§3. Абелевы категории

3.1. Линейные категории. Пусть R — произвольное кольцо с единицей. Категория $\mathcal{L}$ называется R-линейной слева, если бифунктор $\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}}(*,*)$ принимает значения в категории R-$\mathcal{M}od$ левых R-модулей и все композиции

$$\mathrm{Hom}(Y,Z)\times\mathrm{Hom}(X,Y)\to\mathrm{Hom}(X,Z)$$

билинейны над R. Например, сама категория R-$\mathcal{M}od$ R-линейна, категория векторных пространств над полем $\Bbbk$ линейна над $\Bbbk$, а категория абелевых групп $\mathbb{Z}$-линейна. Всякая R-линейная категория автоматически $\mathbb{Z}$-линейна: каждое множество стрелок $\mathrm{Hom}(X,Y)$ в R-линейной категории является аддитивной абелевой группой, и сложение морфизмов дистрибутивно композиции:

$$(\varphi_1+\varphi_2)\circ(\psi_1+\psi_2)=\varphi_1\circ\psi_1+\varphi_1\circ\psi_2+\varphi_2\circ\psi_1+\varphi_2\circ\psi_2\,.$$

Функтор между R-линейными категориями называется *R-линейным*, если он действует на стрелки R-линейными гомоморфизмами. Все функторы между R-линейными категориями далее будут по умолчанию предполагаться R-линейными.

Предостережение 3.1. Сложение морфизмов в (малой) K-линейной категории $\mathcal{L}$ не следует путать с формальным сложением в алгебре $K[\mathcal{L}]$ из прим. 1.3 на стр. 4: даже на уровне множеств $\mathrm{Mor}\,\mathcal{L}$ и $K[\mathcal{L}]$ — это *разные* множества.

3.1.1. Прямые суммы. Из равенства $\varphi\circ 0=\varphi\circ(0+0)=\varphi\circ 0+\varphi\circ 0$ вытекает, что в R-линейной категории $\varphi\circ 0=0$ для нулевого морфизма $0\in\mathrm{Hom}(X,Y)$ и любой стрелки φ с началом в Y. По той же причине $0\circ\psi=0$ для стрелок ψ с концом в X.

Упражнение 3.1. Докажите равносильность друг другу следующих трёх условий на эндоморфизм $\varepsilon\in\mathrm{Hom}(X,X)$ в R-линейной категории: а) $\varepsilon=\mathrm{Id}_X$ б) $\varphi\circ\varepsilon=\varphi$ для всех стрелок φ с началом в X в) $\varepsilon\circ\varphi=\varphi$ для всех стрелок φ с концом в X и проверьте, что мономорфность[1] (соотв. эпиморфность) произвольного морфизма означает, что он не является левым (соотв. правым) делителем нуля[2].

Предложение 3.1

В R-линейной категории каждое произведение $X\times Y$ является одновременно и копроизведением, а каждое копроизведение $X\otimes Y$ — произведением, причём между каноническими морфизмами π_X,π_Y произведения в множители и каноническими морфизмами ι_X,ι_Y множителей в копроизведение выполняются соотношения:

$$\iota_X\pi_X+\iota_Y\pi_Y=\mathrm{Id}\,,\quad \pi_X\iota_X=\mathrm{Id}_X\,,\quad \pi_Y\iota_Y=\mathrm{Id}_Y\,,\quad \pi_X\iota_Y=0\,,\quad \pi_Y\iota_X=0\,,\qquad (3\text{-}1)$$

Наоборот, всякий объект $X\oplus Y$, включающийся в диаграмму вида

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "\iota_X"] & X\oplus Y \arrow[l, shift left, "\pi_X"] \arrow[r, shift right, "\pi_Y"'] & Y \arrow[l, shift right, "\iota_Y"'] \end{tikzcd}\,,$$

стрелки которой удовлетворяют соотношениям (3-1), является одновременно произведением и копроизведением объектов X и Y.

[1] См. n° 1.1.1 на стр. 5.

[2] Т. е. $\varphi\psi=0\Rightarrow\psi=0$ (соотв. $\psi\varphi=0\Rightarrow\psi=0$).

Доказательство. Пусть есть произведение $X \times Y$. Морфизмы $\iota_X \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Id}_X \times 0 : X \to X \times Y$ и $\iota_Y \overset{\text{def}}{=} 0 \times \mathrm{Id}_Y : Y \to X \times Y$ включаются в коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "\pi_Y"] \arrow[d, "\pi_X"'] & Y \\ X & X \arrow[l, "\mathrm{Id}_X"] \arrow[u, "0"'] \arrow[ul, "\iota_X"'] \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "\pi_Y"] \arrow[d, "\pi_X"'] & Y \\ X & Y \arrow[l, "0"] \arrow[u, "\mathrm{Id}_Y"'] \arrow[ul, "\iota_Y"'] \end{tikzcd}$$

и удовлетворяют последним четырём соотношениям (3-1). Из них вытекает, что

$$\pi_X(\iota_X\pi_X + \iota_Y\pi_Y) = \pi_X \quad \text{и} \quad \pi_Y(\iota_X\pi_X + \iota_Y\pi_Y) = \pi_Y\,.$$

Но по универсальному свойству произведения существует ровно одна стрелка $\varphi : X \times Y \to X \times Y$, для которой $\pi_X\varphi = \pi_X$ и $\pi_Y\varphi = \pi_Y$, и эта стрелка $\varphi = \mathrm{Id}_{X\times Y}$. Поэтому первое соотношение из (3-1) тоже выполнено.

Упражнение 3.2. Докажите соотношения (3-1) в случае, когда существует копроизведение $X \otimes Y$.

Из соотношений (3-1) следует, что для любой пары стрелок $\alpha : X \to Z$ и $\beta : Y \to Z$ стрелка $\gamma : X \oplus Y \to Z$ со свойствами $\gamma\iota_X = \alpha$ и $\gamma\iota_Y = \beta$ единственна и равна $\gamma = \gamma \circ \mathrm{Id}_{X\oplus Y} = \gamma(\iota_X\pi_X + \iota_Y\pi_Y) = \alpha\pi_X + \beta\pi_Y$, а для любой пары стрелок $\alpha' : W \to X$ и $\beta' : W \to Y$ стрелка $\gamma' : W \to X \oplus Y$ со свойствами $\pi_X\gamma' = \alpha'$ и $\pi_Y\gamma' = \beta'$ также единственна и равна $\gamma' = \mathrm{Id}_{X\oplus Y} \circ \gamma' = (\iota_X\pi_X + \iota_Y\pi_Y)\gamma' = \iota_X\alpha' + \iota_Y\beta'$. □

Определение 3.1 (прямые суммы)
Объект $X \oplus Y$, удовлетворяющий условиям предл. 3.1, называется *прямой суммой* объектов X и Y. Прямая сумма $\mathcal{X} = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$ любого конечного набора объектов определяется по индукции вместе с каноническими морфизмами

$$\iota_\nu : X_\nu \to \mathcal{X}\,, \quad \pi_\nu : \mathcal{X} \to X_\nu\,, \quad \varepsilon_\nu \overset{\text{def}}{=} \iota_\nu\pi_\nu : \mathcal{X} \to \mathcal{X}\,,$$

которые удовлетворят соотношениям

$$\begin{gathered} \pi_\nu\iota_\mu = 0 \text{ при } \nu \neq \mu\,, \quad \pi_\nu\iota_\nu = \mathrm{Id}_{X_\nu}\,, \\ \varepsilon_\nu\varepsilon_\mu = 0 \text{ при } \nu \neq \mu\,, \quad \varepsilon_\nu^2 = \varepsilon_\nu\,, \quad \sum_\nu \varepsilon_\nu = \mathrm{Id}_{\mathcal{X}}\,, \end{gathered} \tag{3-2}$$

эквивалентным тому, что $\mathcal{X} = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = X_1 \otimes X_2 \otimes \cdots \otimes X_n$.

Пример 3.1 (матричный формализм)
Прямым вычислением с использованием соотношений (3-2) проверяется, что для конечных прямых сумм $\mathcal{X} = \bigoplus_\nu X_\nu$ и $\mathcal{Y} = \bigoplus_\mu Y_\mu$ в R-линейной категории имеется канонический изоморфизм R-модулей $\mathrm{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \simeq \bigoplus_{\mu,\nu} \mathrm{Hom}(X_\nu, Y_\mu)$, сопоставляющий морфизму $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ матрицу $\Phi = (\varphi_{\mu\nu})$ из морфизмов $\varphi_{\mu\nu} = \pi_\mu \circ \varphi \circ \iota_\nu : X_\nu \to Y_\mu$. Из матрицы Φ морфизм $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ восстанавливается по формуле $\varphi = \sum_{\mu\nu} \iota_\mu \circ \varphi_{\mu\nu} \circ \pi_\nu$. При этом матрица композиции $\varphi \circ \psi$ равна произведению матриц $\Phi \cdot \Psi$.

3.1.2. Естественность сложения морфизмов. Если в R-линейной категории $\mathcal{L}$ есть прямые суммы $X \oplus X$ и $Y \oplus Y$, то сложение в группе $\mathrm{Hom}(X, Y)$ канонически определяется композициями в категории $\mathcal{L}$, поскольку для любых стрелок $\varphi, \psi : X \to Y$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi+\psi"] \arrow[d, "\Delta_X"'] & Y \\ X \oplus X \arrow[r, "\varphi\oplus\psi"'] & Y \oplus Y \arrow[u, "\nabla_Y"'] \end{tikzcd} \tag{3-3}$$

в которой диагональный морфизм $\Delta_X \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Id}\times\mathrm{Id} : X \to X\times X$ и кодиагональный морфизм $\nabla_Y \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id} : Y \otimes Y \to Y$ канонически заданы универсальными свойствами произведения $X \times X$ и копроизведения $Y \otimes Y$, а морфизм $\varphi \oplus \psi : X \oplus X \to Y \oplus Y$ возникает, если имеется равенство $X \times X = X \otimes X$ или равенство $Y \otimes Y = Y \times Y$, т. е. когда произведение X с собой одновременно является копроизведением, или копроизведение Y с собой одновременно является произведением. В первом случае два отображения $X \to Y \otimes Y$, задаваемые композициями $\iota_1\varphi$ и $\iota_2\psi$, где $\iota_{1,2} : Y \to Y \otimes Y$ суть вложения сомножителей в копроизведение, задают по универсальному свойству копроизведения $X \otimes X$ морфизм $X \otimes X \to Y \otimes Y$, а во втором случае отображения $X \times X \to Y$, задаваемые композициями $\varphi\pi_1$ и $\psi\pi_2$, где $\pi_{1,2} : X \times X \to X$ суть проекции произведения на сомножители, задают морфизм $X\times X \to Y\times Y$ по универсальному свойству произведения $Y \times Y$. Таким образом, диаграмма (3-3) канонически задаёт бинарную операцию на морфизмах в любой категории, где у каждого объекта есть прямое произведение с собой, одновременно являющееся и копроизведением. В R-линейной категории эта операция совпадает со сложением морфизмов.

Упражнение 3.3. Убедитесь в последнем.

3.1.3. Бесконечные (ко)произведения. Копроизведение $\coprod_\nu X_\nu$ бесконечного семейства объектов X_ν в R-линейной категории обычно не совпадает с произведением $\prod_\nu X_\nu$. Так, в категории абелевых групп $\mathcal{Ab}$ произведение $\prod_\nu X_\nu$ образовано всевозможными семействами векторов $\{v_\nu\}$, $v_\nu \in X_\nu$, которые складываются покомпонентно, а копроизведение $\coprod_\nu X_\nu \subset \prod_\nu X_\nu$ состоит из тех семейств $\{v_\nu\}$, в которых лишь конечное число элементов $v_\nu \neq 0$. В общей ситуации из универсальных свойств (ко)произведений вытекает существование естественных изоморфизмов

$$\mathrm{Hom}(\coprod_\nu X_\nu, Y) \simeq \prod_\nu \mathrm{Hom}(X_\nu, Y) \quad \text{и} \quad \mathrm{Hom}(Y, \prod_\nu X_\nu) = \prod_\nu \mathrm{Hom}(Y, X_\nu). \tag{3-4}$$

Кроме того, для каждого i набор стрелок $\pi_{\nu i} : X_i \to X_\nu$, нулевых при $\nu \neq i$ и тождественной для $\nu = i$, задаёт морфизмы $\pi_i : \coprod_\nu X_\nu \to X_i$, такие что $\pi_\nu \iota_\nu = \mathrm{Id}_{X_\nu}$ при всех ν, и $\pi_\nu \iota_\mu = 0$ при $\mu \neq \nu$. Произведение стрелок π_ν задаёт морфизм

$$\sigma : \coprod_\nu X_\nu \to \prod_\nu X_\nu . \tag{3-5}$$

Упражнение 3.4. Убедитесь, что все ι_ν и σ инъективны, а π_ν сюрьективны.

Если все объекты X_ν являются одинаковыми копиями одного объекта X, занумерованными элементами некоторого множества N, мы обозначаем их копроизведение через $N \otimes X \overset{\text{def}}{=} \coprod\limits_\nu X_\nu$, а произведение — через $X^N \overset{\text{def}}{=} \prod\limits_\nu X_\nu$.

Пример 3.2 (прямая сумма морфизмов)
Во всякой категории с (ко)произведениями любой набор морфизмов $\gamma_\nu : X_\nu \to Y_\nu$ канонически задаёт морфизм произведений $\prod X_\alpha \to \prod Y_\alpha$ и морфизм копроизведений $\coprod X_\alpha \to \coprod Y_\alpha$, которые отвечают, соответственно, наборам стрелок

$$\gamma_\nu \circ \pi_\nu : \prod X_\alpha \to Y_\nu \quad \text{и} \quad \iota_\nu \circ \gamma_\nu : X_\nu \to \coprod Y_\nu ,$$

где $\pi_\nu : \prod X_\alpha \to X_\nu$ и $\iota_\nu : Y_\nu \to \coprod Y_\alpha$ — канонические морфизмы произведения в сомножители и сомножителей в копроизведение. Для конечных прямых сумм в R-линейных категориях эти два морфизма совпадают и называются *прямой суммой* морфизмов γ_ν. Прямая сумма морфизмов обозначается $\oplus\gamma_\nu$. В терминах прим. 3.1 она изображается диагональной матрицей со стрелками γ_ν по диагонали и нулями в остальных местах.

3.1.4. Ядра и коядра. Напомню[1], что объект $0 \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ категории $\mathcal{C}$ называется *нулевым*, если он одновременно начальный и конечный. Такой объект единствен с точностью до единственного изоморфизма (если существует).

Морфизм $X \to Y$ в категории с нулевым объектом называется *нулевым*, если он распадается в композицию $X \to 0 \to Y$.

Упражнение 3.5. Убедитесь, что в R-линейной категории нулевой морфизм является нулевым элементом аддитивной группы $\operatorname{Hom}(X, Y)$ и наоборот.

Уравнитель и коуравнитель стрелки $\varphi : X \to Y$ и нулевого морфизма называются, соответственно, *ядром* и *коядром* стрелки φ и обозначаются $\ker\varphi$ и $\operatorname{coker}\varphi$.

С ядром канонически связана универсальная стрелка $\varkappa : \ker\varphi \to X$, которая аннулирует φ справа: $\varphi\varkappa = 0$, и любая стрелка ψ, аннулирующая φ справа, однозначно представляется в виде $\psi = \varkappa\psi'$. Универсальную стрелку $\varkappa$ мы тоже будем называть *ядром*. Она единственна с точностью до единственного изоморфизма, тождественно действующего на X.

Упражнение 3.6. pb:KerProps Убедитесь, что если ядро существует, то оно мономорфно, и равенство $\varkappa = 0$ равносильно инъективности φ, а равенство $\varkappa = \mathrm{Id}_X$ — тому, что $\varphi = 0$.

В $\mathbb{Z}$-линейной категории ядро представляет предпучок $Z \mapsto \ker\varphi_*^Z$, переводящий объект Z в ядро гомоморфизма абелевых групп $\varphi_*^Z : \operatorname{Hom}(Z, X) \to \operatorname{Hom}(Z, Y)$, который задаёт действие над Z естественного преобразования $\varphi_* : h_X \to h_Y$ левого умножения на φ.

С коядром связана универсальная стрелка $\varsigma : Y \to \operatorname{coker}\varphi$, также называемая *коядром*. Она аннулирует φ слева: $\varsigma\varphi = 0$, и любая стрелка ψ, аннулирующая φ слева однозначно представляется в виде $\psi = \psi'\varsigma$. Стрелка ς единственна с точностью до

[1]См. прим. 2.7 на стр. 27.

единственного изоморфизма, тождественно действующего на Y. В $\mathbb{Z}$-линейной категории коядро копредставляет функтор $Z \mapsto \ker \varphi_Z^*$, где $\varphi_Z^* : \operatorname{Hom}(Y, Z) \to \operatorname{Hom}(X, Z)$ задаёт действие над Z естественного преобразования $\varphi^* : h^Y \to h^X$.

Упражнение 3.7. Убедитесь, что если коядро существует, то оно эпиморфно, и равенство $\varsigma = 0$ равносильно сюрьективности φ, а равенство $\varsigma = \mathrm{Id}_Y$ — тому, что $\varphi = 0$.

Ядро канонической стрелки $\varsigma : Y \to \operatorname{coker} \varphi$ называется *образом* морфизма φ и обозначается $\operatorname{im} \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \ker \varsigma$. Коядро канонической стрелки $\varkappa : \ker \varphi \to X$ называется *кообразом*[1] морфизма φ и обозначается $\operatorname{coim} \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{coker} \varkappa$. Если морфизм $\varphi : X \to Y$ имеет ядро, коядро, образ и кообраз, то в силу универсальных свойств двух последних

$$\operatorname{Hom}(\operatorname{coim} \varphi, \operatorname{im} \varphi) \simeq \{\alpha : \operatorname{coim} \varphi \to Y \mid \varsigma\alpha = 0\} \simeq \{\beta : X \to Y \mid \varsigma\beta = 0 \text{ и } \beta\varkappa = 0\}.$$

Стрелка $\overline{\varphi} : \operatorname{coim} \varphi \to \operatorname{im} \varphi$, переводимая этими изоморфизмами в исходную стрелку $\varphi : X \to Y$, это единственный морфизм, делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd} \operatorname{coker} \varphi & Y \arrow[l, "\varsigma"'] & \operatorname{im} \varphi \arrow[l, "\varkappa'"'] \\ \ker \varphi \arrow[r, "\varkappa"] & X \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\varsigma'"] & \operatorname{coim} \varphi \arrow[u, "\overline{\varphi}"'] \end{tikzcd} \tag{3-6}$$

в которой $\varkappa$, $\varkappa'$ — канонические морфизмы из ядер, а ς, ς' — в коядра.

Определение 3.2
Диаграмма (3-6) называется *каноническим разложением* морфизма φ.

Пример 3.3 (фильтрованные абелевы группы)
Рассмотрим категорию $F\mathcal{A}b$, объектами которой являются абелевы группы

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n,$$

профильтрованные возрастающими подгруппами $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$, а морфизмами — такие гомоморфизмы абелевых групп $\varphi : A \to B$, что $\varphi(A_n) \subset B_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Эта категория аддитивна, и у каждого морфизма $\varphi : A \to B$ есть ядро и коядро, как группы совпадающие с ядром и коядром в $\mathcal{A}b$, и имеющие фильтрации, индуцированные с A и B: $\ker \varphi = \bigcup A'_n$, где $A'_n = A_n \cap \ker \varphi$, и $\operatorname{coker} \varphi = \bigcup B'_n$, где B'_n — образ подгруппы $B_n \subset B$ в факторе $B / \varphi(A)$. Обозначим через $A[1]$ фильтрованную группу с компонентами $A[1]_p = A_{p+1}$. Отображение $s : A \to A[1]$, тождественно действующее на элементы группы, является морфизмом фильтрованных групп и имеет нулевые ядро и коядро, т. е. одновеменно инъективно и сюрьективно, но не обратимо, если $A \neq 0$. В каноническом разложении (3-6) морфизма s стрелка $\overline{s} = s$ тоже не изоморфизм:

$$\begin{tikzcd} 0 & A[1] \arrow[l] & A[1] \arrow[l, "\mathrm{Id}_{A[1]}"'] \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "s"] \arrow[r, "\mathrm{Id}_A"] & A. \arrow[u, "s"'] \end{tikzcd}$$

[1] В категории модулей кообраз $\varphi : X \to Y$ это фактор по ядру: $\operatorname{coim} \varphi = X / \ker \varphi$.

3.2. Абелевы категории. Категория $\mathcal{A}$ называется *аддитивной*, если она $\mathbb{Z}$-линейна, и в ней имеются нулевой объект и прямые суммы любых двух[1] объектов. Аддитивная категория $\mathcal{A}$ называется *абелевой*, если любая стрелка φ в ней имеет ядро и коядро, причём канонический морфизм $\overline{\varphi}$ в её разложении (3-6) является изоморфизмом, т. е. образ любого морфизма канонически изоморфен его кообразу[2]. Отождествляя кообраз с образом при помощи этого изоморфизма, мы получаем для каждой стрелки $\varphi : X \to Y$ *пятичленное разложение*

$$\begin{tikzcd} \ker\varphi \arrow[r, hook, "\varkappa"] & X \arrow[r, two heads, "\varsigma'"] \arrow[rr, bend left, "\varphi"] & \operatorname{im}\varphi \arrow[r, hook, "\varkappa'"] & Y \arrow[r, two heads, "\varsigma"] & \operatorname{coker}\varphi \end{tikzcd}, \tag{3-7}$$

где $\varkappa'$ мономорфен, ς' эпиморфен, $\varsigma'\varkappa = \varphi$ и $\operatorname{im}\varphi = \ker\varsigma = \operatorname{coker}\varkappa$.

Упражнение 3.8. Покажите, что в абелевой категории $\mathcal{A}$ ядро, коядро и образ являются функторами из категории $\mathcal{A}r(\mathcal{A})$ диаграмм вида[3] $\bullet \to \bullet$ в категорию $\mathcal{A}$, а пятичленное разложение (3-7) является функтором из $\mathcal{A}r(\mathcal{A})$ в категорию диаграмм вида $\bullet \to \bullet \to \bullet \to \bullet \to \bullet$.

Пример 3.4 (категория модулей)
Для любого ассоциативного кольца R категории R-$\mathcal{M}od$ и $\mathcal{M}od$-R левых и правых R-модулей абелевы: ядра, коядра и образы в них суть обычные ядра, коядра и образы R-линейных отображений, а совпадение образа и кообраза проверяется в теореме о строении R-линейного гомоморфизма, утверждающей, что образ канонически изоморфен фактору по ядру. В частности, категория $\mathcal{A}b$ абелевых групп абелева. Её полная подкатегория конечно порождённых абелевых групп также является абелевой.

Пример 3.5 (неабелва аддитивная категория, продолжение прим. 3.3 на стр. 46)
Категория фильтрованных абелевых групп из прим. 3.3 аддитивна, и все стрелки в ней имеют ядра и коядра. Однако эта категория не является абелевой, т. к. в ней есть стрелки φ, у которых $\operatorname{im}\varphi \not\simeq \operatorname{coim}\varphi$.

Упражнение 3.9. Убедитесь, что в категории топологических абелевых групп и их непрерывных гомоморфизмов тоже есть ядра, коядра и прямые суммы, но она не является абелевой.

Пример 3.6 (неаддитивные категории)
Категории множеств, топологических пространств, групп и коммутативных колец не являются даже $\mathbb{Z}$-линейными, поскольку в них $X \times Y \neq X \otimes Y$.

Упражнение 3.10. Покажите, что стрелка φ в абелевой категории обратимаесли и только если $\ker\varphi = 0$ и $\operatorname{coker}\varphi = 0$, а также что всякий мономорфизм является ядром своего коядра, а эпиморфизм — коядром своего ядра.

[1] А значит — и любого конечного множества.

[2] В начальном курсе алгебры этот факт обычно называют «теоремой о строении гомоморфизма» и доказывают для гомоморфизмов групп, колец и модулей над кольцами.

[3] Т. е. категории функторов $\mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{A})$, где категория $\mathcal{N} = \{\bullet \to \bullet\}$ имеет 2 объекта и одну нетождественную стрелку.

3.2.1. Конечная (ко)замкнутость. Поскольку у любых двух стрелок α и β в абелевой категории есть (ко)уравнитель, а именно — (ко)ядро разности $\alpha - \beta$, любая конечная диаграмма в абелевой категории имеет (ко)предел[1]. В частности, каждая пара стрелок $A \xrightarrow{\alpha} C \xleftarrow{\beta} B$ однозначно достраивается до декартова квадрата[2]

$$\begin{tikzcd} A \times_C B \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\beta'"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ A \arrow[r, "\alpha"] & C \end{tikzcd},$$

а каждая пара стрелок $A \xleftarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} B$ — до кодекартова квадрата[3]

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\alpha'"] \\ A \arrow[r, "\beta'"] & A \otimes_C B \end{tikzcd}.$$

Предложение 3.2
В абелевой категории коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\alpha'"'] \arrow[d, "\beta'"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ A \arrow[r, "\alpha"] & Q \end{tikzcd} \tag{3-8}$$

декартовесли и только если P является ядром стрелки $\delta : A \oplus B \to Q$ с матрицей[4] $\delta = (\beta, -\alpha)$, и в этом случае вложение этого ядра $\varepsilon : P \hookrightarrow A \oplus B$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}$. Двойственным образом, квадрат (3-8) кодекартов тогда и только тогда, когда Q является коядром стрелки $\varepsilon' : P \hookrightarrow A \oplus B$ с матрицей $\begin{pmatrix} \alpha' \\ -\beta' \end{pmatrix}$, и в этом случае проекция на это коядро $\delta' : A \oplus B \twoheadrightarrow Q$ имеет матрицу $\delta = (\beta, -\alpha)$.

Доказательство. Мы докажем первое утверждение, второе получается оборачиванием стрелок. Для произвольного объекта Z запись отображения $\eta : Z \to A \oplus B$ матрицей $\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$ устанавливает биекцию между стрелками $\eta : Z \to A \oplus B$ и парами стрелок $\varphi : Z \to A$, $\psi : Z \to B$. Равенство $\alpha\varphi = \beta\psi$ при этом равносильно равенству $\delta\eta = 0$, поскольку $(\alpha, -\beta)\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \alpha\varphi - \beta\psi$. Универсальное свойство вложения ядра

[1] См. зам. 2.1. на стр. 30.
[2] См. прим. 2.10 на стр. 28.
[3] См. прим. 2.11 на стр. 29.
[4] См. прим. 3.1 на стр. 43.

$\varepsilon:\ \ker\delta \hookrightarrow A\oplus B$, записанное в терминах его матрицы $\varepsilon = \begin{pmatrix}\beta'\\ \alpha'\end{pmatrix}$, превращается таким образом в универсальное свойство стрелок β' и α' в декартовом квадрате (3-8): для любого морфизма $\eta = \begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}$ со свойством $\delta\eta = 0$, существует единственная такая стрелка $\vartheta:\ Z\to\ker\delta$, что $\eta = \varepsilon\vartheta$, т. е. $\varphi = \beta'\vartheta$ и $\psi = \alpha'\vartheta$. □

Предложение 3.3
В абелевой категории для каждого декартова квадрата

$$\begin{tikzcd} A\times_C B \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\beta'"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ A \arrow[r, "\alpha"] & C \end{tikzcd} \tag{3-9}$$

(1) композиция стрелки $\varkappa:\ \ker\alpha' \hookrightarrow A\times_C B$ со стрелкой β' является ядром для α

(2) инъективность стрелки α равносильна инъективности стрелки α'

(3) если стрелка β сюрьективна, то декартов квадрат (3-9) одновременно является кодекартовым, и стрелка β' тоже сюрьективна.

Доказательство. Из универсального свойства послойного произведения вытекает, что стрелки $\varphi:\ Z\to A$ со свойством $\alpha\varphi = 0$ и стрелки $\psi:\ Z\to A\times_C B$ со свойством $\alpha'\psi = 0$ находятся в канонической биекции, которая сопоставляет стрелке $\varphi:\ Z\to A$ её послойное произведение $\varphi\times_C 0:\ Z\to A\times_C B$ с нулевой стрелкой $Z\to B$, а стрелку $\psi:\ Z\to A\times_C B$ отправляет в композицию $\beta'\psi$:

$$\begin{tikzcd} & A\times_C B \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\beta'"] & B \arrow[d, "\beta"] \\ Z \arrow[ur, "\psi=\varphi\times_C 0"] \arrow[r, "\varphi=\beta'\psi"'] & A \arrow[r, "\alpha"] & C\,. \end{tikzcd}$$

Поскольку каждая стрелка ψ однозначно пропускается через ядро $\varkappa:\ \ker\alpha' \hookrightarrow A\times_C B$, отвечающая ей стрелка φ однозначно пропускается через композицию $\beta'\varkappa$. Это доказывает первое утверждение и импликацию $\ker\alpha' = 0 \Rightarrow \ker\alpha = 0$ во втором. Пусть, наоборот, $\ker\alpha = \beta'\varkappa = 0$. Тогда вложение $\varkappa:\ \ker\alpha' \hookrightarrow A\times_C B$ является послойным произведением нулевых морфизмов $\beta'\varkappa$ и $\alpha'\varkappa$, и поэтому тоже нулевое. Это завершает доказательство второго утверждения. Отметим, что пока мы пользовались только универсальными свойствами произведения и ядер.

Чтобы доказать (3) воспользуемся предл. 3.2, согласно которому $A\times_C B$ является ядром стрелки $\delta = (\alpha, -\beta)$ в диаграмме

$$\begin{tikzcd} & A \times_C B \arrow[dl, "\beta'"'] \arrow[d, hook, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\alpha'"] & \\ A \arrow[dr, "\alpha"'] & A \oplus B \arrow[d, "\delta"] & B . \arrow[dl, "\beta"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Сюрьективность стрелки β влечёт сюрьективность стрелки $\delta' : A \oplus B \to C$ с матрицей $\delta' = (\alpha, \beta)$, поскольку $\beta = \delta' \iota_B$. Тем самым, стрелка δ' является коядром стрелки $\varepsilon' = \begin{pmatrix} \alpha' \\ -\beta' \end{pmatrix}$, а значит, по предл. 3.2 квадрат (3-9) является кодекартовым. Оборачивая стрелки в уже доказанных утверждениях (1) и (2), мы заключаем, что в кодекартовом квадрате сюрьективность стрелки β' равносильна сюрьективности стрелки β. □

Следствие 3.1

В абелевой категории для каждого кодекартова квадрата

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & A \arrow[d, "\alpha'"] \\ B \arrow[r, "\beta'"] & A \otimes_C B \end{tikzcd} \tag{3-10}$$

(1) композиция стрелки β' с сюрьекцией $\zeta : A \otimes_C B \twoheadrightarrow \operatorname{coker} \alpha'$ доставляет коядро для стрелки α

(2) эпиморфность стрелки α равносильна эпиморфности стрелки α'

(3) если стрелка β инъективна, то кодекартов квадрат (3-9) одновременно является декартовым, и стрелка β' тоже инъективна.

3.2.2. Точность. Пара компонуемых стрелок $\xrightarrow{\varphi} X \xrightarrow{\psi}$ называется *точной*, если $\ker \psi = \operatorname{im} \varphi$. Более длинная цепочка стрелок называется *точной*, если каждая пара её последовательных стрелок точна. Например, точность последовательности

$$0 \to X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z$$

означает что стрелка $\varphi : X \hookrightarrow Y$ инъективна и является ядром стрелки ψ, а точность последовательности

$$X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z \to 0$$

означает что стрелка $\psi : Y \twoheadrightarrow Z$ сюрьективна и служит коядром стрелки ψ.

Точные последовательности вида

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} B \to 0 \tag{3-11}$$

называются *точными тройками*. Точность тройки (3-11) равносильна равенствам $\alpha = \ker\beta$ и $\beta = \operatorname{coker}\alpha$. В этой ситуации B называется *фактором* C по A и обозначается $C\,/\,A$. Точная тройка (3-11) называется *расщепимой*, если существует изоморфизм $\varphi: C \xrightarrow{\sim} A \oplus B$, включающийся в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & C \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\varphi"] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\iota_A"'] & A \oplus B \arrow[r, "\pi_B"'] & B \arrow[r] & 0 , \end{tikzcd} \tag{3-12}$$

нижняя строка которой является канонической диаграммой прямой суммы.

Упражнение 3.11. Покажите, что расщепимость точной тройки (3-11) равносильна наличию такой стрелки $\beta' : C \to A$, что $\beta'\alpha = \mathrm{Id}_A$, а также равносильна наличию такой стрелки $\alpha' : B \to C$, что $\beta\alpha' = \mathrm{Id}_B$. Приведите пример нерасщепимой точной тройки в категории абелевых групп.

3.2.3. Точные функторы. Функтор $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ (соотв. $F : \mathcal{A}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{B}$) между абелевыми категориями называется *точным слева*, если он переводит ядра (соотв. коядра) в ядра или, что то же самое, — точные последовательности вида $0 \to A \to B \to C$ (соотв. $A \to B \to C \to 0$) в точные последовательности $0 \to F(A) \to F(B) \to F(C)$ (соотв. в $0 \to F(C) \to F(B) \to F(A)$). Двойственным образом, F называется *точным справа*, если он переводит коядра (соотв. ядра) в коядра, или — точные последовательности вида $A \to B \to C \to 0$ (соотв. $0 \to A \to B \to C$) в точные последовательности $F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$ (соотв. в $F(C) \to F(B) \to F(A) \to 0$). Функтор называется *точным*, если он точен и справа и слева.

Упражнение 3.12. Убедитесь, что для точности функтора необходимо и достаточно, чтобы он переводил точные тройки в точные тройки, и в этом случае он сохраняет точность любых последовательностей.

Пример 3.7 (представимые функторы)
Из универсального свойства ядра тавтологически вытекает, что всякий копредставимый функтор $h^A : X \mapsto \mathrm{Hom}(A, X)$ (соотв. представимый функтор $h_A : X \mapsto \mathrm{Hom}(X, A)$) переводит ядра (соотв. коядра) в ядра. Тем самым, все (ко)представимые функторы точны слева.

Пример 3.8 (сопряжённые функторы)
Так как (ко)ядро является (ко)пределом диаграммы, по предл. 2.7 на стр. 36 все правые сопряжённые функторы точны слева, а все левые сопряжённые функторы точны справа. В частности, предел диаграммы является точным слева, а копредел — точным справа функторами из категории диаграмм $\mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ заданного вида $\mathcal{N}$ в абелевой категории $\mathcal{A}$ в саму категорию $\mathcal{A}$. Обратите внимание, что категория функторов $\mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ со значениями в абелевой категории $\mathcal{A}$ является абелевой для любой малой категории $\mathcal{N}$: (ко)ядра, (ко)произведения и прямые суммы определяются покомпонентно над каждым объектом $\nu \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$, и равенство $\mathrm{coim} = \mathrm{im}$ также проверяется отдельно над каждым объектом $\nu \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$.

Пример 3.9 (тензорное умножение)
Согласно прим. 2.20 на стр. 38, для любых ассоциативных колец R, S и R-S-бимодуля N функтор $\mathcal{M}od\text{-}R \to \mathcal{M}od\text{-}S$, $X \mapsto X \otimes_R N$, точен справа.

Упражнение 3.13. В категории абелевых групп приведите примеры, показывающие, что (ко)представимый функтор может быть не точен справа, а тензорное умножение на фиксированную абелеву группу N может быть не точно слева.

3.2.4. Отступление: короткий список аксиом абелевой категории. Данное выше определение абелевой категории не является логически минимальным и выбрано нами постольку, поскольку все абелевы категории, с которыми мы будем иметь дело в этом курсе, изначально линейны, и в них выполняется теорема о строении гомоморфизма. Общепринятое в логике и теории категорий «минималистское» определение таково: (произвольная) категория $\mathcal{C}$ называется *абелевой*, если в ней

(A0) есть нулевой объект[1]

(A1) у каждой пары объектов есть произведение и копроизведение

(A2) у каждого морфизма есть ядро и коядро

(A3) каждый мономорфизм является ядром некоторой стрелки, а каждый эпиморфизм — коядром некоторой стрелки

Эти аксиомы самодвойственны: их выполнение в категории $\mathcal{C}$ равносильно их выполнению в $\mathcal{C}^{\text{opp}}$. Вывод нашего определения из этих аксиом намечен в следующем ниже упражнении и подробно изложен во второй главе книги: *P. Freyd*. «Abelian Categories».

Упражнение 3.14* (не то, чтобы трудное, но довольно трудоёмкое). Пользуясь только предыдущими аксиомами (A0) – (A3), покажите, что в категории $\mathcal{C}$

а) сопоставления стрелке её ядра и коядра корректно задают взаимно обратные биекции между множествами под- и фактор объектов[2] каждого объекта

б) любая одновременно мономорфная и эпиморфная стрелка обратима

в) у каждых двух подобъектов любого объекта есть максимальная нижняя и минимальная верхняя грани[3] (они называются *пересечением* и *объединением* этих подобъектов)

г) любые две стрелки имеют уравнитель и коуравнитель (как следствие, в $\mathcal{C}$ есть (ко)пределы всех конечных диаграмм)

д) образ и кообраз любого морфизма канонически изоморфны

е) для каждой пары объектов X, Y канонический морфизм $X \otimes Y \to X \times Y$, задаваемый стрелками $\mathrm{Id}_X \times 0 : X \to X \times Y$ и $0 \times \mathrm{Id}_Y : Y \to X \times Y$, обратим (т. е. копроизведение любых двух объектов одновременно является копроизведением)

ж) конструкция из n° 3.1.2 на стр. 44 задаёт структуру абелевой группы на каждом множестве $\mathrm{Hom}(X, Y)$, что в свою очередь вводит $\mathbb{Z}$-линейную структуру на категории $\mathcal{C}$.

[1] См. прим. 2.7 на стр. 27.
[2] См. n° 1.1.2 на стр. 5.
[3] В смысле порядка из упр. 1.1 на стр. 5.

3.3. Проективные и инъективные объекты. Объект Q абелевой категории $\mathcal{A}$ называется *проективным* (соотв. *инъективным*), если функтор $h^Q : X \mapsto \mathrm{Hom}(Q, X)$ (соотв. функтор $h_Q : X \mapsto \mathrm{Hom}(X, Q)$) точен справа.

Упражнение 3.15. Покажите, что прямая сумма (даже бесконечная, если существует) проективных объектов проективна, а прямое произведение (даже бесконечное) инъективных объектов инъективно.

Лемма 3.1

Проективность объекта P абелевой категории $\mathcal{A}$ равносильна каждому из свойств:

(P1) любая стрелка $\varphi : P \to X$ поднимается вдоль любого эпиморфизма $\pi : Y \twoheadrightarrow X$, т. е. существует такая стрелка $\psi : P \to Y$, что $\varphi = \pi\psi$

(P2) любой эпиморфизм $\pi : Z \twoheadrightarrow P$ расщепляется, т. е. существует такой изоморфизм $\gamma : Z \xrightarrow{\sim} \ker \pi \oplus P$, что $\pi = \pi_P \gamma$.

Инъективность объекта I абелевой категории $\mathcal{A}$ равносильна каждому из свойств:

(I1) любая стрелка $\varphi : X \to I$ продолжается на любое расширение $\iota : X \hookrightarrow Y$, т. е. существует такая стрелка $\psi : Y \to I$, что $\psi\iota = \varphi$

(I2) любое вложение $\iota : I \hookrightarrow Z$ расщепляется, т. е. $\iota = \gamma\iota_I$ для некоторого изоморфизма $\gamma : I \oplus \operatorname{coker} \iota \xrightarrow{\sim} Z$.

Доказательство. Условие (P1) означает эпиморфность морфизмов

$$h^P(\pi) = \pi_* : h^P(Y) \to h^P(X)$$

для всех сюрьекций $\pi : Y \twoheadrightarrow X$, в чём и заключается точность справа функтора h^P. Из условия (P1) следует, что тождественный морфизм Id_P можно поднять вдоль любого эпиморфизма $\pi : Z \twoheadrightarrow P$ до такой стрелки $\iota : P \to Z$, что $\pi\iota = \mathrm{Id}_P$, а это по упр. 3.11 и означает расщепимость точной тройки $\ker \pi \hookrightarrow Z \twoheadrightarrow P$. Наоборот, пусть любой эпиморфизм на P расщепляется, и задана пара стрелок $Y \twoheadrightarrow X \leftarrow P$. Достроим её до декартова квадрата

$$\begin{tikzcd} Y \times_X P \arrow[r, two heads, shift left, "\pi'"] \arrow[d, "\varphi'"'] & P \arrow[l, dotted, shift left, "\iota"] \arrow[d, "\varphi"] \\ Y \arrow[r, two heads, "\pi"'] & X . \end{tikzcd}$$

Так как π сюрьективен, π' тоже сюрьективен[1]. Пусть $\iota : P \hookrightarrow Y \times_X P$ расщепляет π'. Тогда стрелка φ поднимается стрелкой $\psi = \varphi'\iota$. Эквивалентность условий (I1), (I2) инъективности объекта I доказывается обращением стрелок. □

[1] См. предл. 3.3 на стр. 49.

Упражнение 3.16. Проведите эти рассуждения.

3.3.1. Проективные и инъективные модули. В категории $\mathcal{M}od\text{-}R$ правых модулей над произвольным кольцом R с единицей свободный модуль R ранга 1 проективен, поскольку имеется естественный изоморфизм функторов $h^R \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id}$, который действует над модулем M преобразованием $\mathrm{Hom}(R, M) \xrightarrow{\sim} M$, $\varphi \mapsto \varphi(1)$. По упр. 3.15 все свободные модули $E \otimes R$ тоже проективны, а по лем. 3.1 любой проективный модуль P изоморфен прямому слагаемому свободного модуля: каждый модуль P является образом эпиморфизма $S(P) \otimes R \twoheadrightarrow P$, где $S(P)$ — множество векторов модуля P, и для проективного P этот эпиморфизм расщепляется.

Упражнение 3.17. Убедитесь в обратном: если модуль $P \oplus Q = E \otimes R$ свободен, то и P и Q проективны.

Инъективность модуля I означает возможность в нём деления на любые необратимые элементы кольца:

Лемма 3.2
Правый R-модуль I инъективенесли и только если для любого правого идеала $\mathfrak{q} \subset R$ и любого R-линейного справа гомоморфизма $q : \mathfrak{q} \to I$ имеется такой вектор $e_q \in I$, что $q(x) = e_q \cdot x$ для всех $x \in \mathfrak{q}$, т. е. в I имеется частное $q(x)/x = e_q$.

Доказательство. Импликация $\Rightarrow$ вытекает из лем. 3.1: продолжим q до R-линейного справа гомоморфизма $q' : R \to I$ и возьмём $e_q = q'(1)$. Для доказательства обратной импликации рассмотрим произвольное расширение модулей $N \subset M$ и любой R-линейный гомоморфизм $\varphi : N \to I$. Чтобы продолжить его на M воспользуемся леммой Цорна. Содержащие N подмодули $N' \subseteq M$, на которые продолжается φ, образуют чум по включению, и каждая линейно упорядоченная цепочка в нём мажорируется объединением элементов цепочки. Поэтому в M существует максимальный по включению подмодуль $L \supseteq N$ и гомоморфизм $\psi : L \to I$ с ограничением $\psi|_N = \varphi$. Если имеется вектор $m \in M \smallsetminus L$, то подмодуль L', порождённый L и m, строго больше L, и для завершения доказательства достаточно продолжить ψ с L на L'. Подмодуль L' является образом эпиморфизма $\pi_m : L \oplus R \twoheadrightarrow L'$, $(\ell, x) \mapsto \ell + mx$, и стало быть, изоморфен $L \oplus R / \ker \pi_m$, где $\ker \pi_m = \{(\ell, x) \mid mx = -\ell \in L\}$ в свою очередь изоморфно правому идеалу $\mathfrak{k} = \{x \in R \mid mx \in L\}$, который R-линейно отображается в I по правилу $x \mapsto \psi(mx)$. Берём вектор $e = \psi(mx)/x \in I$, такой что $\psi(mx) = e \cdot x$ для всех $x \in \mathfrak{k}$, и задаём продолжение $\psi' : L' \to I$ правилом $\psi'(\ell + mx) = \psi(\ell) + e \cdot x$. □

Упражнение 3.18. Убедитесь в корректности последнего правила и проверьте, что $\mathbb{Z}$-модули $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ инъективны, причём второй замечателен тем, что для любого $\mathbb{Z}$-модуля A и любого элемента $a \in A$ есть гомоморфизм $\varphi : A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ с $\varphi(a) \neq 0$.

3.3.2. Гротендиковы категории. Абелева категория $\mathcal{A}$ называется *гротендиковой*, если она замкнута и козамкнута, умеренно мощна[1] и для любой фильтрующейся малой категории $\mathcal{F}$ функтор $\mathrm{colim} : \mathcal{F}un(\mathcal{F}, \mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ точен. Последнее условие означает, что фильтрующиеся копределы в $\mathcal{A}$ перестановочны с ядрами, а значит, и с пределами любых конечных диаграмм. Например, категория абелевых групп $\mathcal{A}b$ гротен-

[1] Т. е. подобъекты и фактор объекты любого объекта образуют множество.

дикова в силу предл. 2.8 на стр. 38. Как следствие, для любой малой абелевой категории $\mathcal{A}$ категория функторов $\mathcal{F}un(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)$ тоже гротендикова.

Упражнение 3.19 (непересекающиеся подобъекты). Убедитесь, что в любой абелевой категории следующие два условия на пару подобъектов $A \hookrightarrow M \hookleftarrow B$ объекта M эквивалентны: а) $A \times_M B = 0$ б) сквозное отображение $B \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M/A$ инъективно.

Предложение 3.4
В гротендиковой категории для инъективности объекта I необходимо и достаточно, чтобы в любом собственном[1] расширении $I \hookrightarrow M$ существовал ненулевой подобъект $N \hookrightarrow M$, не пересекающийся[2] с I.

Доказательство. Необходимость очевидна, поскольку по свойству (I2) из лем. 3.1 на стр. 53 любое расширение инъективного объекта расщепляется в прямую сумму I и дополнительного подобъекта, который не пересекается с I. Наоборот, пусть объект I удовлетворяет условию предложения. Докажем, что каждое собственное расширение $I \hookrightarrow M$ расщепляется. Подобъекты $N \hookrightarrow M$ со свойством $I \times_M N = 0$ образуют непустое частично упорядоченное[3] множество, удовлетворяющее условиям леммы Цорна: для любой линейно упорядоченной цепочки подобъектов $N_\nu \hookrightarrow M$ со свойством $I \times_M N_\nu = 0$, их объединение $\operatorname{colim} N_\nu$ тоже обладает этим свойством, так как копредел в гротендиковой категории перестановочен с конечными пределами. Пусть $N \hookrightarrow M$ — максимальный по включению подобъект в M со свойством $I \times_M N = 0$. Тогда проекция $M \twoheadrightarrow M/N$ является минимальным фактором M, для которого сквозное отображение $I \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M/N$ инъективно. В частности, в M/N нет непересекающихся с I подобъектов (иначе фактор по такому объекту был бы строго меньшим, чем M/N фактором M, в который вкладывается I). По условию леммы, расширение $I \hookrightarrow M/N$ несобственное, т. е. является изоморфизмом. Тем самым, имеется проекция $M \twoheadrightarrow I$ с тождественным сквозным отображением $I \hookrightarrow M \twoheadrightarrow I$, расщепляющая расширение $I \hookrightarrow M$. □

3.4. (Ко)порождающие объекты. Объект G абелевой категории $\mathcal{A}$ называется *генератором*[4] (соотв. *когенератором*) категории $\mathcal{A}$, если функтор $h^G : X \mapsto \operatorname{Hom}(G, X)$ (соотв. функтор $h_G : X \mapsto \operatorname{Hom}(X, G)$) строг, т. е. переводит разные стрелки в разные[5].

Например, свободный модуль R ранга 1 порождает категорию $\mathcal{M}od$-R, ибо функтор $h^R \simeq \operatorname{Id}$ не только строг, но и вполне строг.

Упражнение 3.20 (электрификация). Покажите, что каждая абелева категория с генератором умеренно мощна[6].

Для произвольных объектов G, X рассмотрим прямую сумму

$$\operatorname{Hom}(G, X) \otimes G \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{\varphi\,:\,G \to X} \varphi \otimes G$$

[1] Т. е. не являющегося изоморфизмом.
[2] Т. е. удовлтворяющий равносильным условиям из упр. 3.19.
[3] Стандартным порядком на подобъектах, задаваемым включением, см. упр. 1.1 на стр. 5.
[4] (Ко)генераторы также называют *(ко)порождающими объектами* категории $\mathcal{A}$.
[5] Или, эквивалентно, ненулевые — в ненулевые.
[6] См. n° 1.1.2 на стр. 5.

одинаковых копий G, занумерованных стрелками $\varphi \in \mathrm{Hom}(G,X)$, и отобразим слагаемое $\varphi \otimes G$ в X при помощи стрелки $\varphi : G \to X$. Получим морфизм

$$c : \mathrm{Hom}(G,X) \otimes G \to X\,, \tag{3-13}$$

который называется *канонической свёрткой*. Двойственным образом, рассмотрим для объектов Y, C прямое произведение

$$C^{\mathrm{Hom}(Y,C)} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\varphi : Y \to C} C^{\varphi}$$

одинаковых копий C, занумерованных стрелками $\varphi : Y \to C$, и отобразим Y в сомножитель C^{φ} при помощи стрелки $\varphi : Y \to C$. Получим морфизм

$$c' : Y \to C^{\mathrm{Hom}(Y,C)} \tag{3-14}$$

который называется *канонической косвёрткой*.

Предложение 3.5
Кополная абелева категория $\mathcal{A}$ тогда и только тогда порождается объектом G, когда для любого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ каноническая свёртка (3-13) эпиморфна. Полная абелева категория тогда и только тогда копорождается объектом C, когда для любого $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ каноническая косвёртка (3-14) мономорфна.

Доказательство. Докажем второе. Применим к морфизму (3-14) сохраняющий ядра функтор h^X с произвольным $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$. Получим точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(X, \ker c') \to \mathrm{Hom}(X,Y) \xrightarrow{c'_*} \mathrm{Hom}(X,C)^{\mathrm{Hom}(Y,C)}$$

морфизм c'_* которой переводит стрелку $\varphi : X \to Y$ в график отображения

$$\varphi^* : \ \mathrm{Hom}(Y,C) \to \mathrm{Hom}(X,C)\,, \quad \psi \mapsto \psi\varphi\,.$$

Тем самым, инъективность c'_* равносильна инъективности действия функтора

$$h_C : \mathrm{Hom}(X,Y) \to \mathrm{Hom}\left(h_C(Y), h_C(X)\right)\,.$$

Если $\ker c' = 0$, отображение c'_* инъективно для всех X, Y, т. е. функтор h_C строг. Наоборот, если h_C строг, то $\mathrm{Hom}(X, \ker c') = 0$ для всех X, и беря $X = \ker c'$, заключаем, что $\ker c' = 0$. □

Упражнение 3.21. Докажите первую часть предл. 3.5 и покажите, что любой модуль является коядром гомоморфизма свободных модулей.

Следствие 3.2
Инъективная абелева группа $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ копорождает категорию абелевых групп.

Доказательство. Косвёртка $c' : A \to \left(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right)^{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})}$ инъективна по упр. 3.18. □

Упражнение 3.22. Убедитесь, что абелева группа $I_R = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ со структурой правого R-модуля, задаваемой левым действием R на себе (соотв. со структурой левого R-модуля, задаваемой правым действием R на себе), является инъективным когенератором категории $\mathcal{M}od$-R (соотв. категории R-$\mathcal{M}od$).

Определение 3.3
Будем говорить, что в абелевой категории $\mathcal{A}$ *достаточно много инъективных* (соотв. *проективных*) *объектов*, если любой объект является подобъектом инъективного (соотв. фактором проективного) объекта. Например, в категории модулей над ассоциативным кольцом с единицей достаточно много как инъективных, так и проективных объектов.

Теорема 3.1
Замкнутая абелева категория, имеющая генератор и достаточно много инъективных объектов, обладает инъективным когенератором.

Доказательство. Обозначим генератор через G. По упр. 3.20 на стр. 55 категория умеренно мощна. В частности, фактор объекты генератора составляют множество Q. Произведение $\prod_{F\in Q} F$ вкладывается в некоторый инъективный объект I. Покажем, что функтор h_I переводит любую ненулевую стрелку $\varphi : X \to Y$ в ненулевую стрелку

$$\varphi^* : \mathrm{Hom}(Y, I) \to \mathrm{Hom}(X, I), \quad \psi \mapsto \psi\varphi .$$

Поскольку функтор h^G строг, существует морфизм $\gamma : G \to X$ с ненулевой композицией $\varphi\gamma : G \to Y$. Её образ $\mathrm{im}(\varphi\gamma) \in Q$ вкладывается в I. Поднимем это вложение до морфизма $\psi : Y \to I$. Тогда $\psi\varphi \neq 0$, ибо по построению $\psi\varphi\gamma \neq 0$. □

Теорема 3.2
Всякая гротендикова категория[1] с генератором имеет достаточно много инъективных объектов.

Доказательство. Назовём расширение $X \hookrightarrow E$ *существенным*, если все ненулевые подобъекты в E пересекаются[2] с X. Достаточно показать, что каждый объект X обладает максимальным по включению существенным расширением, ибо такое расширение инъективно по предл. 3.4 на стр. 55.

Пользуясь аксиомой выбора, сопоставим каждому объекту Z диаграмму $Z \hookrightarrow E(Z)$, которая для инъективных Z является тождественным отображением Id_Z, а в остальных случаях — собственным[3] существенным расширением объекта Z. Тогда над каждым объектом X возникает проиндексированная ординалами вполне упорядоченная по включению неубывающая цепочка существенных расширений $\varepsilon_\omega : X \hookrightarrow E_\omega$, в которой $\varepsilon_\varnothing : X \hookrightarrow E(X)$ и для любых $\eta < \omega$ расширение $\varepsilon_\omega : X \hookrightarrow E_\omega$ является композицией существенных расширений $\varepsilon_\eta : X \hookrightarrow E_\eta$ и $\varepsilon_{\eta,\omega} : E_\eta \hookrightarrow E_\omega$.

Упражнение 3.23. Убедитесь, что композиция двух существенных расширений является существенным расширением.

[1] См. n° 3.3.2 на стр. 54.
[2] См. упр. 3.19 на стр. 55.
[3] Т. е. отличным от изоморфизма.

В самом деле, пусть ω является наименьшим ординалом, на который такую цепочку нельзя продолжить. Если у ω есть предшествующий ординал ω', положим ε_ω равным сквозному отображению $X \hookrightarrow E_{\omega'} \hookrightarrow E(E_{\omega'})$. Если у ω нет предшествующего ордината, положим $E_\omega = \operatorname{colim}_{\eta<\omega} E_\eta$.

Упражнение 3.24. Убедитесь, что E_ω является существенным расширением X и всех предыдущих E_η.

Наличие у X максимального существенного расширения означает, что указанная цепочка в какой-то момент стабилизируется на инъективном расширении. Допустим, что для какого-то X этого не произошло, и для каждой пары неравных ординалов $\omega < \tau$ существенное расширение $E_\omega \hookrightarrow E_\tau$ является собственным.

Обозначим генератор категории через G и положим $R = \operatorname{End}(G)$. Это ассоциативное кольцо с единицей, и функтор $h^G : Z \to \operatorname{Hom}(G, Z)$ принимает значения в категории правых R-модулей. Покажем, что он переводит собственные существенные расширения $A \hookrightarrow B$ в собственные существенные расширения $h^G(A) \hookrightarrow h^G(B)$. Собственность сохраняется в силу строгости функтора h^G и его точности слева: при применении h^G к точной тройке $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow B/A$ с ненулевой правой стрелкой получится тройка $h^G(A) \hookrightarrow h^G(B) \to h^G(B/A)$ с ненулевой правой стрелкой, пропускающейся через коядро левой. Стало быть, это коядро тоже ненулевое. Чтобы установить существенность, рассмотрим произвольный R-подмодуль $N \subset h^G(B) = \operatorname{Hom}(G, B)$, содержащий ненулевой элемент $\varphi : G \to B$. Если расширение $\alpha : A \hookrightarrow B$ существенно, то его образ пересекается с образом φ и левый верхний угол декартова квадрата

$$\begin{tikzcd} A \times_B G \arrow[r, hook, "\alpha'"] \arrow[d, "\varphi'"'] & G \arrow[d, "\varphi"] \\ A \arrow[r, hook, "\alpha"] & B \end{tikzcd}$$

отличен от нуля. Так как G это генератор, существует стрелка $\psi : G \to A \times_B G$ с ненулевой композицией $\phi\alpha'\psi$. Поскольку $\alpha'\psi \in R$, эта композиция тоже принадлежит R-подмодулю $N \subset \operatorname{Hom}(G, B)$. С другой стороны, в силу коммутативности квадрата, она лежит и в образе вложения $\alpha_* : h^G(A) \hookrightarrow h^G(B)$, что и требовалось установить.

Итак, функтор h^G переводит вполне упорядоченную цепочку собственных существенных расширений объекта X в обладающую теми же свойствами цепочку расширений R-модуля $h^G(X)$. Этот модуль содержится в некотором инъективном R-модуле I. Для любого собственного существенного расширения R-модулей $N \hookrightarrow M$ каждое вложение $N \hookrightarrow I$ продолжается до гомоморфизма $M \hookrightarrow I$, тоже инъективного, поскольку иначе его ядро нетривиально пересекалось бы с N. По индукции[1], вложение $h^G(X) \hookrightarrow I$ продолжается до вложения в I всей трансфинитной цепочки $h^G(E_\omega)$. Мы получаем вполне упорядоченную цепочку неограниченной мощности из строго возрастающих подмодулей, лежащих между $h^G(X)$ и I, что невозможно. □

Следствие 3.3
Для любой малой абелевой категории $\mathcal{A}$ категория функторов $\mathcal{F}un(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)$ из $\mathcal{A}$ в абелевы группы является гротендиковой, имеет генератор, инъективный когенератор и достаточно много инъективных объектов.

[1]Имеется в виду трансфинитная индукция по ординалам типа уже проделанной выше.

Доказательство. Категория $\mathcal{F}un(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)$ абелева и гротендикова, поскольку пределы и копределы диаграмм[1] функторов $F_\nu : \mathcal{A} \to \mathcal{A}b$, а также точность последовательностей естественных преобразований $F \to G \to H$ таких функторов и сложение этих преобразований определяются, проверяются и вычисляются отдельно над каждым объектом $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}b$, где они превращаются в диаграммы $F_\nu(A)$ и последовательности $F(A) \to G(A) \to H(A)$ абелевых групп.

Покажем, что функтор $G = \bigoplus_{A \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}} h^A : X \mapsto \bigoplus_{A \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X)$ является генератором категории $\mathcal{F}un(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)$. Согласно предл. 3.5 достаточно проверить, что для любого функтора $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}b$ каноническая свёртка $c : \operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{A},\mathcal{A}b)}(G, F) \otimes G \twoheadrightarrow F$ сюрьективна. При помощи естественных изоморфизмов[2]

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{A},\mathcal{A}b)}(G, F) \simeq \prod_{A \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{A},\mathcal{A}b)}(h^A, G) \simeq \prod_{A \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}} G(A)$$

действие канонической свёртки c над объектом $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ можно записать в виде

$$c_X : \Big(\prod_{A \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}} F(A)\Big) \otimes \Big(\bigoplus_{A \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X)\Big) \to F(X), \quad (x_A) \otimes (\varphi_A) \mapsto \sum_A F\varphi_A(x_A).$$

Тогда каждый элемент $z \in F(X)$ является образом разложимого тензора $z \otimes \operatorname{Id}_X$, левый и правый сомножители которого имеют в $\prod_A F(A)$ и $\bigoplus_A \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X)$ координаты

$$x_A = \begin{cases} 0 & \text{при } A \neq X \\ z & \text{при } A = X\,, \end{cases} \qquad \varphi_A = \begin{cases} 0 & \text{при } A \neq X \\ \operatorname{Id}_X & \text{при } A = X\,. \end{cases}$$

Будучи гротендиковой и обладая генератором, категория $\mathcal{F}un(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)$ имеет достаточно много инъективных объектов по теор. 3.2 и инъективный когенераор по теор. 3.1. □

3.5. Категории модулей. Объект K козамкнутой категории $\mathcal{C}$ называется *компактным*, если функтор $h^K : Z \mapsto \operatorname{Hom}(K, Z)$ коммутирует с фильтрующимися копределами, т. е. для любого функтора $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ из фильтрующейся малой категории $\mathcal{N}$ каноническая стрелка $\operatorname{colim}\operatorname{Hom}(K, X_\nu) \to \operatorname{Hom}(K, \operatorname{colim} X_\nu)$, $[\varphi_\nu] \mapsto \iota_\nu \circ \varphi_\nu$, переводящая класс в $\operatorname{colim}\operatorname{Hom}(K, X_\nu)$ морфизма $\varphi_\nu : K \to X_\nu$ в композицию этого морфизма с каноническим отображением $\iota_\nu : X_\nu \to \operatorname{colim} X_\nu$, биективна. Подробнее это означает, что любой морфизм $\varphi : K \to \operatorname{colim} X_\nu$ пропускается через каноническое отображение ι_ν для некоторого ν, и две стрелки $\varphi_\nu : K \to X_\nu$ и $\varphi_\mu : K \to X_\mu$ задают одно и то же отображение $\iota_\nu\varphi_\nu = \iota_\mu\varphi_\mu : K \to \operatorname{colim} X_\nu$если и только если $X(\nu \to \eta) \circ \varphi_\nu = X(\mu \to \eta) \circ \varphi_\mu$ как отображения $K \to X_\eta$ для некоторых стрелок $\nu \to \eta \leftarrow \mu$ в категории $\mathcal{N}$.

Очевидно, что проективный генератор R категории $\mathcal{M}od$-R правых модулей над ассоциативным кольцом R с единицей компактен, поскольку $h^R \simeq \operatorname{Id}$. Конечные прямые суммы компактных объектов тоже компактны.

Упражнение 3.25. Покажите, что копредел конечной диаграммы компактных объектов компактен.

[1] В частности, ядра, коядра и прямые суммы.

[2] Мы пользуемся тем, что функтор $\operatorname{Hom}(\,*\,, G)$ переводят копределы в пределы, и леммой Ионеды.

Из упражнения вытекает, что каждый конечно представимый модуль, т. е. коядро гомоморфизма $R^m \to R^n$, компактен. Легко видеть, что каждый компактный модуль M конечно порождён, поскольку представляется в виде фильтрующегося копредела (объединения) своих конечно порождённых подмодулей $N \subset M$ и, стало быть, содержится в одном из них, так как тождественный морфизм $M \to M = \operatorname{colim} N$ пропускается через какой-нибудь из этих подмодулей.

Упражнение 3.26. Покажите, что всякий конечно порождённый проективный модуль конечно представим.

Тем самым, проективный модуль компактенесли и только если он конечно порождён.

Теорема 3.3

Козамкнутая абелева категория $\mathcal{A}$ с компактным проективным генератором P точно эквивалентна[1] категории $\mathcal{Mod}$-R правых R-модулей над кольцом $R = \operatorname{End}_{\mathcal{A}}(P)$.

Доказательство. Функтор $h^P : \mathcal{A} \to \mathcal{Ab}$ принимает значение в $\mathcal{Mod}$-R: правое действие $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P, P)$ на абелевой группе $h^P(X) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P, X)$ задаётся правым умножением стрелок на f. В силу проективности P функтор h^P точен. Проверим, что он по-существу сюрьективен и вполне строг[2]. Из предл. 3.5 вытекает, что любой объект $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ представляется в виде коядра морфизма между прямыми суммами подходящих упорядоченных множеств I, J одинаковых копий генератора P:

$$J \otimes P \xrightarrow{\varphi} I \otimes P \twoheadrightarrow X \to 0\,. \tag{3-15}$$

Морфизм φ задаётся некоторой матрицей[3] Φ формата $I \times J$ с элементами

$$\varphi_{ij} \in \operatorname{Hom}(j \otimes P, i \otimes P) \simeq \operatorname{Hom}(P, P) = R\,,$$

имеющей при каждом j лишь конечное число ненулевых φ_{ij}. Применяя к (3-15) функтор h^P и пользуясь компактностью P получаем для $h^P(X)$ представление в виде коядра морфизма свободных R-модулей

$$J \otimes R \xrightarrow{\varphi_*} I \otimes R \twoheadrightarrow h^P(X) \to 0\,, \tag{3-16}$$

который задаётся умножением столбца[4] $(x_j) \in J \otimes R$ слева на матрицу Φ. Так как каждый R-модуль является коядром гомоморфизма свободных R-модулей, функтор h^P по-существу сюрьективен. Для любого $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ группа $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ является ядром стрелки $h_Y(\varphi)$, получающейся применением $h_Y : Z \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{Ab}}(Z, Y)$ к диаграмме (3-15), а группа $\operatorname{Hom}_R\left(h^P(X), h^P(Y)\right)$ является коядром стрелки $h_{h^P(Y)}(\varphi_*)$, получающейся применением $h_{h^P(Y)}\colon M \mapsto \operatorname{Hom}_R(M, h^P(Y))$ к диаграмме (3-16). Эти стрелки совпадают друг с другом, ибо каждая из них представляет собою гомоморфизм $h^P(Y)^I \to h^P(Y)^J$ прямых произведений одинаковых копий группы $h^P(Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P, Y)$, который действует на строку[5] $(y_i)_{i \in I}$, $y_i \in h^P(Y)$, правым умножением на матрицу Φ. Тем самым, $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \simeq \operatorname{Hom}_R\left(h^P(X), h^P(Y)\right)$. □

[1] Т. е. имеется эквивалентность категорий, переводящая точные тройки в точные тройки.

[2] См. предл. 1.1 на стр. 13.

[3] См. прим. 3.1 на стр. 43.

[4] В котором имеется лишь конечное число $x_j \neq 0$.

[5] В этой строке допускается бесконечно много ненулевых y_i, однако в каждом столбце матрицы Φ имеется только конечное число ненулевых элементов.

Теорема 3.4 (эквивалентность Мориты)
Следующие три свойства колец R и S с единицами эквивалентны друг другу:

(1) категории $\mathcal{M}od\text{-}R$ и $\mathcal{M}od\text{-}S$ точно эквивалентны

(2) $R \simeq \mathrm{Hom}_S(P,P)$ для некоторого конечно порождённого проективного S-модуля P, являющегося генератором категории $\mathcal{M}od\text{-}S$

(3) существует такой R-S бимодуль T, что тензорное умножение $\mathcal{M}od\text{-}R \to \mathcal{M}od\text{-}S$, $M \mapsto M \otimes_R T$, является точной эквивалентностью категорий.

Доказательство. Ясно, что (3) влечёт (1). Если выполнено (1), то эквивалентность $\mathcal{M}od\text{-}R \simeq \mathcal{M}od\text{-}S$ переводит R в S-модуль P, являющийся компактным проективным генератором категории $\mathcal{M}od\text{-}S$ и имеющий $\mathrm{Hom}_S(P,P) \simeq \mathrm{Hom}_R(R,R) = R$, что даёт (2), так как компактный модуль конечно порождён. Если выполнено (2), возьмём в качестве T удовлетворяющий условию (2) компактный проективный генератор P категории $\mathcal{M}od\text{-}S$, снабдив его канонической структурой левого модуля над $R = \mathrm{End}_S(P)$. Функтор $M \mapsto M \otimes_R P$ сопряжён слева функтору[1] $h^P : N \mapsto \mathrm{Hom}_S(P,N)$, который по теор. 3.3 задаёт эквивалентность категорий $\mathcal{M}od\text{-}S \simeq \mathcal{M}od\text{-}R$. Как мы заметили в прим. 2.4 на стр. 23, функтор $M \mapsto M \otimes_R P$ тоже должен быть эквивалентностью категорий, квазиобратной к функтору h^P. Это даёт (3). □

Определение 3.4 (эквивалентность Мориты)
Кольца R и S, удовлетворяющие условиям теор. 3.4, называются *Морита-эквивалентными*, а функторы $M \mapsto M \otimes_R P$ и $N \mapsto \mathrm{Hom}(P,N)$ называются *эквивалентностями Мориты*. Из доказательства теор. 3.4 вытекает, что они квазиобратны друг другу.

Упражнение 3.27. Покажите, что категория R-модулей точно эквивалентна категории модулей над кольцом матриц $\mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$ любого конечного размера.

Теорема 3.5 (слабая теорема о вложении)
Если абелева категория $\mathcal{B}$ козамкнута и имеет проективный генератор[2], то любая её малая полная точная[3] абелева подкатегория $\mathcal{A}$ допускает точное вполне строгое вложение в категорию правых модулей над некоторым кольцом с единицей.

Доказательство. Обозначим через P проективный генератор категории $\mathcal{B}$ и положим $Q \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{X\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}} \mathrm{Hom}(P,X) \otimes P$ (прямая сумма одинаковых копий генератора P, по одной копии для каждой стрелки, ведущей из P в подкатегории $\mathcal{A}$).

Упражнение 3.28. Убедитесь, что прямая сумма проективных генераторов также является проективным генератором.

Тогда для каждого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ существует сюрьективный морфизм $Q \twoheadrightarrow X$. Положим $R = \mathrm{End}_{\mathcal{B}}(Q)$ и как в доказательстве теор. 3.3 рассмотрим точный строгий функтор $h^Q : \mathcal{A} \to \mathcal{M}od\text{-}R$, $X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Q,X)$. Покажем, что он полон, т. е. для любых $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ каждая стрелка $\varphi : h^Q(X) \to h^Q(Y)$ в категории $\mathcal{M}od\text{-}R$ представляет собою

[1] См. предл. 2.3 на стр. 24.
[2] Не обязательно компактный!
[3] Т. е. такая, что точные тройки из $\mathcal{A}$ точны и в $\mathcal{B}$.

левое умножение $\psi_* : \vartheta \mapsto \psi\vartheta$ на некоторую стрелку $\psi : X \to Y$ из категории $\mathcal{A}$. Для этого зафиксируем какие-нибудь сюрьекции $\pi : Q \twoheadrightarrow Y$, $\tau : Q \twoheadrightarrow X$ и дополним вторую из них ядром $K = \ker\tau$ до точной тройки $0 \longrightarrow K \xrightarrow{\varkappa} Q \xrightarrow{\tau} X \longrightarrow 0$. После применения точного функтора h^Q имеем такую диаграмму R-модулей:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & h^Q(K) \arrow[r, "\varkappa_*"] & R \arrow[r, "\eta_*"] & h^Q(X) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\ & & R \arrow[r, "\pi_*"] & h^Q(Y) \arrow[r] & 0\,. \end{tikzcd} \tag{3-17}$$

Зафиксируем какой-нибудь элемент $\zeta \in R = \mathrm{End}(Q)$, переводимый эпиморфизмом π_* в элемент $\varphi\eta_*(\mathrm{Id}_Q) \in h^Q(Y)$. Левое умножение на ζ достраивает диаграмму (3-17) до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} h^Q(K) \arrow[r, "\varkappa_*"] & R \arrow[r, "\eta_*"] \arrow[d, "\zeta_*"'] & h^Q(X) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\ & R \arrow[r, "\pi_*"] & h^Q(Y) \arrow[r] & 0\,, \end{tikzcd} \tag{3-18}$$

По построению, вся эта диаграмма, за исключением стрелки φ, является результатом применения функтора h^Q к диаграмме

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\varkappa"] & Q \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\zeta"'] & X \arrow[r] & 0 \\ & & Q \arrow[r, "\pi"] & Y \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{3-19}$$

в категории $\mathcal{A}$. В силу строгости функтора h^Q композиция $\pi\zeta\varkappa : K \to Y$ нулевая, ибо h^Q-образ этого зигзага на диаграмме (3-18) нулевой. Поэтому в точной последовательности абелевых групп

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y) \xrightarrow{\eta^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q,Y) \xrightarrow{\varkappa^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(K,Y)\,,$$

полученной применением точного слева функтора h_Y к верхней строке из (3-19), выполняется равенство $\varkappa^*(\pi\zeta) = 0$, а значит, существует единственная такая стрелка $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)$, что $\psi\eta = \pi\zeta$. Она дополняет (3-19) до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\varkappa"] & Q \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\zeta"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & 0 \\ & & Q \arrow[r, "\pi"] & Y \arrow[r] & 0\,. \end{tikzcd}$$

Результат применения к этой стрелке функтора h^Q обязан совпасть со стрелкой φ на диаграмме (3-18), поскольку создать коммутативный квадрат в правой части

$$\begin{tikzcd} h^Q(K) \arrow[r, "\varkappa_*"] & R \arrow[r, "\eta_*"] \arrow[d, "\zeta_*"'] & h^Q(X) \arrow[r] & 0 \\ & R \arrow[r, "\pi_*"] & h^Q(Y) \arrow[r] & 0\,, \end{tikzcd}$$

как и на диаграмме (3-19), можно ровно одной стрелкой $h^Q(X) \to h^Q(Y)$. Это, как и выше, вытекает из точной последовательности абелевых групп

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(h^Q(X), h^Q(Y)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R, h^Q(Y)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(h^Q(K), h^Q(Y)),$$

полученной применением точного слева функтора $\mathrm{Hom}_R(*, h^Q(Y))$ к верхней строке диаграммы. $\Box$

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 3.1. Всё вытекает из дистрибутивности: $\varphi\alpha = \varphi\beta \iff \varphi(\alpha - \beta) = 0$.

Упр. 3.3. Морфизмы $\nabla_Y : Y \oplus Y \to Y$, $\varphi \oplus \psi : X \oplus X \to Y \oplus Y$ и $\Delta_X : X \to X \oplus X$ задаются матрицами

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_Y \\ \mathrm{Id}_Y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_X & \mathrm{Id}_X \end{pmatrix},$$

произведение которых равно 1×1-матрице $(\varphi + \psi)$.

Упр. 3.4. Инъективность ι_ν и сюрьективность π_ν вытекает из равенства $\pi_\nu\iota_\nu = \mathrm{Id}_{X_\nu}$. Инъективность σ редуцируется к инъективности морфизма $X \oplus Y \to X \oplus Y$ между суммами *двух* объектов при помощи леммы Цорна: рассмотрите чум таких подмножеств $S \subset N$, что отображение $\coprod_{\nu \in S} X_\nu \to \prod_{\nu \in S} X_\nu$ инъективно.

Упр. 3.8. Ядро задаёт правый сопряжённый функтор к функтору $\mathcal{A} \to \mathcal{A}r$, $X \mapsto \{X \to 0\}$, а коядро — левый сопряжённый функтор к функтору $\mathcal{A} \to \mathcal{A}r$, $X \mapsto \{X \to 0\}$.

Упр. 3.9. Коядро является фактором по *замыканию* образа. Вложение дискретной группы $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$ со стандартной топологией и плотные обмотки торов мономорфны и эпиморфны, но не обратимы.

Упр. 3.10. Если φ обратим, то он не делит нуль ни справа, ни слева, откуда $\ker\varphi = 0$ и $\operatorname{coker}\varphi = 0$. Если $\ker\varphi = 0$ и $\operatorname{coker}\varphi = 0$, то по **??** диаграмма (3-6) приобретает вид

$$\begin{tikzcd} 0 & Y \arrow[l] & Y \arrow[l, "\mathrm{Id}_Y"'] \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\mathrm{Id}_X"] & X \arrow[u, "\overline{\varphi}"'] \end{tikzcd},$$

и обратимость $\overline{\varphi}$ влечёт обратимость φ. Если φ мономорфен или эпиморфен, его каноническое разложение (3-6) имеет, соответственно, вид

$$\begin{tikzcd} \operatorname{coker}\varphi & Y \arrow[l, "\varsigma"'] & \ker\varsigma \arrow[l, "\varkappa'"'] \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, equal, "\mathrm{Id}_X"] & X \arrow[u, "\overline{\varphi}"'] \end{tikzcd} \quad \text{или} \quad \begin{tikzcd} 0 & Y \arrow[l] \arrow[r, equal, "\mathrm{Id}_Y"] & Y \\ \ker\varphi \arrow[r, "\varkappa"] & X \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\varsigma'"] & \operatorname{coker}\varkappa \arrow[u, "\overline{\varphi}"'] \end{tikzcd},$$

и $\overline{\varphi}$ задаёт канонические изоморфизмы $X \xrightarrow{\sim} \ker\varsigma$ и $\operatorname{coker}\varkappa \xrightarrow{\sim} Y$.

Упр. 3.11. β' и φ выражаются друг через друга как $\beta' = \pi_A\varphi$ и $\varphi = \iota_A\beta' + \iota_B\beta$. Симметрично, α' и φ^{-1} связаны формулами $\alpha' = \varphi^{-1}\iota_B$ и $\varphi^{-1} = \alpha\pi_A + \alpha'\pi_B$ (убедитесь, что и φ, и φ^{-1} в обоих случаях обратимы!). Точная тройка абелевых групп

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{z \mapsto 2z} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(2) \to 0$$

нерасщепима, т. к. $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(2), \mathbb{Z}) = 0$.

Упр. 3.12. Если функтор F сохраняет точность троек, то он переводит каноническое разложение (3-7) любого морфизма φ в каноническое разложение морфизма $F(\varphi)$, в частности — переводит $\operatorname{im}\varphi$ в $\operatorname{im}\big(F(\varphi)\big)$.

Упр. 3.18. $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}//\mathbb{Z}$ очевидно удовлетворяют условиям лем. 3.2 на стр. 54. Гомоморфизм $\varphi : A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ с $\varphi(a) \neq 0$ сначала строится на порождённом элементом a подмодуле $\mathbb{Z} \cdot a$ (изоморфном либо $\mathbb{Z}$ либо $\mathbb{Z}/(n)$), а потом по инъективности продолжается на весь модуль A.

Упр. 3.19. Согласно предл. 3.3 на стр. 49 все четыре стрелки в декартовом квадрате

$$\begin{tikzcd} A \times_M B \arrow[r, hook, "\alpha'"] \arrow[d, hook, "\beta'"'] & B \arrow[d, hook, "\beta"'] & K \arrow[l, hook', "\varkappa"'] \\ A \arrow[r, hook, "\alpha"] & M \arrow[r, two heads, "\pi"] & M/A \end{tikzcd}$$

инъективны. Всякий подобъект $\varkappa : K \hookrightarrow B$, для которого $\pi\beta\varkappa = 0$ допускает такое вложение $\varkappa' : K \hookrightarrow B = \ker \pi$, что $\alpha\varkappa' = \beta\varkappa'$. Поэтому он вкладывается и в $A \times_M B$.

Упр. 3.20. Подобъекты любого объекта X инъективно вкладываются в множество подгрупп группы $h^P(X) = \mathrm{Hom}(P, X)$.

Упр. 3.21. Для любого $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ функтор $h_Y : Z \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Z, Y)$ переведёт точную последовательность $\mathrm{Hom}(G, X) \otimes G \xrightarrow{c} X \to \mathrm{coker}\, c \to 0$ в точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathrm{coker}\, c, Y) to \mathrm{Hom}(X, Y) \xrightarrow{c^*} \mathrm{Hom}(G, Y)^{\mathrm{Hom}(G,X)},$$

в которой c^* сопоставляет стрелке $\varphi : X \to Y$ график функции

$$h^G(\varphi) = \varphi^* : \mathrm{Hom}(G, X) \to \mathrm{Hom}(G, Y), \quad \psi \mapsto \varphi\psi .$$

Инъективность c^* равносильна инъективности $h^G : \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(h^G(X), h^G(Y))$. Если $\mathrm{coker}\, c = 0$, отображение c^* инъективно и h^G строг. Наоборот, если h^G строг, то $\mathrm{Hom}(\mathrm{coker}\, c, Y) = 0$ для всех Y, и беря $Y = \mathrm{coker}\, c$, заключаем, что $Y = 0$.

Упр. 3.22. Воспользуйтесь функториальным по X изоморфизмом $\mathrm{Hom}_R\big(X, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\big) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(X \otimes_{\mathbb{Z}} R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\big)$.

Упр. 3.23. Если обе стрелки в $A \hookrightarrow B \hookrightarrow C$ являются существенными расширениями, то для любого подобъекта $S \hookrightarrow C$ сквозное отображение $\beta : B \hookrightarrow C \twoheadrightarrow C/S$ имеет ненулевое ядро K, и сквозное отображение $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow B/K$ имеет ненулевое ядро. Поэтому композиция $A \to B/K = \mathrm{im}\,\beta \to C/S$ тоже имеет ненулевое ядро.

Упр. 3.24. Для любого подобъекта $N \hookrightarrow E_\omega$ в силу гротендиковости имеем $N \simeq N \times_{E_\omega} E_\omega \simeq N \times_{E_\omega} \mathrm{colim}_{\nu<\omega} E_\nu \simeq \mathrm{colim}_{\nu<\omega} N \times_{E_\omega} E_\nu$. Поэтому найдётся такой η, что $N \times_{E_\omega} E_\eta \neq 0$, и стало быть, N имеет непустое пересечение со всеми E_τ с $\tau \geqslant \eta$. Так как расширение $X \hookrightarrow E_\eta$ и все расширения $E_\nu \hookrightarrow E_\eta$ с $\nu < \eta$ существенны, то и X, и все E_ν имеют непустое пересечение с ненулевым подобъектом $N \times_{E_\omega} E_\eta \hookrightarrow E_\eta$, а значит и с N, поскольку каноническая стрелка $N \times_{E_\omega} E_\eta \hookrightarrow N$ тоже инъективна.

Упр. 3.25. Для конечной диаграммы компактных объектов $K_\varkappa$ и любой фильтрованной диаграммы X_ν имеем

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{colim}\, K_\varkappa, \mathrm{colim}\, X_\nu) = \lim \mathrm{Hom}(K_k, \mathrm{colim}\, X_\nu) = \lim_{\varkappa} \mathrm{colim}_{\nu} \mathrm{Hom}(X_\varkappa, X_\nu) =$$
$$= \mathrm{colim}_{\nu} \lim_{\varkappa} \mathrm{Hom}(X_\varkappa, X_\nu) = \mathrm{colim}_{\nu} \mathrm{Hom}(\mathrm{colim}\, X_\varkappa, X_\nu)$$

(в третьем равенстве мы воспользовались предл. 2.9 на стр. 39).

Упр. 3.26. Поскольку всякий эпиморфизм $\pi : R^m \twoheadrightarrow P$ расщепляется, $\ker \pi$ является прямым слагаемым в R^m. Поэтому имеется сюрьекция $R^m \twoheadrightarrow \ker \pi$.