# Кривые Веронезе, когерентные состояния и алгебраическая геометрия

**3◇1 (кривые Веронезе).** Рассмотрим проективизацию $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(V_1)$ пространства линейных форм $\alpha(z) = \alpha_0 z_0 + \alpha_1 z_1$ на двумерном комплексном векторном пространстве и аналогичную проективизацию $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V_n)$ пространства однородных полиномов степени $n$ от $z_0, z_1$. Условимся записывать такой полином в виде $\sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu \cdot \binom{\nu}{n} z_0^{n-\nu} z_1^\nu$ и использовать $a_\nu$ как однородные координаты на $\mathbb{P}_n$. Отображение Веронезе $\mathbb{P}_1 \xrightarrow{v_n} \mathbb{P}_n$ переводит линейную форму $\alpha \in V_1$ в $\alpha^n \in V_n$. Его образ $C_n = v_n(\mathbb{P}_1) \subset \mathbb{P}_n$ называется *кривой Веронезе*[1] степени $n$. Задайте кривую Веронезе явными параметрическими уравнениями.

**а)** Лежит ли $C_n$ в какой-нибудь гиперплоскости?

**б)** Как устроена проекция $C_n$ из точки $p \in C_n$ на гиперплоскость $\mathbb{P}_{n-1} \not\ni p$?

**в)** Покажите, что любая кривая на $\mathbb{P}_2$, допускающая рациональную параметризацию, является плоской проекцией кривой Веронезе.

**г*)** Задайте кривую Веронезе явными квадратичными уравнениями[2].

**д*)** Зафиксируем в $\mathbb{P}_n$ набор из $n$ точек $p_1, p_2, \dots, p_n$ и ещё три точки $a, b, c$, так что никакие $(n+1)$ из всех этих $(n+3)$ точек не лежат в одной гиперплоскости. Для каждого $i$ рассмотрим пучок[3] $\ell_i$, образованный всеми гиперплоскостями, проходящими через $(n-2)$-мерную плоскость, натянутую на $(n-1)$ точек $p_\nu$ с $\nu \neq i$. Отождествим эти пучки между собой при помощи дробно-линейных изоморфизмов $\varphi_{ij} : \ell_j \xrightarrow{\sim} \ell_i$, переводящий три плоскости $j$-того пучка, проходящие через точки $a$, $b$, $c$, в соответствующие три плоскости $i$-того пучка. Проверьте, что эти отождествления согласованы в том смысле, что $\varphi_{ij}\varphi_{jk} = \varphi_{ik}$ и опишите ГМТ заметаемое точкой пересечения соответственных гиперплоскостей:

$$\bigcup_{H \in \ell_1} H \cap \varphi_{12}(H) \cap \varphi_{13}(H) \cap \ldots \cap \varphi_{1n}(H)$$

**е*)** Покажите, что для любых $(n+3)$ точек $p_1, p_2, \dots, p_n, a, b, c \in \mathbb{P}_n$, никакие $(n+1)$ из которых не лежат в одной гиперплоскости, существует линейная замена координат в $\mathbb{P}_n$, переводящая *все* эти точки на кривую Веронезе $C_n$, причём любые две такие замены различаются на преобразование $S^n U^*$, индуцированное линейной заменой координат $z_0, z_1$ (т.е. на оператор из $\mathrm{SL}_2$ действующий на $S^n U^*$ как в прошлом листке).

**3◇2 (когерентные состояния).** Когерентным состоянием в пространстве состояний $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V_n)$ (проективизации $(n+1)$-мерного неприводимого представления $V_n$ алгебры $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$) называется любая точка из $\mathrm{SL}_2$-орбиты старшего вектора. Убедитесь, что множество когерентных состояний — это в точности кривая Веронезе $C_n \subset \mathbb{P}_n$.

**а)** Найдите дисперсии наблюдаемых $\sigma_1/n$, $\sigma_2/n$, $\sigma_3/n$ (из предыдущего листка) на старшем векторе и на любом когерентном состоянии и найдите их пределы при $n \to +\infty$.

**б)** Опишите все (не обязательно когерентные) состояния, на которых сумма дисперсий наблюдаемых $\sigma_1/n$, $\sigma_2/n$, $\sigma_3/n$ минимальна.

---

[1] а также скрученной рациональной кривой

[2] ответ: $\mathrm{rk} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix} = 1$

[3] *пучком* (в этом контексте) называется семейство фигур, линейно зависящих от параметра $\lambda \in \mathbb{P}_1$; например, ясно, что уравнение гиперплоскости, проходящей через через $(n-2)$-мерную плоскость, заданную парой линейно независимых уравнений $\alpha(x) = \beta(x) = 0$, имеет вид $\lambda_0\alpha(x) + \lambda_1\beta(x) = 0$, где $\lambda \in \mathbb{P}_1$, так что такие гиперплоскости составляют пучок

**в)** Найдите $\mathrm{tr}\,(\varrho_p\varrho_q)$ — след произведения ортогональных проекторов на когерентные состояния $p, q \in C_n \subset \mathbb{P}_n$ как функцию от $p, q, n$. Чему равен её предел при $n \to +\infty$ как «функция» на $C_n \times C_n = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$?

**3◇3 (аффинная алгебраическая геометрия).** Каждой конечнопорождённой коммутативной алгебре без нильпотентов[4] $A$ над полем $\mathbb{C}$ можно сопоставить множество *точек* $Spec_m\, A$, которыми, по определению, являются *комплексные гомоморфизмы вычисления*, т. е. гомоморфизмы алгебр $A \xrightarrow{\mathrm{ev}_p} \mathbb{C}$, переводящие единицу в единицу[5]. Поскольку всякий такой гомоморфизм однозначно определяется своим ядром $\mathfrak{m}_p \overset{\mathrm{def}}{=} \ker \mathrm{ev}_p$ и представляет собой факторизацию $A \xrightarrow{\mathrm{ev}_p} A/\mathfrak{m}_p = \mathbb{C}$, то $Spec_m\, A$ можно описать как *множество идеалов* $\mathfrak{m}_p \subset A$, таких что $A/\mathfrak{m}_p = \mathbb{C}$ (убедитесь, что это в точности множество всех *максимальных*[6] идеалов).

**а)** Установите явные биекции между точками аффинной прямой $\mathbb{A}_1 \simeq \mathbb{C}$, гомоморфизмами вычисления $\mathbb{C}[x] \longrightarrow \mathbb{C}$ и максимальными идеалами $\mathfrak{m} \subset \mathbb{C}[x]$.

**б$^*$)** Имеются ли биекции между точками отрезка $[\,0\,,\,1\,] \subset \mathbb{R}$, максимальными идеалами алгебры $C$ *непрерывных* функций $[\,0\,,\,1\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ и гомоморфизмами вычисления $C \longrightarrow \mathbb{R}$?

**в) (топология Зарисского)** По определению, базой открытых множеств *топологии Зарисского* на $Spec_m\, A$ являются множества вида $\mathscr{D}_a \overset{\mathrm{def}}{=} \{p \mid a(p) \neq 0\}$, где $a \in A$ и $a(p) = \mathrm{ev}_p(a) = a\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{m}_p) \in \mathbb{C}$ есть *значение* $a \in A$ в $p \in Spec_m\, A$. Проверьте, что это действительно база топологии (хотя бы на $\mathbb{A}_1$) и опишите все открытые и замкнутые множества Зарисского на аффинной прямой $\mathbb{A}_1$. Верно ли, что *любое* открытое (по Зарисскому) подмножество прямой имеет вид $\mathscr{D}_a$? А на плоскости $\mathbb{A}_2 = Spec_m\, \mathbb{C}[x, y]$?

**г)** Покажите, что $\mathbb{A}_2 = \mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_1$ (как множество), но топология Зарисского на $\mathbb{A}_2$ *тоньше*[7], чем произведение топологий Зарисского на $\mathbb{A}_1$.

**д)** Покажите (хотя бы для $\mathbb{A}_1$), что топология Зарисского *квазикомпактна*: любое открытое покрытие любого открытого подмножества в $Spec_m\, A$ содержит конечное подпокрытие.

**е) (структурный пучок)** Функция $U \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ на открытом (по Зарисскому) множестве $U \subset Spec_m\, A$ называется *регулярной*, если $\forall\, p \in U \;\; \exists\, a, b \in A$: $b(p) \neq 0$ и $f(x) = a(x)/b(x)$ $\forall\; x \in \mathscr{D}_b \cap U$. Алгебра регулярных функций на $U$ обозначается $\mathscr{O}(U)$ или $\Gamma(U, \mathscr{O})$; сопоставление $U \longmapsto \mathscr{O}(U)$ называется *пучком регулярных функций*. Проверьте (хотя бы для $\mathbb{A}_1$), что $\mathscr{O}(\mathscr{D}_a) = A[a^{-1}]$ и $\mathscr{O}(Spec_m\, A) = A$.

**ж) (регулярные функции на $\mathbb{P}_1$)** Функция $\mathbb{P}_1 \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ называется регулярной, если у каждой точки есть открытая (по Зарисскому) окрестность (содержащаяся в одной из аффинных карт), где эта функция регулярна (с точки зрения этой карты). Проверьте, что это определение корректно (не зависит от выбора карты) и убедитесь, что $\mathscr{O}(U)$ состоит из всех функций $U \xrightarrow{f} \mathbb{C}$, для которых $\forall\, p \in U$ существуют однородные многочлены *одинаковой* степени $g(z_0, z_1)$, $h(z_0, z_1)$ (где $z = (z_0 : z_1)$ суть однородные координаты на $\mathbb{P}_1$), такие что $h(p) \neq 0$ и $f(z) = g(z)/h(z)$ для всех $z \in U$, в которых $h(z) \neq 0$.

**з)** Убедитесь, что $\mathscr{O}(\mathbb{P}_1) = \mathbb{C}$ и всякое регулярное[8] отображение $\mathbb{P}_1 \longrightarrow Spec_m\, A$ стягивает $\mathbb{P}_1$ в одну точку.

---

[4] по определению, конечнопорождённая коммутативная алгебра — это алгебра $A = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]/I$, где $I \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ — некоторый идеал; классы $a_i \overset{\mathrm{def}}{=} x_i\,(\mathrm{mod}\, I)$ называются *образующими*, а $I$ называется *идеалом соотношений* (поскольку $f(a_i) = 0$ в $A$ $\;\forall\, f \in I$ ); отсутствие *нильпотентов* означает, что $a^m = 0 \Rightarrow a = 0$ в $A$ $\forall\, m \in \mathbb{N}$ ; в терминах $I$ это равносильно условию: $f^m \in I \Rightarrow f \in I$ в $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ $\;\forall\, f \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , $\;\forall\, m \in \mathbb{N}$ ; такие идеалы называются *радикальными*

[5] интуитивно, каждый такой гомоморфизм вычисляет значение функций $a \in A$ в некоторой точке $p \in Spec_m\, A$

[6] собственный идеал $\mathfrak{m}$ называется *максимальным*, если идеал порождённый им и любым элементом $a \notin \mathfrak{m}$ совпадает со всей алгеброй $A$

[7] т. е. её открыте и/или замкнутые множества не порождаются произведениями таковых на $\mathbb{A}_1$

[8] напомним, что отображение многообразий $X \xrightarrow{\varphi} Y$ называется *регулярным* если для любой локальной регулярной функции $Y \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ композиция $f{\circ}\varphi$ является локальной регулярной функцией на $X$