всякое расслоение ранга 1 на $\mathbb{P}_1$ изоморфно расслоению $\mathscr{O}(n)$, регулярные сечения которого над открытым (по Зарисскому) множеством U образуют пространство рациональных дробей $f(z_0, z_1)/g(z_0, z_1)$, где f, g однородные многочлены, такие что $\deg f - \deg g = n$ и $g(p) \neq 0 \ \ \forall\, p \in U$. Каким n отвечают тавтологическое, касательное и кокасательное расслоения? Чему равна размерность пространства глобальных регулярных сечений расслоения $\mathscr{O}(n)$?

е) Как связаны функции перехода расслоений[5] E^* и $E^{\otimes n}$ с функциями перехода для E?

ж) Проверьте, что все расслоения $\mathscr{O}(n)$ попарно неизоморфны и составляют относительно операции тензорного произведения расслоений абелеву группу, изоморфную $\mathbb{Z}$ и порождённую расслоением $\mathscr{O}(1)$.

---

[1] Господа физики, обратите внимание, что индексы μ, ν здесь нумеруют *карты покрытия*, а не матричные элементы, так что $\varphi_{\mu\nu}$ это целая матрица (размер которой равен рангу расслоения и не очень существенен для нас в данный момент), а вовсе не «типичный матричный элемент»

[2] ещё раз подчеркнём, что это соотношения на *матрицы*, а не на «матричные элементы»

[3] по определению, слой S над точкой p — это то самое одномерное подпространство в U, которое изображается точкой $p \in \mathbb{P}(U)$

[4] подсказка: пусть расслоение строится по покрытию $\mathbb{A}_1 = \cup U_\alpha$ множествами $U_\alpha = \{x \in \mathbb{A}_1 \mid f_\alpha(x) \neq 0)\}$, где $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathbb{C}[x]$ — некий (конечный) набор многочленов, и базисным сечениям e_α над U_α, связанным функциями перехода $\varphi_{\beta\alpha} \cdot e_\beta = e_\alpha$; убедитесь, что $\varphi_{\beta\alpha} = f_\alpha^{s_\alpha} f_\beta^{s_\beta}$ для некоторых $s_\alpha, s_\beta \in \mathbb{Z}$ (ибо $\varphi_{\beta\alpha}$ определена и обратима на $U_\alpha \cap U_\beta$); далее, пусть $q_1, q_2, \dots, q_N \in \mathbb{C}[x]$ — это объединение всех линейных множителей (т.е. многочленов вида $q_i(x) = (x - a_i)$), входящих в разложения рациональных функций $\varphi_{\beta\alpha}$ в произведения (целых) степеней линеных множителей, и пусть q — один из этих множителей; разбейте набор $f_1, f_2, \dots, f_n$ на две непустых части: $\{f_\beta\}$, делящихся на q, и $\{f_\gamma\}$, не делящихся на q, и убедитесь, что для каждого β степень m_β, с которой q появляется в разложении функций перехода $\varphi_{\beta\gamma}$ на самом деле не зависит от γ (ибо q не входит в разложение $\varphi_{\gamma_1\gamma_2} = \varphi_{\gamma_1\beta}/\varphi_{\gamma_2\beta}$); затем убедитесь, что после замены всех сечений e_β на $e'_\beta = q^{m_\beta} \cdot e_\beta$ (кстати, допустима ли такая замена?) получатся новые функции перехода, ни в одну из которых q больше не входит

[5] двойственное расслоение E^* определяется так, чтобы спаривание векторов с ковекторами принимало значение в *тривиальном* одномерном расслоении

з*) Пусть в коммутативной алгебре A имеется однозначное разложение на неприводимые множители. Покажите, что тогда всякое расслоение ранга 1 над $Spec_m A$ тривиально (в частности, любое расслоение ранга 1 над аффинным пространством $\mathbb{A}_n = Spec_m \mathbb{C}[z_1, z_2, \dots, z_n]$ тривиально).

5◇2 (проективные вложения $\mathbb{P}_1$). Со многими расслоениями L ранга 1 на многообразии X связано регулярное отображение $X \xrightarrow{\varphi_L} \mathbb{P}\left(\Gamma(X,L)^*\right)$ в проективизацию пространства, двойственного к пространству $\Gamma(X,L)$ глобальных регулярных сечений этого расслоения. Это отображение переводит точку $p \in X$ в линейную форму на $\Gamma(X,L)$, задающую подпространство сечений, обращающихся в нуль в точке p (такая ненулевая форма существует и единственна с точностью до пропорциональности тогда и только тогда, когда подпространство зануляющихся в точке p сечений отлично от нуля и имеет коразмерность 1 в $\Gamma(X,L)$, т. е. когда отображение «вычисления значения» $\Gamma(X,L) \xrightarrow{\mathrm{ev}_p} \mathbb{C}$ не инъективно и эпиморфно[6]).

Опишите все отображения $\mathbb{P}_1 \xrightarrow{\varphi_L} \mathbb{P}(\Gamma(X,L)^*)$, задаваемые расслоениями $L = \mathscr{O}(n)$ с $n \geqslant 1$.

Индуцированные расслоения на однородных пространствах. Пусть пространство $X = G/H$ представляет собой множество правых смежных классов алгебраической группы G (например, $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$) по замкнутой подгруппе $H \subset G$ (например, верхнетреугольных матриц из $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$). Тогда с любым регулярным[7] представлением $H \xrightarrow{\varrho} \mathrm{GL}(V)$ подгруппы H в пространстве V можно связать векторное расслоение E со слоем V над X. А именно, $E = (G \times V)/H$ есть пространство орбит действия H на прямом произведении $G \times V$ по правилу $(g,v) \overset{h}{\longmapsto} (gh^{-1}, \varrho(h)v)$, и проекция $E \xrightarrow{\pi} G/H$ переводит H-орбиту элемента (g,v) в смежный класс $g \pmod H$.

5◇3 (эквивариантные расслоения). Убедитесь, что в предыдущей конструкции $\pi^{-1}(x) = V$ $\forall\, x \in G/H$, причём имеется естественное действие группы G на E, которое продолжает действие G левыми умножениями $f \pmod H \overset{g}{\longmapsto} gf \pmod H$ на нулевом сечении $G/H = X \subset E$ и для любых $g \in G$ и $x \in X$ линейно (и изоморфно) отображает слой E над точкой $x \in X$ в слой E над точкой gx.

а) Покажите, что пространство $\Gamma(X,E)$ глобальных регулярных сечений расслоения E отождествляется с пространством регулярных функций $G \xrightarrow{\varphi} V$, таких что $\varphi(gh^{-1}) = \varrho(h)\varphi(g)$ для всех $g \in G$, $h \in H$ и постройте представление группы G в этом пространстве, индуцированное действием G на E. Опишите подпространство $\Gamma(X,E)^G \subset \Gamma(X,E)$ всех G-инвариантных сечений.

б) (связь с Чехом) Для каждой точки $x \in X$ постройте (хотя бы в условиях следующего ниже пункта) открытую окрестность W_x и регулярное вложение $W_x \overset{s_x}{\hookrightarrow} G$, такие что $\forall\, x' \in W_x$ выполнено соотношение $x' = s_x(x') \cdot x_0$, где $x_0 = e \pmod H \in X = G/H$ — класс единицы, и проверьте, что $x' \longmapsto s_x^{-1}(x')s_y(x')$ является H-значной регулярной функцией на $W_x \cap W_y$ $\forall\, x, y$. Как связано расслоение E с локально тривиальным расслоением на X со слоем V, построенным по покрытию W_x и матрицам перехода $\varphi_{xy} = \varrho(s_x^{-1}s_y)$?

в) Убедитесь, что $\mathbb{P}_1 = \mathrm{SL}_2/H$, где $H \subset \mathrm{SL}_2$ — стабилизатор одномерного подпространства $z_1 = 0$ при тавтологическом действии SL_2 на координатные столбцы $(z_0, z_1)^t$. Покажите, что все расслоения $\mathscr{O}(n)$ индуцированы с подходящих одномерных представлений $H \longrightarrow \mathbb{C}^*$, явно опишите эти представления, а также индуцированные представления SL_2 в пространствах $\Gamma(\mathbb{P}_1, \mathscr{O}(n))$.

г) Постройте SL_2-инвариантное скалярное произведение на $\Gamma(\mathbb{P}_1, \mathscr{O}(n))$ и покажите, что оно единственно (с точностью до пропорциональности) и задаёт отождествление пространств $\mathbb{P}\left(\Gamma(\mathbb{P}_1, \mathscr{O}(n))^*\right) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}\left(\Gamma(\mathbb{P}_1, \mathscr{O}(n))\right)$. Как связаны композиция этого отождествления с отображением $\mathbb{P}_1 \xrightarrow{\varphi_{\mathscr{O}(n)}} \mathbb{P}\left(\Gamma(\mathbb{P}_1, \mathscr{O}(n))^*\right)$ из зад. 5◇2 и отображение Веронезе?

[6] чтобы задать такое отображение, надо фиксировать базисное сечение e в окрестности p и записать произвольное сечение s в виде $s = f(x) \cdot e$, где f — регулярная (в окрестности p) функция; тогда $\mathrm{ev}_p(s) \overset{\text{def}}{=} f(p)$ (обратите внимание, что выбор другого базисного сечения умножает ev_p на константу!)

[7] т. е. таким, что матричные элементы операторов представления являются регулярными функциями на группе