

Гомологии и когомологии групп и алгебр.

Терминология и обозначения. Пусть ассоциативная алгебра A с единицей над коммутативным кольцом K обладает *аугументацией*, т. е. тождественным на $K \cdot 1 \subset A$ эпиморфизмом алгебр $\varepsilon : A \rightarrow K$. Для каждого левого A -модуля M мы полагаем $H_i(A, M) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Tor}_i^A(K, M)$ и $H^i(A, M) = \text{Ext}_A^i(K, M)$, где K обозначает A -модуль $K = A/\ker \varepsilon$. Под (ко)гомологиями группы G с коэффициентами в G -модуле M (над K) всегда понимаются (ко)гомологии её групповой алгебры $K[G]$ с аугументацией $\varepsilon : \sum_{g \in G} x_g \cdot g \mapsto \sum_{g \in G} x_g \in K$.

ГА7♦1. Для циклической группы C порядка n с образующей σ положим $N \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \sigma + \sigma^2 + \dots + \sigma^{n-1} \in \mathbb{Z}[C]$.

Покажите, что комплекс $\dots \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[C] \xrightarrow{\sigma-1} \mathbb{Z}[C] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[C] \xrightarrow{\sigma-1} \mathbb{Z}[C] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$, где N и $(\sigma - 1)$ означают умножения на них, является свободной резольвентой тривиального $\mathbb{Z}[C]$ -модуля \mathbb{Z} и найдите в категории $\mathbb{Z}[C]$ -модулей **а)** $H^i(C_n, \mathbb{Z})$ **б)** $H_i(C_n, \mathbb{Z})$ **в)** $H^i(C_n \times C_m, \mathbb{Z})$ **г)** $H_i(C_n \times C_m, \mathbb{Z})$.

ГА7♦2. Пусть F — свободная группа с базисом X . Покажите, что $0 \rightarrow \ker \varepsilon \rightarrow \mathbb{Z}[F] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$ это свободная резольвента \mathbb{Z} и вычислите все $H^i(F, \mathbb{Z})$ и $H_i(F, \mathbb{Z})$.

ГА7♦3. Для левого линейного представления группы G в векторном пространстве V отображение множеств $D : G \rightarrow V$ со свойством $D(gh) = gD(h) + D(g)$ называется *V -дифференцированием*¹ группы G . Дифференцирования вида $D_v : g \mapsto gv - v$, где $v \in V$, называются *главными*. Покажите, что дифференцирования образуют абелеву группу $\text{Der}(G, V)$ по сложению, изоморфную $\text{Hom}_G(\ker \varepsilon, V)$, а главные дифференцирования составляют в ней подгруппу $\text{PrDer}(G, V)$, изоморфную V/V^G , причём $\text{Der}(G, V)/\text{PrDer}(G, V) \simeq H^1(G, V)$.

ГА7♦4. В условиях **зад. ГА7♦3** сопоставим каждому отображению множеств $G \times G \rightarrow V$, $(g, h) \mapsto [g, h]$, операцию на $E = V \times G$, действующую по формуле $(v, g) \cdot (w, h) \stackrel{\text{def}}{=} (v + gw + [g, h], gh)$. Покажите, что **а)** E становится группой если и только если скобка $[g, h]$ является нормализованным 2-коциклом группы G со значениями в V , т. е. удовлетворяет при всех $f, g, h \in G$ соотношениям $[g, 1] = [1, g] = 0$ и $f[g, h] - [fg, h] + [f, gh] - [f, g] = 0$ **б)** сопоставление скобке группы задаёт биекцию $H^2(G, V) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ext}_{\mathbb{Z}[G]}^2(\mathbb{k}, V)$ с классами групп E , содержащих V в качестве абелевой нормальной подгруппы с фактором $E/V \simeq G$ и присоединённым действием, задаваемым исходным представлением G в V , с точностью изоморфизмов, тождественных и на V и на G .

ГА7♦5. Установите для любой группы G , её подгруппы $H \subset G$ и H -модуля U канонические изоморфизмы: **а)** $H_i(G, \text{Ind}(U)) \simeq H_i(H, U)$ **б)** $H^i(G, \text{Coind}(U)) \simeq H^i(H, U)$.

ГА7♦6*. Для конечного расширения Галуа $\mathbb{k} \subset \mathbb{K}$ с группой Галуа $G = \text{Aut}_{\mathbb{k}} \mathbb{K}$ покажите при всех $i > 0$, что $H_i(G, \mathbb{K}) = H^i(G, \mathbb{K}) = 0$.

ГА7♦7 (бар-конструкция). Для ассоциативной алгебры A с единицей над полем \mathbb{k} обозначим через $\mathbb{B}_n = \mathbb{B}_n(A) \stackrel{\text{def}}{=} A^{\otimes(n+2)}$ тензорное произведение $(n + 2)$ копий векторного пространства A над \mathbb{k} , и рассмотрим дифференциал $\partial \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{v=0}^n (-1)^v \partial_v : \mathbb{B}_n \rightarrow \mathbb{B}_{n-1}$, где для каждого $n \geq 0$ и $0 \leq v \leq n$

$$\partial_v : a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_{n+1} \mapsto a_0 \otimes \dots \otimes a_{v-1} \otimes (a_v a_{v+1}) \otimes a_{v+2} \otimes \dots \otimes a_{n+1}.$$

Покажите, что *бар-конструкция* $\dots \xrightarrow{\partial} \mathbb{B}_2 \xrightarrow{\partial} \mathbb{B}_1 \xrightarrow{\partial} \mathbb{B}_0 \xrightarrow{\partial} A \rightarrow 0$

- а)** является свободной резольвентой A - A -бимодуля A в категории A - A -бимодулей
- б)** для любого левого A -модуля M тензорное произведение $\mathbb{B} \otimes_A M$, в котором \mathbb{B} рассматривается как правый A -модуль, является свободной резольвентой M в категории $A\text{-Mod}$ и явно опишите действие дифференциала на элемент $a_0 \otimes \dots \otimes a_n \otimes m \in \mathbb{B}_n \otimes_A M \simeq A^{\otimes(n+1)} \otimes_{\mathbb{k}} M$
- в)** когомологии $H^i(A, \mathbb{k})$ с коэффициентами в тривиальном модуле \mathbb{k} суть когомологии DG-алгебры² $T(A^*) = \bigoplus_{k \geq 0} A^{*\otimes k}$, умножение в которой — тензорное умножение, а дифференциал $d : T(A^*) \rightarrow T(A^*)$ степени 1 переводит 1 в 0, каждый ковектор $\alpha : A \rightarrow \mathbb{k}$ из A^* — в билинейную форму $d\alpha(a_1, a_2) = \alpha(a_1 a_2)$ из $A^* \otimes A^*$, и распространяется на всю тензорную алгебру по *s*-правилу Лейбница
- г)** тензорное умножение в $T(A^*)$ корректно индуцирует ассоциативное умножение на $\bigoplus H^i(A, \mathbb{k})$, совпадающее с умножением Ионеды на $\text{Ext}_A^i(\mathbb{k}, \mathbb{k}) = H^i(A, \mathbb{k})$

¹Отображение $D : R \rightarrow M$ кольца R в R - R -бимодуль M называется *дифференцированием*, если $D(ab) = D(a)b + aD(b)$. В задаче $R = \mathbb{k}[G]$, а M это V с тривиальным (тождественным) правым действием G .

²Т. е. ассоциативной градуированной алгебры с дифференциалом, удовлетворяющим правилу Лейбница.

№	дата	кто принял	подпись
1а			
б			
в			
г			
2			
3			
4а			
б			
5а			
б			
6			
7а			
б			
в			
г			