Представления $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \mathfrak{su}_2 \otimes \mathbb{C}$ и «менее квантовые» системы: на пути к классике

2◇1 (алгебра Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \mathfrak{su}_2 \otimes \mathbb{C}$). В обозначениях предыдущего листка:

а) Опишите комплексную линейную оболочку матриц σ_1, σ_2, σ_3 в пространстве $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ всех комплексных 2×2 матриц. Вычислите все попарные коммутаторы между этими тремя матрицами, а также все попарные коммутаторы между матрицами

$$\boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

(стандартный базис пространства бесследовых матриц $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \subset \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$).

б) Отобразим $\mathfrak{sl}_2$ в алгебру $\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2) = \mathfrak{sl}_2^* \otimes \mathfrak{sl}_2$ всех линейных операторов на (трёхмерном) пространстве $\mathfrak{sl}_2$, сопоставляя матрице $a \in \mathfrak{sl}_2$ оператор $\mathrm{ad}_a : y \longmapsto [a, y]$. Верно ли что, что $\mathrm{ad}_{[a,b]} = [\mathrm{ad}_a, \mathrm{ad}_b]$ для любых $a, b \in \mathfrak{sl}_2$?

в) (форма Килинга) Вычислите матрицы Грама билинейной формы $(a, b) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}_a \circ \mathrm{ad}_b)$ на $\mathfrak{sl}_2$ (след берётся в $\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2)$) в базисе (1) и в базисе σ_1, σ_2, σ_3, и найдите двойственные к ним базисы[1]. Верно ли, что $([a, b], c) + (b, [a, c]) = 0\ \forall\ a, b, c \in \mathfrak{sl}_2$?

г) (оператор Казимира) Напишите явную формулу для тождественного оператора

$$\begin{aligned} \varkappa \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Id}_{\mathfrak{sl}_2} = \sigma_1^* \otimes \sigma_1 + \sigma_2^* \otimes \sigma_2 + \sigma_2^* \otimes \sigma_2 = \\ = \boldsymbol{h}^* \otimes \boldsymbol{h} + \boldsymbol{e}_+{}^* \otimes \boldsymbol{e}_+ + \boldsymbol{e}_-{}^* \otimes \boldsymbol{e}_- \in \mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2) = \mathfrak{sl}_2^* \otimes \mathfrak{sl}_2 \simeq \mathfrak{sl}_2 \otimes \mathfrak{sl}_2 \end{aligned} \tag{2}$$

в базисе (1) и в базисе σ_1, σ_2, σ_3. Убедитесь, что этот элемент лежит в центре универсальной обёртывающей алгебры $\mathfrak{U}(\mathfrak{sl}_2)$ и его образ при любом линейном представлении $\mathfrak{sl}_2 \xrightarrow{\varrho} \mathrm{End}(V)$ коммутирует со всеми операторами из $\mathfrak{sl}_2$.

д) (операторы рождения – уничтожения) Проверьте, что в любом линейном представлении $\mathfrak{sl}_2 \xrightarrow{\varrho} \mathrm{End}(V)$ операторы $\boldsymbol{e}_+$, $\boldsymbol{e}_-$ действуют как на собственных, так и на корневых векторах оператора $\boldsymbol{h}$. Как при этом они изменяют собственное значение?

2◇2 ($\mathfrak{sl}_2$-модули). Обозначим через $V_n \subset \mathbb{C}[z_0, z_1]$ $(n+1)$-мерное подпространство однородных многочленов степени n. Рассмотрим на $\mathbb{C}[z_0, z_1]$ действие операторов:

$$\boldsymbol{e}_+ = z_0 \frac{\partial}{\partial z_1} \quad , \qquad \boldsymbol{e}_- = z_1 \frac{\partial}{\partial z_0} \quad , \qquad \boldsymbol{h} = z_0 \frac{\partial}{\partial z_0} - z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \,,$$

а) Проверьте, что для каждого $n \geqslant 0$ на пространстве V_n таким образом возникает *неприводимое* представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ и вычислите собственные значения операторов $\boldsymbol{h}$ и $\varkappa$ на этом представлении.

б) Покажите, что всякое конечномерное неприводимое представление $\mathfrak{sl}_2$ изоморфно одному из[2] V_n.

в) Как устроено представление $V_n^\times$, двойственное[3] к V_n?

г) Во всяком ли конечномерном представлении $\mathfrak{sl}_2$ операторы $\boldsymbol{e}_+$, $\boldsymbol{e}_-$ нильпотентны, а $\boldsymbol{h}$ и $\varkappa$ диагонализуемы?

---

[1] базис $\{e_i^\times\}$ в пространстве со скалярным произведением $(*, ast)$ называется *двойственным* к базису $\{e_i\}$, если $(e_i, e_j^*) = \delta_{ij}$

[2] ПОДСКАЗКА: возьмите собственный вектор e_0 оператора $\boldsymbol{h}$, лежащий в ядре оператора $\boldsymbol{e}_+$ (такой вектор называется *старшим вектором*, а его собственное значение — *старшим весом*), и покажите, что векторы $e_m = \boldsymbol{e}_-{}^m e_0$ составят (конечномерный) $\mathfrak{sl}_2$-подмодуль, изоморфный подходящему по размерности V_n

[3] действие $\mathfrak{sl}_2$ определяется тем, что $\langle\, a\xi\,,\, v \,\rangle + \langle\, \xi\,,\, av \,\rangle = 0\ \forall\ \xi \in V^\times$, $v \in V$, $a \in \mathfrak{sl}_2$, где $\langle\, *\,,\, * \,\rangle$ обозначает свёртку вектора и ковектора

д*) Пусть $U \subset V$ — два произвольных представления $\mathfrak{sl}_2$, причём $\dim V = \dim U + 1$. Проверьте, что $\mathfrak{sl}_2(V) \subset U$ и постройте в V трансверсальный к U вектор v, такой что[4] $\mathfrak{sl}_2(v) = 0$.

е*) Докажите, что всякое представление V алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ раскладывается в прямую сумму неприводимых. Для этого постройте для каждого подпредставления $U \subset V$ проектор $V \xrightarrow{F} U$, перестановочный с действием[5] $\mathfrak{sl}_2$ (тогда $V = U \oplus \ker F$).

2◇3 (Разложение Клебша – Гордана). Разложите тензорное произведение $V_m \otimes V_n$ (на котором $\mathfrak{sl}_2$ действует по правилу $a(v \otimes w) = a(v) \otimes w + v \otimes a(w)$) в прямую сумму неприводимых представлений и выясните:

а) При каких условиях на натуральные числа m, n представление $V_m \otimes V_n$ содержит тривиальное одномерное и/или тавтологическое двумерное подпредставления?

б) Существует ли на неприводимом представлении V_n $\mathfrak{sl}_2$-инвариантное скалярное произведение[6], и если да, то насколько оно единственно и можно ли выбрать его симметричным и/или кососимметричным?

в) При каких условиях на натуральные числа m, n, k имеется $\mathfrak{sl}_2$-инвариантный оператор $V_m \otimes V_n \xrightarrow{\varepsilon^k_{mn}} V_k$ и много ли таких бывает (когда бывает)?

г) Рассмотрим естественное представление $\mathfrak{sl}_2$ на пространстве $W = V_1^\times \otimes V_1 = \mathrm{End}(V_1)$ всех линейных операторов на тавтологическом двумерном $\mathfrak{sl}_2$-модуле V_1. Разложите на неприводимые представления само W, а также $W^{\otimes 2}$, S^2W и $\Lambda^2 W$.

2◇4* (представления $\mathfrak{su}_2$). Всякое комплексное линейное представление $\mathfrak{su}_2 \longrightarrow \mathfrak{gl}(W, \mathbb{C})$ (комплексно-линейными эндоморфизмами комплексного векторного пространства W) продолжается по $\mathbb{C}$-линейности до представления $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(W, \mathbb{C})$, а всякое вещественное представление $\mathfrak{su}_2 \longrightarrow \mathfrak{gl}(V, \mathbb{R})$ (вещественно-линейными эндоморфизмами вещественного векторного пространства V) продолжается по $\mathbb{C}$-линейности до представления $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V_\mathbb{C}, \mathbb{C})$ в комплексифицированном пространстве $V_\mathbb{C} = V \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}$. Что при этом происходит с приводимостью/неприводимостью? Есть ли на V_n $\mathfrak{su}_2$-инвариантное эрмитово произведение?

а) Опишите все комплексные и все вещественные конечномерные неприводимые представления алгебры Ли $\mathfrak{su}_2$.

б) Верно ли, что любое конечномерное вещественное и/или комплексное представление $\mathfrak{su}_2$ раскладывается в прямую сумму неприводимых?

2◇5 (пространство вещественных функций на сфере). Пространство вещественных полиномиальных функций на единичной сфере $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ представляет собой фактор-алгебру $\mathscr{A} = \mathbb{R}[x, y, z]/(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ (по главному идеалу, порождённому уравнением сферы). Убедитесь, что операторы

$$\boldsymbol{i} = y\,\frac{\partial}{\partial z} - z\,\frac{\partial}{\partial y}\,, \quad \boldsymbol{j} = z\,\frac{\partial}{\partial x} - x\,\frac{\partial}{\partial z}\,, \quad \boldsymbol{k} = x\,\frac{\partial}{\partial y} - y\,\frac{\partial}{\partial x}\,,$$

задают действие на пространстве $\mathscr{A}$ алгебры Ли $\mathfrak{su}_2$, и разложите $\mathscr{A}$ в прямую сумму неприводимых представлений. Как действует на $\mathscr{A}$ оператор $\varkappa$?

2◇6 (квазиклассический предел). Рассмотрим в представлении V_n «перескалированные» операторы $\sigma_{1,n} = \sigma_1/n$, $\sigma_{2,n} = \sigma_2/n$, $\sigma_{3,n} = \sigma_3/n$, и $\varkappa_n = \sigma^2_{1,n} + \sigma^2_{2,n} + \sigma^2_{3,n}$. Выразите их коммутаторы через эти же перескалированные операторы и покажите, что при $n \to +\infty$ ассоциативная алгебра, порождённая $\sigma_{1,n}$, $\sigma_{2,n}$, $\sigma_{3,n}$ с вычисленными вами соотношениями на коммутаторы, стремится к *коммутативной* алгебре. Что это за алгебра? Вычислите предел перескалированного оператора Казимира $\lim_{n\to+\infty} \varkappa_n$.

---

[4] ПОДСКАЗКА: используйте соотношение $\mathfrak{sl}_2(V) \subset U$; сначала рассмотрите случай $\dim U = 0, 1$; потом $U = V_n$ и вспомните про оператор $\varkappa$; наконец, в общем случае используйте индукцию по $\dim U$ и какое-нибудь $V_n \subset U$

[5] ПОДСКАЗКА: примените предыдущий пункт к индуцированному представлению $\mathfrak{sl}_2$ на пространстве операторов $V \longrightarrow U$, ограничение которых на U скалярно (операторы с нулевым ограничением будут образовывать в нём подпредставление коразмерности один)

[6] в том смысле, что $(av, w) + (v, aw) = 0 \ \forall\, a \in \mathfrak{sl}_2$, $\forall\, v, w \in V_n$