Повокруг сферы
(«сильно квантовая» система с «двумя состояниями»)

1◇1 (эрмитовы наблюдаемые). Рассмотрим эрмитово двумерное пространство $\mathbb{C}^2$. Одномерные комплексные подпространства $\ell \subset \mathbb{C}^2$ называются *состояниями*. Эрмитов оператор $\mathbb{C}^2 \xrightarrow{A} \mathbb{C}^2$ с собственными векторами e_1, e_2 и собственными значениями λ_1, λ_2 называется *наблюдаемой*, принимающей на данном состоянии $v \in \mathbb{C}^2$ два значения: λ_1 или λ_2 с вероятностями $\omega_i \stackrel{\text{def}}{=} (v, \varrho_{e_i} v)/(v,v)$, $i = 1,2$ (здесь и далее через ϱ_w обозначается оператор ортогонального проектирования на одномерное подпространство, порождённое вектором w).

а) Убедитесь, что определение корректно (т. е. получается действительно распределение вероятностей, причём зависящее именно от состояния, а не от выбора представителя в нём), что $\omega_i = \operatorname{tr}(\varrho_i \cdot \varrho_v)$, что математическое ожидание (среднее значение) наблюдаемой A на v равно $\langle A \rangle_v = (v, Av)/(v,v) = \operatorname{tr}(A\varrho_v)$.

б) Найдите все состояния, на которых наблюдаемая $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ имеет минимальную и максимальную дисперсии[1]. Чему равны эти экстремальные значения дисперсии?

в) Как связаны $\operatorname{tr}(\varrho_v \varrho_w)$ и «угол» между состояниями v, w?

1◇2 (пространство состояний = риманова сфера $\mathbb{CP}_1 = S^2$). Рассмотрим на $\mathbb{C}^2$ действие мультипликативной группы $\mathbb{C}^*$ гомотетиями. Это действие индуцирует действие единичной окружности $\mathrm{U}(1) \subset \mathbb{C}^*$ унитарными преобразованиями. Обозначим через $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ единичную сферу с центром в нуле. Действие $\mathrm{U}(1)$, очевидно, переводит эту сферу в себя.

а) Убедитесь, что пространства орбит $(\mathbb{C}^2 \setminus 0)/\mathbb{C}^* = S^3/\mathrm{U}(1)$ совпадают и гомеоморфны двумерной сфере S^2.

б) Рассмотрим сферу $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ диаметра 1 с центром в нуле и зададим на ней структуру комплексно-аналитического многообразия при помощи двух карт: касательного пространства в северном полюсе, отождествлённого с $\mathbb{C}$ так, что вещественная и мнимая оси идут вдоль OX и OY, и отображённого в сферу при помощи стереографической проекции из южного полюса, а также касательного пространства в южном полюсе, отождествлённого с $\mathbb{C}$ так, что вещественная и мнимая оси идут вдоль OX и *против*[2] оси OY, и отображённого в сферу при помощи стереографической проекции из северного полюса. Явно вычислите функцию перехода между картами.

в) Обозначим через $\mathbb{CP}_1$ множество одномерных (комплексных) подпространств в $\mathbb{C}^2$ и зададим на нём структуру комплексно-аналитического многообразия при помощи двух карт: прямой $U_1 : z_1 = 1$ и прямой $U_0 : z_0 = 1$ (где (z_0, z_1) суть координаты в $\mathbb{C}^2$), отобразив их в $\mathbb{CP}_1$ так, чтобы одномерное подпространство $\ell \subset \mathbb{C}^2$ изображалась в картах точками $\ell \cap U_1$ и $\ell \cap U_0$. Явно вычислите функцию перехода между картами.

1◇3 (эволюция). Всякая наблюдаемая H определяет *эволюцию состояний*, происходящую по правилу $v \mapsto v_t = \exp(itH)\, v$, где $t \in \mathbb{R}$ — время (здесь и далее под экспонентой от матрицы понимается результат подстановки этой матрицы в стандартный степенной ряд для экспоненты[3]).

а) Опишите явно траектории состояний на сфере S^2 при эволюциях, задаваемых гамильтонианами $H = \boldsymbol{e}$, σ_1, σ_2, σ_3, где

$$\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

[1] напомним, что *дисперсия* есть среднее значение квадрата отклонения от среднего значения, которое равно (если немного подумать) $\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$

[2] т. е. ориентированную *согласованно* с предыдущей картой

[3] убедитесь сами или прочтите в книжке Э. Б. Винберга, что этот ряд всегда сходится, а его сумма *явно и точно* вычисляется несложными и *чисто алгебраическими* манипуляциями с экспоненцируемой матрицей

суть *матрицы Паули* (стандартный базис эрмитовых матриц).

б) Как устроены траектории состояний при эволюции, задаваемой «общим» гамильтонианом H (с произвольными, но разными собственными числами)?

в) Выясните как меняется со временем ортогональный проектор ϱ_{v_t}, убедитесь, что его движение периодично, и найдите этот период для $H = \sigma_3$.

г) Зададим эволюцию наблюдаемых правилом $A_t(v) \stackrel{\text{def}}{=} A(v_t)$. Опишите эволюцию среднего значения наблюдаемой.

1◇4 (связь с кватернионами). Проверьте, что базисные бесследовые косоэрмитовы матрицы

$$\boldsymbol{i} = i\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{j} = i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{k} = i\sigma_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

как и мнимые кватернионные единицы, удовлетворяют соотношениям: $\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj} = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{ik} = \boldsymbol{j}$. Как ограничиваются на 4-мерное вещественное подпространство, порождённое матрицами $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, эрмитова форма $(A,B)_h = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A^* \cdot B)$ и комплексно-билинейная форма $(A,B)_{\mathbb{C}} = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A^\vee \cdot B)$ (где $*$ обозначает эрмитово сопряжение, а $\vee$ — взятие присоединённой матрицы[4])? Чему соответствуют на языке 2×2 матриц норма кватерниона и кватернионное сопряжение? Как устроены (на языке матриц и топологически) пространства всех и всех чисто мнимых кватернионов нормы 1?

1◇5 (универсальное накрытие $\mathrm{SU}_2 \longrightarrow \mathrm{SO}_3$). Обозначим через $\mathfrak{su}_2$ и SU_2, соответственно, подпространство косоэрмитовых матриц со следом нуль и подгруппу унитарных матриц определителя 1 в пространстве всех комплексных 2×2 матриц.

а) Опишите $\exp(\mathfrak{su}_2)$ и $T_{\boldsymbol{e}}\mathrm{SU}_2$ (т. е. касательное пространство к подмногообразию $\mathrm{SU}_2 \subset \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ в точке $\boldsymbol{e} \in \mathrm{SU}_2$).

б) Каждый элемент $g \in \mathrm{SU}_2$ задаёт отображение $\mathrm{Ad}_g : \mathrm{SU}_2 \xrightarrow{h \mapsto g^{-1}hg} \mathrm{SU}_2$, которое оставляет на месте $\boldsymbol{e} \in \mathrm{SU}_2$, так что его дифференциал в точке $\boldsymbol{e}$:

$$d\,\mathrm{Ad}_g\big|_{\boldsymbol{e}} : T_{\boldsymbol{e}}\mathrm{SU}_2 \longrightarrow T_{\boldsymbol{e}}\mathrm{SU}_2$$

переводит касательное пространство к единице в себя. Проверьте, что это линейное преобразование пространства $T_{\boldsymbol{e}}\mathrm{SU}_2$ сохраняет скалярное произведение Килинга[5]

$$(A_1, A_2) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{tr}\left(\operatorname{ad}(A_1)\circ\operatorname{ad}(A_2)\right), \quad \text{где} \quad \operatorname{ad}(A) : \mathfrak{su}_2 \xrightarrow{X \mapsto [A,X] = AX - XA} \mathfrak{su}_2$$

и найдите матрицу Грама этого произведения в базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$.

в) Убедитесь, что предыдущая конструкция задаёт гомоморфизм групп

$$\mathrm{SU}_2 \xrightarrow{g \mapsto d\mathrm{Ad}_g|_{\boldsymbol{e}}} \mathrm{SO}_3 \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{su}_2),$$

опишите его ядро и образ, а также опишите его *явно* в базисе из матриц Паули, т. е. напишите вещественную ортогональную 3×3 матрицу, отвечающую заданной унитарной 2×2 матрице.

г) Группа SU_2 действует на $\mathbb{C}^2$, переводя трёхмерную сферу S^3 из задачи 2 в себя, и это действие перестановочно с действием $\mathrm{U}(1)$. Поэтому возникает индуцированное действие SU_2 на $S^2 = \mathbb{CP}_1 = S^3/\mathrm{U}(1)$. Сравните это действие с ограничением на единичную сферу $S^2 \subset \mathfrak{su}_2$ построенного выше представления SU_2 вращениями пространства $\mathfrak{su}_2$, а также (если Вы этого вдруг ещё не сделали) переговорите всё предыдущее на языке кватернионов — в частности, выясните, что такое в кватернионном мире SU_2, $T_{\boldsymbol{e}}\mathrm{SU}_2$, Ad, ad, S^3, S^2 и произведение Килинга.

---

[4] так что $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^\vee = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ и $(A,A)_{\mathbb{C}} = \det(A)$, т. е. билинейная форма $(A,B)_{\mathbb{C}}$ поляризует определитель

[5] на самом деле отображение $\mathrm{SU}_2 \xrightarrow{g \mapsto d\mathrm{Ad}_g|_{\boldsymbol{e}}} \mathrm{GL}(T_{\boldsymbol{e}}\mathrm{SU}_2)$ гладкое, и его дифференциал в единице, который переводит $\mathfrak{su}_2 = T_{\boldsymbol{e}}(\mathrm{SU}_2)$ в $T_{\boldsymbol{e}}\mathrm{GL} = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$, отображает косоэрмитову матрицу A в оператор $\mathrm{ad}A : X \mapsto [A,X]$