Скобка Пуассона на сфере

Обозначения. Напомним, что универсальная обёртывающая алгебра $\mathfrak{U}(\mathfrak{sl}_2)$ является фактором тензорной алгебры $\mathbb{T}(\mathfrak{sl}_2) = \bigoplus\limits_{n\geqslant 0} \mathfrak{sl}_2^{\otimes n}$ по двустороннему идеалу, порождённому элементами $f\otimes g - g\otimes f - [f,g]\cdot 1$, где $f,g\in\mathfrak{sl}_2$. Эта алгебра *фильтрована* подпространствами $\mathfrak{U}_m\subset\mathfrak{U}(\mathfrak{sl}_2)$, являющимися образами подпространств $\bigoplus\limits_{n=0}^{m}\mathfrak{sl}_2^{\otimes n}\subset\mathbb{T}(\mathfrak{sl}_2)$ по модулю соотношений. Ясно, что $\mathfrak{U}_m\cdot\mathfrak{U}_k\subset\mathfrak{U}_{m+k}$. Обозначим через $\mathscr{G} = \bigoplus\limits_{m\geqslant 0}\mathfrak{U}_m/\mathfrak{U}_{m-1}$ ассоциированную градуированную алгебру[1].

Напомним также, что мы обозначаем через $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})\xrightarrow{\varrho_n}\mathfrak{gl}(V_n)$ стандартное $(n+1)$-мерное неприводимое представление в однородных многочленах степени n от (z_0,z_1), а через $\widetilde{\varrho}_n = \frac{1}{n}\varrho_n$ — сответствующее перескалированное представление. Будем писать $\widetilde{\boldsymbol{h}}$, $\widetilde{\boldsymbol{e}}_+$, $\widetilde{\boldsymbol{e}}_-$ и т. п. для образов операторов $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{e}_+$, $\boldsymbol{e}_-$ и т. п. в этом перескалированном представлении $\widetilde{\varrho}_n$. Для любых $f,g\in\mathfrak{U}(\mathfrak{sl}_2)$ композиция $\widetilde{f}\circ\widetilde{g}$ и коммутатор $[\widetilde{f},\widetilde{g}]$ соответствующих операторов в перескалированном представлении $\widetilde{\varrho}_n$ могут быть представлены (вообще говоря, многими способами) в виде рядов по $1/n$:

$$\widetilde{f}\circ\widetilde{g} = \sum_{\nu\geqslant 0}\left(\frac{1}{n}\right)^{\nu}\widetilde{f}\underset{\nu}{\circ}\widetilde{g}\,,\qquad [\widetilde{f},\widetilde{g}] = \sum_{\nu\geqslant 1}\left(\frac{1}{n}\right)^{\nu}[\widetilde{f},\widetilde{g}]_{\nu} \tag{3}$$

Хотя предыдущее представление и не однозначно[2], мы, тем не менее, положим $\{\widetilde{f},\widetilde{g}\}\stackrel{\text{def}}{=}[\widetilde{f},\widetilde{g}]_1$.

Обозначим через $\widetilde{\mathfrak{U}}_n$ алгебру с образующими $\widetilde{\boldsymbol{h}}$, $\widetilde{\boldsymbol{e}}_+$, $\widetilde{\boldsymbol{e}}_-$ и коммутационными соотношениями, которым эти элементы удовлетворяют в представлении[3] $\widetilde{\varrho}_n$. Эрмитово сопряжение матриц задаёт на векторном пространстве $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ вещественную структуру, вещественной частью которой служит алгебра $\mathfrak{su}_2\subset\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Соответствующая вещественная структура возникает и в каждой алгебре $\widetilde{\mathfrak{U}}_n$; в частности, мы можем рассмотреть вещественные образующие x, y, z, заданные формулами:

$$x+iy=\widetilde{\boldsymbol{e}}_+\,,\qquad x-iy=\widetilde{\boldsymbol{e}}_-\,,\qquad 2\,z=\widetilde{\boldsymbol{h}}\,.$$

4◇1 (скобка Пуассона). Убедитесь, что нижние границы суммирования в обеих формулах (3) указаны правильно, вычислите младшие (по $1/n$) члены всех попарных произведений и коммутаторов базисных операторов $\widetilde{\boldsymbol{h}}$, $\widetilde{\boldsymbol{e}}_+$, $\widetilde{\boldsymbol{e}}_-$, а также выразите $\widetilde{\varkappa}$ (образ оператора Казимира в перескалированном представлении $\widetilde{\varrho}_n$) через вещественный базис x,y,z.

а*) Убедитесь, что при $n\to\infty$ алгебра $\widetilde{\mathfrak{U}}_n$ стремится к коммутативной алгебре $\mathscr{A} = \mathbb{C}[x,y,z]/(x^2+y^2+z^2-1/4)$ комплекснозначных полиномиальных функций на вещественной двумерной сфере диаметра 1 (которая является фактором присоединённой градуированной алгебры $\mathscr{G}$ по соотношению $8\,\widetilde{\varkappa}=1$).

б) Проверьте, что на алгебре $\mathscr{A}$ корректно определена скобка $\{\widetilde{f},\widetilde{g}\}\stackrel{\text{def}}{=}[\widetilde{f},\widetilde{g}]_1$ (т. е. результат не зависит от представления f, g некоммутативными многочленами).

---

[1] Согласно теореме Пуанкаре – Биркгофа – Витта, $\mathscr{G} = \mathbb{C}[\boldsymbol{h},\boldsymbol{e}_+\boldsymbol{e}_-]$ представляет собой *симметрическую алгебру* векторного пространства $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$; если Вы впервые об этом слышите, стоит поглядеть стр. 25–27 книжки: *Ж.-П. Серр. Алгебры Ли и группы Ли.* М. «Мир» (1969).

[2] чтобы его получить, необходимо записать каждый присутствующий в формуле элемент $f\in\mathfrak{U}(\mathfrak{sl}_2)$ в виде некоммутативного тензорного многочлена от $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{e}_+$, $\boldsymbol{e}_-$ (уже эта запись не единственна, и определена лишь по модулю соотношений $x\otimes y - y\otimes x = [x,y]\cdot 1$), затем навесить «волну» над каждым образующим элементом, затем провести необходимые вычисления (произведений, коммутаторов и т. п.), пользуясь правилами коммутирования «волнистых» перескалированных переменных, и сгруппировать ответ по степеням $1/n$ (при этом мы тоже можем, пользуясь коммутационными соотношениями, по разному представлять результат)

[3] поскольку представление ϱ_n неприводимо, образ $\varrho_n\left(\mathfrak{U}(\mathfrak{sl}_2)\right)$ совпадает со всей алгеброй эндоморфизмов пространства V_n, так что $\widetilde{\mathfrak{U}}_n\simeq\operatorname{End}(V_n)$, но очень важно, что мы используем специальный, *зависящий от* n набор образующих для этой алгебры

в) Проверьте, что $\{\widetilde{f},\widetilde{g}\} = -\{\widetilde{g},\widetilde{f}\}$. Верно ли, что операция $\{\widetilde{f},*\} : x \longmapsto \{\widetilde{f},x\}$ является *дифференцированием* композиции, т. е. удовлетворяет правилу Лейбница:

$$\{\widetilde{f},\widetilde{g}_1\circ\widetilde{g}_2\} = \{\widetilde{f},\widetilde{g}_1\}\circ\widetilde{g}_2 + \widetilde{g}_1\circ\{\widetilde{f},\widetilde{g}_2\}$$

г) Является ли операция $\{\widetilde{f},*\} : x \longmapsto \{\widetilde{f},x\}$ дифференцированием *самой себя*, т. е. удовлетворяет ли она правилу Лейбница[4]:

$$\{\widetilde{f},\{\widetilde{g}_1,\widetilde{g}_2\}\} = \{\{\widetilde{f},\widetilde{g}_1\},\widetilde{g}_2\} + \{\widetilde{g}_1,\{\widetilde{f},\widetilde{g}_2\}\}$$

4◇2 (уравнения Гамильтона). Проверьте, что эволюция наблюдаемой $\widetilde{A}$ в представлении $\widetilde{\varrho}_n$ при движении, отвечающем гамильтониану $\widetilde{H}$ описывается *уравнением Гамильтона*:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \{\widetilde{H},A\} + o\,(1/n)$$

а) Рассмотрим на пространстве всех гладких отображений φ из отрезка $[\,0\,,\,1\,]$ в d-мерное гладкое многообразие X, преводящих концы отрезка в некоторые фиксированные точки из X, функционал S, который строится по заданным гладкой 1-форме $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{d} \alpha_i(x)\,dx_i$ и гладкой функции $H(x)$ на многообразии X по формуле:

$$S(\varphi) = \int\limits_{[0,1]} \varphi^*\alpha - \varphi^* H\,dt = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{d} \dot{\varphi}^i(t)\alpha_i(\varphi(t)) - H(\varphi(t))\right)\,dt\;,$$

где t — координата на отрезке, а $(x_1,x_2,\dots,x_d)$ — локальные координаты на X, в которых φ описывается как $t \longmapsto x(t) = (\varphi_1(t),\,\varphi_2(t),\,\dots\,,\,\varphi_d(t))$. Вычислите вариационную производную этого функционала (т. е. линейную по $\delta\varphi$ часть приращения $S(\varphi+\delta\varphi)-S(\varphi)$, где $\delta\varphi$ пробегает линейное пространство функций $[\,0\,,\,1\,] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ с $\delta\varphi(0) = \delta\varphi(1) = 0$).

б) Проверьте, что в условиях предыдущего пункта экстремальные отображения φ описываются дифференциальным уравнением $\llcorner_{\dot\varphi} d\alpha + dH = 0$ (первое слагаемое которого есть 1-форма, получающаяся в результате подстановки векторного поля $\dot\varphi$ в первый аргумент 2-формы $d\alpha$). Равносильно ли это уравнение уравнению Гамильтона $\dot\varphi = \{\varphi,H\}$ для скобки Пуассона

$$\{f,g\} = \sum_{i,j=1}^{d} \pi^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\,\frac{\partial g}{\partial x_j} \tag{4}$$

построенной по какому-нибудь кососимметричному бивекторному полю π^{ij} на X? Если «да», то как связано поле π^{ij} с 1-формой α?

в) При каких условиях скобка (4) удовлетворяет тождеству Якоби?

4◇3 (пуассоново поле на сфере). Убедитесь, что операция $\{\widetilde{f},\widetilde{g}\}$ (определённая в зад. 4◇1 для полиномиальных функций на сфере) может быть записана в произвольных локальных координатах (x_1,x_2) на сфере в виде

$$\{\widetilde{f},\widetilde{g}\} = \sum_{i,j=1}^{2} \pi^{ij}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_i}\,\frac{\partial \widetilde{g}}{\partial x_j}$$

где $\widetilde{f}$, $\widetilde{g}$ явно выражены в виде функций от локальных координат x_1,x_2, а $\pi^{ij} = \pi^{ij}(x_1,x_2)$ образуют (кососимметричное по i,j) касательное бивекторное поле на сфере.

а) Явно вычислите $\pi^{ij}(x,y)$ в локальных координатах (x,y) на верхней полусфере.

б) Явно вычислите $\pi^{ij}(z,\overline{z})$ в комплесных координатах $z,\overline{z}$ на дополнении к южному полюсу сферы.

[4] которое в этом контексте часто называется *тождеством Якоби*