§1. Формализм квантовой механики.

1.1. Водный пример: колебания с двумя степенями свободы. Рассмотрим простейшую механическую систему — «маятник в пространстве» — точечный грузик, закреплённый на конце невесомого жёсткого стержня, другой конец которого зафиксирован в некоторой точке так, чтобы маятник мог свободно вращаться вокруг этой точки в пространстве. Движение такого маятника в отсутствии на него внешних воздействий будем называть *состоянием*. В проекции на горизонтальную плоскость OXY, такое движение описывается уравнениями:

$$\begin{cases} x = A\cos\omega t + B\sin\omega t \\ y = C\cos\omega t + D\sin\omega t \ , \end{cases}$$

которые после замены $z_0 = A - iB$, $z_1 = C - iD$ превращаются в:

$$\begin{cases} x = \operatorname{Re} z_0 e^{i\omega t} \\ y = \operatorname{Re} z_1 e^{i\omega t} \end{cases}$$

Таким образом, состояние маятника, совершающего колебания с фиксированной частотой ω, описывается парой комплексных чисел $(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2$. Сдвиг временной шкалы $t \mapsto t - t_0$ не изменяет состояния, но умножает числа z_0, z_1 на $e^{i\omega t_0}$. Поэтому состояния описываются не самими векторами $(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2$, а их орбитами относительно диагонального действия окружности $\mathrm{U}(1)$ на $\mathbb{C}^2$:

$$(z_0, z_1) \mapsto (z_0 e^{i\omega t}, z_1 e^{i\omega t}) \ ,$$

т.е. точками фактор-пространства $\mathbb{C}^2/U(1)$. Вещественным растяжениям

$$(z_0, z_1) \mapsto (\lambda z_0, \lambda z_1) \ , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

отвечают растяжения стержня (т.е. длины) маятника. Таким образом состояния маятника фиксированной длины, совершающего колебания фиксированной частоты описываются точками фактор пространства

$$\mathbb{CP}^1 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{C}^* \ .$$

Упражнение 1.1. Убедитесь, что $\mathbb{CP}^1$ является гладким (более того, комплексно-аналитическим, и даже алгебраическим) многообразием, изоморфным двумерной сфере S^2. Верно ли, что $\mathbb{CP}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}^3/\mathbb{C}^*$ изоморфно S^4?

1.2. Состояния и наблюдаемые. Квантовое представление о мире исходит из того, что наблюдаемые макроскопические явления (например, свет) представляют собой результат статистической обработки нашего взаймодействия с большим количеством «квантов» рассматриваемого явления (в случае света — с фотонами), причём каждый «квант», подобно свободному маятнику, рассмотренному выше, имеет собственное *пространство состояний*, которое представляет собой комплексное проективное пространство $\mathbb{P}(V) = V/\mathbb{C}^*$, где V — комплексное векторное пространство, и в отсутствие внешних воздействий состояние «кванта» не меняется. Однако всякое воздействие на «квант», например — измерение или «наблюдение» (т.е. взаймодействие с измерительным прибором), вообще говоря, меняет состояние. Математически это описывается так.

На пространстве $V \simeq \mathbb{C}^{n+1}$ имеется эрмитово скалярное произведение

$$(v, w) = \sum_{i=0}^{n} \overline{v}_i \cdot w_i$$

(антилинейное по *первому* аргументу), а измерительный прибор или *наблюдаемая* представляет собой *эрмитов оператор* $V \xrightarrow{A} V$. Всякий эрмитов оператор диагонализуем и имеет вещественные собственные числа. Иначе говоря,

$$A = \sum_{0}^{n} \lambda_i P_{e_i} \ ,$$

где $\lambda_i \in \mathbb{R}$ — это собственные значения A, векторы $e_i \in V$ образуют ортонормированный собственный базис оператора A, а P_{e_i} суть ортогональные проекторы на соответсвующие собственные подпространства. Значениями наблюдаемой A являются в точности $n+1$ собственных чисел $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$, и *вероятность* получить значение λ_i на «кванте», находящемся в состоянии $v \in \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$, равна

$$\mathsf{P}(Av = e_i) = \frac{(v, P_{e_i})}{(v,v)} \ .$$

Упражнение 1.2. Убедитесь, что эта вероятность определена корректно (т. е. принимает одно и то же значение на $\mathbb{C}^*$-орбите вектора $v \in V$) и проверьте, что среднее значение (матожидание) результата измерения состояния v равно

$$\langle A \rangle_v = \frac{(v, Av)}{(v,v)} = \operatorname{tr} P_v A \ ,$$

где P_v - ортогональный проектор на подпространство, порождённое вектором v.

Кроме того, в результате измерения состояние «кванта» *изменяется* — оно ортогонально проектируется на то самое собственное направление, собственное число которого показал прибор.

Подчеркнём, что эта точка зрения столь же перпендикулярна традиционной классической механике, сколь представление о том, что Земля — шар, не сопоставимо с «учением о трёх китах» (в частности, все попытки «вывести» или «объяснить» первое посредством второго — довольно нелепы). Однако имеются простые эксперементы, результат которых проще всего интерпретировать именно с квантовой точки зрения.

1.2.1. Пример: опыты с поляроидами. Одной из характеристик света (т. е. фотонов) является *поляризация*. Механистически, состояния фотона, отвечающие различным поляризациям, можно воспринимать как различные траектории колебаний маятника (как во вводном примере выше), в частности они образуют проективное пространство, соответствующее двумерному пространству $\mathbb{C}^2$. Поляройд — это прибор, имеющий ровно два собственных значения: 0 и 1, и результатом его воздействия на фотон является ортогональное проектирование состояния фотона на собственный вектор с собственным значением 1. В результате, после прохода света через поляризующую пластинку мы видим *ослабленный* и *поляризованный* свет: поляризованный, потому что все фотоны в нём находятся теперь в одном и том же состоянии — собственном состоянии поляройда с собственным значением 1, а ослабленный, потому что часть фотонов спроектировалась на нулевое собственное подпространство (поглотилось). В частности, если разместить друг за другом перпендикулярно поляризующие пластины (такие, что единичный собственный вектор первой будет нулевым для второй), то все фотоны поглотятся с вероятностью единица, что мы и наблюдаем. Но — о чудо — если между двумя перпендикулярно ориентированными поляройдами вставить третий, повёрнутый под 45° к обоим, мы увидим, что свет снова начнёт проходить через такую тройку пластин, причём его интенсивность будет примерно вдвое меньше той, что была после прохождения одной пластины.

1.3. Эволюция состояний (динамика). Эволюция пространства состояний (т. е. динамика непрерывного изменения состояний) также описывается эрмитовым оператором $V \xrightarrow{H} V$, который обычно называется *гамильтонианом*. Эволюция описывается однопараметрической группой преобразований проективного пространства $\mathbb{P}(V)$, которые индуцированы непрерывным унитарным вращением пространства V, получающимся в результате экспоненцирования «инфинитиземального генератора» этого вращения — косоэрмитовой матрицы iH:

$$v \longmapsto v_t \stackrel{\text{def}}{=} e^{itH} v \;, \quad t \in \mathbb{R}$$

Упражнение 1.3. Проверьте, что это определение корректно, т. е. не зависит от выбора представителя $v \in V$ состояния (являющегося, напомним, точкой проективного пространства $\mathbb{P}(V)$)

Отметим, что при эволюции состояний наблюдаемые и их средние также эволюционируют. Если отнормировать состояние v условием $(v,v) = 1$, то мы получим:

$$\langle A\rangle (t) \stackrel{\text{def}}{=} \langle A\rangle_{v_t} = (e^{itH}v, Ae^{itH}v) = (v, e^{-itH}Ae^{itH}) = \langle A_t\rangle_v \;,$$

где $A_t \stackrel{\text{def}}{=} e^{-itH}Ae^{itH}$.

1.4. Базисный пример: система с «двумя состояниями». Наиболее далёкой от классических представлений является квантовая система, пространство состояний которой — проективная прямая, получающаяся в результате проективизации двумерного эрмитова пространства $V = \mathbb{C}^2$. Все наблюдаемые в такой системе принимают не более двух различных значений[1]. В пространстве эрмитовых матриц размера 2×2 физики обычно выбирают «стандартный» базис

$$\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 1.4. Как эволюция пространства $\mathbb{CP}^1 = S^2$, задаваемая гамильтонианами $H = \boldsymbol{e}$ и $H = \sigma_3$? Как выглядит эволюция, задаваемая произвольным «общим»[2] H? Как при этом меняются со временем наблюдаемые $\boldsymbol{e}$, σ_1, σ_2 и σ_3, а также их средние значения?

Динамика изменения состояний описывается операторами из специальной унитарной группы

$$\mathrm{SU}(2) = \{\mathbb{C}^2 \xrightarrow{F} \mathbb{C}^2 \mid \det F = 1 \;\&\; \overline{F}F^t = \mathrm{Id}\} \;.$$

Это компактная вещественная группа Ли, алгебра Ли которой

$$\mathfrak{su}_2 \stackrel{\text{def}}{=} T_e\mathrm{SU}(2) = \{\mathbb{C}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{C}^2 \mid \mathrm{tr}\, f = 0 \;\&\; \overline{f} + f^t = 0\}$$

состоит из всех бесследовых косоэрмитовых матриц. Эрмитово сопряжение $M \mapsto \overline{M}^t$ определяет на пространстве $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ всех комплексных 2×2 - матриц вещественную структуру, вещественными векторами которой являются эрмитовы матрицы, а мнимыми — косоэрмитовы. Таким образом

$$\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C}) = -i\mathfrak{su}_2 \oplus \mathfrak{su}_2 \tag{1-1}$$

как вещественное векторное пространство(в частности, матрицы $\boldsymbol{i} = i\sigma_1$, $\boldsymbol{j} = i\sigma_2$, $\boldsymbol{k} = i\sigma_3$ составляют базис алгебры $\mathfrak{su}_2$ над $\mathbb{R}$).

Упражнение 1.5. Проверьте, что $[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}] = 2\,\boldsymbol{k}$, $[\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}] = 2\,\boldsymbol{i}$, $[\boldsymbol{k},\boldsymbol{i}] = 2\,\boldsymbol{j}$.

А сопоставление $H \mapsto e^{itH}$ для эрмитовой матрицы $H \in -i\mathfrak{su}_2$ (так что $iH \in \mathfrak{su}_2$) есть не что иное, как интегрирование алгебры Ли $\mathfrak{su}_2$ в группу Ли SU_2.

Упражнение 1.6. Опишите ядро и образ экспоненциального отображения $\mathfrak{su}_2 \xrightarrow{f \mapsto e^f} \mathrm{SU}_2$.

[1] примером такой наблюдаемой является спин одного свободного электрона или поляризация одного свободного фотона

[2] т. е. с разными собственными числами

Комплексификация алгебры косоэрмитовых матриц есть алгебра

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \mathfrak{su}_2 \otimes \mathbb{C} = \{\mathbb{C}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{C}^2 \mid \operatorname{tr} g = 0\}$$

всех бесследовых матриц. Базис пространства $\mathfrak{sl}_2$ над $\mathbb{C}$ составляют матрицы

$$\boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 1.7. Проверьте следующие коммутационные соотношения:

$$[\boldsymbol{h}, \boldsymbol{e}_+] = 2\boldsymbol{e}_+ , \quad [\boldsymbol{h}, \boldsymbol{e}_-] = -2\boldsymbol{e}_- , \quad [\boldsymbol{e}_+, \boldsymbol{e}_-] = \boldsymbol{h} .$$