§2. Сопряжённые функторы и (ко)пределы

2.1. Сопряжённые функторы. Функторы $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ между категориями $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ называются, соответственно, *левым* и *правым сопряжёнными* друг другу, если имеется функториальная по $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ и $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ биекция

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)). \tag{2-1}$$

С каждой парой сопряжённых функторов связаны естественные преобразования

$$t : F \circ G \to \operatorname{Id}_{\mathcal{D}} \quad \text{и} \quad s : \operatorname{Id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F. \tag{2-2}$$

Стрелка $t_Y : FG(Y) \to Y$, задающая действие преобразования t над $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$, является образом элемента $\operatorname{Id}_{G(Y)}$ при изоморфизме (2-1), написанном для $X = G(Y)$:

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(FG(Y), Y) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(G(Y), G(Y)) \ni \operatorname{Id}_{G(Y)}.$$

Двойственным образом, стрелка $s_X : X \to GF(X)$ получается из $\operatorname{Id}_{F(X)}$ при изоморфизме (2-1), написанном для $Y = F(X)$:

$$\operatorname{Id}_{F(X)} \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(X)) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GF(X)).$$

Упражнение 2.1. Убедитесь в естественности этих преобразований.

Пример 2.1 (продолжение прим. 1.16 про свободные модули)
Изоморфизм из форм. (1-15) на стр. 18 означает, что функтор

$$F : \mathcal{S}et \to R\text{-}\mathcal{M}od, \quad E \mapsto R \otimes E,$$

сопоставляющий произвольному множеству E свободный левый R-модуль с базисом E, сопряжён слева к забывающему функтору $G : R\text{-}\mathcal{M}od \to \mathcal{S}et$, переводящему модуль в множество его элементов, т. е. $\operatorname{Hom}_{R\text{-}\mathcal{M}od}(R \otimes E, M) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{S}et}\big(E, G(M)\big)$ функториально по модулю M и множеству E. Естественное преобразование

$$s_E : E \hookrightarrow G(A \otimes E)$$

вкладывает E в качестве множества базисных векторов в множество всех векторов свободного модуля $R \otimes E$. Естественное преобразование

$$t_M : R \otimes G(M) \twoheadrightarrow M$$

это R-линейный эпиморфизм огромного свободного модуля, базисом которого служит множество всех векторов модуля M, на модуль M. Он переводит каждый базисный вектор m в элемент $m \in M$, а формальную линейную комбинацию базисных векторов — в результат её вычисления внутри модуля M. Так, при $M = R = \mathbb{R}$ векторное пространство $\mathbb{R} \otimes G(\mathbb{R})$ состоит из формальных линейных комбинаций $\sum_{x \in \mathbb{R}} f(x) \cdot x$, в которых лишь конечное множество коэффициентов $f(x)$ отлично от нуля. Оно изоморфно пространству всех функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с конечным носителем, и преобразование $t_{\mathbb{R}}$ сопоставляет такой функции f вещественное число $\sum_{x \in \mathbb{R}} f(x) \cdot x$.

Пример 2.2 (самосопряжённость представимых функторов на категории $\mathcal{Ab}$)
Для любых трёх абелевых групп A, B, C имеется канонический изоморфизм

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{Ab}}\big(A, \operatorname{Hom}_{\mathcal{Ab}}(B, C)\big) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{Ab}}\big(B, \operatorname{Hom}_{\mathcal{Ab}}(A, C)\big)\,, \tag{2-3}$$

переводящий семейство гомоморфизмов $\varphi_a : B \to C$, запараметризованное элементами $a \in A$ так, что $\varphi_{a'+a''} = \varphi_{a'} + \varphi_{a''}$ для всех $a', a'' \in A$, в запараметризованное элементами $b \in B$ семейство гомоморфизмов $\psi_b : A \to C$, $a \mapsto \varphi_a(b)$.

Упражнение 2.2. Проверьте, что каждое отображение ψ_b является гомоморфизмом абелевых групп и что $\psi_{b'+b''} = \psi_{b'} + \psi_{b''}$ для всех $b', b'' \in B$. Постройте обратное отображение из правой части (2-3) в левую.

Изоморфизм (2-3) можно переписать как $\operatorname{Hom}_{\mathcal{Ab}^{\mathrm{opp}}}\big(h_C(B), A\big) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{Ab}}\big(B, h_C(A)\big)$. Это означает, что для любой абелевой группы C представимый функтор

$$h_C : \mathcal{Ab}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{Ab}\,, \quad X \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{Ab}}(X, C)\,,$$

самосопряжён. Естественное преобразование $s_X : X \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{Ab}}\big(\operatorname{Hom}_{\mathcal{Ab}}(X, C), C\big)$ сопоставляют элементу $x \in X$ гомоморфизм вычисления

$$s_X(x) = \mathrm{ev}_x : \ \operatorname{Hom}(X, C) \to C\,, \quad \varphi \mapsto \varphi(x)\,.$$

Естественное преобразование t_X представляет собою стрелку $h_C\big(h_C(X)\big) \to X$ в категории $\mathcal{Ab}^{\mathrm{opp}}$, т. е. стрелку $X \to h_C\big(h_C(X)\big)$ в категории $\mathcal{Ab}$, и в таком виде совпадает с преобразованием s_X.

Предложение 2.1
Для существования левого сопряжённого функтора $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ к данному функтору $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ функтор

$$h^X_G : \mathcal{D} \to \mathcal{S}et\,, \quad Y \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X, G(Y)\big)\,, \tag{2-4}$$

был копредставим, и в этом случае $F(X)$ является его копредставляющим объектом.

Доказательство. Необходимость очевидна из определений. Докажем достаточность. Пусть для каждого $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ функтор (2-4) представляется объектом $F(X)$, т. е. имеется естественный изоморфизм функторов $f^X : h^{F(X)} \simeq h^X_G$. Чтобы продолжить соответствие $X \mapsto F(X)$ до функтора $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ заметим, что морфизм $\varphi : X_1 \to X_2$ задаёт естественное преобразование $\varphi^* : h^{X_2}_G \to h^{X_1}_G$ заключающееся в правом умножении на φ: стрелка $\psi : X_2 \to G(Y)$ переходит в $\psi\varphi : X_1 \to G(Y)$. Из леммы Ионеды вытекает[1], что композиция естественных преобразований $\big(f^{X_1}\big)^{-1} \circ \varphi^* \circ f^{X_2} : h^{F(X_2)} \to h^{F(X_1)}$ задаётся правым умножением на единственную стрелку $F(X_1) \to F(X_2)$, которую мы и объявим образом $F(\varphi)$ стрелки φ под действием функтора F. Прямо по построению мы получаем функториальный по X изоморфизм $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$. □

[1] См. сл. 1.1 на стр. 15.

Следствие 2.1 (из доказательства предл. 2.1)
Если функтор F, сопряжённый слева к функтору G, существует, то он определяется по G однозначно с точностью до естественного изоморфизма функторов. $\square$

Упражнение 2.3. Докажите двойственные утверждения: для существования правого сопряжённого функтора G к функтору $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ предпучок $h_Y^F : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, $X \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y)$ был представим, и в этом случае объект $G(Y)$ его представляет, а функтор G определяется по F однозначно с точностью до естественного изоморфизма функторов.

Предложение 2.2
Функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ тогда и только тогда сопряжён слева к функтору $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, когда существуют такие естественные преобразования $t : F \circ G \to \operatorname{Id}_{\mathcal{D}}$ и $s : \operatorname{Id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F$, что композиции $F \xrightarrow{F \circ s} FGF \xrightarrow{t \circ F} F$ и $G \xrightarrow{s \circ G} GFG \xrightarrow{G \circ t} G$ являются тождественными эндоморфизмами функторов F и G.

Доказательство. Если имеются функториальные по X и Y изоморфизмы

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(X), Y\big) \arrow[rr, bend left, "\varrho"] & & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X, G(Y)\big) \arrow[ll, bend left, "\lambda"] \end{tikzcd} \tag{2-5}$$

то для любой стрелки $\varphi : X_1 \to X_2$ в $\mathcal{C}$ и любого Y из $\mathcal{D}$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X_1), Y) & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, G(Y)) \arrow[l, "\lambda"', "\sim"] \\ \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X_2), Y) \arrow[u, "F(\varphi)^*"'] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_2, G(Y)) \arrow[l, "\lambda"', "\sim"] \arrow[u, "\varphi^*"'] \end{tikzcd}$$

вертикальные стрелки которой задаются правым умножением на $F(\varphi)$ и на φ соответственно. Рисуя это для $Y = F(X)$ и морфизма $\varphi = s_X : X \to GF(X)$, который задаёт действие над объектом X естественного преобразования $s : \operatorname{Id}_{\mathcal{C}} \to GF$ из форм. (2-2) на стр. 19, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(X)) & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GF(X)) \arrow[l, "\lambda"', "\sim"] \\ \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(FGF(X), F(X)) \arrow[u, "F(s_X)^*"'] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(GF(X), GF(X)) \arrow[l, "\lambda"', "\sim"] \arrow[u, "s_X^*"'] \end{tikzcd}$$

верхняя стрелка λ которой переводит s_X в $\operatorname{Id}_{F(X)}$, а нижняя стрелка λ переводит $\operatorname{Id}_{GF(X)}$ в морфизм $t_{F(X)} : FGF(X) \to F(X)$, задающий действие второго естественного преобразования $t : FG \to \operatorname{Id}_{\mathcal{D}}$ из формулы (2-2) над объектом $F(X)$. Таким образом,

$$\operatorname{Id}_{F(X)} = \lambda(s_X) = \lambda s_X^* \left(\operatorname{Id}_{GF(X)}\right) = F(s_X)^* \lambda \left(\operatorname{Id}_{GF(X)}\right) = F(s_X)^* \left(t_{F(X)}\right) = t_{F(X)} \circ F(s_X),$$

а это и значит, что композиция $F \xrightarrow{F \circ s} FGF \xrightarrow{t \circ F} F$ задаёт тождественное преобразование функтора F. Проверка того, что $G \xrightarrow{s \circ G} GFG \xrightarrow{G \circ t} G$ совпадает с Id_G полностью симметрична. Наоборот, если имеются преобразования $s : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to GF$ и $t : FG \to \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$, зададим в (2-5) действие λ и ϱ на стрелки $\varphi : F(X) \to Y$ и $\psi : X \to G(Y)$ правилами:

$$\varrho(\varphi) = G(\varphi) \circ s_X \quad \text{и} \quad \lambda(\psi) = t_Y \circ F(\psi),$$

в правых частях которых стоят сквозные отображения вдоль стрелок

$$X \xrightarrow{s_X} GF(X) \xrightarrow{G(\varphi)} G(Y) \quad \text{и} \quad F(X) \xrightarrow{F(\psi)} FG(Y) \xrightarrow{t_Y} Y \ .$$

Композиция $\lambda\varrho(\varphi) = t_Y \circ FG(\varphi) \circ F(s_X) : F(X) \to Y$ представляет собою путь из левого нижнего угла в правый верхний на диаграмме

$$\begin{tikzcd}
& F(X) \arrow[rr, "\varphi"] & & Y \\
F(X) \arrow[ur, equal, "\mathrm{Id}_{F(X)}"] \arrow[rr, "F(s_X)"'] & & FGF(X) \arrow[ul, "t_{F(X)}"'] \arrow[rr, "FG(\varphi)"'] & & FG(Y) \arrow[ul, "t_Y"']
\end{tikzcd}$$

правый параллелограмм которой коммутативен в силу естественности преобразования t, а левый треугольник — в силу равенства $F \xrightarrow{F\circ s} FGF \xrightarrow{t\circ F} F$ и Id_F. Поэтому $\lambda\varrho(\varphi) = \varphi$. Равенство $\varrho\lambda(\psi) = \psi$ проверяется симметричным образом. □

Пример 2.3 (соответствие предпорядков, продолжение прим. 1.2 на стр. 4) Функтор $F : N \to M$ между предупорядоченными множествами, рассматриваемыми как категории, это просто отображение, сохраняющее предпорядок: $n_1 \leqslant n_2 \Rightarrow F(n_1) \leqslant F(n_2)$. Левая сопряжённость такого отображения сохраняющему порядок отображению $G : M \to N$ означает, что неравенства $F(n) \leqslant m$ и $n \leqslant G(m)$ равносильны друг другу. Наличие естественных преобразований $t : F \circ G \to \mathrm{Id}_M$ и $s : \mathrm{Id}_N \to G \circ F$ означает неравенства[1] $FG(m) \leqslant m$ и $n \leqslant GF(n)$ для всех $n \in N$, $m \in M$, а тождественность сквозных преобразований $F \to FGF \to F$ и $G \to GFG \to G$ — неравенства $F(n) \leqslant FGF(n) \leqslant F(n)$ и $G(m) \leqslant GFG(m) \leqslant G(m)$.

Упражнение 2.4. Убедитесь непосредственно, что условие $F(n) \leqslant m \iff n \leqslant G(m)$ на сохраняющие предпорядок отображения F, G эквивалентно системе неравенств $F(G(m)) \leqslant m$ и $n \leqslant GF(n)$ для всех $m \in M$, $n \in N$, причём если эти неравенства выполнены, то неравенства $F(n) \leqslant FGF(n) \leqslant F(n)$ и $G(m) \leqslant GFG(m) \leqslant G(m)$ выполняются автоматически.

Если оба предпорядка являются частичными порядками, последние два неравенства превращаются в равенства $F(n) = FGF(n)$ и $G(m) = GFG(m)$. Примером такой ситуации является *соответствие Галуа*: пусть группа H действует слева на множестве X, $\mathcal{S}(H)$ и $\mathcal{S}(X)$ обозначают частично упорядоченные по включению множества подгрупп в H и подмножеств X соответственно, функтор

$$F : \mathcal{S}(H) \to \mathcal{S}(X)^{\mathrm{opp}}, \quad S \mapsto X^S = \{x \in X \mid \forall h \in S\ hx = x\}$$

сопоставляет подгруппе $S \subset G$ множество её неподвижных точек, а функтор

$$G : \mathcal{S}(X)^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}(H), \quad T \mapsto Z_T = \{h \in H \mid \forall x \in T\ hx = x\}$$

[1] Которые задают «действие» этих естественных преобразований над объектами m и n.

сопоставляет подмножеству $T \subset X$ его *централизатор*[1].

Упражнение 2.5. Убедитесь, что эти функторы сопряжены: $X^S \supset T \iff S \subset Z(T)$, и что $Z_{X^{Z_T}} = Z_T$ и $X^{Z_{X^S}} = X^S$ для любых подмножества $T \subset X$ и подгруппы $S \subset H$.

Пример 2.4 (эквивалентности категорий как сопряжённые функторы)
Пусть функторы $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ являются квазиобратными эквивалентностями[2], т. е. имеются естественные изоморфизмы $g : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} GF$ и $f : \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \xrightarrow{\sim} FG$. Как и в доказательстве предл. 2.2, рассмотрим естественные по X, Y отображения

$$\begin{aligned} \varrho_{FG} :\ & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(X), Y\big) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X, G(Y)\big), \quad \varphi \mapsto G(\varphi) \circ g_X = (g_X^* \circ G)\varphi \\ \varrho_{GF} :\ & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(G(Y), X\big) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(Y, F(X)\big), \quad \psi \mapsto F(\psi) \circ f_Y = (f_Y^* \circ F)\psi\,. \end{aligned}$$

Поскольку оба отображения

$$\begin{aligned} g_X^* :\ & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(GF(X), G(Y)\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X, G(Y)\big), \quad \xi \mapsto \xi \circ f_X\,, \\ G :\ & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(X), Y\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(GF(X), G(Y)\big), \quad \xi \mapsto G(\xi)\,, \end{aligned}$$

являются биективными[3], их композиция ϱ_{FG} тоже биективна. Это означает, что функтор F сопряжён слева к функтору G. По аналогичной причине биективно и преобразование ϱ_{GF}, т. е. функтор F сопряжён к функтору G также и справа. Тем самым, квазиобратные эквивалентности категорий сопряжены друг другу с обеих сторон. Отметим, что по сл. 2.1 и упр. 2.3 на стр. 21 отсюда вытекает, что если один из двух сопряжённых друг другу функторов является эквивалентностью категорий, то и другой тоже таковою является.

2.2. Тензорные произведения и Hom. Пусть R — произвольное кольцо. Тензорным произведением $M \otimes_R N$ правого R-модуля M на левый R-модуль N называется фактор тензорного произведения абелевых групп[4] $M \otimes N$ по подгруппе, порождённой всевозможными разностями $(mx) \otimes n - m \otimes (xn)$, где $m \in M$, $x \in R$ и $n \in N$. Это абелева группа, на которой кольцо R, вообще говоря, больше уже не действует, но в которой выполняются соотношения $(mx) \otimes_R n = m \otimes_R (xn)$. Тензорное умножение на фиксированный левый R-модуль N задаёт функтор из категории правых R-модулей в абелевы группы

$$\mathcal{M}od\text{-}R \to \mathcal{A}b\,, \quad X \mapsto X \otimes_R N\,,$$

переводящий стрелку $\varphi : X_1 \to X_2$ в стрелку $\varphi \otimes \mathrm{Id}_N : m \otimes_R n \mapsto \varphi(m) \otimes_R n$. Если левый R-модуль N одновременно является правым модулем над ещё одним кольцом S и правое действие S коммутирует с левым действием R (такие N называются R-S *бимодулями*), функтор тензорного умножения на N отображает $\mathcal{M}od\text{-}R$ в $\mathcal{M}od\text{-}S$: кольцо S действует на $M \otimes N$ справа по правилу $(m \otimes n)y = m \otimes (ny)$. С другой стороны,

[1] Т. е. поточечный стабилизатор. Обратите внимание, что оба функтора оборачивают включения.

[2] См. n° 1.3.2 на стр. 13.

[3] Первое — в силу того, что является правым умножением на обратимую стрелку g_X, второе — потому что функтор F вполне строг.

[4] Или, что то же самое, $\mathbb{Z}$-модулей.

представимый функтор $h^N\colon \mathcal{M}od\text{-}S \to \mathcal{A}b$, $Y \mapsto \mathrm{Hom}_S(N,Y)$, принимает значения в $\mathcal{M}od\text{-}R$: правое действие $x \in R$ на $\mathrm{Hom}_S(N,Y)$ переводит S-линейную справа стрелку $\varphi\colon N \to Y$ в стрелку $\varphi x\colon n \mapsto \varphi(xn)$, так что выполняется равенство $(\varphi x)n = \varphi(xn)$.

Предложение 2.3
Тензорное умножение на R-S-бимодуль N сопряжено слева функтору h^N, т. е. имеется естественный по $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}od\text{-}R$ и $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}od\text{-}S$ изоморфизм абелевых групп

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}\big(X \otimes_R N, Y\big) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}R}\big(X, \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(N,Y)\big)\,. \tag{2-6}$$

Доказательство. Отображение из левой части (2-6) в правую сопоставляет S-линейному справа гомоморфизму $\varphi\colon X \otimes_R N \to Y$ зависящее от $x \in X$ семейство гомоморфизмов $\varphi_x\colon N \to Y$, $n \mapsto \varphi(x \otimes n)$. Каждый из них S-линеен справа:

$$\varphi_x(ns) = \varphi(x \otimes_R ns) = \varphi(x \otimes_R n)s = \varphi_x(n)s\,,$$

а сопоставление $x \mapsto \varphi_x$, как отображение $X \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(N,Y)$, R-линейно справа:

$$\varphi_{xr}n = \varphi(xr \otimes_R n) = \varphi(x \otimes_R rn) = \varphi_x(rn) = (\varphi_x r)n\,.$$

Обратное отображение из правой части (2-6) в левую переводит семейство S-линейных справа гомоморфизмов $\varphi_x\colon N \to Y$, которые R-линейно справа зависят от $x \in X$, в S-линейный справа гомоморфизм $\varphi\colon x \otimes_R n \mapsto \psi_x(n)$. □

Упражнение 2.6. Явно опишите естественные преобразования

$$t_Y\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(N,Y) \otimes_R N \to Y \quad \text{и} \quad s_X\colon X \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}\big(N, X \otimes_R N\big)\,.$$

Пример 2.5 (индуцирование и коиндуцирование)
Если кольцо A содержится в кольце B и они имеют общую единицу, каждый правый B-модуль X одновременно является и правым A-модулем, что задаёт *функтор ограничения*

$$\mathrm{res}\colon \mathcal{M}od\text{-}B \to \mathcal{M}od\text{-}A\,. \tag{2-7}$$

Рассмотрим B как A-B бимодуль и положим в предл. 2.3 $S = N = B$, $R = A$. Абелева группа $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}B}(B,Y)$ канонически отождествляется с Y гомоморфизмом $\varphi \mapsto \varphi(1)$, и как правый A-модуль изоморфна $\mathrm{res}\,Y$.

Упражнение 2.7. Убедитесь в этом.

Поэтому изоморфизм (2-6) из предл. 2.3 превращается в функториальный по A-модулю X и B-модулю Y изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}B}(X \otimes_A B, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}A}(X, \mathrm{res}\,Y)\,.$$

Правый B-модуль $\mathrm{ind}\,X \overset{\text{def}}{=} X \otimes_A B$ называется *индуцированным* с A-модуля X. Таким образом, функтор индуцирования $\mathrm{ind}\colon \mathcal{M}od\text{-}A \to \mathcal{M}od\text{-}B$ сопряжён слева к функтору ограничения.

Упражнение 2.8. Явно опишите естественные преобразования

$$t_Y\colon \mathrm{res}\,\mathrm{ind}\,Y \to Y \quad \text{и} \quad s_X\colon X \to \mathrm{ind}\,\mathrm{res}\,X\,.$$

Теперь рассмотрим B как B-A бимодуль и положим в предл. 2.3 $S = A$, $N = R = B$. Канонический гомоморфизм $X \otimes_B B \xrightarrow{\sim} X$, $x \otimes_B b \mapsto xb$, является изоморфизмом абелевых групп и отождествляет правый A-модуль $X \otimes_B B$ с $\operatorname{res} X$.

Упражнение 2.9. Убедитесь в этом.

Поэтому изоморфизм (2-6) из предл. 2.3 превращается в функториальный по B-модулю X и A-модулю Y изоморфизм абелевых групп

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}A}(\operatorname{res} X, Y) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}B}\big(X, \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}A}(B, Y)\big).$$

Правый B-модуль $\operatorname{coind} Y \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}A}(B, Y)$ называется *коиндуцированным* с A-модуля Y. Таким образом, функтор коиндуцирования $\operatorname{coind} : \mathcal{M}od\text{-}A \to \mathcal{M}od\text{-}B$ сопряжён справа к функтору ограничения.

Упражнение 2.10. Явно опишите естественные преобразования

$$t_Y : \operatorname{res}\operatorname{coind} Y \to Y \quad \text{и} \quad s_X : X \to \operatorname{coind}\operatorname{res} X.$$

В ситуации, когда $A = \Bbbk[H]$ и $B = \Bbbk[G]$ являются групповыми алгебрами группы G и её подгруппы $H \subset G$ с коэффициентами в поле $\Bbbk$, мы получаем известные из начального курса алгебры функторы (ко)индуцирования линейных представлений группы G над полем $\Bbbk$ с представлений её подгруппы H.

Упражнение 2.11*. Покажите, что функторы ind, $\operatorname{coind} : \mathcal{M}od\text{-}H \to \mathcal{M}od\text{-}G$ естественно изоморфны, если индекс $[G : H]$ конечен.

Пример 2.6 (сингулярные симплексы)

Свяжем с топологическим пространством Y симплициальное множество его *сингулярных симплексов* $S(Y) : \Delta^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$, которое сопоставляет комбинаторному симплексу $[n] \in \operatorname{Ob}\Delta$ множество $S_n(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}op}(\Delta^n, Y) = h_Y(\Delta^n)$ всех непрерывных отображений правильного n-мерного симплекса $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ в Y, а неубывающему отображению $\varphi : [n] \to [m]$ — правое умножение $f \mapsto f \circ \varphi^*$ на аффинное отображение $\varphi^* : \Delta^m \to \Delta^n$, действие которого на вершины симплекса совпадает с φ. Возникающий таким образом функтор $S : \mathcal{T}op \to p\mathcal{S}h(\Delta)$ сопряжён справа функтору геометрической реализации $p\mathcal{S}h(\Delta) \to \mathcal{T}op$, $X \mapsto |X|$, из прим. 1.7 на стр. 8, т. е. имеется естественный по симплициальному множеству $X : \Delta^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$ и топологическому пространству Y изоморфизм

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}op}(|X|, Y) \simeq \operatorname{Hom}_{p\mathcal{S}h}(X, S(Y)), \tag{2-8}$$

который является категорным аналогом изоморфизма из форм. (2-6) на стр. 24. В самом деле, функтор геометрической реализации вкладывает категорию Δ в категорию $\mathcal{T}op$ в виде дизъюнктного набора $D = \bigsqcup_{n \geqslant 0} \Delta^n$ правильных симплексов всех размерностей. На пространстве D имеется левое действие стрелок φ категории Δ аффинными отображениями φ_*. Оно задаёт правое действие стрелок из Δ на множестве $S(Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}op}(D, Y)$ сингулярных симплексов топологического пространства Y. С другой стороны, каждое симплициальное множество $X : \Delta^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$ по определению снабжено правым действием стрелок категории Δ на множества $X_n = X([n])$, и геометрическая реализация $|X|$, представляющая собою фактор дизъюнктного объединения $\bigsqcup_{n\geqslant 0} X_n \times \Delta^n$ по соотношениям $(x\varphi, s) = (x, \varphi s)$, является прямым аналогом «тензорного произведения $X \otimes_\Delta D$». Таким образом, изоморфизм (2-8) имеет вид

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{Top}}\big(X \otimes_\Delta D, Y\big) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{Mod}\text{-}\Delta}\big(X, \operatorname{Hom}_{\mathcal{Top}}(D, Y)\big)\,, \tag{2-9}$$

ничем не отличающийся от изоморфизма (2-6) со стр. 24.

Упражнение 2.12. Явно постройте взаимно обратные изоморфизмы между левой и правой частями формулы (2-9) и опишите естественные преобразования[1]

$$t_Y : |S(Y)| \to Y \quad \text{и} \quad s_X : X \to S\big(|X|\big)\,.$$

2.3. Пределы диаграмм. Любую малую категорию $\mathcal{N}$ можно воспринимать как диаграмму, вершинами которой служат объекты, а стрелками — морфизмы категории $\mathcal{N}$. Функторы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ реализуют эту диаграмму в категории $\mathcal{C}$ в том смысле, что указывают объекты $X_\nu = X(\nu)$, занумерованные множеством $\operatorname{Ob}\mathcal{N}$, а также стрелки $X(\nu \to \mu) : X_\nu \to X_\mu$, занумерованные множеством $\operatorname{Mor}\mathcal{N}$. Поэтому такие функторы часто называют *диаграммами* вида $\mathcal{N}$ в категории $\mathcal{C}$. Диаграммы образуют категорию $\mathcal{Fun}(\mathcal{N}, \mathcal{C})$ с естественными преобразованиями функторов в качестве морфизмов. Каждый объект $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ задаёт *постоянную диаграмму* $\overline{Y}$, в которой все объекты $\overline{Y}_\nu = Y$, а все стрелки $\overline{Y}(\nu \to \mu) = \mathrm{Id}_Y$. Со всякой диаграммой $X \in \mathcal{Fun}(\mathcal{N}, \mathcal{C})$ связан предпучок множеств $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et\,,\ Y \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{Fun}(\mathcal{N},\mathcal{C})}(\overline{Y}, X)$. Если он представим, т. е. существует такой объект $L \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, что имеется естественный по $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ изоморфизм

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, L) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{Fun}(\mathcal{N},\mathcal{C})}(\overline{Y}, X)\,, \tag{2-10}$$

то представляющий объект L называют *пределом*[2] диаграммы X и пишут $L = \lim X$. Двойственным образом, объект $C \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, копредставляющий ассоциированный с диаграммой X ковариантный функтор $\mathcal{C} \to \mathcal{S}et\,,\ Y \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{Fun}(\mathcal{N},\mathcal{C})}(X, \overline{Y})$, называется *копределом*[3] диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ и обозначается $C = \operatorname{colim} X$. С копределом C связана функториальная по $Y \in \mathcal{C}$ биекция

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C, Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{Fun}(\mathcal{N},\mathcal{C})}(X, \overline{Y})\,. \tag{2-11}$$

Как и все (ко) представляющие объекты, (ко) пределы однозначно характеризуются своими «универсальными свойствами». Полагая $Y = L$ в формуле (2-10), мы получаем естественное преобразование $\pi : \overline{L} \to X$, соответствующее тождественному эндоморфизму Id_L и представляющее собою набор стрелок $\pi_\nu : \lim X \to X_\nu$, которые коммутируют со всеми стрелками диаграммы X и универсальны в том смысле, что для любого коммутирующего со всеми стрелками диаграммы X набора стрелок $\psi_\nu : Y \to X_\nu$,

[1] Первое является непрерывным отображением топологических пространств, второе — естественным преобразованием функторов $\Delta^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$, переводящих комбинаторный симплекс $[n]$ в множества X_n и $\operatorname{Hom}_{\mathcal{Top}}\big(\Delta^n, |X|\big)$ соответственно.

[2] Или *проективным* пределом.

[3] Или *инъективным* пределом.

выпущенных из произвольного объекта $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, существует единственный морфизм $\alpha : Y \to \lim X$, такой что $\psi_\nu = \pi_\nu \circ \alpha$ для всех ν.

Двойственным образом, в копредел $C = \operatorname{colim} X$ диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ ведёт канонический набор таких коммутирующих со всеми стрелками диаграммы X морфизмов $\iota_\nu : X_\nu \to \operatorname{colim} X$, что для любых перестановочных со всеми стрелками диаграммы X морфизмов $\psi_\nu : X_\nu \to Y$ в произвольный объект $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ существует единственный морфизм $\beta : \operatorname{colim} X_\nu \to Y$, такой что $\psi_\nu = \beta \circ \iota_\nu$ для всех ν.

Упражнение 2.13. Проверьте, что универсальные свойства задают предел и копредел однозначно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного со всеми каноническими стрелками π_ν и ι_ν соответственно.

Пример 2.7 (начальный, конечный и нулевой объекты)
Простейшая диаграмма — пустая. Её предел Fin называется *конечным*, а копредел Or — *начальным* объектами категории. Эти объекты однозначно с точностью до единственного изоморфизма определяются тем, что для любого $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ есть единственная стрелка $X \to \mathrm{Fin}$ и единственная стрелка $\mathrm{Or} \to X$.

Упражнение 2.14. Укажите начальный и конечный объекты в категориях множеств, топологических пространств, абелевых групп, всех групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным кольцом.

Если в категории имеется объект 0, являющийся одновременно и начальным, и конечным, то этот объект называется *нулевым*. Морфизм $X \to Y$ в категории с нулевым объектом называется *нулевым*, если он разлагается[1] в композицию $X \to 0 \to Y$.

Упражнение 2.15. Какие категории из упр. 2.14 обладают нулевым объектом?

Пример 2.8 (прямые (ко) произведения)
Малая категория $\mathcal{N}$ называется *дискретной*, если все её морфизмы исчерпываются тождественными морфизмами Id_ν с $\nu \in \operatorname{Ob}\mathcal{N}$. Соответствующие *дискретные диаграммы* $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ — это семейства объектов X_ν без стрелок между ними. Пределы и копределы таких диаграмм называются *прямыми произведениями* и *копроизведениями* и обозначаются, соответственно, через $\prod\limits_\nu X_\nu$ и $\coprod\limits_\nu X_\nu$. Когда индексов всего два, мы получаем прямые (ко) произведения двух объектов из прим. 1.14 и прим. 1.15 на стр. 17. Очевидная индукция показывает, что для существования всех конечных прямых (ко) произведений достаточно существования прямых (ко) произведений любых двух объектов.

Пример 2.9 ((ко) уравнители)
(Ко)предел диаграммы вида $X \overset{\varphi}{\underset{\psi}{\rightrightarrows}} Y$ называется (*ко*)*уравнителем*[2] стрелок φ и ψ. В категории множеств уравнитель представляет собою множество решений уравнения $\varphi(x) = \psi(x)$ на $x \in X$ или, более научно, прообраз диагонали $\Delta_Y \subset Y \times Y$ при каноническом отображении $\varphi \times \psi : X \to Y \times Y$. Коуравнитель является фактором множества Y

[1] Обратите внимание, что если такое разложение существует, то оно единственно.
[2] По-английски *(co)equalizer*.

по наименьшему отношению эквивалентности[1] $R \subset Y \times Y$, содержащему образ отображения $\varphi \times \psi$, т. е. все отождествления $\varphi(x) = \psi(x)$ с $x \in X$.

Упражнение 2.16. Проверьте это и постройте (ко) уравнители любой пары стрелок в категориях топологических пространств, абелевых групп, произвольных групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным коммутативным кольцом.

Например, (ко) ядро гомоморфизма $f : A \to B$ в категории $\mathcal{Ab}$ абелевых групп это (ко) уравнитель f и нулевого морфизма. Интуитивно, уравнители позволяют задавать «подобъекты» при помощи «уравнений», а коуравнители — «фактор объекты» при помощи «соотношений».

Пример 2.10 (послойные произведения)
Предел диаграммы вида

$$X \xrightarrow{\xi} B \xleftarrow{\eta} Y$$

называется *послойным*[2] *произведением* и обозначается $X \underset{B}{\times} Y$. Он включается в коммутативный *декартов квадрат*

$$\begin{tikzcd} X \underset{B}{\times} Y \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \arrow[d, "\eta"] \\ X \arrow[r, "\xi"] & B \end{tikzcd} \tag{2-12}$$

универсальный в том смысле, что для любого коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "\varphi'"'] & Y \arrow[d, "\eta"] \\ X \arrow[r, "\xi"] & B \end{tikzcd}$$

имеется единственный такой морфизм $\varphi' \times \psi' : Z \to X \underset{B}{\times} Y$, что $\varphi' = \varphi \circ (\varphi' \times \psi')$ и $\psi' = \psi \circ (\varphi' \times \psi')$.

Упражнение 2.17. Убедитесь, что левый верхний угол диаграммы (2-12) задаётся этим универсальным свойством однозначно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с φ и ψ.

[1] Напомним, что *отношение эквивалентности* на Y это подмножество $R \subset Y \times Y$, которое *рефлексивно* (содержит диагональ Δ_Y), *симметрично* (переходит в себя при транспозиции сомножителей) и *транзитивно* (т. е. $(y_1, y_2), (y_2 . y_3) \in R \Rightarrow (y_1, y_3) \in R$). Пересечение отношений эквивалентности является отношением эквивалентности. Поэтому любое подмножество $S \subset Y \times Y$ содержится в единственном минимальном по включению отношении эквивалентности R_S, которое называется *порождённым* подмножеством S. Всякое отображение $\xi : Y \to Z$ определяет отношение эквивалентности $R_\xi = \{(y_1, y_2) \mid \xi(y_1) = \xi(y_2)\}$ на Y, причём $\xi' : Y \to Z'$ тогда и только тогда представляется в виде композиции $\xi' = \eta \circ \xi$ с некоторой стрелкой $\eta : Z \to Z'$, когда $R_\xi \subset R_{\xi'}$, т. е. когда эквивалентность, отвечающая ξ, *влечёт* эквивалентность, отвечающую ξ' (в этом случае говорят, что первая эквивалентность *тоньше* или *сильнее*, а вторая — *грубее* или *слабее*).

[2] Или *расслоенным*.

В категории множеств отображение $X \underset{B}{\times} Y \to B$ имеет в качестве слоя над произвольной точкой $b \in B$ прямое произведение слоёв $\varphi^{-1}(b) \times \psi^{-1}(b)$, отсюда и название.

Упражнение 2.18. Убедитесь, что $U \underset{X}{\times} V = U \cap V$ в категории $\mathcal{U}(X)$ открытых подмножеств топологического пространства X.

Пример 2.11 (послойные копроизведения)
Оборачивая все стрелки в предыдущем примере, назовём *послойным копроизведением* $X \otimes_B Y$ копредел диаграммы $X \xleftarrow{\xi} B \xrightarrow{\eta} Y$. Он вписывается в коммутативный *кодекартов квадрат*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\xi"'] & Y \arrow[d, "\psi"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & X \otimes_B Y \end{tikzcd} \tag{2-13}$$

универсальный в том смысле, что для любого коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\xi"'] & Y \arrow[d, "\psi'"] \\ X \arrow[r, "\varphi'"] & Z \end{tikzcd}$$

существует единственный такой морфизм $\varphi' \otimes \psi' : X \otimes_B Y \to Z$, что $\varphi' = (\varphi' \otimes \psi') \circ \varphi$ и $\psi' = (\varphi' \otimes \psi') \circ \psi$.

Упражнение 2.19. Явно опишите послойные (ко) произведения в категориях множеств, топологических пространств, абелевых групп, произвольных групп[1], коммутативных колец с единицей и модулей над коммутативным кольцом.

2.3.1. (Ко) замкнутость. Категория $\mathcal{C}$ называется *(ко) замкнутой*, если для любой малой категории $\mathcal{N}$ каждая диаграмма $\mathcal{N} \to \mathcal{C}$ имеет (ко) предел в $\mathcal{C}$. Мы будем называть категорию *полной*, если она одновременно замкнута и козамкнута.

Предложение 2.4
Для замкнутости категории $\mathcal{C}$ достаточно существования в $\mathcal{C}$ конечного объекта, прямых произведений любых множеств объектов и уравнителей любой пары стрелок с общим началом и концом, а для козамкнутости — существования в $\mathcal{C}$ начального объекта, прямых копроизведений любых множеств объектов и коуравнителей любой пары стрелок с общим началом и концом.

Доказательство. Мы построим предел произвольной диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$, копредел строится аналогично путём обращения стрелок. Надо предъявить универсальный набор мофизмов $\varphi_\nu : L \to X_\nu$, решающий уравнения $\varphi_\mu = X(\nu \to \mu) \circ \varphi_\nu$, где $\nu \to \mu$ пробегает $\mathrm{Mor}\, \mathcal{N}$. Для каждой стрелки $\nu \to \mu$ обозначим через $T_{\nu\to\mu} = X_\mu$ тот объект диаграммы X, в который ведёт эта стрелка, и образуем два произведения $A = \prod_\mu X_\mu$ и

[1]В теории групп копроизведения традиционно называются *амальгамами*.

$B = \prod_{\nu\to\mu} T_{\nu\to\mu}$. В первое из них каждый объект диаграммы X входит ровно один раз, а во второе — столько раз, сколько стрелок в нём заканчивается. Для каждой стрелки $\mu \to \nu$ имеются два отображения $A \to T_{\nu\to\mu}$: проекция $\pi_\mu : A \to X_\mu$ произведения A на μ-тый сомножитель и композиция $\varkappa_{\nu\to\mu} = X(\nu \to \mu)\circ\pi_\nu$ проекции $\pi_\nu : A \to X_\nu$ произведения A на ν-тый сомножитель со стрелкой $X(\nu \to \mu) : X_\nu \to X_\mu$ диаграммы X. По универсальному свойству произведения B эти пары отображении задают два морфизма $\pi, \varkappa : A \to B$. Их уравнитель L приходит вместе с морфизмом $\varphi : L \to A$, который представляет собою набор стрелок $\varphi_\mu = \pi_\mu \circ \varphi$, удовлетворяющих равенствам

$$\varphi_\mu = \pi_\mu \circ \varphi = \varkappa_{\nu\to\mu} \circ \varphi = X(\nu \to \mu) \circ \varphi_\nu$$

и обладающих требуемым универсальным свойством (убедитесь в этом!). □

Пример 2.12

В категории множеств $\lim X$ изоморфен подмножеству прямого произведения $\prod X_\nu$, образованному такими семействами (x_ν), $\nu \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{N}$, $x_\nu \in X_\nu$, где $x_\mu = X(\nu \to \mu)x_\nu$ для всех стрелок $\nu \to \mu$ из $\mathrm{Mor}\,\mathcal{N}$.

Упражнение 2.20. Проверьте, что $\operatorname{colim} X$ изоморфен коуравнителю диаграммы

$$\coprod\nolimits_{\nu\to\mu} S_{\nu\to\mu} \underset{\varkappa}{\overset{\iota}{\rightrightarrows}} \coprod\nolimits_\nu X_\nu\ ,$$

в которой объекты $S_{\nu\to\mu} = X_\nu$ суть начала стрелок $X(\nu \to \mu)$ диаграммы X, а морфизмы задаются семействами стрелок

$$\iota_\nu : S_{\nu\to\mu} \to \coprod_\nu X_\nu \quad \text{и} \quad \varkappa_{\nu\to\mu} = \iota_\mu \circ X(\nu \to \mu) : S_{\nu\to\mu} \to \coprod_\nu X_\nu\,.$$

В частности, убедитесь, что в категории множеств $\operatorname{colim} X$ является фактором дизъюнктного объединения $\bigsqcup_\nu X_\nu$ по наименьшему отношению эквивалентности, содержащему отождествления $x \sim X(\nu \to \mu)x$ для всех $x \in X_\nu$ и всех стрелок $\nu \to \mu$ из $\mathrm{Mor}\,\mathcal{N}$.

Замечание 2.1. Для того, чтобы в категории существовали (ко) пределы всех *конечных* диаграмм, в условиях предл. 2.4 достаточно потребовать существования (ко) произведения любых двух объектов.

Следствие 2.2

Категории множеств, топологических пространств, абелевых групп, всех групп, коммутативных колец и модулей над фиксированным кольцом полны.

Доказательство. Сделайте упр. 2.16. □

Пример 2.13 (уточнённое определение пучка)
Объединение $U = \bigcup_i U_i$ произвольного семейства $\{U_i\}_{i\in I}$ открытых множеств топологического пространства X представляет собою коуравнитель отображений

$$\coprod_{ij} U_i \cap U_j \overset{\psi_1}{\underset{\psi_2}{\rightrightarrows}} \coprod_i U_i \,,$$

являющихся копроизведениями вложений $U_i \cap U_j \hookrightarrow U_i$ и $U_i \cap U_j \hookrightarrow U_j$. Всякий предпучок $F : \mathcal{U}(X)^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{C}$ объектов любой категории $\mathcal{C}$ переводит диаграмму коуравнителя

$$\coprod_{ij} U_i \cap U_j \overset{\psi_1}{\underset{\psi_2}{\rightrightarrows}} \coprod_i U_i \xrightarrow{\ \varphi\ } U \,, \tag{2-14}$$

в следующую диаграмму в категории $\mathcal{C}$:

$$F(U) \xrightarrow{\ \varphi^*\ } \prod_i F(U_i) \overset{\psi_1^*}{\underset{\psi_2^*}{\rightrightarrows}} \prod_{ij} F(U_i \cap U_j)\,. \tag{2-15}$$

Стрелка φ^* этой диаграммы является произведением ограничений $F(U) \to F(U_i)$, а стрелки ψ_1^* и ψ_2^* — ограничений $F(U_i) \to F(U_i \cap U_j)$ и $F(U_j) \to F(U_i \cap U_j)$ соответственно. По определению, предпучок F является *пучком*, если стрелка φ является уравнителем стрелок ψ_1^* и ψ_2^*. В частности, когда множество индексов $I = \varnothing$, мы получаем в левом члене диаграммы (2-15) объект $F(\varnothing) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, а в среднем и правом членах — произведения пустых множеств объектов, т. е. пределы пустых диаграмм, канонически изоморфные конечному объекту[1] $\mathrm{Fin}_{\mathcal{C}}$ категории $\mathcal{C}$. Стрелки ψ_1^* и ψ_2^* являются в этом случае тождественными эндоморфизмами конечного объекта, и их уравнитель равен $\mathrm{Id}_{\mathrm{Fin}_{\mathcal{C}}}$. Таким образом, для любого пучка объектов произвольной категории $\mathcal{C}$ на топологическом пространстве X должно выполняться равенство $F(\varnothing) = \mathrm{Fin}_{\mathcal{C}}$. Например, для любого пучка множеств $F : \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ множество $F(\varnothing)$ состоит из одной точки, а для пучка абелевых групп $F : \mathcal{U}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{A}b$ группа $F(\varnothing) = 0$.

Предложение 2.5
Для существования конечного объекта в козамкнутой категории $\mathcal{C}$ достаточно существования такого множества объектов $S \subset \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, чтобы из любого объекта категории $\mathcal{C}$ вела хотя бы одна стрелка в хотя бы один объект из S.

Доказательство. Рассмотрим прямое копроизведение $C = \coprod_{X\in S} X$ всех объектов из S и обозначим через F коуравнитель всех его эндоморфизмов. Он приходит вместе с таким эпиморфизмом[2] $\pi : C \to F$, что $\pi\psi = \pi$ для всех $\psi \in \mathrm{End}\,C$. Рассмотрим произвольный объект $Z \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. Из него ведёт стрелка в некоторый $X \in S$. Беря её композицию с канонической стрелкой $X \to C$ и проекцией $C \to F$, получаем стрелку $Z \to F$.

[1]Тем самым, для того чтобы предпучок F был пучком, необходимо, чтобы в категории $\mathcal{C}$ был конечный объект (см. прим. 2.7 на стр. 27).

[2]Ибо из универсального свойства коуравнителя равенство $\varphi_1\pi = \varphi_2\pi$ возможно только при $\varphi_1 = \varphi_2$.

Пусть имеются две стрелки $\alpha, \beta : Z \to F$ с коуравнителем $\varkappa : F \to Q$. Рассмотрим какую-нибудь стрелку[1] $\gamma : Q \to C$. В диаграмме

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & F \arrow[r, "\varkappa"] & Q \arrow[dl, "\gamma"] \\
& C \arrow[u, "\pi"'] &
\end{tikzcd}
$$

композиция $\gamma\varkappa\pi \in \operatorname{End} C$ удовлетворяет равенству $\pi\gamma\varkappa\pi = \pi$. Сокращая справа на эпиморфизм π, заключаем, что $\pi\gamma\varkappa = \mathrm{Id}_F$. Умножая обе части равенства $\varkappa\alpha = \varkappa\beta$ слева на $\pi\gamma$, получаем $\alpha = \beta$. □

Упражнение 2.21. Докажите двойственный критерий существования начального объекта в замкнутой категории.

Пример 2.14 (козамкнутая категория без конечного объекта)
Классы изоморфных вполне упорядоченных множеств образуют *категорию ординалов* $\mathcal{O}rd$, морфизмами в которой являются включения меньшего ординала в больший в качестве начального интервала. Эта категория козамкнута: начальным объектом служит $\varnothing$, коуравнителем и копроизведением любого множества ординалов является их точная верхняя грань — класс объединения, взятого в любом большем ординале, содержащем все ординалы из рассматриваемого множества в качестве начальных интервалов. Однако ординала, содержащего все ординалы, нет.

2.3.2. Фильтрующиеся диаграммы. Малая категория $\mathcal{F}$ называется *фильтрующейся*, если из любых двух её объектов выходят стрелки с общим концом и для любых двух стрелок φ, ψ с общими началом и концом из их конца ведёт такая стрелка ζ, что $\zeta\varphi = \zeta\psi$. Например, любой чум, в котором у каждых двух элементов есть общая верхняя грань, является фильтрующейся категорией[2]. Диаграммы вида $\mathcal{F} \to \mathcal{C}$ и $\mathcal{F}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{C}$ с фильтрующейся категорией $\mathcal{F}$ принято называть, соответственно, *индуктивными* (или *прямыми*) и *проективными* (или *обратными*) *системами* стрелок категории $\mathcal{C}$.

Пример 2.15 (разбиения отрезка)
Конечные наборы точек $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1$, разбивающие отрезок $[0,1]$ на непересекающиеся интервалы, как в определении интеграла Римана, образуют прямую систему в категории[3] ∇_{big} относительно морфизмов включения

$$\{0, x_1, x_2, \dots, x_n, 1\} \hookrightarrow \{0, x_1', x_2', \dots, x_m', 1\}, \tag{2-16}$$

отвечающих добавлениям новых точек в разбиение. Копределом этой системы в категории всех (не обязательно конечных) упорядоченных множеств с отмеченными максимальным и минимальным элементами является $[0,1]$. В категории ∇_{big} копредела не существует.

Двойственным образом, упорядоченное слева направо множество полуинтервалов $I_\nu = [x_\nu, x_{\nu+1})$ разбиения $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1$ является объектом категории упорядоченных множеств[4] Δ_{big} и измельчению разбиения (2-16)

[1] Например, композицию произвольной стрелки $Z \to X$ с канонической стрелкой $X \to C$.
[2] Ср. с прим. 1.2 на стр. 4.
[3] См. прим. 1.10 на стр. 11.
[4] См. прим. 1.4 на стр. 5.

отвечает идущий в противоположную сторону морфизм

$$\{I_0, I_1, \ldots, I_n\} \hookleftarrow \{I'_0, I'_1, \ldots, I'_m\}, \tag{2-17}$$

отображающий каждый полуинтервал из правого множества в содержащий его полуинтервал из левого множества. Эти морфизмы образуют обратную систему в Δ_{big}, которая не имеет предела в Δ_{big}, а в категории всех упорядоченных множеств её пределом является полуинтервал $[0, 1)$.

Предложение 2.6

Копредел индуктивной системы множеств $X : \mathcal{F} \to \mathcal{S}et$ изоморфен фактору дизъюнктного объединения $\coprod\limits_{\nu \in \operatorname{Ob}\mathcal{F}} X_\nu$ по отношению эквивалентности, отождествляющему элементы $x_\nu \in X_\nu$ и $x_\mu \in X_\mu$, если для некоторой пары стрелок $\nu \to \eta \leftarrow \mu$ в множестве X_η выполняется равенство $X(\nu \to \eta)x_\nu = X(\mu \to \eta)x_\mu$.

Доказательство. Согласно упр. 2.20 копредел $\operatorname{colim} X$ является фактором дизъюнктного объединения $\coprod\limits_{\nu \in \operatorname{Ob}\mathcal{F}} X_\nu$ по наименьшему отношению эквивалентности, обеспечивающему равенства $x = X(\nu \to \mu)x$ для всех стрелок $\nu \to \mu$ из $\operatorname{Mor}\mathcal{F}$ и всех $x \in X_\nu$. При этом элементы $x_\nu \in X_\nu$ и $x_\mu \in X_\mu$ заведомо отождествляются, если $X(\nu \to \eta)x_\nu = X(\mu \to \eta)x_\mu$ для некоторой пары стрелок $\nu \to \eta \leftarrow \mu$. Таким образом, достаточно убедиться, что описанное в предложении отношение является эквивалентностью. Рефлексивность и симметричность очевидны. Докажем транзитивность. Если x_α эквивалентен x_β, а x_β эквивалентен x_γ, то в категории $\mathcal{F}$ имеется диаграмма[1] из таких стрелок

$$\begin{tikzcd}
 & & \varepsilon & & \\
 & & \delta \arrow[u, "\xi"] & & \\
 & \eta \arrow[ur, "\psi_{\delta\eta}"] & & \zeta \arrow[ul, "\psi_{\delta\zeta}"'] & \\
\alpha \arrow[ur, "\varphi_{\eta\alpha}"] & & \beta \arrow[ul, "\varphi_{\eta\beta}"] \arrow[ur, "\varphi_{\zeta\beta}"'] & & \gamma \arrow[ul, "\varphi_{\zeta\gamma}"']
\end{tikzcd}$$

что $X\left(\varphi_{\eta\alpha}\right)x_\alpha = X\left(\varphi_{\eta\alpha}\right)x_\beta$ и $X\left(\varphi_{\zeta\beta}\right)x_\beta = X\left(\varphi_{\zeta\gamma}\right)x_\gamma$ в категории $\mathcal{S}et$, а $\xi\psi_{\delta\eta}\varphi_{\eta\beta} = \xi\psi_{\delta\zeta}\varphi_{\zeta\beta}$ в $\operatorname{Hom}_{\mathcal{F}}(\beta, \varepsilon)$. Обозначая стрелку из последнего равенства через $\varkappa$, имеем

$$X\left(\varepsilon\psi_{\delta\eta}\varphi_{\eta\alpha}\right)x_\alpha = X(\varkappa)x_\beta = X\left(\varepsilon\psi_{\delta\zeta}\varphi_{\zeta\gamma}\right)x_\gamma,$$

что и требовалось. □

[1] Не обязательно коммутативная!

Упражнение 2.22. Покажите, что копредел фильтрующейся диаграммы абелевых групп $A : \mathcal{N} \to \mathcal{A}b$ как множество совпадает с копределом диаграммы подлежащих этим группам множеств и является фактором прямой суммы $\bigoplus_{\nu\in \operatorname{Ob}\mathcal{N}} A_\nu$ по подгруппе, образованной всеми конечными суммами $\sum\limits_{\nu\in N} a_\nu$, $N \subset \operatorname{Ob}\mathcal{N}$, $a_\nu \in A_\nu$, для которых в диаграмме A найдётся группа A_μ и стрелки $\varphi_\nu : A_\nu \to A_\mu$, по одной для каждого $\nu \in N$, со свойством $\sum\limits_{\nu\in N} \varphi(a_\nu) = 0$ в A_μ.

Пример 2.16 (открытые окрестности и слой предпучка)
Множество открытых окрестностей любого подмножества $Z \subset X$ топологического пространства X является проективной системой в категории $\mathcal{U} = \mathcal{U}(X)$ открытых подмножеств в X, т. к. для любых окрестностей $U, W \supset Z$ окрестность $U \cap W = U \underset{X}{\times} V \supset Z$ вкладывается и в окрестность U, и в окрестность W. Пределом этой системы в категории $\mathcal{S}et$ является пересечение всех открытых окрестностей Z. В категории $\mathcal{U}$ предела может и не быть. Для любого предпучка $F : \mathcal{U}^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$ множества сечений $F(U)$ над открытыми окрестностями U произвольно заданного подмножества $Z \subset X$ образуют индуктивную систему в $\mathcal{S}et$. Её копредел называется *слоем* предпучка F над Z и обозначается F_Z. В силу козамкнутости категории $\mathcal{S}et$ этот копредел всегда существует. Согласно предл. 2.6, каждый элемент слоя F_Z представляет собою класс $s|_Z$ некоторого сечения $s \in F(U)$ над каким-либо открытым множеством $U \supset Z$ по модулю эквивалентности, отождествляющей сечения $s \in F(U)$ и $t \in F(W)$, когда $s|_V = t|_V$ над некоторым открытым V, таким что $Z \subset V \subset U\cap W$. Определённые таким образом классы $s|_Z$ называются *ростками сечений* предпучка F над Z. В частности, когда $Z = \{x\}$ это одна точка, слой F_x называется *слоем F в точке x*. Отметим, что *росток* локальной функции $f \in F(U)$ в слое F_x над точкой $x \in U$ не следует путать со *значением* $f(x)$ этой функции в точке x. Во-первых, они лежат в разных множествах. Во-вторых, равенство ростков двух функций означает равенство их значений в некоторой открытой окрестности точки x, что обычно гораздо сильнее, чем равенство значений лишь в самой точке x.

Пример 2.17 (локализация кольца)
Пусть подмножество S ассоциативного (но не обязательно коммутативного) кольца R с единицей таково, что $1 \in S$ и $st \in S$ для всех $s, t \in S$. Пусть, кроме того, выполняются следующие *левые условия Оре*[1]:

$$\forall\, \varrho \in R,\ \forall\, s \in S \quad \exists\, \lambda \in R,\ \exists t \in S : \lambda s = t\varrho \tag{LO$_1$}$$

$$\forall\, \varphi, \psi \in R \quad \text{из} \quad \exists\, s \in S : \phi s = \psi s \quad \text{следует, что} \quad \exists\, t \in S : t\phi = t\psi\,. \tag{LO$_2$}$$

Превратим множество S в категорию, полагая $\operatorname{Hom}_S(s,t) \overset{\text{def}}{=} \{\lambda \in R \mid \lambda s = t\}$.

Упражнение 2.23. Выведите из условий Оре, что категория S фильтрующаяся.

Рассмотрим в категории правых R-модулей фильтрующуюся диаграмму $S \to \mathcal{M}od\text{-}R$, образованную свободными модулями $s^{-1}R$ ранга один, где символом s^{-1} обозначен базисный вектор того модуля, который отвечает объекту $s \in S$, и R-линейными отображениями $\lambda_* : s_1^{-1}R \to s_2^{-1}R$, которые отвечают стрелкам $\lambda \in \operatorname{Hom}_S(s_1, s_2)$ и действуют на базисный вектор по правилу $s_1^{-1} \mapsto s_2^{-1}\lambda$. Копредел этой диаграммы в категории

[1]В коммутативном кольце R эти условия всегда выполнены.

$\mathcal{M}od$-R состоит из классов $s^{-1}\varrho$, где $s \in S$, $\varrho \in R$, по модулю равенств $s_1^{-1}\varrho_1 = s_2^{-1}\varrho_2$, означающих существование таких $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, что $\lambda_1 s_1 = \lambda_2 s_2 \in S$ и $\lambda_1\varrho_1 = \lambda_2\varrho_2$ в R. Классы $s^{-1}\varrho$ называются *левыми дробями* со знаменателями в S. Они образуют правый R-модуль, обозначаемый $S^{-1}R$ и именуемый *левой локализацией* кольца R относительно мультипликативной системы Оре S.

Упражнение 2.24. Чему равна сумма $s_1^{-1}\varrho_1 + s_2^{-1}\varrho_2$ в модуле $S^{-1}R$?

Определим *произведение* левых дробей $s_1^{-1}\varrho_1$ и $s_2^{-1}\varrho_2$ следующим образом. Пользуясь условием (LO_1) подберём такие $\lambda_1 \in R$ и $t_2 \in S$, что[1] $t_2\varrho_1 = \lambda_1 s_2$, и положим

$$s_1^{-1}\varrho_1 \cdot s_2^{-1}\varrho_2 \overset{\text{def}}{=} (t_2 s_1)^{-1}(\lambda_1\varrho_2)\,.$$

Упражнение 2.25. Проверьте, что это определение корректно[2] и задаёт на модуле $S^{-1}R$ структуру ассоциативного кольца с единицей. Убедитесь, что для коммутативного кольца R кольцо дробей $S^{-1}R$ изоморфно известному из курса алгебры[3] кольцу частных $a\,/\,s$, где $a \in R$, $s \in S$, и $a_1\,/\,s_1 = a_2\,/\,s_2$если и только если $\exists\, s \in S:\ s\cdot(a_1 s_2 - a_2 s_1) = 0$ в R.

Упражнение 2.26. Для мультипликативного подмножества $S \subset R$, удовлетворяющего *правым условиям Оре*

$$\forall\,\lambda \in R,\ \forall\, t \in S \quad \exists\,\varrho \in R,\ \exists s \in S:\ \lambda s = t\varrho \tag{RO$_1$}$$

$$\forall\,\varphi, \psi \in R \quad \text{из} \quad \exists\, t \in S:\ t\phi = t\psi \quad \text{следует, что} \quad \exists\, s \in S:\ \phi s = \psi s\,, \tag{RO$_2$}$$

постройте кольцо правых дробей RS^{-1}, а если S удовлетворят одновременно и левым и правм условиям Оре, установите канонический изоморфизм колец $S^{-1}R \simeq \simeq RS^{-1}$.

2.4. Функториальность (ко) пределов. Равенства (2-11) и (2-10) со стр. 26, описывающие универсальные свойства копредела и предела диаграммы $X:\ \mathcal{N} \to \mathcal{C}$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathrm{colim}, C) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(X, \overline{C})$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}(\overline{C}, X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \lim X)$$

означают[4], что для заданных малой категории $\mathcal{N}$ и (ко)замкнутой категории $\mathcal{C}$ копредел и предел являются, соответственно, левым и правым сопряжёнными к функтору $\mathcal{C} \to \mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})$, переводящему каждый объект $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ в постоянную диаграмму $\overline{C}$. В частности, предел и копредел задают функторы $\lim, \mathrm{colim}:\ \mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}$.

Если не предполагать категорию $\mathcal{C}$ (ко)замкнутой, то (ко)предел будет функториален на всех диаграммах, у которых он есть. Действие функторов lim и colim на естественные преобразования диаграмм определено даже в более общей ситуации: пусть диаграммы $X:\ \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ и $Y:\ \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ имеют пределы в категории $\mathcal{C}$ и пусть заданы функтор $\tau:\ \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ и естественное преобразование $f:\ X \circ \tau \to Y$, т. е. набор стрелок

[1] Это «политкорректная» запись интуитивно желаемого равенства $\varrho_1 s_2^{-1} = t_2^{-1}\lambda_1$.

[2] Т. е. результат умножения не зависит от выбора таких $\lambda_1 \in R$ и $t_2 \in S$, что $t_2\varrho_1 = \lambda_1 s_2$.

[3] См. http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-1/1314/lec-04.pdf.

[4] См. предл. 2.1 на стр. 20.

$f_\mu : X_{\tau(\mu)} \to Y_\mu$, по одной для каждого $\mu \in \operatorname{Ob}\mathcal{M}$, перестановочных со всеми стрелками обеих диаграмм. Беря композиции этих стрелок с каноническими проекциями предела $\lim X$ на элементы диаграммы X, получаем стрелки $f_\mu \pi_{\tau(\mu)} : \lim X \to Y_\mu$, перестановочные со стрелками диаграммы Y. По универсальному свойству предела $\lim Y$ существует единственный морфизм $\lim f : \lim X \to \lim Y$, делающий коммутативными все диаграммы

$$\begin{tikzcd} \lim X \arrow[r, "\pi_{\tau(\mu)}"] \arrow[d, "\lim f"'] & X_{\tau(\mu)} \arrow[d, "f_\mu"] \\ \lim Y \arrow[r, "\pi_\mu"] & Y_\mu , \end{tikzcd} \tag{2-18}$$

горизонтальные стрелки которых суть канонические морфизмы из предела в элементы диаграммы. Двойственным образом, если существуют копределы $\operatorname{colim} X$ и $\operatorname{colim} Y$, то любые функтор $\tau : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ и естественное преобразование $f : X \to Y \circ \tau$ задают единственный морфизм $\operatorname{colim} f : \operatorname{colim} X \to \operatorname{colim} Y$, делающий коммутативными все диаграммы

$$\begin{tikzcd} X_\nu \arrow[r, "\iota_\nu"] \arrow[d, "f_\nu"'] & \operatorname{colim} X \arrow[d, "\operatorname{colim} f"] \\ Y_{\tau(\nu)} \arrow[r, "\iota_{\tau(\nu)}"] & \operatorname{colim} Y , \end{tikzcd}$$

горизонтальные стрелки которых суть канонические морфизмы элементов диаграммы в копредел.

Пример 2.18 (полнота категории предпучков)
Если задана диаграмма $F : \mathcal{N} \to p\mathcal{S}h(\mathcal{U})$ предпучков множеств на малой категории $\mathcal{U}$, то над каждым объектом $U \in \operatorname{Ob}\mathcal{U}$ возникает диаграмма множеств $F(U) : \mathcal{N} \to \mathcal{S}et$, вершинами которой служат множества сечений $F_\nu(U)$ предпучков F_ν диаграммы F над объектом U с отображениями, задающими действие стрелок диаграммы F над этим объектом. В силу функториальности (ко)предела множества $L(U) \stackrel{\text{def}}{=} \lim F(U)$ и $C(U) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{colim} F(U)$ ведут себя функториально по U, т. е. задают на $\mathcal{U}$ предпучки множеств. Для любого предпучка $F_\nu : \mathcal{U}^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$ диаграммы F имеются канонические морфизмы предпучков $L \to F_\nu$ и $F_\nu \to C$, действие которых над каждым объектом $U \in \operatorname{Ob}\mathcal{U}$ задаётся стрелками $\lim F(U) \to F_\nu(U)$ и $F_\nu(U) \to \operatorname{colim} F(U)$ в категории $\mathcal{S}et$. Универсальность последних в категории $\mathcal{S}et$ над каждым объектом $U \in \operatorname{Ob}\mathcal{U}$ влечёт универсальность первых в категории $p\mathcal{S}h(\mathcal{U})$. Таким образом, категория $p\mathcal{S}h(\mathcal{U})$ предпучков множеств на малой категории $\mathcal{U}$ замкнута и козамкнута.

Упражнение 2.27. Покажите, что категория $\mathcal{F}un(\mathcal{C}, \mathcal{A}b)$ ковариантных функторов из любой малой категории $\mathcal{C}$ в абелевы группы тоже замкнута и козамкнута.

2.4.1. Перестановочность функторов с (ко) пределами. Скажем, что функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *перестановочен с (ко) пределами*, если для любого $L \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ и любой диаграммы $X : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ из того, что L является (ко) пределом X в $\mathcal{C}$, вытекает, что $F(L)$ является (ко) пределом диаграммы $F \circ X$ в $\mathcal{D}$.

Предложение 2.7
Если функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ сопряжён слева к функтору $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, то F перестановочен с копределами, а G — с пределами.

Доказательство. В силу сопряжённости F и G имеем функториально по $D \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(\operatorname{colim} X), D\big) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\big(\operatorname{colim} X, G(D)\big) \simeq \\ \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{C})}\left(X, \overline{G(D)}\right) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{N},\mathcal{D})}\left(F \circ X, \overline{D}\right).\end{aligned}$$

Тем самым, $F(\operatorname{colim} X) \simeq \operatorname{colim}(F \circ X)$. Рассуждение про пределы аналогично. □

Следствие 2.3
Пределы коммутируют с пределами, а копределы — с копределами всякий раз, когда они существуют. Более пространно, пусть задана диаграмма $F : \mathcal{M} \to \mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{C})$, вершинами которой являются диаграммы $F_\mu : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$, по одной для каждого объекта $\mu \in \operatorname{Ob}\mathcal{M}$, а стрелками — естественные преобразования $F(\mu_1 \to \mu_2) : F_{\mu_1} \to F_{\mu_2}$, по одному для каждой стрелки $\mu_1 \to \mu_2$ из $\operatorname{Mor}\mathcal{M}$, и пусть для каждого $\mu \in \mathcal{M}$ диаграмма F_μ имеет (ко)предел, а для каждого $\nu \in \mathcal{N}$ имеет (ко)предел диаграмма $F(\nu) : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$, образованная объектами $F_\mu(\nu)$ и стрелками $F(\mu_1 \to \mu_2)_\nu : F_{\mu_1}(\nu) \to F_{\mu_2}(\nu)$, задающими действие естественных преобразований $F(\mu_1 \to \mu_2)$ над объектом ν. Тогда

$$\lim_\mu \lim_\nu F_\mu \simeq \lim_\nu \lim_\mu F(\nu) \quad \text{и} \quad \operatorname*{colim}_\mu \operatorname*{colim}_\nu F_\mu \simeq \operatorname*{colim}_\nu \operatorname*{colim}_\mu F(\nu).$$

Пример 2.19 (ядра и коядра в категории модулей)
В категории $\mathcal{M}od\text{-}R$ правых модулей над кольцом R (ко)ядро морфизма R-модулей $\varphi : A \to B$ является (ко)уравнителем φ с нулевым морфизмом из A в B. Следовательно, ядро и коядро являются функторами из категории диаграмм вида $* \to *$ в категорию $\mathcal{M}od\text{-}R$, причём коядро коммутирует с копределами, а ядро — с пределами. В подробностях это звучит так. Пусть имеются две диаграммы правых R-модулей $X, Y : \mathcal{N} \to \mathcal{M}od\text{-}R$ и гомоморфизмы $f_\nu : X_\nu \to Y_\nu$, задающие естественное преобразование этих диаграмм. В силу функториальности (ко)пределов возникают гомоморфизмы $\lim f_\nu : \lim X \to \lim Y$ и $\operatorname{colim} f_\nu : \operatorname{colim} X \to \operatorname{colim} Y$, а также диаграммы $\ker f, \operatorname{coker} f : \mathcal{N} \to \mathcal{M}od\text{-}R$, элементами которых являются ядра и коядра гомоморфизмов f_ν. Имеют место канонические изоморфизмы

$$\operatorname{colim}\operatorname{coker} f \simeq \operatorname{coker}\operatorname{colim} f \quad \text{и} \quad \lim\ker f \simeq \ker\lim f.$$

Каждый левый сопряжённый функтор со значениями в абелевых группах, будучи перестановочен с копределами, переводит коядра в коядра, а любой правый сопряжённый функтор переводит ядра в ядра.

Свойство функтора F сохранять ядра, т. е. наличие естественного по диаграмме $A \to B$ изоморфизма $\ker(FA \to FB) \simeq F\ker(A \to B)$, называется *точностью слева*. Сохранение коядер, т. е. изоморфизм $\operatorname{coker}(FA \to FB) \simeq F\operatorname{coker}(A \to B)$, называется *точностью справа*. Таким образом, все левые сопряжённые функторы точны справа, а все правые — слева.

Например, ядра точны слева, а коядра — справа, т. е. в категории модулей со всякой коммутативной диаграммой с точными[1] строками

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B_1 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\beta"] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & C_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{2-19}$$

канонически связаны две точные последовательности

$$0 \to \ker\alpha \to \ker\beta \to \ker\gamma \quad \text{и} \quad \operatorname{coker}\alpha \to \operatorname{coker}\beta \to \operatorname{coker}\gamma \to 0\,. \tag{2-20}$$

Упражнение 2.28. Убедитесь, что на диаграмме (2-19) для любого $\pi(b_1) \in \ker\gamma$ элемент $\beta(b_1) \in A_2$ и что сопоставление $\pi(b_1) \mapsto \beta(b_1) \pmod{\operatorname{im}\alpha}$ корректно задаёт гомоморфизм $\delta :\ \ker\gamma \to \operatorname{coker}\alpha$ связывающий две последовательности (2-20) в одну длинную точную последовательность

$$0 \to \ker\alpha \to \ker\beta \to \ker\gamma \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}\alpha \to \operatorname{coker}\beta \to \operatorname{coker}\gamma \to 0\,.$$

Пример 2.20 (тензорное произведение и копредставимые функторы)
Функтор $* \otimes_R N :\ \mathcal{M}od\text{-}R \to \mathcal{A}b$, $X \mapsto X \otimes_R N$, задаваемый тензорным умножением правых модулей на фиксированный левый модуль N, сопряжён слева к копредставимому функтору[2] $h^N :\ \mathcal{A}b \to \mathcal{M}od\text{-}R$, $Y \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, Y)$. Поэтому тензорное произведение перестановочно с копределами. В частности, оно точно справа, т. е. для любого гомоморфизма $\varphi :\ A \to B$ коядро $\operatorname{coker}\big(\varphi \otimes_R \operatorname{Id}_N :\ A \otimes_R B \to A \otimes_R B\big) \simeq \operatorname{coker}(\varphi) \otimes_S N$. В свою очередь, каждый копредставимый функтор $h^M :\ \mathcal{M}od\text{-}R \to \mathcal{A}b$, $X \mapsto \operatorname{Hom}_R(M, X)$, перестановочен с пределами и точен слева.

Пример 2.21 (представимые функторы, продолжение прим. 2.2 на стр. 20)
Поскольку каждый представимый функтор на категории абелевых групп

$$h_C :\ \mathcal{A}b^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{A}b\,, \quad X \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}b}(X, C)\,,$$

является правым сопряжённым самому себе[3], он переводит пределы в категории $\mathcal{A}b^{\mathrm{opp}}$, т. е. копределы в категории $\mathcal{A}b$, в пределы. В частности, функтор h_C переводит коядра в ядра (контравариантные функторы, переводящие коядра в ядра, тоже называются *точными слева*).

Предложение 2.8 (точность фильтрующихся копределов)
Для малой фильтрующейся категории $\mathcal{N}$ и естественного преобразования $f :\ X \to Y$ диаграмм $X, Y :\ \mathcal{N} \to \mathcal{A}b$ абелевых групп имеется канонический изоморфизм

$$\operatorname{colim}\ker\big(f_\nu :\ X_\nu \to Y_\nu\big) \simeq \ker\big(\operatorname{colim} f :\ \operatorname{colim} X_\nu \to \operatorname{colim} Y_\nu\big)\,. \tag{2-21}$$

Иными словами, копредел фильтрующейся диаграммы абелевых групп перестановочен не только с коядрами, но и с ядрами, т. е. задаёт точный функтор

$$\operatorname{colim} :\ \mathcal{F}un(\mathcal{N}, \mathcal{A}b) \to \mathcal{A}b\,, \quad X \mapsto \operatorname{colim} X\,.$$

[1] Это означает, что ядро каждой стрелки совпадает с образом предыдущей.
[2] См. предл. 2.3 на стр. 24.
[3] См. прим. 2.2 на стр. 20.

Доказательство. Согласно упр. 2.22 на стр. 34, копредел фильтрующейся диаграммы $Z : \mathcal{N} \to \mathcal{Ab}$ является фактором прямой суммы $\bigoplus Z_\nu$ по подгруппе, состоящей из всех конечных сумм $\sum\limits_{\nu \in N} x_\nu$, $N \subset \operatorname{Ob} \mathcal{N}$, $x_\nu \in X_\nu$, для которых в диаграмме X найдётся группа X_μ и стрелки $\varphi_\nu : X_\nu \to X_\mu$, по одной для каждого $\nu \in N$, со свойством $\sum\limits_{\nu \in N} \varphi(x_\nu) = 0$ в X_μ. Предельная стрелка $\operatorname{colim} f$ переводит класс $[x] \in \operatorname{colim} X$ элемента $x = \sum\limits_{\nu \in N} x_\nu$ в класс $[f(x)]$ элемента $f(x) \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{\nu \in N} f_\nu(x_\nu)$ в фактор группе $\operatorname{colim} Y$.

Упражнение 2.29. Убедитесь, что описание корректно.

Если $[x] \in \ker \operatorname{colim} f$, то в $\mathcal{N}$ имеются такие стрелки $\varphi_\nu : \nu \to \mu$ с общим концом μ, по одной стрелке для каждого $\nu \in N$, что $\sum_\nu Y\varphi_\nu(f_\nu(x_\nu)) = f_\mu(\sum_\nu X\varphi_\nu(x_\nu)) = 0$ в Y_μ, т. е. класс суммы $\sum_\nu X\varphi_\nu(x_\nu) \in X_\mu$ лежит в ядре $\ker(f_\mu : X_\mu \to Y_\mu)$. Сопоставление классу $[x] \in \ker \operatorname{colim} f$ класса $[\sum_\nu X\varphi_\nu(x_\nu)] \in \operatorname{colim} \ker f_\nu$ корректно задаёт гомоморфизм $\ker \operatorname{colim} f \to \operatorname{colim} \ker f_\nu$.

Упражнение 2.30. Убедитесь, в этом.

Обратный гомоморфизм $\operatorname{colim} \ker f_\nu \to \ker \operatorname{colim} f$ сопоставляет классу элемента $x_\nu \in \ker f_\nu$ в фактор группе $\operatorname{colim} \ker f_\nu$ класс того же самого элемента, но только в фактор группе $\operatorname{colim} X_\nu$. □

Упражнение 2.31. Убедитесь, что этот класс лежит в ядре предельного гомоморфизма $\operatorname{colim} f$ и не зависит от выбора представителя x_ν в классе un определение гомоморфизма $\operatorname{colim} \ker f_\nu \to \ker \operatorname{colim} f$ корректно и этот гомоморфизм действительно обратен предыдущему.

Предложение 2.9
В категории $\mathcal{S}et$ копределы фильтрованных диаграмм перестановочны с конечными пределами.

Доказательство. Достаточно доказать, что для любых двух фильтрованных диаграмм множеств $X, Y : \mathcal{N} \to \mathcal{S}et$ имеется канонический изоморфизм

$$\operatorname{colim}(X_\nu \times Y_\nu) \simeq \operatorname{colim}(X_\nu) \times \operatorname{colim}(Y_\nu),$$

а для любых двух естественных преобразований $f, g : X \to Y$ этих диаграмм и индуцированных ими отображений $\operatorname{colim} f, \operatorname{colim} g : \operatorname{colim} X \to \operatorname{colim} Y$ имеется канонический изоморфизм $\operatorname{colim} \operatorname{Eq}(f_\nu, g_\nu) \simeq \operatorname{Eq}(\operatorname{colim} f, \operatorname{colim} g)$, где $\operatorname{Eq}(\varphi, \psi)$ означает уравнитель стрелок φ и ψ. Первый изоморфизм переводит класс в $\operatorname{colim}(X_\nu \times Y_\nu)$ пары (x_ν, y_ν) в пару классов $([x_\nu], [y_\nu]) \in \operatorname{colim}(X_\nu) \times \operatorname{colim}(Y_\nu)$.

Упражнение 2.32. Проверьте, что это отображение определено корректно и является биекцией.

Второй изоморфизм переводит класс в $\operatorname{colim} \operatorname{Eq}(f_\nu, g_\nu)$ такого элемента $x_\nu \in X_\nu$, что $f_\nu(x_\nu) = g_\nu(x_\nu)$ в Y_ν, в класс этого же элемента в $\operatorname{colim} X$.

Упражнение 2.33. Проверьте, что последний класс лежит в $\operatorname{Eq}(\operatorname{colim} f, \operatorname{colim} g)$ и что таким образом получается корректно определённое и биективное отображение $\operatorname{colim} \operatorname{Eq}(f_\nu, g_\nu) \to \operatorname{Eq}(\operatorname{colim} f, \operatorname{colim} g)$.

□

Следствие 2.4

В категории $\mathcal{S}et$ копредел инъективного (соотв. сюрьективного или биективного) преобразования[1] фильтрованных диаграмм является инъективным (соотв. сюрьективным или биективным) отображением копределов этих диаграмм.

2.5. Существование сопряжённых функторов. Если у функтора $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ есть правый сопряжённый функтор $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, то F перестановочен с копределами, и для каждого $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ объект $G(Y) \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ представляет предпучок[2]

$$h_Y^F : \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et\,, \; X \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y)\,.$$

Тождественный эндоморфизм $\mathrm{Id}_{G(Y)} \in h_{G(Y)}(G(Y))$ переводится изоморфизмом функторов $h_{G(Y)} \simeq h_Y^F$ в такую универсальную стрелку $\varkappa : FG(Y) \to Y$ из $h_Y^F(G(Y))$, что для любого $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ и любой стрелки $\alpha : FX \to Y$ в категории $\mathcal{D}$ найдётся единственная стрелка $\varphi_\alpha \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$, делающая коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd}
FG(Y) \arrow[dr, "\varkappa"] & \\
& Y \\
FX \arrow[uu, "F\varphi_\alpha"] \arrow[ur, "\alpha"'] &
\end{tikzcd} \tag{2-22}$$

Пары $(X, \alpha : FX \to Y)$, где $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, образуют категорию $\mathcal{F}_Y$, в которой морфизмами из (X_1, α_1) в (X_2, α_2) по определению являются такие стрелки $\varphi : X_1 \to X_2$ категории $\mathcal{C}$, для которых в категории $\mathcal{D}$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
FX_2 \arrow[dr, "\alpha_2"] & \\
& Y \\
FX_1 \arrow[uu, "F\varphi"] \arrow[ur, "\alpha_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Универсальная стрелка $\varkappa : FG(Y) \to Y$ в диаграмме (2-22) является конечным объектом категории $\mathcal{F}_Y$.

Упражнение 2.34. Покажите, что для козамкнутой категории $\mathcal{C}$, перестановочного с копределами функтора $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и произвольного объекта $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ категория $\mathcal{F}_Y$ тоже козамкнута.

Из этого упражнения и критерия существования конечного объекта в козамкнутой категории[3] получается следующий полезный критерий существования правого сопряжённого функтора:

[1] По определению, это означает, что действие естественного преобразования над каждым объектом диаграммы инъективно (соотв. сюрьективно или биективно).

[2] См. упр. 2.3 на стр. 21.

[3] См. предл. 2.5 на стр. 31.

Теорема 2.1
Функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ из козамкнутой категории $\mathcal{C}$ тогда и только тогда обладает правым сопряжённым, когда он перестановочен с копределами и для каждого $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ имеется такое множество S_Y пар (X, α), $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, $\alpha \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y)$, что любая стрелка вида $FZ \to Y$ в $\mathcal{D}$ раскладывается для некоторой пары $(X, \alpha) \in S_Y$ и стрелки $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$ в композицию $FZ \xrightarrow{F\varphi} FX \xrightarrow{\alpha} Y$. □

Упражнение 2.35. Докажите двойственный критерий: функтор $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ из замкнутой категории $\mathcal{D}$ тогда и только тогда обладает левым сопряжённым, когда он перестановочен с пределами и для каждого $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ имеется такое множество S_X пар (Y, β), $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$, $\beta \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY)$, что любая стрелка вида $X \to GZ$ в $\mathcal{C}$ раскладывается для некоторой пары $(Y, \beta) \in S_X$ и стрелки $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ в композицию $X \xrightarrow{\beta} GY \xrightarrow{F\varphi} GZ$.

Упр. 2.7. Отображения $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Mod}\text{-}B}(B,Y) \to Y$, $\varphi \mapsto \varphi(1)$, и $Y \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{Mod}\text{-}B}(B,Y) \to Y$, $y \mapsto (\varphi : b \mapsto yb)$, являются взаимно обратными A-линейными справа изоморфизмами.

Упр. 2.9. Отображения $x \otimes_B b \mapsto xb$ и $x \mapsto x \otimes \otimes_B 1$ являются взаимно обратными A-линейными справа изоморфизмами между $X \otimes_B B$ и X.

Упр. 2.11. См. последний раздел 7.3.3 лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/1415/lec-07.pdf.

Упр. 2.12. Непрерывному отображению $f : |X| \to Y$ из $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Top}}(|X|, Y)$ биективно соответствует естественное по $[n] \in \mathrm{Ob}\,\Delta$ преобразование $f_n : X_n \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{Top}}(\Delta^n, Y)$ из $\mathrm{Hom}_{p\mathcal{Sh}}(X, S(Y))$, сопоставляющее точке $x \in X_n$ композицию

$$f \circ \iota|_{x \times \Delta^n} : \Delta^n \to |X| \to Y\,,$$

где $\iota|_{x\times\Delta^n} : \Delta^n \to |X|$ это ограничение отображения факторизации[1]

$$\iota : \bigsqcup_{n \geqslant 0} X_n \times \Delta^n \to |X|$$

на правильный симплекс $\{x\} \times \Delta^n \subset X_n \times \Delta^n$ (убедитесь, что f_n функториально зависит от комбинаторного симплекса $[n]$). Обратная биекция сопоставляет естественному по $[n] \in \mathrm{Ob}\,\Delta$ набору отображений $f_n : X_n \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{Top}}(\Delta^n, Y)$ отображение $|X| \to Y$, переводящее класс точки $(x,s) \in X_n \times \Delta^n$ по модулю соотношений $(X(\varphi)x, s) = (x, \varphi s)$ в значение непрерывного отображения $f_n(x) : \Delta^n \to Y$ в точке $s \in \Delta^n$ (убедитесь, что это значение не зависит от выбора представителя (x,s) в его классе эквивалентности). Естественное преобразование $t_Y : |S(Y)| \to Y$ переводит класс пары

$$(g : \Delta^n \to Y, t \in \Delta^n) \in S_n(Y) \times \Delta^n = \mathrm{Hom}_{\mathcal{Top}}(\Delta^n, Y) \times \Delta^n\,,$$

представляющей точку из фактор пространства $|S(Y)|$, геометрической реализации симплициального множества $S(Y)$, в точку $g(t) \in Y$ (убедитесь, что отображение t_Y корректно определено, непрерывно и функториально по топологическому пространству Y). Действие естественного преобразования $s_X : X \to S\big(|X|\big)$ над комбинаторным симплексом $[n] \in \mathrm{Ob}\,\Delta$ переводит точку $x \in X_n$ в сингулярный симплекс

$$\iota|_{x\times\Delta^n} : \Delta^n \to |X|$$

топологического пространства $|X|$ (убедитесь, что он функториален по $[n] \in \mathrm{Ob}\,\Delta$ и предпучку $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{Fun}(\Delta^{\mathrm{opp}}, \mathcal{S}et)$).

Упр. 2.14. Начальное множество и начальное топологическое пространство пусты, конечное множество и конечное топологическое пространство это одна точка. Начальный и конечный объекты категории групп это единичная группа[2]. В категориях абелевых групп, коммутативных колец и модулей начальный и конечный объект это нуль.

[1] Непрерывного в силу определения фактор топологии.

[2] Т. е. группа, состоящая только из единичного элемента.

Упр. 2.15. В категории групп нулевым объектом является единичная группа. В категориях абелевых групп, коммутативных колец и модулей нулевой объект это нулевая абелева группа.

Упр. 2.19. Гомоморфизмы коммутативных колец $A \leftarrow K \to A$ наделяют A и B структурами K-алгебр, и копроизведение $A \otimes_K B$ это *тензорное произведение* K-алгебр, т. е. фактор свободного K-модуля с базисом $A \times B$ (произведение в категории множеств) по подмодулю, порождённому всевозможными разностями

$$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, \varkappa_1 b_1 + \varkappa_2 b_2) - \sum_{i,j=1}^{2} \lambda_i \varkappa_j (a_i, b_j)$$

с $\lambda_i, \varkappa_i \in K$, $a_i \in A$, $\beta_j \in B$ (ср. с n° 2.2). Произведение на классах эквивалентности задаётся покомпонентно: $(a_1 \otimes_K b_1) \cdot (a_2 \otimes_K b_2) = (a_1 a_2) \otimes_K (b_1 b_2)$.

Упр. 2.23. Применяя первое условие Оре[1] к произвольным элементам $s = s_1$ и $\varrho = s_2$ из S получаем ведущие из s_1 и s_2 стрелки λ и t с общим концом $\lambda s_1 = t s_2 \in S$. Применяя второе условие Оре[2] к паре стрелок $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_S(s, s')$, где $s' = \varphi s = \psi s$, получаем такую стрелку $t \in \mathrm{Hom}_S(s', ts')$, что $t\varphi = t\psi$.

Упр. 2.24. Так как по предыдущему упр. 2.23 категория S фильтрующаяся, у дробей $s_1^{-1}\varrho_1$ и $s_2^{-1}\varrho_2$ есть общий знаменатель $t = \lambda_1 s_1 = \lambda_2 s_2 \in S$ с $\lambda_1, \lambda_2 \in R$. Тогда $s_1^{-1}\varrho_1 + s_2^{-1}\varrho_2 = t^{-1}(\lambda_1 \varrho_1 + \lambda_2 \varrho_2)$.

[1] См. формулу (LO_1) на стр. 34.
[2] См. формулу (LO_2) на стр. 34.