§2. Многомерные пространства состояний с действием $\mathfrak{sl}_2$.

2.1. Путь к классике. В квантовой системе с пространством состояний $\mathbb{CP}^n$ наблюдаемые принимают n значений, и при $n \to \infty$ множество значений наблюдаемых становится бесконечным. Если одновременно с увеличением числа состояний «перескалировать» наблюдаемые так, чтобы их собственные значения оставались внутри $[-1,1]$, можно надеяться получить в пределе «классические» наблюдаемые, значения которых «непрерывно» распределены по отрезку.

Однако, для того чтобы описываемая процедура имела смысл, необходимо уточнить, что имеется в виду под «одним и тем же множеством наблюдаемых», действующем в разных пространствах состояний $\mathbb{CP}^n$ с $n \to \infty$. Одна из возможных математических формализаций этого хода мысли доставляется *теорией представлений.*

Зафиксируем набор операторов $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ — комплексную линейную оболочку множества эрмитовых наблюдаемых на пространстве состояний $\mathbb{CP}_1 = S^2$. Это алгебра Ли с тремя образующими $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{e}_+$, $\boldsymbol{e}_-$ и соотношениями как в упр. 1.7. Как и со всякой алгеброй Ли, с $\mathfrak{sl}_2$ канонически связана ассоциативная (но не коммутативная) *универсальная обёртывающая алгебра* $\mathfrak{U}$, которая является фактором тензорной алгебры[1]

$$\mathbb{T}(\mathfrak{sl}_2) = \bigoplus_{m \geqslant 0} \mathfrak{sl}_2^{\otimes m} = \mathbb{C}\cdot 1 \oplus \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2^{\otimes 2} \oplus \mathfrak{sl}_2^{\otimes 3} \oplus \ \cdots$$

по двустороннему идеалу соотношений, порождённому коммутаторными соотношениями

$$f \otimes g - g \otimes f = [f,g]\cdot 1 \ .$$

Пространство, на котором *действуют алгебры* $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ и $\mathfrak{U}$, — это комплексное векторное пространство V с тремя операторами $H, X, Y : V \longrightarrow V$, удовлетворяющими соотношениям

$$[H,X] = 2\,X \ , \quad [H,Y] = -2\,Y \ , \quad [X,Y] = H \ .$$

Такое пространство называется $\mathfrak{sl}_2$-модулем, а отображения

$$r : \mathfrak{sl}_2 \longrightarrow \mathfrak{gl}(V) \ , \quad \varrho : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathrm{End}(V) \ ,$$

однозначно задаваемые тем, что переводят $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{e}_+$, $\boldsymbol{e}_-$, соответственно, в H, X, Y и отображают скобку $[f,g]$ в $\mathfrak{sl}_2$ в коммутатор $[r(f), r(g)]$ эндоморфизмов пространства V, а произведение fg в $\mathfrak{U}$ — в композицию $\varrho(f)\circ\varrho(g)$ эндоморфизмов пространства V, называются *линеными представлениями* этих алгебр эндоморфизмами пространства V. Подчеркнём, что r и ϱ тавтологически определяют друг друга.

Разные представления V, W сравниваются друг с другом посредством линейных отображений, *перестановочных* с действием $\mathfrak{sl}_2$. В частности, $\mathfrak{sl}_2$-модуль V называется *приводимым*, если существует ненулевое подпространство $W \subsetneq V$, которое переводится в себя всеми операторами из $\mathfrak{sl}_2$ (т. е. само является $\mathfrak{sl}_2$-модулем). Аналогично, V называется *разложимым*, если он раскладывается в прямую сумму двух своих ненулевых $\mathfrak{sl}_2$-подмодулей.

2.1.1. Пример: стандартный $\mathfrak{sl}_2$-модуль V_n представляет собой $(n+1)$-мерное пространство комплексных однородных многочленов степени n от двух переменных (z_0, z_1). Группа SL_2 действует на этом пространстве линейными заменами переменных, и «инфинитезимальные генераторы» преобразований из SL_2 задают действие алгебры ли $\mathfrak{gl}_2 = T_e\mathrm{SL}_2$ дифференциальными операторами на V_n.

[1] т. е. алгебры некоммутативных многочленов от $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{e}_+$, $\boldsymbol{e}_-$

Упражнение 2.1. Пространство $V_n = S^n(V)$ есть n-тая однородная компонента симметрической алгебры $S(V)$ пространства V. Проверьте, что всякое линейное отображение $V \xrightarrow{f} V$ можно единственным образом продолжить до *гомомрфизма алгебры* $S(V) \xrightarrow{\gamma_f} S(V)$, полагая $g_f(v) = f(v)$ на $v \in V$ и $\gamma_f(pq) = \gamma_f(p)\gamma_f(q)$. Проверьте, что f также можно единственным образом продолжить до *дифференцирования алгебры* $S(V) \xrightarrow{\delta_f} S(V)$, полагая $\delta_f(v) = f(v)$ на $v \in V$ и $\delta_f(pq) = \delta_f(p)q + p\delta_f(q)$.

Таким образом, образующие алгебры $\mathfrak{sl}_2$ в нашем представлении действуют на пространстве V_n дифференциальными операторами:

$$\boldsymbol{e}_+ \mapsto z_0 \frac{\partial}{\partial z_1}\,, \quad \boldsymbol{e}_- \mapsto z_1 \frac{\partial}{\partial z_0}\,, \quad \boldsymbol{h} \mapsto z_0 \frac{\partial}{\partial z_0} - z_1 \frac{\partial}{\partial z_1}\,.$$

В базисе из мономов $p_0 = z_0^n, p_1 = z_0^{n-1}z_1, \dots, p_{n-1} = z_0 z_1^{n-1}, p_n = z_1^n$ их действие задаётся формулами:

$$\boldsymbol{h}(p_k) = (n-2k)\cdot p_k\,, \quad \boldsymbol{e}_+(p_k) = k\cdot p_{k-1}\,, \quad \boldsymbol{e}_-(p_k) = (n-k)\cdot p_{k+1}\,.$$

Отсюда сразу видно, что это представление неприводимо: если $\mathfrak{sl}_2$-подмодуль $W \subset V$ содержит ненулевой вектор, скажем, вида $p = \lambda_1 p_{n_1} + \ldots + \lambda_k p_{n_k}$ с $n_1 < n_2 < \ldots$ и $\lambda_i \neq 0$, то он содержит и вектор $(\boldsymbol{e}_+)^{n_k} p = \lambda p_0$, а значит и все остальные базисные векторы, получающиеся из p_0 применением оператора $\boldsymbol{e}_-$.

Упражнение 2.2. Покажите, что на пространстве V_n имеется единственное с точностью до пропорциональности эрмитово скалярное произведение, относительно которого оператор $\boldsymbol{h}$ будет эрмитовым, а операторы $\boldsymbol{e}_+$ и $\boldsymbol{e}_-$ будут эрмитово сопряжены друг другу.

Указание. Поскольку базисные мономы p_i являются собственными для эрмитова оператора $\boldsymbol{h}$, причём с разными собственными числами, они должны быть попарно ортогональны друг другу; используя действие операторов $\boldsymbol{e}_+$ и $\boldsymbol{e}_-$, покажите, что с точностью до не зависящего от m скалярного множителя $(p_m, p_m) = \binom{n}{m}^{-1}$.

2.2. Теория представлений алгебры $\mathfrak{sl}_2$. В листочке с задачами к этому параграфу намечен план доказательства следующих двух основных фактов о конечномерных представлениях $\mathfrak{sl}_2$ (самостоятельная реализация этого плана является *обязательной* задачей для слушателей).

- Всякое конечномерное неприводимое представление $\mathfrak{sl}_2$ изоморфно одному из представлений V_n описанных в n° 2.1.1 (в частности, в каждой размерности существует, причём ровно одно, неприводимое представление.
- Произвольное конечномерное представление $\mathfrak{sl}_2$ единственным образом раскладывается в прямую сумму неприводимых представлений.

Идея доказательства первого утверждения состоит в том, что в силу коммутационных соотношений из упр. 1.7 операторы $\boldsymbol{e}_+$ и $\boldsymbol{e}_-$ переводят собственные векторы оператора $\boldsymbol{h}$ в собственные векторы оператора $\boldsymbol{h}$, причём $\boldsymbol{e}_+$ увеличивает каждое собственное значение на 2, а $\boldsymbol{e}_-$ — уменьшает каждое собственное значение на 2, например:

$$\boldsymbol{h}v = \lambda\, v \Rightarrow \boldsymbol{h}\boldsymbol{e}_+ v = \boldsymbol{e}_+\boldsymbol{h}v + 2\,\boldsymbol{e}_+ v = (\lambda+2)\,\boldsymbol{e}_+ v\ ,.$$

Поэтому должен существовать собственный вектор Q_0 для $\boldsymbol{h}$, аннулируемый оператором $\boldsymbol{e}_+$ (он называется *старшим вектором*), и $\mathfrak{sl}_2$-подмодуль, порождённый этим вектором, будет иметь в качестве базиса векторы $Q_m = \boldsymbol{e}_-{}^m(Q_0)$, получающиеся из Q_0 последовательным применением *понижающего оператора* $\boldsymbol{e}_-$ и являющиеся слбственными векторами для $\boldsymbol{h}$. Аккуратное вычисление показывает, что все собственные значения оператора $\boldsymbol{h}$ на векторах Q_m должны быть целыми, и линейная оболочка векторов Q_m образует $\mathfrak{sl}_2$-модуль, изоморфный подходящему по размерности V_n.

2.3. Форма Килинга и оператор Казимира. Алгебра $\mathfrak{sl}_2$ имеет трёхмерное *присоединённое* представление, задаваемое комутаторным действием на себе самой — каждому элементу $a \in \mathfrak{sl}_2$ сопоставляется оператор $\mathfrak{sl}_2 \xrightarrow{\mathrm{ad}_a} \mathfrak{sl}_2$ действующий по правилу:

$$\mathrm{ad}_a(b) \overset{\mathrm{def}}{=} [a,b] \ .$$

Упражнение 2.3. Разложите присоединённое представление в прямую сумму неприводимых.

Билинейная *форма Килинга* на пространстве $\mathfrak{sl}_2$ определяется при помощи присоединённого представления по формуле:

$$(a,b) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{tr}\,(ad_a \circ ad_b) \ ,$$

(где след берётся в пространстве $\mathfrak{sl}_2$).

Упражнение 2.4. Вычислите матрицу Грама формы Килинга в базисах $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и $\boldsymbol{h}, \boldsymbol{e}_+, \boldsymbol{e}_-$; в частности, убедитесь, что форма Килинга невырождена и симметрична.

Как и всякая невырожденная билинейная форма, форма Килинга может восприниматься как изоморфизм

$$K : \mathfrak{sl}_2 \xrightarrow[\sim]{a \mapsto a^* = (a,*)} \mathfrak{sl}_2^* \ .$$

Упражнение 2.5. Вычислите операторы $\boldsymbol{h}^*$, $\boldsymbol{e}_+{}^*$, $\boldsymbol{e}_-{}^*$, $\boldsymbol{i}^*$, $\boldsymbol{j}^*$, $\boldsymbol{k}^*$.

Этот изоморфизм, в свою очередь, позволяет отобразить пространство линейных эндоморфизмов векторного пространства $\mathfrak{sl}_2$ в универсальную обёртывающую алгебру:

$$\mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2) = \mathfrak{sl}_2^* \otimes \mathfrak{sl}_2 \xrightarrow{K^{-1}\otimes 1} \mathfrak{sl}_2 \otimes \mathfrak{sl}_2 \hookrightarrow \mathbb{T}(\mathfrak{sl}_2) \twoheadrightarrow \mathfrak{U}$$

Образ тождественного эндоморфизма

$$\mathrm{Id}_{\mathfrak{sl}_2} = \boldsymbol{h}^* \otimes \boldsymbol{h} + \boldsymbol{e}_+{}^* \otimes \boldsymbol{e}_+ + \boldsymbol{e}_-{}^* \otimes \boldsymbol{e}_- = \boldsymbol{i}^* \otimes \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}^* \otimes \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}^* \otimes \boldsymbol{k}$$

при этом отображении называется *элементом Казимира* и обозначается $\varkappa \in \mathfrak{U}$.

Упражнение 2.6. Проверьте (например, явным вычислением), что элемент Казимира лежит в центре[1] универсальной обёртывающей алгебры $\mathfrak{U}$.

Образ элемента Казимира в линейном представлении алгебры $\mathfrak{sl}_2$ называется *оператором Казимира*.

Упражнение 2.7. Проверьте, что в любом линейном представлении оператор Казимира коммутирует со всеми операторами из $\mathfrak{sl}_2$.

По лемме Шура отсюда следует, что в неприводимых представлениях оператор Казимира действует умножением на скаляр.

Упражнение 2.8. Вычислите этот скаляр для всех представлений V_n.
Указание. Легко видеть, что $8\,\varkappa(z_0^n) = n^2 + 2\,n$.

2.4. Перескалированые представления. Рассмотрим в неприводимом представлении V_n перескалированные операторы[2]:

$$\boldsymbol{h}^{(n)} \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{n}\boldsymbol{h} \ , \quad \boldsymbol{e}_+^{(n)} \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{n}\boldsymbol{e}_+ \ , \quad \boldsymbol{e}_-^{(n)} \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{n}\boldsymbol{e}_- \ , \tag{2-1}$$

Эти перескалированные операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\left[\boldsymbol{h}^{(n)}, \boldsymbol{e}_+^{(n)}\right] = \frac{2}{n}\,\boldsymbol{e}_+^{(n)} \ , \quad \left[\boldsymbol{h}^{(n)}, \boldsymbol{e}_-^{(n)}\right] = \frac{2}{n}\,\boldsymbol{e}_-^{(n)} \ , \quad \left[\boldsymbol{e}_+^{(n)}, \boldsymbol{e}_+^{(n)}\right] = \frac{1}{n}\,\boldsymbol{h}^{(n)} \ ,$$

[1] т. е. коммутирует со всеми элементами

[2] коэффициент $\hbar = 1/n$ (он называется *константой Планка*) специально подобран так, чтобы спектр эрмитовой наблюдаемой $\boldsymbol{h}^{(n)}$ попадал в $[-1,1]$, накрывая концевые точки

а также следующему соотношению на оператор Казимира (возникающему из упр. 2.8):

$$\boldsymbol{h}^{(n)}\boldsymbol{h}^{(n)} + 2\,(\boldsymbol{e}_+^{(n)}\boldsymbol{e}_-^{(n)} + \boldsymbol{e}_-^{(n)}\boldsymbol{e}_+^{(n)}) = \left(1 + \frac{2}{n}\right)\,\mathrm{Id}\,.$$

В вещественном (относительно вещественной структуры (1-1)) базисе из операторов

$$x + iy = \boldsymbol{e}_+^{(n)}\,, \qquad x - iy = \boldsymbol{e}_-^{(n)}\,, \qquad 2\,z = \boldsymbol{h}^{(n)}$$

эти соотношения приобретают вид:

$$\begin{aligned} &[a,b] = o(1/n) \quad \text{для всех пар} \quad a,b \in \{x,y,z\} \\ &x^2 + y^2 + z^2 = 1/4 + o(1/n)\ . \end{aligned} \tag{2-2}$$

Мы собираемся придать точный смысл следующему высказыванию: *при $n \to \infty$ (т. е. при $\hbar \to 0$) ассоциативная алгебра, порождённая над $\mathbb{R}$ наблюдаемыми x, y, z, удовлетворяющими всем соотношениям, которые имеются между этими операторами в неприводимом представлении V_n, стремится к коммутативной алгебре $A = \mathbb{R}[x,y,z]/(x^2+y^2+z^2-1/4)$*, которая представляет собой алгебру полиномиальных функций на сфере диаметра 1 (является фактор алгеброй многочленов от трёх переменных по уравнению сферы).

2.5. Квазиклассический предел. Рассмотрим алгебру $\mathfrak{U}[\hbar] = \mathfrak{U} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathbb{C}[\hbar]$, получающуюся добавлением к универсальной обёртывающей алгебре ещё одной образующей $\hbar$, которая коммутирует со всеми элементами из[1] $\mathfrak{U}$, и обозначим через $\overline{\mathfrak{U}} \subset \mathfrak{U}[\hbar]$ подалгебру с единицей, порождённую элементами

$$\hbar\,, \quad \overline{\boldsymbol{h}} \overset{\text{def}}{=} \hbar\cdot\boldsymbol{h}\,, \quad \overline{\boldsymbol{e}}_+ \overset{\text{def}}{=} \hbar\cdot\boldsymbol{e}_+\,, \quad \overline{\boldsymbol{e}}_- \overset{\text{def}}{=} \hbar\cdot\boldsymbol{e}_-\,,$$

Иначе алгебру $\overline{\mathfrak{U}}$ можно описать как ассоциативную градуированную алгебру, порождённую образующими $\hbar$, $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ степени 1, удовлетворяющими однородным квадратичным соотношениям

$$\hbar\,\overline{a} - \overline{a}\,\hbar = 0\,, \qquad \overline{a}\,\overline{b} - \overline{b}\,\overline{a} = \overline{[a,b]}\,\hbar\,,$$

где a, b пробегают тройку символов $\{x,y,z\}$. Мы будем обозначать через $\overline{\mathfrak{U}}_m \subset \overline{\mathfrak{U}}$ подпространство однородных элементов суммарной степени m по $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$, $\hbar$, а через $\overline{\mathfrak{U}}_{\leqslant m} = \bigoplus_{\nu=0}^{m} \overline{\mathfrak{U}}_m$ — подпространство элементов степени $\leqslant m$.

Продолжим стандартное неприводимое представление $\mathfrak{U} \xrightarrow{\varrho_n} \mathrm{End}(V_n)$ до представления

$$\mathfrak{U}[\hbar] \xrightarrow{\varrho_n} \mathrm{End}(V_n)$$

полиномиальной алгебры $\mathfrak{U}[\hbar]$, полагая $\varrho_n(\hbar) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n}\,\mathrm{Id}$, и обозначим через

$$\overline{\mathfrak{U}} \xrightarrow{\overline{\varrho}_n} \mathrm{End}(V_n) \tag{2-3}$$

ограничение этого продолженного представвления на подалгебру $\overline{\mathfrak{U}} \subset \mathfrak{U}[\hbar]$. Тогда образующие $\overline{\boldsymbol{h}}$, $\overline{\boldsymbol{e}}_+$, $\overline{\boldsymbol{e}}_-$ алгебры $\overline{\mathfrak{U}}$ будут представлены на пространстве V_n точности операторами (2-1), а все соотношения, которым они удовлетворяют, составят двусторонний идеал

$$R_n \overset{\text{def}}{=} \ker\overline{\varrho}_n \subset \overline{\mathfrak{U}}\,.$$

[1]иначе $\mathfrak{U}[\hbar]$ можно описать как алгебру многочленов от коммутативной переменной $\hbar$ с коэффициентами из $\mathfrak{U}$ или как универсальную обёртывающую алгебру алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}[\hbar])$ бесследовых 2×2 –матриц *над кольцом* $\mathbb{C}[\hbar]$

Мы утверждаем, что при фиксированном m и всех $n \gg 0$ размерность подпространства

$$R_n \cap \overline{\mathfrak{U}}_{\leqslant m} \subset \overline{\mathfrak{U}}_{\leqslant m}$$

не зависит от n, а сами эти подпространства (как точки на соответствующем грассманиане) стремятся при $n \to \infty$ к некоторому предельному подпространству

$$R_\infty^{(m)} = \lim_{n \to +\infty} R_n \cap \overline{\mathfrak{U}}_{\leqslant m} \subset \overline{\mathfrak{U}}_{\leqslant m} \ .$$

Более того, при $m_1 \leqslant m_2$ мы будем иметь $R_\infty^{(m_1)} = R_\infty^{(m_2)} \cap \mathfrak{U}_{\leqslant m_1}$, и объединение всех подпространств $R_\infty^{(m_1)}$ составит в $\overline{\mathfrak{U}}$ двусторонний идеал:

$$R_\infty = \bigcup_{m \geqslant 0} R_\infty^{(m)} \subset \overline{\mathfrak{U}} \ ,$$

порождённый соотношениями $\hbar = 0$, $[a, b] = 0$ $(\forall\, a, b \in \{\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}\})$ и

$$\overline{x}^2 + \overline{y}^2 + \overline{z}^2 - \frac{1}{4} = 0 \ ,$$

которые можно воспринимать как предел соотношений (2-2) (вкупе с соотношением $\hbar = n^{-1}$) при $n \to \infty$. Таким образом, «предельная алгебра»

$$\overline{\mathfrak{U}}/R_\infty = \mathbb{C}[\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}] \Big/ \left(\overline{x}^2 + \overline{y}^2 + \overline{z}^2 - \frac{1}{4} \right)$$

представляет собой коммутативную алгебру полиномиальных функций на аффинной сфере, заданной уравнением $\overline{x}^2 + \overline{y}^2 + \overline{z}^2 = \frac{1}{4}$.

Проверка всех нужных нам свойств пространств $R_n^{(m)}$, $R_\infty^{(m)}$, R_∞ основывается на геометрических свойствах так называемых *когерентных состояний* и мы вернёмся к ней в §5.