§3. Алгебраическая геометрия.

3.1. Аффинная алгебраическая геометрия (над полем $\mathbb{C}$) занимается эксплуатацией канонической *антиэквивалентности* между следующими двумя категориями:

- комплексные аффинные алгебраические многообразия[1] и алгебраические отображения между ними[2];
- конечно порождённые приведённые коммутативные алгебры[3] с единицей над $\mathbb{C}$ и гомоморфизмы алгебр, переводящие единицу в единицу.

Антиэквивалентность эта сопоставляет алгебраическому многообразию $X \subset \mathbb{C}^n$ алгебру $\mathbb{C}[X]$ полиномиальных функций на X, т. е. функций $X \longrightarrow \mathbb{C}$, которые получаются ограничением на X полиномов $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Прямо по построению, эта алгебра имеет вид

$$\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X) \ , \quad \text{где} \quad I(X) = \{f \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n] \mid f(p) = 0 \quad \forall p \in X \ \} \ .$$

Она, очевидно, конечно порождена, содержит единицу и не имеет нильпотентов. Обратно, со всякой такой алгеброй A можно канонически связать множество точек, если понимать под точкой «место, в котором функции могут вычисляться». По определению, *гомоморфизм вычисления* — это произвольный гомоморфизм алгебр $A \xrightarrow{\mathrm{ev}_p} \mathbb{C}$, переводящий единицу в единицу. Всякий гомоморфизм вычисления сюрьективен и однозначно определяется своим ядром $\mathfrak{m}_p = \ker(\mathrm{ev}_p)$, которое представляет собой *максимальный идеал*[4] алгебры A. Отображение вычисления ev_p восстанавливается по максимальному идеалу $\mathfrak{m}_p$ просто как отображение факторизации: $\mathrm{ev}_p(f) = f \pmod{\mathfrak{m}_p} \in A/\mathfrak{m}_p = \mathbb{C}$. Множество всех гомоморфизмов вычисления $A \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ или, что то же самое, — всех максимальных идеалов $\mathfrak{m} \subset A$ — называется (максимальным) *спектром* и обозначается $\mathit{Spec}_m A$. Элементы алгебры A при этом естественно интерпретируются как $\mathbb{C}$-значные функции на спектре: значение $f \in A$ в данной точке $p \in \mathit{Spec}_m A$ равно $f(p) \overset{\text{def}}{=} f \pmod{\mathfrak{m}_p} = \mathrm{ev}_p(f) \in \mathbb{C}$.

Упражнение 3.1. Убедитесь, что $\mathit{Spec}_m \mathbb{C}[z] = \mathbb{C}$, т. е. алгебра $\mathbb{C}[z]$ есть алгебра полиномиальных функций на аффинной прямой $\mathbb{A}_1$.

Указание. Всякий максимальный идеал в $\mathbb{C}[z]$ имеет вид $\mathfrak{m}_\lambda = (z - \lambda) \cdot \mathbb{C}[z]$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$; или: всякий гомоморфизм $\mathbb{C}[z] \xrightarrow{\mathrm{ev}_\lambda} \mathbb{C}$ задаётся тем, куда переходит z, т. е. $\mathrm{ev}_\lambda(z) = \lambda \in \mathbb{C}$.

Упражнение 3.2. Убедитесь, что спектр алгебры полиномов Лорана

$$A = \mathbb{C}[z, z^{-1}] = \mathbb{C}[x, y]/(xy - 1)$$

можно отождествить с $\mathbb{A}_1 \setminus \{0\}$ (дополнение до начала координат на аффинной прямой) и с гиперболой, заданной на аффинной плоскости $\mathbb{A}_2 = \mathbb{C}^2$ уравнением $xy = 1$.

3.1.1. Гомоморфизмы поднятия. Со всяким отображением множеств $X \xrightarrow{\varphi} Y$ связан гомоморфизм поднятия $\mathbb{C}^Y \xrightarrow{\varphi^*} \mathbb{C}^X$ из алгебры $\mathbb{C}^Y$ всех $\mathbb{C}$-значных функций на Y в алгебру $\mathbb{C}^X$

[1] т. е. фигуры, которые можно задать системой полиномиальных уравнений в каком-либо аффинном пространстве $\mathbb{C}^m$

[2] т. е. отображения $\mathbb{C}^n \supset X \longrightarrow Y \subset \mathbb{C}^m$, индуцированные полиномиальными заменами координат $\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$ в объемлющих аффинных пространствах

[3] т. е. алгебры вида $A = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]/I$ не имеющие нильпотентных элементов: $a^n = 0 \Rightarrow a = 0$; элементы $a_i = x_i \pmod{I} \in A$ называются при этом *образующими*, а элементы $f \in I$ из идела $I \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ — *соотношениями* в алгебре A; отсутствие нильпотентов на языке соотношений означает, что $f^n \in I \Rightarrow f \in I$; такие идеалы I называются *радикальными*

[4] т. е. собственный идеал, не содержащийся строго ни в каком другом собственном идеале

всех $\mathbb{C}$-значных функций на X. Этот гомоморфизм переводит функцию $Y \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ в композицию $\varphi^*(f) \stackrel{\text{def}}{=} f \circ \varphi$. Если $X \subset \mathbb{C}^n$, $Y \subset \mathbb{C}^m$ — алгебраические многообразия (так что $\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X)$, $\mathbb{C}[Y] = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_m]/I(Y)$), и отображение $X \xrightarrow{\varphi} Y$ индуцировано полиномиальным отображением $\mathbb{C}^n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}^m$:

$$\varphi : (x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto (y_1, y_2, \dots, y_m) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x))$$

где $\varphi_i(x) \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ таковы, что $f(\varphi(p)) \in I(X)\ \ \forall p \in X\ ,\ \ \forall f \in I(Y)$ (иначе $\varphi(X) \not\subset Y$), то ограничение гомоморфизма поднятия $\mathbb{C}^Y \xrightarrow{\varphi^*} \mathbb{C}^X$ на алгебраические функции $\mathbb{C}[Y] \subset \mathbb{C}^Y$ будет корректно задавать гомоморфизм алгебр $\mathbb{C}[Y] \xrightarrow{\varphi^*} \mathbb{C}[X]$ по правилу

$$y_i \,(\operatorname{mod} I(Y)) \longmapsto \varphi_i(x) \,(\operatorname{mod} I(X))\ .$$

Наоборот, всякий гомоморфизм алгебр $A \xrightarrow{\psi} B$, переводящий единицу в единицу, определяет гомоморфизм спектров $Spec_m\, B \xrightarrow{\psi^*} Spec_m\, A$, который отображает гомоморфизм вычисления $B \xrightarrow{\mathrm{ev}_p} \mathbb{C}$ в композицию $\psi^*(\mathrm{ev}_p) = \mathrm{ev}_p \circ \psi$.

Упражнение 3.3. Проверьте, что гомоморфизмом поднятия для ψ^* будет исходный гомоморфизм ψ (т. е. $\psi = (\psi^*)^*$), и что на языке максимальных идеалов $\psi^*(\mathfrak{m}_p) = \psi^{-1}(\mathfrak{m}_p) \subset A$ есть полный прообраз максимального идеала точки $p \in X = Spec_m\, B$.

Упражнение 3.4. Убедитесь, что изоморфизм между гиперболой $xy = 1$ в $\mathbb{C}^2$ (т. е. спектром алгебры $\mathbb{C}[xy]/(xy - 1)$) и дополнением до начала координат в $\mathbb{A}_1$ (т. е. спектром алгебры $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$) из упр. 3.2 задаётся проекцией гиперболы на координатную ось (т. е. изоморфизмом алгебр

$$\mathbb{C}[z, z^{-1}] \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[xy]/(xy - 1)\ ,$$

посылающим z в x).

3.1.2. Замечания об уравнениях. Явному представлению заданной алгебры A образующими и соотношениями, т. е. фиксации изоморфизма

$$A \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]/I\ ,$$

отвечает явная реализация множества $Spec_m A$ в виде фигуры, заданной в аффинном пространстве $\mathbb{A}_n \simeq \mathbb{C}^n = Spec_m\, \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ уравнениями $I \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Подчеркнём, что одно и то же многообразие (соотв. одна и та же алгебра) допускает много таких реализаций в пространствах разных размерностей и с разными уравнениями (соотв. с разным числом образующих и разными соотношениями). А как показывает пример с гиперболой, на афинное алгебраическое многообразие (т. е. на замкнутое подмножество в $\mathbb{C}^n$) иногда можно смотреть и как на открытое подмножество другого алгебраического многообразия.

Отметим также, что если аффинное алгебраическое многообразие $X \subset \mathbb{C}^n$ задано уравнениями $f_1(x) = 0, \dots, f_r(x) = 0$, то вообще говоря, неверно, что его идеал $I(X)$ порождается именно этими уравнениями, т. е. очевидное вложение $(f_1, f_2, \dots, f_r) \subset I(X)$ может быть *строгим*. Например, уравнение $z^2 = 0$ задаёт в $\mathbb{C}$ одноточечное подмножество $X = \{0\}$ с идеалом $I(X) = (z) \supsetneq (z^2)$. Точная связь между идеалом $J = (f_1, f_2, \dots, f_r)$ и $I(X)$ описывается *теоремой Гильберта о нулях*:

$$I(X) = \sqrt{J} \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n] \mid f^n \in J \text{ для какого-нибудь } n \in \mathbb{N}\}\ ,$$

и описание образующих в *радикале* $\sqrt{J}$ данного идеала J часто оказывается довольно трудным делом.

Упражнение 3.5. Убедитесь, что для каждого аффинного алгебраического многообразия $X \subset \mathbb{C}^n$ сопоставление точке $p \in X$ гомоморфизма вычисления $\mathbb{C}[X] \xrightarrow{\mathrm{ev}_p} \mathbb{C}$ действительно устанавливает биекцию между X и $Spec_m\,\mathbb{C}[X]$.

Указание. Пусть $\mathfrak{m} \in \mathbb{C}[X]$ максимален. Идеал $J = \{f \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n] \mid f\,(\mathrm{mod}\, I(X)) \in \mathfrak{m}\}$ является собственным в $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, и по теореме Гильберта о нулях $\exists\ p \in \mathbb{C}^n$ такая что $f(p) = 0$ $\forall\, f \in J$. В частности, $p \in X$ и $\mathfrak{m}_p \supset \mathfrak{m}$, откуда $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_p$.

Упражнение 3.6. Верно ли, что максимальные идеалы алгебры C непрерывных функций $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с гомоморфизмами вычисления $C \longrightarrow \mathbb{R}$ и с макимальными идеалами в C? А если брать только *непрерывные*[1] гомоморфизмы вычисления и, соответстввенно, *замкнутые* максимальные идеалы?

3.2. Топология Зарисского на аффинном алгебраическом многообразии $X = Spec_m\, A$ имеет в качестве замкнутых подмножества $V \subset X$, задаваемые полиномиальными уравнениями, т. е. множества вида

$$V(J) = \{x \in X \mid f(x) = 0 \quad \forall\, f \in J\ \}\ ,$$

где $J \subset A$ — произвольный идеал[2].

Упражнение 3.7. Проверьте, что подмножества $V(I)$ удовлетворяют топологической аксиоматике, а именно: $\varnothing = V(1)$; $X = V(0)$; $\bigcap V(I_\nu) = V\big(\sum I_\nu\big)$, где $\sum I_\nu$ состоит из всех конечных сумм $\sum f_\nu$ с $f_\nu \in I_\nu$; $V(I) \cup V(J) = V(IJ)$, где IJ есть идеал, натянутый на все произведения ab с $a \in I$, $b \in J$.

Упражнение 3.8. Верно ли, что $V(IJ) = V(I \cap J)$?

Согласно теореме Гильберта о базисе, любой идеал $I \subset \mathbb{C}[X]$ конечно порожден. Поэтому каждое замкнутое по Зарисскому множество является пересечением конечного числа *гиперповерхностей*

$$V(I) = V(f_1, f_2, \dots, f_m) = \bigcap V(f_\nu)\ .$$

В частности, базисом открытых множеств топологии Зарисского являются *главные* открытые множества вида

$$\mathscr{D}(f) \overset{\text{def}}{=} X \setminus V(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}\ ,$$

и всякое покрытие произвольного открытого $U \subset X$ всегда содержит некоторое *конечное* подпокрытие[3].

Подчеркнём, что топология Зарисского имеет чисто алгебраическую природу, и её свойства весьма далеки от стандартов метрической топологии: «близость» по Зарисскому накладывает, скорее, условия типа делимости, чем каки-либо соотношения на расстояния. Вот несколько характерных примеров.

Упражнение 3.9. Опишите все замкнутые и все открытые по Зарисскому подмножества $\mathbb{A}^1$.

3.2.1. Пример: неприводимые замкнутые множества. Топологическое пространство X называется *приводимым*, если $X = X_1 \cup X_2$ для некоторых собственных замкнутых подмножеств $X_1, X_2 \subset X$. В обычной метрической топологии это понятие бессодержательно: там почти всё приводимо. В топологии Зарисского приводимость означает существование ненулевых $f_1, f_2 \in \mathbb{C}[X]$ таких, что f_1 обращается в 0 на X_1 и f_2 обращается в 0 на X_2. Поскольку произведение $f_1 f_2$ тождественно зануляется на всём X, по теореме Гильберта о нулях $f_1 f_2 = 0$ в $\mathbb{C}[X]$. Таким образом, X приводимо, если и только если в $\mathbb{C}[X]$ есть делители нуля. Например, гиперповерхность $V(g) \subset \mathbb{A}^n$ неприводима тогда и только тогда, когда полином g является степенью неприводимого многочлена. Таким образом, неприводимые алгебраические множества аналогичны простым числам в арифметике.

[1] C рассматривается с компактно-открытой топологией

[2] можно было бы сказать и «произвольное множество», но очевидно, что у порождённого этим множеством идеала будет то же самое множество нулей

[3] это свойство топологии Зарисского иногда называют *квазикомпактностью*

Упражнение 3.10. Докажите, что любое аффинное алгебраическое множество имеет единственное (с точностью до перенумерации элементов) конечное разложение в объединение неприводимых компонент: $X = \cup X_i$, где $X_i \subseteq X$ — замкнуты, неприводимы и $X_i \not\subset X_j$ при любых $i \neq j$.

Указание. Существование конечного разложения вытекает из нётеровости алгебры $\mathbb{C}[X]$ (теорема Гильберта о базисе), а единственность — из того, что включение $Z \subset Y_1 \cup Y_2$ при неприводимом Z влечёт $Z \subset Y_1$ или $Z \subset Y_2$.

3.2.2. Пример: «большие» открытые множества. Топология Зарисского слаба и нехаусдорфова. Например, на неприводимом многообразии X любые два собственных открытых подмножества $U_1, U_2 \subsetneq X$ пересекаются, поскольку в противном случае $X = (X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2)$.

Упражнение 3.11. Докажите, что на неприводимом X для выполнения равенства $f = g$ в $\mathbb{C}[X]$ достаточно, чтобы $f|_U = g|_U$ на некотором непустом открытом $U \subset X$.

Указание. Если $U = \mathscr{D}(h)$, то $X = V(h) \cup V(f-g)$.

3.2.3. Пример: топология Зарисского на $X \times Y$ тоньше, чем прямое произведение топологий Зарисского на X и Y, поскольку «уравнения» $f \in \mathbb{C}[X \times Y] = \mathbb{C}[X] \otimes \mathbb{C}[Y]$ не исчерпываются разложимыми произведениями $g(x)h(y)$. Например, если $X = Y = \mathbb{A}^1$, то любая кривая (скажем, гипербола $V(xy-1)$) замкнута в топологии Зарисского на $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^2$, а множества, замкнутые в топологии произведения топологий Зарисского на $\mathbb{A}^1$ исчерпываются конечными объединениями изолированных точек и координатных прямых.

Упражнение 3.12. Докажите, что регулярный морфизм алгебраических множеств $X \xrightarrow{\varphi} Y$ непрерывен в топологии Зарисского.

Указание. $\varphi^{-1}(V(I)) = V(\varphi^*(I))$.

3.3. Структурный пучок. Неформально говоря, предпучок на топологическом пространстве — это совокупность объектов, рассматриваемых вместе со своими областями определения (как на вступительных экзаменах). Требуется, чтобы область определения была открыта, и если объект определён на U, то он должен быть определён и на всех подмножествах $W \subset U$. Множество объектов пучка $\mathscr{F}$, определённых на заданном открытом U, обозначается через $\mathscr{F}(U)$ или $\Gamma(U, \mathscr{F})$. Обычно эти объекты несут на себе какую-нибудь структуру: например, локально определённые $\mathbb{C}$-значные функции всегда образуют алгебру над $\mathbb{C}$.

Говоря по-научному, предпучок (скажем, алгебр) на топологическом пространстве X — это контравариантный функтор $\mathscr{F}\colon U \longmapsto \mathscr{F}(U)$ из категории открытых множеств[1] в категорию алгебр. Это значит, что для каждого открытого $U \subset X$ задана алгебра $\mathscr{F}(U)$ «объектов, определённых в U»[2], а для каждого включения $W \subset U$ задано *отображение ограничения* — гомоморфизм алгебр $\mathscr{F}(U) \xrightarrow{r^U_W} \mathscr{F}(W)$, позволяющий рассматривать объекты, определённые над U, как объекты, определённые над W. Функториальность означает, что композиции включений отвечает композиция ограничений.

Предпучок называется *пучком*, если для любого набора локальных объектов $s_\nu \in \mathscr{F}(U_\nu)$, которые «совпадают на пересечениях» в том смысле, что

$$r^{U_\nu}_{U_\nu \cap U_\mu}(s_\nu) = r^{U_\mu}_{U_\nu \cap U_\mu}(s_\mu) \quad \forall\, \mu, \nu\,,$$

имеется единственный объект $s \in \mathscr{F}(\bigcup_\nu U_\nu)$, который ограничивается в s_ν на каждое из U_ν.

Упражнение 3.13. Проверьте, что (локально определённые) точные гладкие 1-формы на окружности составляют предпучок, но не пучок.

Примерами пучков являются «локальные регулярные функции»: в топологии, диференциальной геометрии и комплексном анализе это, соответственно, непрерывные, гладкие и комплексно-

[1] объектами этой категории являются открытые подмножества $U \subset X$, а морфизмами — включения $W \subset V$

[2] обычно называемая *алгеброй сечений* пучка $\mathscr{F}$ над U

аналитические функции, заданные на множестве U. Такие пучки называются «структурными», поскольку описывают допустимые «регулярные» функции (а с ними и отображения, и топологию) в рассматриваемой теории.

Структурным пучком алгебраической геометрии является пучок (локально определённых) *рациональных* функций. Мы скажем, что функция[1] $U \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ *регулярна* в точке $u \in U$, если существуют $p, q \in \mathbb{C}[X]$, такие что $q(u) \neq 0$ и $f(x) = p(x)/q(x)\ \forall x \in \mathscr{D}(q) \cap U$. Структурный пучок $\mathscr{O}_X$ аффинного многообразия X сопоставляет каждому открытому множеству $U \subset X$ алгебру $\mathscr{O}_X(U)$ функций, определённых всюду на U и регулярных в каждой точке $u \in U$.

Упражнение 3.14. Пусть X неприводимо и $h \in \mathbb{C}[X]$. Покажите, что всякая функция $f \in \mathscr{O}_X(\mathscr{D}(h))$ представляется в виде $f(x) = r(x)/h^d(x)$ для подходящих $r \in \mathbb{C}[X]$, $d \in \mathbb{N}$, т. е. $\mathscr{O}_X(\mathscr{D}(h)) = \mathbb{C}[X]\left[h^{-1}\right]$ (в частности, для $h \equiv 1$ имеем $\mathscr{O}_X(X) = \mathbb{C}[X]$).

Указание. Найдётся конечный набор полиномов $q_1, q_2, \dots, q_m$, $q_1, q_2, \dots, q_m \in \mathbb{C}[X]$, таких что $f(x) = p_\nu(x)/q_\nu(x)$ на $\mathscr{D}(q_\nu) \cap \mathscr{D}(h)$ при всех $\nu = 1, \dots, m$ и множества $\mathscr{D}(q_\nu)$ покрывают $\mathscr{D}(h)$. Тогда, по теореме Гильберта о нулях, $h^d = \sum q_{u_\nu} g_\nu$ для некоторого $d \in \mathbb{N}$ и подходящих $g_1, g_2, \dots, g_m \in \mathbb{C}[X]$. Проверьте, что $f(x)\, q_{u_\nu}(x) = p_{u_\nu}(x)$ при всех ν и для всех $x \in \mathscr{D}(h)$ (включая $\mathscr{D}(h) \cap V(q_{u_\nu})$) и запишите: $f\, h^d = \sum f\, q_{u_\nu}\, g_\nu = \sum p_{u_\nu}\, g_\nu \in \mathbb{C}[X]$.

Упражнение 3.15. Убедитесь, что всякое главное открытое множество $\mathscr{D}(f) = Spec_m\, \mathbb{C}[X][f^{-1}]$ и вправду представляет собой аффинное алгебраическое многообразие, т. е. может быть задано системой алгебраических *уравнений* в подходящем аффинном пространстве $\mathbb{C}^n$.

3.4. Алгебраические многообразия. Алгебраической аффинной картой на топологическом пространстве X называется гомеоморфизм $U \xrightarrow{\varphi_U} X_U$ какого-нибудь открытого подмножества $U \subset X$ на какое-нибудь аффинное алгебраическое многообразие[2]. Две алгебраических карты $U \xrightarrow{\varphi_U} X_U$ и $W \xrightarrow{\varphi_W} X_W$ называются *совместными*, если отображение склейки

$$\varphi_{WU} = \varphi_W \circ \varphi_U^{-1}$$

является регулярным[3] изоморфизмом[4] между $\varphi_U(U \cap W) \subset X_U$ и $\varphi_W(U \cap W) \subset X_W$. Открытое покрытие $X = \bigcup U_\nu$ попарно совместимыми алгебраическими картами называется *алгебраическим атласом* на X. Два алгебраических атласа називаются *эквивалентными*, если их объединение тоже является алгебраичесим атласом. Топологическое пространство X, снабженное классом эквивалентных алгебраических атласов называется *алгебраическим многообразием*. Если X обладает конечным алгебраическим атласом, то X называется многообразием *конечного типа*.

Упражнение 3.16. Проверьте, что проективные пространства и грассманианы являются алгебраическими многообразиями конечного типа.

Упражнение 3.17. Какие регулярные функции на $\mathbb{A}^1$ продолжаются до регулярных функций на $\mathbb{P}_1$ (в которое $\mathbb{A}_1$ вложена в виде стандартной аффинной карты? Опишите алгебру глобальных (т. е. определённых всюду) регулярных функций на $\mathbb{P}_n$.

3.5. Алгебраические локально тривиальные векторные расслоения. Локально тривиальное векторное расслоение ранга r над алгебраическим многообразием X — это алгебраическое многообразие E с регулярной проекцией $E \xrightarrow{\pi} X$ и атласом, состоящим из карт вида $X_\nu \times \mathbb{C}^r$, где:

[1] заданная на открытом подмножестве U аффинного алгебраического многообразия $X = Spec_m\, A$

[2] зависящее от U и рассматриваемое с топологией Зарисского

[3] отображение между открытыми подмножествами называется *регулярным*, если подъём любой локально-определённой регулярной функции является (локально определённой) регулярной функцией

[4] т. е. таким гомеоморфизмом, гомооморфизм подъёма которого является изоморфизмом алгебр локальных регулярных функций над каждым открытым подмножеством

- $\{U_\nu \xrightarrow{\varphi_\nu} X_\nu\}$ образуют аффинный алгебраический атлас на $X = \cup U_\nu$;
- отображения склейки $\Phi_{\mu\nu} : X_\nu \times \mathbb{C}^r \overset{\sim}{\dashrightarrow} X_\mu \times \mathbb{C}^r$ отождествляют открытое подмножество $\varphi_\nu(U_\nu \cap U_\mu) \times \mathbb{C}^r \subset X_\nu \times \mathbb{C}^r$ с открытым подмножеством $\varphi_\mu(U_\nu \cap U_\mu) \times \mathbb{C}^r \subset X_\mu \times \mathbb{C}^r$ по правилу
$$\Phi_{\mu\nu}(x, v) = (\varphi_{\mu\nu}(x), f_{\mu\nu}(x) \cdot v) \ ,$$
где $\varphi_{\mu\nu} = \varphi_\mu \circ \varphi_\nu^{-1} : X_\nu \overset{\sim}{\dashrightarrow} X_\mu$ — функция склейки карт на X, а $f_{\mu\nu}(x) \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ — линейный изоморфизм пространства $\mathbb{C}^r$, регулярно зависящий[1] от точки $x \in U_\nu \cap U_\mu$ и отождествляющий слой $\mathbb{C}^r$, живущей над этой точкой в карте $X_\nu \times \mathbb{C}^r$, слоем $\mathbb{C}^r$, живущим над этой точкой в карте $X_\mu \times \mathbb{C}^r$;
- проекция $E \xrightarrow{\pi} X$ получается склейкой локальных проекций $X_\nu \times \mathbb{C}^r \longrightarrow X_\nu$.

Таким образом, векторное расслоение над X задаётся указанием открытого аффинного покрытия $X = \bigcup\limits_\nu U_\nu$ и набора регулярных[2] отображений (называемых *матрицами перехода*[3]) $U_\nu \cap U_\mu \xrightarrow{f_{\mu\nu}} \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, которые удовлетворяют соотношениям:
$$f_{\nu\nu} = f_{\mu\nu} f_{\nu\mu} = f_{\mu\nu} f_{\nu\eta} f_{\eta\nu} = \mathrm{Id} \ . \tag{3-1}$$
Набор таких матриц $f_{\mu\nu}$ называется *одномерным мультипликативным коциклом Чеха* со значениями в $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, подчинённым покрытию $X = \cup U_\nu$

Локальным сечением над открытым множеством $U \subset X$ называется регулярное отображение $U \overset{s}{\hookrightarrow} E$, такое что $\pi \circ s = \mathrm{Id}$. Иначе говоря, локальное сечение s сопоставляет каждой точке $x \in U$ вектор $s(x) \in \mathbb{C}^r$, лежащий в слое E над этой точкой x. Вообще правильно представлять себе расслоение E как «семейство векторных пространств». В частности, локальные сечения можно послойно складывать и умножать на числа (в каждом слое — на своё число), что наделяет множество $E(U) = \Gamma(U, E)$ локальных сечений, определённых над U структурой модуля над кольцом $\mathscr{O}_X(U)$ регулярных функций на U. Таким образом, сопоставление $U \longmapsto E(U)$ задаёт пучок модулей над пучком алгебр $\mathscr{O}_X$. Этот модуль локально свободен ранга r: у каждой точки есть аффинная окрестность U, над которой $E = U \times \mathbb{C}^r$, а значит, каждое сечение однозначно записывается в виде $s(x) = \sum\limits_{i=1}^{r} s_i(x) \cdot e_i$, где $s_i \in \mathscr{O}_X(U)$, а $e_i \in E(U)$ — базисное сечение, тождественно равное i-тому базисному вектору пространства $\mathbb{C}^r$ над каждой точкой $x \in U$. Тем самым, $E(U) = \mathscr{O}_X(U)^{\oplus r}$.

Если $e_\nu = (e_{\nu,1}, e_{\nu,2}, \dots, e_{\nu,r})$ — базис модуля локальных сечений расслоения E над картой U_ν, а $e_\mu = (e_{\mu,1}, e_{\mu,2}, \dots, e_{\mu,r})$ — базисные локальные сечения над картой U_μ, то над $U_\nu \cap U_\mu$ один базис выражается через другой по формуле
$$e_\nu = e_\mu \cdot f_{\mu\nu} \ , \quad \text{или} \quad (e_{\nu,1}(x), e_{\nu,2}(x), \dots, e_{\nu,r}(x)) = (e_{\mu,1}(x), e_{\mu,2}(x), \dots, e_{\mu,r}(x)) \cdot f_{\mu\nu}(x) \tag{3-2}$$
где $f_{\mu\nu}$ — матрица перехода из (3-1), столбцы которой задают координаты базисных сечений из ν-той карты в базисе над μ-той картой.

Упражнение 3.18. Касательное расслоение $T_{\mathbb{P}_1}$ на $\mathbb{P}_1$ тривиализуется над стандартными аффинными картами $U_0, U_1 \simeq \mathbb{A}_1$ (с аффинными координатами z и $w = 1/z$ соответственно) выбором постоянного векторного поля $\partial/\partial z$ (соотв. $\partial/\partial w$) в качестве базисного. Иначе говоря, $T_{\mathbb{P}_1}$ склеивается из двух аффинных карт $U_0 \times (\mathbb{C} \cdot \partial/\partial z)$ и $U_1 \times (\mathbb{C} \cdot \partial/\partial w)$. Напишите явно функцию перехода
$$f_{01}(z) : U_0 \cap U_1 \longrightarrow \mathbb{C}^* = \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$$

[1]это означает, что отображение $U_\nu \cap U_\mu \xrightarrow{f_{\mu\nu}} \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ является алгебраическим
[2]т. е. заданных рациональными функциями
[3]по одной матрице $f_{\mu\nu}$ для каждой упорядоченной пары карт

Указание. $U_0 \cap U_1 = \mathbb{A}_1 \setminus \{0\}$, так что $f_{01}(z)$ определена и обратима для всех $z \neq 0$, и удовлетворяет тождеству $(\partial/\partial z) \cdot f_{01}(z) = \partial/\partial w$, где $w = 1/z$.

Упражнение 3.19. Напишите функцию перехода для кокасательного расслоения $T^*_{\mathbb{P}_1}$ (его базисными сечениями над U_0 и U_1 являются постоянные 1-формы dz и dw).

3.5.1. Пример: тавтологическое расслоение $S \twoheadrightarrow \mathbb{P}_1$ является подрасслоением ранга 1 в тривиальном двумерном расслоении $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{C}^2$, слой которого над точкой $x \in \mathbb{P}_1$ равен тому самому одномерному подпространству $\mathbb{C}_x \subset \mathbb{C}^2$, которое изображается точкой x на $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$. Это расслоение также тривиализуется над стандартными аффинными картами: в карте U_0 в качестве базисного можно взять сечение $e_0(z)$, сопоставляющее точке $x = (x_0 : x_1) = (1 : z)$ вектор $e_0(z) = (1, z)$, порождающий слой над x, а в карте U_1 — сечение $e_1(w)$, сопоставляющее точке $x = (x_0 : x_1) = (w : 1)$ вектор $e_1(w) = (w, 1)$. В терминах локальной координаты z на U_0 функция перехода этого расслоения (удовлетворяющая тождеству $e_0(z) \cdot f_{01} = e_1(1/z)$) равна $f_{01}(z) = 1/z$.

Упражнение 3.20. Найдите размерность пространства глобальных[1] регулярных сечений касательного, кокасательного и тавтологического расслоений над $\mathbb{P}_1$.

3.5.2. Морфизмы расслоений. Регулярное отображение $E_1 \xrightarrow{\xi} E_2$ между двумя векторными расслоениями над X называется *морфизмом расслоений*, если оно коммутирует с проекциями[2] и послойно линейно. Это означает, что в общей для E_1 и E_2 локальной тривиализации[3] $X = \cup U_\nu$ отображение ξ задаётся набором матричнозначных функций $U_\nu \xrightarrow{\xi_\nu} \mathrm{Mat}_{r_2 \times r_1}(\mathbb{C})$, где $r_i = \mathrm{rk}\, E_i$. По столбцам этих матриц стоят координаты образов базисных сечений $\xi(e^{(1)}_\nu)$ расслоения E_1 в базисе $e^{(1)}_\mu$ расслоения E_2, а сами матрицы удовлетворяют условию согласованности над попарными пересечениями карт:

$$\xi_\nu = f^{(2)}_{\nu\mu} \cdot \xi_\mu \cdot f^{(1)}_{\mu\nu} \;, \tag{3-3}$$

где $f^{(i)}_{\mu\nu}$ суть матрицы склейки расслоения E_i.

В частности, два расслоения E, F ранга r *изоморфны* тогда и только тогда, когда над некоторым общим для обоих расслоений тривиализующем покрытии $X = \cup U_\nu$ можно указать такие регулярные матричнозначные локальные функции $U_\nu \xrightarrow{\xi_\nu} \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, что над каждым пересечением $U_\nu \cap U_\mu$ будет выполнено равенство

$$f_{\mu\nu} = \xi_\mu^{-1} \cdot g_{\mu,\nu} \cdot \xi_\nu \;, \tag{3-4}$$

где $f_{\mu\nu}$, $g_{\mu,\nu}$ — матрицы перехода расслоений E и F соответственно. Таким образом, два мультипликативных чеховских коцикла (3-1) тогда и только тогда задают изоморфные расслоения, когда над некоторым покрытием, вписанным одновременно в оба покрытия, которым были подчинены эти коциклы, выполняется соотношение (3-4) для некоторого набора функций $U_\nu \xrightarrow{\xi_\nu} \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$. Такие коциклы называются *когомологичными*. Множество классов когомологичных коциклов (совпадающее с множеством классов изоморфных локально тривиальных расслоений) обозначается через $H^1(X, \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}))$ и называется множеством[4] первых когомологий Чеха многообразия X с коэффициентами в $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$.

3.5.3. Группа Пикара. К векторным расслоениям можно послойно применять все стандартные конструкции из линейной алгебры: брать прямую сумму и тензорное произведение

[1] т. е. определённых над всем $\mathbb{P}_1$

[2] т. е. для всех $x \in X$ оно переводит слой E_1 над точкой x в слой E_2 над x

[3] которая всегда существует, но является, вообще говоря, более мелкой, чем те тривиализации, при помощи которых задавались E_1 и E_2

[4] подчеркнём, что на этом множестве, вообще говоря, нет никакой аддитивной или мультипликативной структуры (это связано с некоммутативностью группы GL_r)

двух расслоений, двойственное расслоение и т. п.. Например двойственное расслоение E^* к расслоению E над X однозначно определяется тем, чтобы послойное спаривание векторов с ковекторами принимало значения в пучке регулярных функции $\mathscr{O}_X$ (или, что то же самое, в пучке сечений тривиального расслоения ранга один $X \times \mathbb{C}^1$). Таким образом, матрицы перехода $f^*_{\mu\nu}$ между локальными базисами расслоения E^* связаны с матрицами перехода $f_{\mu\nu}$ между двойственными локальными базисами расслоения E по формуле:

$$f^*_{\mu\nu} = \left(f^t_{\mu\nu}\right)^{-1}$$

Из этого вытекает, что векторные расслоения ранга 1 на X (т. е. множество $H^1(X, \mathbb{C}^*)$) образуют абелеву группу относительно операции $\otimes$ (при этом соответствующие чеховские коциклы перемножаются). Единицей в этой группе является тривиальное расслоение (т. е. коцикл $f_{\mu\nu} \equiv 1$, а обратным к заданному расслоению L (соотв. коциклу $f_{\mu\nu}$) будет расслоение L^* (соотв. коцикл $f^*_{\mu\nu} = f^{-1}_{\mu\nu} = f_{\nu\mu}$). Эта группа называется *группой Пикара*[1] многообразия X и обозначается $\mathrm{Pic}(X)$.

3.5.4. УТВЕРЖДЕНИЕ. *Всякое расслоение ранга 1 над над спектром факториальной*[2] *алгебры тривиально.*

Доказательство. Во всякое открытое покрытие можно вписать покрытие состоящее из главных открытых множеств, а из последнего выбрать конечное подпокрытие. Поэтому мы можем считать, что данное расслоение L на $X = Spec_m\, A$ локально тривиализуется над конечным покрытием $X = \bigcup\limits_{\alpha=1}^{N} U_\alpha$ главными открытыми множествами $U_\alpha = \mathscr{D}(h_\alpha) = \{p \in X \mid h_a(p) \neq 0\}$ с $h_1, h_2, \dots, h_N \in A$. Обозначим через $s_\alpha \in L(U_\alpha)$ базисное сечение L над U_α, и через $f_{\alpha\beta} = s_\beta/s_\alpha \in \mathscr{O}_X(U_\alpha \cap U_\beta) = A\left[(h_\alpha h_\beta)^{-1}\right]$ соответствующие функции перехода. Последние являются обратимыми элементами алгебры $A\left[(h_\alpha h_\beta)^{-1}\right]$, и стало быть однозначно с точностью до обратимых множителей из A записываются в виде произведения целых степеней неприводимых элементов $q \in A$, входящих в разложение произведения $f_\alpha f_\beta$ на неприводимые множители в A. Рассмотрим объединение (по всем α, β) всех неприводимых элементов q, участвующих в разложениях $f_{\alpha\beta}$. Мы собираемся модифицировать базисные сечения так, чтобы это конечное множество уменьшалось — в конце концов функции перехода станут обратимыми элементами кольца A и мы сможем воспользоваться задачей:

Упражнение 3.21. Убедитесь, что расслоение ранга 1 над произвольным многообразием X, функции перехода которого являются глобальными обратимыми функциями на X, тривиально.

Чтобы исключить из всех функций перехода данный неприводимый множитель $q \in A$, обозначим через $m_{\beta\alpha} \in \mathbb{Z}$ степень, с которой q входит в разложение $f_{\beta\alpha}$. Если хоть одна из этих степеней ненулевая, мы можем разбить набор функций h_α на два непустых подмнабора: функции h_β, делящиеся на q, и функции h_γ, которые на q не делятся. Заметим, что при фиксированном β степень $m_{\gamma\beta}$ не зависит от γ, поскольку q не участвует в разложении функции перехода $f_{\gamma_1\gamma_2} = \varphi_{\gamma_1\beta}/\varphi_{\gamma_2\beta}$. Таким образом, мы можем обозначить эту степень через m_β, и заменить каждое локальное базисное сечение s_β на сечение $s'_\beta = q^{m_\beta} \cdot s_\beta$, которое также годится в качестве базисного, поскольку $V(q) \subset V(h_\beta)$. После такой замены множитель q исчезнет не только из всех $f_{\gamma\beta}$, но из всех $f_{\beta_1\beta_2} = f_{\gamma\beta_2}/f_{\gamma\beta_1}$, что и требовалось. $\square$

3.5.5. УТВЕРЖДЕНИЕ. $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}_1) \simeq \mathbb{Z}$ *и порождается тавтологическим расслоением* S.

Доказательство. Согласно предыдущему утверждению, всякое расслоение ранга 1 может быть тривиализовано над стандартными аффинными картами U_0, U_1. Пусть e_0, e_1 — соответствующие локальные базисные сечения. Тогда $e_0(z) f_{01}(z) = e_1(1/z)$, где $\mathbb{C} \setminus \{0\} \xrightarrow{f_{01}} \mathbb{C} \setminus \{0\}$ — регулярное отображение, задаваемое рациональной функцией из $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$. Любая такая функция, определённая всюду на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ и нигде не обращающаяся там в нуль, имеет вид $f_{01}(z) = z^m$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}$. Обозначим расслоение с такой функцией перехода через $\mathscr{O}(m)$. Тогда тавтологическое расслоение $S = \mathscr{O}(-1)$, и

[1] а в арифметической алгебраической геометрии — *группой классов дивизоров*

[2] т. е. с однозначным разложением на неприводимые множители

$\mathscr{O}(m) = (S^*)^{\otimes m}$. Чтобы убедиться в том, что все расслоения $\mathscr{O}(m)$ попарно неизоморфны, достаточно проверить, что размерности пространств глобальных регулярных сечений $\dim\Gamma(\mathbb{P}_1, \mathscr{O}(m))$ попарно различны при $m \geqslant 0$. □

Упражнение 3.22. Вычислите $\dim\Gamma(\mathbb{P}_1, \mathscr{O}(m))$ при всех $m \in \mathbb{Z}$.

3.5.6. Пример: сечения расслоений $\mathscr{O}(m)$ в однородных координатах. В однородных координатах $(x_0 : x_1)$ на $\mathbb{P}_1$ локальная регулярная функция $U \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ представляется в окрестности каждой точки $u \in U$ отношением $p(x)/q(x)$, где p, q — однородные многочлены одинаковой степени от (x_0, x_1), причём $q(u) \neq 0$ и $f(x) = p(x)/q(x) \quad \forall\, x \in U$ где $q(x) \neq 0$. Аналогично, локальное сечение $s \in \Gamma(\mathscr{O}(m), U)$ представляется в окрестности каждой точки $u \in U$ отношением $p(x)/q(x)$, где p, q — однородные многочлены от (x_0, x_1), удовлетворяющие условию $\deg p - \deg q = m$, и такие что $q(u) \neq 0$ и $f(x) = p(x)/q(x) \quad \forall\, x \in U$ где $q(x) \neq 0$.

В самом деле, такие рациональные однородные формы степени m, очевидно, образуют пучок модулей над пучком регулярных функций. Этот модуль локально свободен ранга один: всякая локальная форма $s(x)$ степени m, определённая над картой U_0, имеет вид $s(x) = x_0^m \cdot \varphi(x)$, где $\varphi(x) = s(x)/x_0^n$ — однородная форма степени нуль (т. е. регулярная функция), также определённая всюду над U_0. Аналогично, любое регулярное сечение этого пучка над картой U_1 пропорциональна сечению x_1^m. Функция перехода между базисными сечениями x_0^m и x_1^m равна $f_{01} = (x_1/x_0)^m = z^m$, т. е. этот пучок — в точности пучок сечений расслоения $\mathscr{O}(m)$.

Этот пример, в частности, показывает отличие сечения расслоения ранга один от функции: мы не можем приписать «численного значения» однородной форме степени m. Однако, после того как зафиксирована некоторая базисная форма s_0, произвольную форму s можно записать в виде $s = f \cdot s_0$, где s — функция, имеющая смысл «координаты» сечения s в «базисе» s_0.

3.6. Линейные системы. Пусть L — расслоение ранга 1 на многообразии X, такое что для каждой точки $x \in X$ найдётся глобальное сечение, не обращающееся в этой точке в нуль (в частности, для этого необходимо, чтобы $\dim\Gamma(X, L) \geqslant 2$). Тогда глобальные сечения расслоения L, обращающиеся в нуль в заданной точке $p \in X$ составляют (ненулевое) векторное подпространство $\mathrm{Ann}\,(x_0) \subset \Gamma(X, L)$ коразмерности 1. В самом деле, всякое сечение s вблизи p записывается в виде $f(x) \cdot s_0$, где s_0 — некоторое базисное сечение, а f — локальная регулярная функция, и отображение, переводящее $s \in \Gamma(X, L)$ в $f(p) \in \mathbb{C}$, будет линейным эпиморфизмом векторного пространства $\Gamma(X, L)$ на одномерное пространство $\mathbb{C}$ с ядром $\mathrm{Ann}\,(p)$.

Таким образом, сопоставление $p \mapsto \mathrm{Ann}\,(p)$ регулярно отображает многообразие X в проективное пространство $\mathbb{P}\,(\Gamma(X, L)^*)$, параметризующее подпространства коразмерности 1 в $\Gamma(X, L)$ (т. е. ненулевые линейные формы на $\Gamma(X, L)$ с точностью до пропорциональности).

Эту конструкцию можно очевидным образом модифицировать, заменив всё пространство $\Gamma(X, L)$ любым подпространством $W \subset \Gamma(X, L)$, которое обладает тем же свойством: для любого $x \in X$ имеется сечение $s \in W$, не обращающееся в нуль в точке x. Такие подпространства W (а точнее, их проективизации $\mathbb{P}(W)$, т. е. «сечения с точностью до пропорциональности») по-старинке называются *линейными системами без базисных точек*, ассоциированными с расслоением L. Всё пространство $\mathbb{P}(\Gamma(X, L))$ называется *полной линейной системой*. Итак, всякая линейная система $\mathbb{P}(W)$ без базисных точек канонически определяет отображение

$$X \xrightarrow{p \mapsto \mathrm{Ann}\,(p)} \mathbb{P}(W^*)$$

из многообразия X в прективное пространство, двойственное к линейной системе.

3.6.1. Пример: кривые Веронезе. Пространство глобальных сечений расслоения $\mathscr{O}(m)$ с $m \geqslant 1$ над $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(V)$ (где $V \simeq \mathbb{C}^2$) отождествляется, как мы видели, с пространством S^mV^* однородных полиномов степени m на V. Двойственное пространство $(S^mV^*)^*$ можно канонически отождествить с пространством S^mV.

Упражнение 3.23. Проверьте, что при этом[1] результат спаривания базисных мономов $x_0^k x_1^n$ и $e_0^k e_1^n$ (x_i и e_i — двойственные базисы V^* и V) равен $\frac{n!k!}{(n+k)!}$.

Таким образом, полная линейная система $\mathscr{O}(m)$ задаёт отображение $\mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(S^m V)$, которое называется *отображением Веронезе*. Его образ называется *скрученной рациональной кривой* степени n (геометрические свойства этой кривой обсуждаются в задачах из листка 3).

Упражнение 3.24. Убедитесь, что отображение Веронезе переводит $v \in V$ в $v^n \in S^n V$.

[1]напомним, что над полем характеристики нуль двойственность между $S^m V^*$ и $S^m V$ задаётся каноническим вложениями $S^m V^* \hookrightarrow (V^*)^{\otimes m}$ и $S^m V \hookrightarrow V^{\otimes m}$ в качестве подпространств симметрических тензоров (полная поляризация многочленов) и канонической двойственностью между $(V^*)^{\otimes m}$ и $V^{\otimes m}$ (полная свёртка тензоров)