Абелевы категории

Задачи 4–6 достаточно уметь решать для категории модулей над ассоциативным кольцом, но почётно — для произвольной абелевой категории (например, посредством задачи 3).

ГА3◇1. Покажите, что категория топологических абелевых групп и непрерывных гомоморфизмов аддитивна, имеет ядра и коядра любых морфизмов, но не является абелевой.

ГА3◇2. Покажите, что в любой абелевой категории в каждом декартовом квадрате

$$\begin{tikzcd} X \times_B Y \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \arrow[d, "\psi"] \\ X \arrow[r, "\pi"] & B \end{tikzcd}$$

эпиморфность π влечёт эпиморфность π', причём φ индуцирует изоморфизм $\ker \pi' \xrightarrow{\sim} \ker \pi$.

ГА3◇3*. В абелевой категории *псевдоэлементом* $\alpha \in A$ объекта A называется класс стрелок α с концом в A по модулю эквивалентности $\alpha_1 \sim \alpha_2$, означающей равенство $\alpha_1\pi_1 = \alpha_2\pi_2$ для некоторых эпиморфизмов π_1, π_2. Проверьте, что: **а)** это действительно эквивалентность **б)** каждый морфизм $\varphi : A \to B$ корректно отображает псевдоэлементы A в псевдоэлементы B по правилу $\alpha \mapsto \varphi\alpha$ **в)** φ мономорфен $\iff \varphi(\alpha) \sim 0$ только для $\alpha \sim 0 \iff \varphi(\alpha_1) \sim \varphi(\alpha_2)$ только для $\alpha_1 \sim \alpha_2$ **г)** φ эпиморфен $\iff \forall\, \beta \in B\ \exists\, \alpha \in A : \varphi(\alpha) \sim \beta$ **д)** $\varphi = 0 \iff \forall\, \alpha \in A\ \varphi(\alpha) \sim 0$ **е)** $\ker \varphi = \operatorname{im} \psi$ в диаграмме $A \xrightarrow{\psi} B \xrightarrow{\varphi} C$ если и только если $\varphi\psi = 0$ и $\forall\, \beta \in B : \varphi(\beta) \sim 0\ \exists\, \alpha \in A : \psi(\alpha) \sim \beta$ **ж)** если $\varphi(\alpha) \sim \varphi(\beta)$ для стрелки φ с началом в A, то найдётся такой $\delta_{\beta-\alpha} \in A$, что $\varphi(\delta_{\beta-\alpha}) \sim 0$ и для любой стрелки ψ с началом в A из $\psi(\alpha) \sim 0$ (соотв. $\psi(\beta) \sim 0$) следует $\psi(\beta) \sim \psi(\delta_{\beta-\alpha})$ (соотв. $\psi(\alpha) \sim -\psi(\delta_{\beta-\alpha})$).

ГА3◇4. Покажите, что в коммутативной диаграмме с точными строками

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_2"] & X_3 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_3"] & X_4 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_4"] & X_5 \arrow[d, "\varphi_5"] \\ Y_1 \arrow[r] & Y_2 \arrow[r] & Y_3 \arrow[r] & Y_4 \arrow[r] & Y_5 \end{tikzcd}$$

сюрьективным φ_1, инъективным φ_5 и обратимыми φ_2 и φ_4 стрелка φ_3 обратима.

ГА3◇5. Для коммутативной диаграммы с точными строками

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\varphi'"] & B' \arrow[r, "\psi'"] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

постройте стрелку $\delta : \ker \gamma \to \operatorname{coker} \alpha$, включающуюся в точную последовательность

$$0 \longrightarrow \ker \alpha \xrightarrow{\varphi_*} \ker \beta \xrightarrow{\psi_*} \ker \gamma \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} \alpha \xrightarrow{\varphi'_*} \operatorname{coker} \beta \xrightarrow{\psi'_*} \operatorname{coker} \gamma \longrightarrow 0$$

и выясните, влечёт ли обратимость стрелки β инъективность α и сюрьективность γ, а обратимость стрелок α и γ — обратимость β.

ГА3◇6. Покажите, что для точности тройки $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ достаточно, чтобы над любым объектом $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$ естественные преобразования $0 \to h_A(X) \xrightarrow{\alpha^*} h_B(X) \xrightarrow{\beta^*} h_C(X) \to 0$ составляли точную тройку абелевых групп, и приведите пример, показывающий, что это условие не является необходимым.

ГА3◇7. Покажите, что для любого ассоциативного кольца R с единицей категории правых модулей над кольцами матриц $\mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$ и $\mathrm{Mat}_{m\times m}(R)$ точно эквивалентны друг другу при всех $m, n \in \mathbb{N}$.

Персональный табель ____.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 3 (10.10.2019)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3а			
б			
в			
г			
д			
е			
ж			
4			
5			
6			
7			