§1. Категории и функторы

1.1. Категории. Категория $\mathcal{C}$ это *класс*[1] объектов, обозначаемый $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$, в котором для каждой упорядоченной пары объектов $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ задано *множество* морфизмов

$$\operatorname{Hom}(X,Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)\,.$$

Для разных пар объектов эти множества не пересекаются. Морфизмы удобно представлять себе в виде стрелок $\varphi : X \to Y$. Объединение всех стрелок категории $\mathcal{C}$ обозначается $\operatorname{Mor}\mathcal{C} = \bigsqcup_{X,Y\in\operatorname{Ob}\mathcal{C}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ и тоже является классом, а не множеством.

Кроме того, для каждой тройки объектов $X, Y, Z \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ имеется отображение

$$\operatorname{Hom}(Y,Z)\times\operatorname{Hom}(X,Y) \to \operatorname{Hom}(X,Z)\,, \quad (\varphi,\psi)\mapsto \varphi\circ\psi\ (=\varphi\psi)\,,$$

именуемое *композицией*[2] и ассоциативное в том смысле, что $(\chi\circ\varphi)\circ\psi = \chi\circ(\varphi\circ\psi)$ всякий раз, когда эти композиции определены.

Наконец, у каждого объекта $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ есть *тождественный эндоморфизм*

$$\operatorname{Id}_X \in \operatorname{Hom}(X,X)\,,$$

удовлетворяющий условиям[3] $\varphi\circ\operatorname{Id}_X = \varphi$ и $\operatorname{Id}_X\circ\psi = \psi$ для любых стрелок $\varphi : X \to Y$ и $\psi : Z \to X$.

Подкатегория $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ это категория, все объекты, стрелки и композиции которой наследуются из $\mathcal{C}$. Подкатегория называется *полной*, если для всех $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)\,.$$

Категория $\mathcal{C}$ называется *малой*, если $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$ это *множество*, а не больший класс. В этом случае $\operatorname{Mor}\mathcal{C}$ тоже является множеством.

Пример 1.1 (категории, не являющиеся малыми)
Примеры категорий, которые *не* являются малыми, это категория $\mathcal{S}et$ всех множеств и всех отображений, категория $\mathcal{T}op$ топологических пространств и непрерывных отображений, категория $\mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ векторных пространств над полем $\Bbbk$ и $\Bbbk$-линейных отображений и её полная подкатегория $vec_{\Bbbk}$ конечномерных пространств, категории R-$\mathcal{M}od$ и $\mathcal{M}od$-R левых и правых модулей над кольцом R и R-линейных отображений и их полные подкатегории R-mod и mod-R конечно представимых[4] модулей, категория абелевых групп $\mathcal{A}b = \mathbb{Z}$-$\mathcal{M}od$, категория $\mathcal{G}rp$ всех групп и групповых гомоморфизмов, категория $\mathcal{C}mr$ коммутативных колец с единицей и гомоморфизмов, переводящих единицу в единицу, и т. п.

---

[1] Не хотелось бы вдаваться в точную формализацию этого термина (содержательную в той же мере, как формализация арифметики и теории множеств, изучаемые в стандартном курсе математической логики). Для наших нужд достаточно, что такая формализация существует и позволяет говорить, например, о «категории множеств», объекты которой, по понятным причинам, множества не образуют.

[2] Значок композиции «$\circ$», как и знак умножения, принято опускать, когда ясно, о чём речь.

[3] Выкладка $\operatorname{Id}' = \operatorname{Id}'\circ\operatorname{Id}'' = \operatorname{Id}''$ показывает, что тождественный морфизм единствен.

[4] Модуль называется *конечно представимым*, если он изоморфен фактору свободного модуля конечного ранга по конечно порождённому подмодулю.

Пример 1.2 (предпорядки, чумы и топологии)
Каждое множество M с предпорядком[1] $\leqslant$ может рассматриваться как малая категория, объекты которой суть элементы $m \in M$, стрелки суть неравенства:

$$\mathrm{Hom}_M(n,m) = \begin{cases} \text{одноэлементное множество, когда } n \leqslant m, \\ \varnothing \text{ в остальных случаях}, \end{cases}$$

а композиция стрелок $k \leqslant \ell$ и $\ell \leqslant n$ это стрелка $k \leqslant n$. Наличие композиции и тождественных морфизмов обеспечиваются транзитивностью и рефлексивностью отношения $\leqslant$.

Если предпорядок $\leqslant$ кососимметричен, т. е. задаёт на M (частичный) порядок, то при $m \neq n$ как минимум одно из множеств $\mathrm{Hom}(m,n)$, $\mathrm{Hom}(n,m)$ пусто. Важным примером такой категории-чума[2] является категория $\mathcal{U}(X)$ всех открытых подмножеств топологического пространства X, стрелками в которой являются включения:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}(X)}(U,W) = \begin{cases} \text{вложение } U \hookrightarrow W, \text{ если } U \subseteq W \\ \text{пустое множество, когда } U \nsubseteq W. \end{cases}$$

Пример 1.3 (малые категории и ассоциативные алгебры)
Всякую ассоциативную алгебру[3] A с единицей можно рассматривать как малую категорию с одним объектом $*$ и множеством стрелок $\mathrm{Hom}(*,*) = A$, композиция на котором задаётся умножением в этой алгебре. Наоборот, со всякой малой категорией $\mathcal{C}$ и коммутативным кольцом K с единицей можно связать *алгебру стрелок* $K[\mathcal{C}]$, состоящую из формальных конечных линейных комбинаций стрелок категории $\mathcal{C}$ с коэффициентами в K. Условимся для заданного множества M обозначать через $K \otimes M$ свободный K-модуль с базисом M, образованный всеми конечными формальными линейными комбинациями элементов множества M с коэффициентами из K. Тогда

$$K[\mathcal{C}] \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{X,Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}} K \otimes \mathrm{Hom}(X,Y) = \left\{ \sum x_i \varphi_i \;\middle|\; x_i \in K,\ \varphi_i \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \right\}.$$

Умножение стрелок в алгебре $K[\mathcal{C}]$ определяется их композицией в категории $\mathcal{C}$

$$\varphi\psi \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \varphi \circ \psi & \text{если конец } \psi \text{ совпадает с началом } \varphi \\ 0 & \text{во всех прочих случаях} \end{cases}$$

и по дистрибутивности распространяется на произвольные конечные линейные комбинации стрелок. Алгебру $K[\mathcal{C}]$ можно представлять себе как алгебру финитных квадратных матриц[4], строки и столбцы которых занумерованы объектами категории, и в каждой клетке (Y,X) стоят элементы из своего K-модуля $K \otimes \mathrm{Hom}(X,Y)$. Эта алгебра, вообще говоря, некоммутативна и без единицы, однако, для всякого $f \in K[\mathcal{C}]$ существует идемпотент $e_f = e_f^2$ со свойствами $e_f \circ f = f \circ e_f = f$. В качестве такового можно взять сумму тождественных эндоморфизмов Id_X всех объектов X, служащих началами или концами стрелок, линейной комбинацией которых является стрелка f.

[1] Т. е. рефлексивным и транзитивным бинарным отношением.
[2] Т. е. частично упорядоченного множества.
[3] Более общим образом — любой ассоциативный моноид, т. е. полугруппу с единицей.
[4] Возможно, бесконечного размера, но с конечным числом ненулевых элементов.

1.1.1. Мономорфизмы, эпиморфизмы и изоморфизмы. Стрелка φ называется *мономорфизмом*[1] (соотв. *эпиморфизмом*[2]), если на неё можно сокращать слева (соотв. справа), т. е. когда $\varphi\alpha = \varphi\beta \Rightarrow \alpha = \beta$ (соотв. $\alpha\varphi = \beta\varphi \Rightarrow \alpha = \beta$). По умолчанию мы используем стрелки $\hookrightarrow$ для обозначения мономорфизмов, и стрелки $\twoheadrightarrow$ для эпиморфизмов. Стрелка $\varphi : X \to Y$ называется *изоморфизмом* (или *обратимой* стрелкой) и обозначается $\xrightarrow{\sim}$, если существует такая стрелка $\psi : Y \to X$, что $\varphi\psi = \mathrm{Id}_Y$ и $\psi\varphi = \mathrm{Id}_X$. В этой ситуации объекты X и Y называются *изоморфными*, а морфизмы φ и ψ — *обратными* друг к другу. Например, в предупорядоченном множестве M, рассматриваемом как категория[3], изоморфность элементов m и n означает, что $m \leqslant n$ и $n \leqslant m$, т. е. m и n принадлежат одному классу эквивалентности, ассоциированному с предпорядком.

1.1.2. Подобъекты и фактор объекты. Класс инъективной стрелки с концом в X по модулю её умножения справа на обратимые стрелки называется *подобъектом* объекта X, а класс сюрьективной стрелки с началом в X по модулю левого умножения на обратимые стрелки — *фактор объектом* объекта X. Категория называется *умеренно мощной*[4], если подобъекты любого её объекта образуют множество. Все категории из прим. 1.3 умеренно мощны.

Упражнение 1.1 (частичный порядок на под- и фактор объектах). Проверьте, что в умеренно мощной категории отношение $\varphi \subseteq \psi$, означающее, что существует такая стрелка ξ, что $\varphi = \psi\xi$, задаёт частичный порядок на множестве подобъектов, а отношение $\varphi \geqslant \psi$, означающее наличие такой стрелки ξ, что $\varphi = \xi\psi$, задаёт частичный порядок на множестве фактор объектов.

Пример 1.4 (конечные упорядоченные множества и комбинаторные симплексы) Обозначим через Δ_{big} категорию, объектами которой являются конечные упорядоченные множества X, а морфизмами — сохраняющие порядок[5] отображения. Категория Δ_{big} не является малой[6], но содержит полную малую подкатегорию $\Delta \subset \Delta_{\mathrm{big}}$, объектами которой являются конечные подмножества в $\mathbb{Z}$ вида

$$[n] \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{0, 1, \dots, n\}, \quad n \geqslant 0, \tag{1-1}$$

со стандартным порядком. Множество (1-1) называется n-мерным *комбинаторным симплексом*, а категория Δ — *симплициальной категорией*. Для любого $X \in \mathrm{Ob}\,\Delta_{\mathrm{big}}$ имеется *единственный* изоморфизм $n_X : X \xrightarrow{\sim} [n]$ с *единственным* $[n] \in \mathrm{Ob}\,\Delta$, а именно нумерация элементов X в порядке возрастания.

Упражнение 1.2. Сколько всего стрелок в множестве $\mathrm{Hom}_\Delta([n],[m])$? Сколько среди них инъективных? Сколько сюрьективных? Покажите, что алгебра стрелок $\mathbb{Z}[\Delta]$,

[1] А также *вложением* или *инъективным* морфизмом.
[2] А также *наложением* или *сюрьективным* морфизмом.
[3] См. прим. 1.2 на стр. 4.
[4] По-английски: *well powered*.
[5] Т. е. такие отображения $\varphi : X \to Y$, что $x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) \leqslant \varphi(x_2)$ для всех $x_1, x_2 \in X$.
[6] По упомянутым выше логическим причинам, см. сноску на стр. 3.

как абстрактная ассоциативная алгебра, порождается стрелками

$$e_n = \mathrm{Id}_{[n]} \qquad \text{(тождественное отображение)} \tag{1-2}$$

$$\partial_n^{(i)} : [n-1] \hookrightarrow [n] \qquad \text{(вложение, образ которого не содержит } i\text{)} \tag{1-3}$$

$$s_n^{(i)} : [n] \twoheadrightarrow [n-1] \qquad \text{(наложение, склеивающее } i \text{ с } (i+1)\text{)} \tag{1-4}$$

и опишите образующие идеала соотношений между этими стрелками.

1.1.3. Обращение стрелок. С каждой категорией $\mathcal{C}$ связана *противоположная* категория $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ с теми же объектами, но с обращённым направлением всех стрелок:

$$\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} = \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}\,, \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)\,, \quad \varphi^{\mathrm{opp}} \circ \psi^{\mathrm{opp}} = (\psi \circ \varphi)^{\mathrm{opp}}\,.$$

На языке алгебр такое обращение стрелок означает переход от алгебры $C = K[\mathcal{C}]$ к противоположной алгебре C^{opp} из тех же элементов, но с происходящим в противоположном порядке умножением. Мономорфизмы и подобъекты категории $\mathcal{C}$ являются эпиморфизмами и фактор объектами категории $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ и наоборот.

1.2. Функторы. Функтор[1] $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{D}$ это отображение классов $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \to \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$, $X \mapsto F(X)$, и набор таких отображений множеств[2]

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))\,, \quad \varphi \mapsto F(\varphi)\,, \tag{1-5}$$

что $F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$ для всех $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и $F(\varphi \circ \psi) = F(\varphi) \circ F(\psi)$ всякий раз, когда композиция $\varphi \circ \psi$ определена. На языке ассоциативных алгебр, каждый функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ задаёт *гомоморфизм* алгебр стрелок $F : K[\mathcal{C}] \to K[\mathcal{D}]$. Если все отображения (1-5) сюрьективны, функтор F называется *полным*[3]. Образ такого функтора является полной подкатегорией. Если все отображения (1-5) инъективны, функтор F называется *строгим*[4]. Такой функтор задаёт вложение алгебр стрелок. Полные строгие функторы иначе называются *вполне строгими*.

Простейшие функторы — это *тождественный функтор* $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, тождественно действующий на объектах и морфизмах, и *забывающие функторы*, действующие из какой-либо категории множеств с дополнительной структурой[5], морфизмы в которой суть сохраняющие эту структуру отображения множеств, в категорию $\mathcal{S}et$ всех множеств — такие функторы просто забывают о структуре. Забывающий функтор не строг, если имеются различные морфизмы структур, одинаково действующие на подлежащих множествах, и не полон, если не всякое отображение множеств сохраняет рассматриваемую структуру.

---

[1] Иногда вместо «функтор» говорят *ковариантный функтор*.

[2] По одному отображению для каждой упорядоченной пары объектов $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$.

[3] По-английски: *full*.

[4] По-английски: *faithful*.

[5] Например, геометрической — такой, как топология или структура гладкого многообразия, или алгебраической — такой, как структура группы, кольца или модуля.

Пример 1.5 (геометрическая реализация комбинаторных симплексов)
Зададим функтор $\varDelta \to \mathcal{T}op$ из категории комбинаторных симплексов в категорию топологических пространств, сопоставляя n-мерному комбинаторному симплексу $[n]$ стандартный n-мерный симплекс[1]

$$\varDelta^n = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum x_\nu = 1\,,\; x_\nu \geqslant 0 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}\,, \tag{1-6}$$

а стрелке $\varphi : [n] \to [m]$ — единственное аффинное отображение $\varphi_* : \varDelta^n \to \varDelta^m$, действующее на базисные векторы по правилу $e_\nu \mapsto e_{\varphi(\nu)}$. Это строгий, но не полный функтор. Образующие элементы (1-3) и (1-4) алгебры стрелок категории $\varDelta$ переводятся этим функтором, соответственно, во *вложение i-той грани* $\varDelta^{(n-1)} \hookrightarrow \varDelta^n$ и в *вырождение вдоль i-того ребра*[2] $\varDelta^n \twoheadrightarrow \varDelta^{(n-1)}$.

1.2.1. Предпучки. Функтор $F : \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{D}$ называется *контравариантным функтором* из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{D}$ или *предпучком*[3] объектов категории $\mathcal{D}$ на категории $\mathcal{C}$. Такой функтор оборачивает композицию: $F(\varphi \circ \psi) = F(\psi) \circ F(\varphi)$ и на языке ассоциативных алгебр является *антигомоморфизмом* алгебр стрелок.

Пример 1.6 (триангулированные пространства)
Обозначим через $\varDelta_{\mathrm{s}} \subset \varDelta$ неполную подкатегорию, объектами которой тоже являются комбинаторные симплексы, $\mathrm{Ob}\,\varDelta_{\mathrm{s}} = \mathrm{Ob}\,\varDelta$, но в качестве морфизмов допускаются только *строго возрастающие*[4] отображения. Категория $\varDelta_{\mathrm{s}}$ называется *полусимплициальной категорией*.

Упражнение 1.3. Убедитесь, что алгебра стрелок $\mathbb{Z}[\varDelta_{\mathrm{s}}]$ порождается тождественными стрелками $e_n = \mathrm{Id}_{[n]}$ и отображениями вложения граней $\partial_n^{(i)}$ из (1-3).

Предпучок множеств $X : \varDelta_{\mathrm{s}}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ на полусимплициальной категории $\varDelta_{\mathrm{s}}$ называется *полусимплициальным множеством* и является ни чем иным, как комбинаторным описанием *триангулированного топологического пространства* $|X|$, которое называется *геометрической реализацией* полусимплициального множества X. В самом деле, функтор X задаёт для каждого целого неотрицательного n множество $X_n = X([n])$, каждый элемент которого мы будем воспринимать как стандартный n-мерный симплекс (1-6). Таким образом, каждое множество X_n представляет собою набор одинаковых n-мерных симплексов $\varDelta^n$. Пространство $|X|$ склеивается из них так. Стрелки $\varphi : [n] \to [m]$ категории $\varDelta_{\mathrm{s}}$ биективно соответствуют n-мерным граням m-мерного симплекса $\varDelta^m$. Будем воспринимать отображение $X(\varphi) : X_m \to X_n$, которое функтор X сопоставляет стрелке φ, как *правило склейки*: оно указывает каждому m-мерному симплексу $x \in X_m$, какой именно n-мерный симплекс $X(\varphi)x \in X_n$ надлежит приклеить к x в качестве φ-той n-мерной грани.

Так, на рис. 1◇1 показана стандартная триангуляция двумерного тора, склеенного из прямоугольника, изображённого на рис. 1◇2. Эта триангуляция состоит из одного 0-мерного симплекса, в который склеятся все вершины прямоугольника, трёх 1-

[1] Т. е. выпуклую оболочку концов стандартных базисных векторов $e_0, e_1, \dots, e_n$ в $\mathbb{R}^{n+1}$.
[2] Т. е. в проекцию симплекса на грань вдоль ребра, соединяющего i-тую вершину с $(i+1)$-й.
[3] Термин «предпучок» употребляется чаще в ситуациях, когда категоря $\mathcal{C}$ малая.
[4] Т. е. сохраняющие порядок и инъективные.

мерных симплексов, в которые склеятся, соответственно, две горизонтальных стороны, две вертикальных стороны, и диагональ прямоугольника, а также пары 2-мерных симплексов, на которые прямоугольник разрезается диагональю. Стрелки на рис. 1◇2 изображают порядок на множестве вершин каждого симплекса и направлены от меньших вершин к большим. Вертикальные рёбра e_2 с рис. 1◇2 изображаются на рис. 1◇1 меридианом тора, а горизонтальные рёбра e_1 — экватором тора. Соответствующее полусимплициальное множество X имеет $X_0 = \{v\}$, $X_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$, $X_2 = \{f_1, f_2\}$, и $X_i = \varnothing$ для всех $i \geqslant 3$, а отображения склейки $X(\varphi)$ действуют по правилам

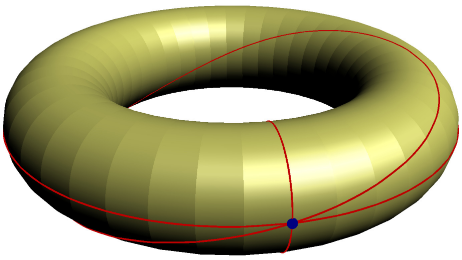

Рис. 1◇1. Триангуляция тора.

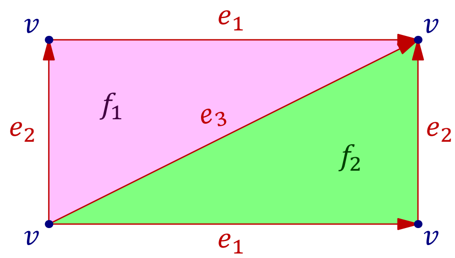

Рис. 1◇2. Симплексы триангуляции.

$$\begin{aligned} X(\partial_1^0) = X(\partial_1^1) :\ X_1 \to X_0\,, &\quad e_i \mapsto v \text{ для всех } i = 1,2,3 \\ X(\partial_2^0) :\ X_2 \to X_1\,, &\quad f_1 \mapsto e_1\,,\ f_2 \mapsto e_2\,, \\ X(\partial_2^1) :\ X_2 \to X_1\,, &\quad f_1 \mapsto e_3\,,\ f_2 \mapsto e_3\,, \\ X(\partial_2^2) :\ X_2 \to X_1\,, &\quad f_1 \mapsto e_2\,,\ f_2 \mapsto e_1\,. \end{aligned} \tag{1-7}$$

Упражнение 1.4. Существует ли триангуляция окружности S^1 а) тремя 0-мерными и тремя 1-мерным симплексами[1] б) одним 0-мерным и одним 1-мерным симплексом? Существует ли триангуляция двумерной сферы S^2 в) четырьмя 0-мерными, шестью 1-мерными и четырьмя 2-мерным симплексами г) двумя 0-мерными, одним 1-мерным и одним 2-мерным симплексом? Если да, задайте все отображения $X(\varphi)$ явно, если нет, объясните почему.

Пример 1.7 (симплициальные множества)
Предпучок множеств $X : \Delta^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ на всей симплициальной категории называется *симплициальным множеством*. Из каждого симплициального множества X также, как и в предыдущем примере, можно изготовить топологическое пространство $|X|$, называемое его *геометрической реализацией*. Для этого, как и выше, сопоставим каждой точке $x \in X_n$ стандартный n-мерный симплекс Δ_x^n и обозначим через $\varphi^* \stackrel{\text{def}}{=} X(\varphi)$ отображение $X_m \to X_n$, которое функтор X сопоставляет каждому неубывающему отображению $\varphi : [n] \to [m]$ из категории Δ, а через $\varphi_* : \Delta^n \to \Delta^m$ — аффинное отображение симплексов, переводящее вершины симплекса Δ^n в вершины симплекса Δ^m так, как предписывает φ. После чего для каждого m, каждого $x \in X_m$ и каждой стрелки $\varphi : [n] \to [m]$ склеим каждую точку $s \in \Delta^n_{\varphi^*(x)}$ с точкой $\varphi_*(s) \in \Delta^m_x$. На языке

[1] Т. е. можно ли получить окружность в качестве геометричекой реализации полусимплициального множества X, у которого X_0 и X_1 состоят из трёх элементов, а все остальные X_i пусты.

формул результат такой склейки описывается как топологическое фактор пространство дизъюнктного объединения[1] $\bigsqcup_{n\geqslant 0} X_n \times \Delta^n$ по наименьшему отношению эквивалентности, содержащему отождествления $(\varphi^* x, s) \simeq (x, \varphi_* s)$ для всех точек $x \in X_m$, $s \in \Delta^n$ и стрелок $\varphi : [n] \to [m]$.

Если стрелка $\varphi : [n] \to [m]$ является композицией наложения $\sigma : [n] \twoheadrightarrow [k]$ и вложения $\delta : [k] \hookrightarrow [m]$, то каждый n-мерный симплекс Δ^n_z, лежащий в образе φ^* и помеченный точкой $z = \sigma^* y = \sigma^* \delta^* x$, вклеится в пространство $|X|$ в виде k-мерного симплекса $\Delta^k_y = \sigma_* \Delta^n_z$, полученного из Δ^n_z аффинно линейной проекцией $\sigma_* : \Delta^n \twoheadrightarrow \Delta^k$. При этом он окажется δ-той k-мерной гранью m-мерного симплекса Δ^m_x. Таким образом, каждый симплекс $z \in X_n$, лежащий в образе отображения σ^*, отвечающего какой-нибудь стрелке $\sigma : [n] \to [k]$ с $k < n$, виден в итоговом пространстве $|X|$ как симплекс меньшей, чем n размерности. Такие симплексы называются *вырожденными*. Их использование позволяет описывать более общие клеточные структуры, чем стандартные триангуляции. Платой за это является громоздкость получающегося описания: для любого функтора $X : \Delta^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ каждое из множеств X_n непусто.

Например, n-мерная сфера S^n гомеоморфна топологическому фактору стандартного n-мерного симплекса по его границе[2] $S^n \simeq \Delta^n / \partial\Delta^n$. Этот гомеоморфизм задаёт на сфере S^n клеточную структуру, состоящую из одной нульмерной вершины, в которую склеится граница симплекса, и одной n-мерной клетки, в которую превратится весь симплекс. Она описывается предпучком $X : \Delta^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$, у которого при всех k множество $X_k = X([k])$ получается из множества $\mathrm{Hom}_\Delta([k],[n])$ отождествлением всех неэпиморфных стрелок в один элемент, а правило склейки $\varphi^* : X_m \to X_k$, отвечающее неубывающему отображению $\varphi : [k] \to [m]$, переводит класс стрелки $\zeta : [m] \to [n]$ в класс стрелки $\zeta\varphi : [k] \to [n]$.

Упражнение 1.5. Убедитесь, что это описание корректно задаёт предпучок X с геометрической реализацией $|X| \simeq S^n$, и найдите количество элементов в каждом множестве X_k, $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Пример 1.8 (предпучки и пучки на топологических пространствах)
Исторически, термин «предпучок» впервые возник в контексте категории $\mathcal{C} = \mathcal{U}(X)$ всех открытых подмножеств $U \subset X$ заданного топологического пространства X. Предпучок $F : \mathcal{U}(X)^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{D}$ сопоставляет каждому открытому множеству $U \subset X$ объект $F(U) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$, который называется *сечениями* предпучка F над U. В зависимости от категории $\mathcal{D}$ сечения могут образовывать множество, кольцо, алгебру, векторное или топологическое пространство и т. п. Морфизм $F(W) \to F(U)$, отвечающий включению $U \subset W$, называется *ограничением сечений*, определённых над W, на подмножество U, а результат его применения к сечению $s \in F(W)$ обозначается через $s|_U$. Вот несколько типичных примеров таких предпучков:

1) предпучок Γ_E локальных сечений непрерывного отображения $p : E \to X$ имеет в качестве $\Gamma_E(U)$ множество таких непрерывных отображений $s : U \to E$,

[1] В котором множества X_n рассматриваются с *дискретной*, а симплексы $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ со стандартной топологией объемлющего вещественного аффинного пространства.

[2] Т. е. склеивании всех точек границы в одну. Например, двумерная сфера S^2 получается таким способом из треугольника.

что[1] $p \circ s = \mathrm{Id}_U$, а его отображения ограничения — это обычные ограничения сечений с большего подмножества на меньшее

2) беря в предыдущем примере в качестве отображения проекцию $p : X \times Y \to X$, получаем предпучок локальных непрерывных отображений $\mathcal{C}^0(X, Y)$ пространства X в пространство Y, имеющий в качестве сечений над $U \subset X$ непрерывные отображения $s : U \to Y$

3) дальнейшими специализациями являются так называемые *структурные предпучки* $\mathcal{O}_X$: предпучок дифференцируемых функций $X \to \mathbb{R}$ на гладком вещественном многообразии X, предпучок локальных голоморфных функций $X \to \mathbb{C}$ на комплексно аналитическом многообразии X, предпучок локальных рациональных функций $X \to \Bbbk$ на алгебраическом многообразии X над полем $\Bbbk$ и т. п. (все они являются предпучками алгебр над соответствующим полем)

4) постоянный *предпучок* S имеет в качестве $S(U)$ одно и то же фиксированное множество S для всех $U \subset X$, и все его отображения ограничения — тождественные морфизмы Id_S.

Предпучок F называется *пучком*, если для любого семейства открытых подмножеств U_i и любого набора таких локальных сечений $s_i \in F(U_i)$, что $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ при всех i, j, существует единственное такое сечение $s \in F(\bigcup_i U_i)$, что $s|_{U_i} = s_i$ при всех i. В случае, когда имеется не более одного такого сечения (но может не быть и ни одного), предпучок F называется *отделимым*. Все предпучки (1) – (4) отделимы, и только последний из них — постоянный *предпучок* — не является пучком, поскольку для непересекающихся открытых множеств U_1, U_2 не всякая пара констант $s_i \in S(U_i)$ является ограничением одной константы $s \in S(U_1 \sqcup U_2)$. Тем не менее, наряду с постоянным предпучком в природе имеется и

5) постоянный *пучок* $S^\sim$, у которого $S^\sim(U)$ это *непрерывные* отображения $U \to S$ в множество S, рассматриваемое с *дискретной* топологией, или — что то же самое — *локально* постоянные функции со значениями в S.

Упражнение I.6. Опишите множество первообразных действительной функции $1/x$.

1.2.2. Функторы Hom. С каждым объектом $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ любой категории $\mathcal{C}$ связаны функтор $h^X : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, который переводит объект Y в множество морфизмов

$$h^X(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}(X, Y)\,,$$

а стрелку $\varphi : Y_1 \to Y_2$ в отображение $\varphi_* : \mathrm{Hom}(X, Y_1) \to \mathrm{Hom}(X, Y_2)$, $\psi \mapsto \varphi \circ \psi$, левого умножения на эту стрелку, а также предпучок $h_X : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, который переводит объект Y в множество морфизмов

$$h_X(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}(Y, X)\,,$$

а стрелку $\varphi : Y_1 \to Y_2$ в отображение $\varphi^* : \mathrm{Hom}(Y_2, X) \to \mathrm{Hom}(Y_1, X)$, $\psi \mapsto \psi \circ \varphi$, правого умножения на эту стрелку.

[1]Это требование означает, что каждая точка $x \in U$ отображается в слой $p^{-1}(x)$ над нею.

Например, предпучок $h_{[n]} : \Delta_s \to \mathcal{S}et$ на полусимплициальной категории Δ_s задаёт стандартную триангуляцию стандартного n-мерного симплекса: множество её k-мерных симплексов $h_{[n]}([k]) = \mathrm{Hom}([k],[n])$ это в точности множество всех k-мерных граней. Предпучок $h_U : \mathcal{U}(X) \to \mathcal{S}et$ на топологическом пространстве X имеет ровно одно сечение над всеми $W \subseteq U$ и пустое множество сечений над любым $W \nsubseteq U$. Вот ещё несколько примеров.

Пример 1.9 (двойственность в категории векторных пространств)
Предпучок $h_{\Bbbk} : \mathcal{V}ec_{\Bbbk}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{V}ec_{\Bbbk}$ сопоставляет векторному пространству V двойственное векторное пространство $h_{\Bbbk}(V) = \mathrm{Hom}(V, \Bbbk) = V^*$, а линейному отображению $\varphi : V \to W$ — двойственное отображение $\varphi^* : W^* \to V^*$, переводящее линейную форму $\xi : W \to \Bbbk$ в линейную форму $\xi \circ \varphi : V \to \Bbbk$.

Пример 1.10 (двойственность конечных упорядоченных множеств)
Это комбинаторная версия предыдущего примера. Обозначим через через ∇_{big} категорию конечных упорядоченных множеств из не менее двух элементов, морфизмами в которой являются неубывающие отображения, переводящие минимальный элемент в минимальный, а максимальный — в максимальный[1]. Тавтологическое включение $\nabla_{\mathrm{big}} \hookrightarrow \Delta_{\mathrm{big}}$ является строгим, но не полным функтором. Предпучки

$$h_{[1]} : \Delta_{\mathrm{big}}^{\mathrm{opp}} \to \nabla_{\mathrm{big}} \quad \text{и} \quad h_{[1]} : \nabla_{\mathrm{big}}^{\mathrm{opp}} \to \Delta_{\mathrm{big}}$$

переводят упорядоченные множества $X \in \mathrm{Ob}\,\Delta_{\mathrm{big}}$ и $Y \in \mathrm{Ob}\,\nabla_{\mathrm{big}}$ в множества

$$X^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\Delta_{\mathrm{big}}}(X,[1]) \quad \text{и} \quad Y^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\nabla_{\mathrm{big}}}(Y,[1]),$$

порядок на которых задаётся поточечным сравнением значений:

$$\varphi \leqslant \psi, \quad \text{если } \varphi(x) \leqslant \psi(x) \text{ для всех } x.$$

Стрелка $\varphi : Z_1 \to Z_2$ переводится обоими функторами в морфизм правого умножения $\varphi^* : \mathrm{Hom}(Z_2,[1]) \to \mathrm{Hom}(Z_1,[1])$, $\xi \mapsto \xi \circ \varphi$. Иначе можно сказать, что множество Z^* это множество «дедекиндовых сечений» множества Z, т. е. множество таких разбиений $Z = Z_0 \sqcup Z_1$, что $z_0 < z_1$ для всех $z_0 \in Z_0$, $z_1 \in Z_1$, причём оба множества Z_i должны быть непусты, когда $Z \in \mathrm{Ob}\,\nabla_{\mathrm{big}}$, но одно из них может быть пусто, когда $Z \in \mathrm{Ob}\,\Delta_{\mathrm{big}}$. Обратите внимание, что сечения ведут себя *контра*вариантно по отношению к морфизмам: при наличии неубывающего отображения $Z_1 \to Z_2$ разбиение второго множества Z_2 индуцирует разбиение на Z_1, но не наоборот.

1.3. Естественные преобразования. Для пары функторов $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *естественным* (или *функториальным*) *преобразованием* F в G называется такое занумерованное объектами $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ семейство стрелок $f_X : F(X) \to G(X)$ в категории $\mathcal{D}$, что для любой стрелки $\varphi : X \to Y$ из $\mathcal{C}$ возникающая в категории $\mathcal{D}$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(\varphi)"] \arrow[d, "f_X"'] & F(Y) \arrow[d, "f_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(\varphi)"'] & G(Y) \end{tikzcd} \tag{1-8}$$

[1] Отметим, что минимальный и максимальный элементы различны.

коммутативна. На языке алгебр, гомоморфизм $F : K[\mathcal{C}] \to K[\mathcal{D}]$ наделяет алгебру $K[\mathcal{D}]$ структурой модуля над алгеброй $K[\mathcal{C}]$, в которой умножение элемента $b \in K[\mathcal{D}]$ на элемент $a \in K[\mathcal{C}]$ определяется правилом $a \cdot b \overset{\text{def}}{=} F(a) \cdot b$. Пара функторов F, G задаёт на алгебре $K[\mathcal{D}]$ две различных структуры $K[\mathcal{C}]$-модуля, и естественное преобразование $f : F \to G$ это гомоморфизм $K[\mathcal{C}]$-модулей, переводящий стрелку ψ с концом в $F(X)$ в стрелку $f_X \circ \psi$ с концом в $G(X)$, а все не заканчивающиеся в объектах вида $F(X)$ стрелки — в нуль.

Упражнение 1.7. Убедитесь, что $K[\mathcal{C}]$-линейность описанного отображения действительно означает, что для любого $\varphi \in K[\mathcal{C}]$ действие на $K[\mathcal{D}]$ операторов $F(\varphi)$ и $G(\varphi)$ удовлетворяет соотношению $f \circ F(\varphi) = G(\varphi) \circ f$.

1.3.1. Категории функторов. Функторы из малой категории $\mathcal{C}$ в произвольную категорию $\mathcal{D}$ образуют категорию $\mathcal{F}un(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, объектами которой являются функторы $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, а морфизмами — естественные преобразования $f : F \to G$. Для малой категории $\mathcal{C}$ мы будем обозначать категорию предпучков $\mathcal{F}un(\mathcal{C}^{\text{opp}}, \mathcal{D})$ через $p\mathcal{S}h(\mathcal{C}, \mathcal{D})$. Опущенная буква $\mathcal{D}$ в этой записи по умолчанию означает, что $\mathcal{D} = \mathcal{S}et$, т. е. $p\mathcal{S}h(\mathcal{C}) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{F}un(\mathcal{C}^{\text{opp}}, \mathcal{S}et)$.

Упражнение 1.8. Проверьте, что описанное в n° 1.2.2 сопоставление $X \mapsto h_X$ задаёт функтор $\mathcal{C} \to p\mathcal{S}h(\mathcal{C})$, а сопоставление $X \mapsto h^X$ — предпучок $\mathcal{C}^{\text{opp}} \to \mathcal{F}un(\mathcal{C}, \mathcal{S}et)$.

Пример 1.11 (категория предпучков)
Предпучки на категории $\mathcal{U}(X)$ открытых множеств топологического пространства X обычно называются просто предпучками на X. Они образуют категорию, обозначаемую $p\mathcal{S}h(X)$. Морфизм предпучков $f : F \to G$ на X задаётся набором согласованных с ограничениями отображений между множествами сечений $f_U : F(U) \to G(U)$, по одному отображению для каждого открытого $U \subset X$. Согласованность с ограничениями означает, что $f_W(s)|_U = f_U(s|_U)$ для любой пары вложенных открытых множеств $U \subset W$ и любого сечения $s \in F(W)$. Пучки и отделимые предпучки[1] на X составляют полные подкатегории $\mathcal{S}h(X)$ и $sp\mathcal{S}h(X)$ в категории всех предпучков $p\mathcal{S}h(X)$.

Пример 1.12 (категория симплициальных множеств)
Предпучки $X : \Delta \to \mathcal{S}et$ на симплициальной категории[2] Δ, образуют категорию, морфизмами $X \to Y$ в которой являются наборы отображений $f_n : X_n \to Y_n$, согласованные со склейкой, т. е. такие, что для любого симплекса $x \in X_m$ и неубывающего отображения $\varphi : [n] \to [m]$ из Δ в Y_n выполняется равенство $f_n(\varphi^* x) = \varphi^* f_m(x)$. На геометрическом языке такому отображению отвечает непрерывное отображение $f : |X| \to |Y|$, при котором образ каждого симплекса Δ^n_x в пространстве[3] $|X|$ отображается на образ симплекса $\Delta^n_{f_n(x)}$ в пространстве $|Y|$ так, что все соотношения инцидентности[4] между симплексами при этом сохраняются.

[1] См. прим. 1.8 на стр. 9.
[2] См. прим. 1.7 на стр. 8.
[3] Этот образ, вообще говоря, может быть симплексом меньшей, чем n, размерности.
[4] Т. е. отношения вида «симплекс a является φ-той гранью (или ψ-тым вырождением) симплекса b».

1.3.2. Эквивалентности категорий. Категории $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ называются *эквивалентными*, если между ними есть такие функторы $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, что композиция GF естественно изоморфна тождественному функтору $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$, а композиция FG естественно изоморфна $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$, т. е. имеются функториальные по $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ преобразования

$$GF(X) \simeq X \quad \text{и} \quad FG(Y) \simeq Y\,, \tag{1-9}$$

являющиеся для всех X и Y изоморфизмами в категориях $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ соответственно. Такие функторы F и G называются *квазиобратными* друг другу *эквивалентностями категорий*. Подчеркнём, что наличие изоморфизмов (1-9) не означает равенств $FG = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ или $GF = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$: объекты $GF(X)$ и X могут быть различны, как и объекты $FG(Y)$ и Y.

Пример 1.13 (выбор базиса)
Зафиксируем поле $\Bbbk$ и обозначим через $\mathcal{vec}$ категорию конечномерных векторных пространств над $\Bbbk$, а через $\mathcal{crd} \subset \mathcal{vec}$ — её полную малую подкатегорию со счётным множеством объектов, коими являются *координатные* пространства $\Bbbk^n$, где $n \geqslant 0$ и $\Bbbk^0 = \{0\}$. Зафиксируем в каждом пространстве $V \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{vec}$ какой-нибудь базис, т. е. выберем для каждого $V \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{vec}$ изоморфизм[1]

$$f_V : V \simeq \Bbbk^{\dim(V)}\,, \tag{1-10}$$

причём для всех координатных пространств положим $f_{\Bbbk^n} = \mathrm{Id}_{\Bbbk^n}$. Рассмотрим функтор $F : \mathcal{vec} \to \mathcal{crd}$, переводящий векторное пространство V в координатное пространство $\Bbbk^{\dim V}$, а стрелку $\varphi : V \to W$ — в стрелку $F(\varphi) = f_W \circ \varphi \circ f_V^{-1}$, которую можно воспринимать как матрицу оператора φ в выбранных базисах пространств V и W. Покажем, что F является эквивалентностью категорий, квазиобратной к тавтологическому вложению $G : \mathcal{crd} \hookrightarrow \mathcal{vec}$. По построению мы имеем точное равенство[2] $FG = \mathrm{Id}_{\mathcal{crd}}$. Противоположная композиция $GF : \mathcal{vec} \to \mathcal{vec}$ принимает значения в несопоставимой с $\mathcal{vec}$ по мощности малой подкатегории $\mathcal{crd} \subset \mathcal{vec}$. Однако изоморфизмы (1-10) задают естественное преобразование из $\mathrm{Id}_{\mathcal{vec}}$ в GF, т. к. в силу определения действия функтора F на стрелки все диаграммы (1-8) коммутативны:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Id}_{\mathcal{vec}}(V) = V \arrow[r, "\varphi = \mathrm{Id}_{\mathcal{vec}}(\varphi)"] \arrow[d, "f_V"'] & W = \mathrm{Id}_{\mathcal{vec}}(W) \arrow[d, "f_W"] \\
GF(V) = \Bbbk^{\dim V} \arrow[r, "GF(\varphi) = f_W \circ \varphi \circ f_V^{-1}"] & \Bbbk^{\dim W} = GF(W)\,.
\end{tikzcd}$$

Тем самым, тождественный функтор $\mathrm{Id}_{\mathcal{vec}}$ естественно изоморфен композиции GF.

Упражнение 1.9. Покажите, что категория Δ_{big} канонически эквивалентна симплициальной подкатегории $\Delta \subset \Delta_{\mathrm{big}}$ (см. прим. 1.4 на стр. 5).

[1] Переводящий выбранный базис в стандартный базис пространства $\Bbbk^n$.
[2] А не просто изоморфизм функторов.

Предложение 1.1
Функтор $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ тогда и только тогда задаёт эквивалентность категорий, когда он вполне строг[1] и каждый объект $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ изоморфен объекту вида $G(X)$ для некоторого (зависящего от Y) объекта[2] $X = X(Y) \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$.

Доказательство. Пусть для каждого $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ указаны $X = X(Y) \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ и изоморфизм $f_Y : Y \xrightarrow{\sim} G(X)$, причём когда $Y = G(X)$, мы положим $f_{G(X)} = \operatorname{Id}_{G(X)}$. Зададим функтор $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ на объектах правилом $F(Y) = X(Y)$, а для стрелки $\varphi : Y_1 \to Y_2$ положим $F(\varphi)$ равным такой стрелке[3] $\psi : X(Y_1) \to X(Y_2)$, что $G(\psi) = f_{Y_2} \circ \varphi \circ f_{Y_1}^{-1}$. Тогда $FG = \operatorname{Id}_{\mathcal{C}}$ и для любой стрелки $\varphi : Y_1 \to Y_2$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Id}_{\mathcal{D}}(Y_1) = Y_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f_{Y_1}"'] & Y_2 = \operatorname{Id}_{\mathcal{D}}(Y_2) \arrow[d, "f_{Y_2}"] \\
GF(Y_1) = X_1 \arrow[r, "GF(\varphi)=G(\psi)"] & X_2 = GF(Y_2)\,.
\end{tikzcd}$$

Таким образом, $f_Y : Y \xrightarrow{\sim} G(X) = GF(Y)$ задают естественный изоморфизм тождественного функтора $\operatorname{Id}_{\mathcal{D}}$ с композицией GF. □

Упражнение 1.10. Покажите, что функтор дуализации из прим. 1.10 и ограничение функтора дуализации из прим. 1.9 на полную подкатегорию конечномерных пространств являются квазиобратными самим себе антиэквивалентностями[4] категорий.

1.4. Представимые функторы. Предпучок $F : \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$, естественно изоморфный предпучку $h_X : Y \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ для некоторого $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, называется *представимым*, и объект X в этом случае называют *представляющим* предпучок F. Двойственным образом, ковариантный функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ называется *копредставимым*, если он естественно изоморфен функтору $h^X : Y \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ для некоторого объекта X, который в этом случае называется *копредставляющим* функтор F.

Упражнение 1.11. Убедитесь, что тензорное произведение конечномерных векторных пространств $U \otimes V$ копредставляет функтор $\mathcal{V}ec \to \mathcal{S}et$, сопоставляющий векторному пространству W множество билинейных отображений $U \times V \to W$.

Множество $X_n = X([n])$ всех n-мерных симплексов триангулированного топологического пространства $X : \Delta_{\mathrm{s}}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ можно описать как множество всех *симплициальных* отображений $\Delta^n \to X$ из стандартным образом триангулированного n-мерного симплекса $\Delta^n = h_{[n]}$ в триангулированное пространство X, т. е. как множество естественных преобразований $\operatorname{Hom}_{p\mathcal{S}h(\Delta_{\mathrm{s}})}\left(h_{[n]}, X\right)$. Прямым обобщением этого наблюдения является

[1]Т. е. все отображения $G : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X), G(Y))$ являются изоморфизмами.
[2]Функторы G, обладающие этим свойством, называются *по существу сюръективными* (по-английски: *essentially surjective*).
[3]Поскольку $G : \operatorname{Hom}(X_1, X_2) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(G(X_1), G(X_2))$ является изоморфизмом, стрелка ψ существует и единственна.
[4]Т. е. контравариантными эквивалентностями: устанавливают эквивалентность не $\mathcal{C}$ с $\mathcal{D}$, а $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ с $\mathcal{D}$.

Лемма 1.1 (лемма Ионеды 1)
Для любого предпучка множеств $F:\ \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$ на произвольной категории $\mathcal{C}$ имеется функториальная по $F \in p\mathcal{S}h(\mathcal{C})$ и по $A \in \mathcal{C}$ биекция $F(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(\mathcal{C})}(h_A, F)$, переводящая элемент $a \in F(A)$ в естественное преобразование

$$f_X:\ \mathrm{Hom}(X, A) \to F(X)\,, \tag{1-11}$$

которое посылает стрелку $\varphi:\ X \to A$ в значение отображения $F(\varphi):\ F(A) \to F(X)$ на элементе a. Обратная биекция сопоставляет каждому естественному преобразованию (1-11) значение отображения $f_A:\ h_A(A) \to F(A)$ на элементе $\mathrm{Id}_A \in h_A(A)$.

Доказательство. Для любого естественного преобразования (1-11), любого объекта $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и любой стрелки $\varphi:\ X \to A$ мы имеем коммутативную диаграмму (1-8)

$$\begin{tikzcd} h_A(A) = \mathrm{Hom}(A, A) \arrow[r, "h_A(\varphi)"] \arrow[d, "f_A"'] & \mathrm{Hom}(X, A) = h_A(X) \arrow[d, "f_X"] \\ F(A) \arrow[r, "F(\varphi)"] & F(X)\,, \end{tikzcd} \tag{1-12}$$

верхняя строка которой переводит Id_A в φ, так что $f_X(\varphi) = F(\varphi)\big(f_A(\mathrm{Id}_A)\big)$. Это означает, что естественное преобразование $f:\ h_A \to F$ однозначно восстанавливается по элементу $a = f_A(\mathrm{Id}_A) \in F(A)$. Каждому элементу $a \in F(A)$ при этом отвечает преобразование (1-11), переводящее $\varphi \in \mathrm{Hom}(X, A)$ в $f_X(\varphi) = F(\varphi)(a) \in F(X)$ и естественное, поскольку для любой стрелки $\psi:\ Y \to X$ и всех $\varphi \in h_A(X)$ имеем

$$f_Y\left(h_A(\psi)\varphi\right) = f_Y(\varphi\psi) = F(\varphi\psi)a = F(\psi)F(\varphi)a = F(\psi)\left(f_X(\varphi)\right)\,,$$

т. е. $f_Y \circ h_A(\psi) = F(\psi) \circ f_X$ как отображения $h_A(X) \to F(Y)$. □

Упражнение 1.12 (лемма Ионеды 2). Для ковариантного функтора $F:\ \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ постройте функториальную по F и $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ биекцию $F(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{C},\mathcal{S}et)}(h^A, F)$.

Следствие 1.1
Функторы $X \mapsto h_X$ и $X \mapsto h^X$ задают вполне строгие ковариантное и контравариантное вложения категории $\mathcal{C}$ в категории предпучков и ковариантных функторов соответственно. Иными словами, имеются функториальные по $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ изоморфизмы $\mathrm{Hom}_{p\mathcal{S}h(\mathcal{C})}(h_A, h_B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}un(\mathcal{C})}(h^A, h^B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$.

Доказательство. Применяем леммы Ионеды к функторам $F = h_B$ и $F = h^B$. □

Следствие 1.2
Если объект $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, копредставляющий функтор $F:\ \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ (соотв. представляющий предпучок $F:\ \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{S}et$) существует, то он единствен с точностью до канонического изоморфизма.

Доказательство. Если имеются два таких объекта A, B, что $h^A \simeq F \simeq h^B$ (соотв. $h_A \simeq F \simeq h_B$), то беря подходящую композицию этих естественных изоморфизмов, мы получаем естественный изоморфизм $h^B \xrightarrow{\sim} h^A$ (соотв. $h_A \xrightarrow{\sim} h_B$), которому по лемме Ионеды отвечает естественный по A и B изоморфизм $A \xrightarrow{\sim} B$. □

1.4.1. Описание объектов универсальными свойствами. При помощи сл. 1.2 можно пытаться переносить в произвольную категорию $\mathcal{C}$ естественные[1] операции над множествами, имеющиеся в категории $\mathcal{S}et$. А именно, будем называть результатом применения такой операции к набору объектов $X_i \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ представляющий объект X предпучка $\mathcal{C}^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$, переводящего каждый объект $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ в результат применения этой операции к множествам $\operatorname{Hom}(Y, X_i)$ в категории $\mathcal{S}et$. Разумеется, такое неявное описание не даёт никаких гарантий *существования* определяемого объекта, т. к. рассматриваемый функтор может оказаться непредставимым. Однако, если он представим, то представляющий объект X, во-первых, автоматически обладает некоторыми «универсальными свойствами», а во-вторых, единствен с точностью до *единственного* изоморфизма, сохраняющего эти свойства. Вдобавок, у каждой такого рода конструкции есть двойственная версия, получающаяся из предыдущей обращением стрелок и объявляющая результатом теоретико множественной операции над объектами $X_i \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ копредставляющий объект ковариантного функтора $\mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, переводящего $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ в результат применения операции к множествам $\operatorname{Hom}(X_i, Y)$.

Пример 1.14 (произведение $A \times B$)
Определим *произведение* $A \times B$ объектов $A, B \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ произвольной категории $\mathcal{C}$ как объект, представляющий предпучок $\mathcal{C}^{\text{opp}} \to \mathcal{S}et$, $Y \mapsto \operatorname{Hom}(Y, A) \times \operatorname{Hom}(Y, B)$. Если произведение существует, то имеется функториальный по Y изоморфизм

$$\beta_Y : \operatorname{Hom}(Y, A \times B) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(Y, A) \times \operatorname{Hom}(Y, B)\,.$$

Полагая в нём $Y = A \times B$, получаем пару стрелок

$$A \xleftarrow{\pi_A} A \times B \xrightarrow{\pi_B} B\,, \tag{1-13}$$

изображающих элемент $\beta_{A\times B}(\operatorname{Id}_{A\times B}) \in \operatorname{Hom}(A \times B, A) \times \operatorname{Hom}(A \times B, B)$. Пара стрелок (1-13) универсальна в том смысле, что для любой пары стрелок

$$A \xleftarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} B\,, \quad (\varphi, \psi) \in \operatorname{Hom}(Y, A) \times \operatorname{Hom}(Y, B)\,, \tag{1-14}$$

существует единственная стрелка $\varphi \times \psi : Y \to A \times B$, такая что $\beta_Y(\varphi \times \psi) = (\varphi, \psi)$. Коммутативная диаграмма[2]

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}(A \times B, A \times B) \arrow[r, "h_{A\times B}(\varphi\times\psi)"] \arrow[d, "\beta_{A\times B}"'] & \operatorname{Hom}(Y, A \times B) \arrow[d, "\beta_Y"] \\
\operatorname{Hom}(A \times B, A) \times \operatorname{Hom}(A \times B, B) \arrow[r, "h_A(\varphi\times\psi)\times h_B(\varphi\times\psi)"] & \operatorname{Hom}(Y, A) \times \operatorname{Hom}(Y, B)\,,
\end{tikzcd}$$

верхняя горизонтальная стрелка которой переводит $\operatorname{Id}_{A\times B}$ в $\varphi\times\psi$, а композиция нижней и левой стрелок действуют на $\operatorname{Id}_{A\times B}$ как

$$\operatorname{Id}_{A\times B} \xmapsto{\beta_{A\times B}} (\pi_A, \pi_B) \xmapsto{h_A(\varphi\times\psi)\times h_B(\varphi\times\psi)} \big(\pi_A \circ (\varphi \times \psi), \pi_B \circ (\varphi \times \psi)\big)\,,$$

[1] Т. е. функториальные по всем участвующим множествам.

[2] Ср. с использованной в доказательстве леммы Ионеды диаграммой из форм. (1-12) на стр. 15

показывает, что равенство $\beta_Y(\varphi\times\psi) = (\varphi,\psi)$ равносильно равенствам $\varphi = \pi_A\circ(\varphi\times\psi)$ и $\psi = \pi_B \circ (\varphi \times \psi)$.

Упражнение 1.13. Пусть диаграмма $A \xleftarrow{\pi'_A} C \xrightarrow{\pi'_B} B$ тоже универсальна в том смысле, что для любой пары стрелок (1-14) существует единственная такая стрелка $Y \to C$, композиции которой с π'_A и π'_B равны φ и π соответственно. Убедитесь, что существует единственный изоморфизм $\gamma : C \xrightarrow{\sim} A \times B$, такой что $\pi_A \circ \gamma = \pi'_A$ и $\pi_B \circ \gamma = \pi'_B$. Покажите также, что любая пара стрелок

$$\alpha : A_1 \to A_2\,, \quad \beta : B_1 \to B_2$$

задаёт единственный морфизм $\alpha\times\beta : A_1\times B_1 \to A_2\times B_2$, такой что $\alpha\circ\pi_A = (\alpha\times\beta)\circ\alpha$ и $\beta \circ \pi_B = (\alpha \times \beta) \circ \beta$.

В категории множеств произведение $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\, b \in B\}$. Снабжённое слабейшей топологией, в которой π_A и π_B непрерывны, это множество задаёт произведение и в категории топологических пространств. Снабжённое покомпонентными операциями, оно же является произведением групп, колец и модулей над кольцами.

Пример 1.15 (копроизведение $A \otimes B$)
Двойственным образом, копроизведение $A \otimes B$ объектов $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ произвольной категории $\mathcal{C}$ определяется как объект, копредставляющий ковариантный функтор

$$Y \mapsto \mathrm{Hom}(A,Y) \times \mathrm{Hom}(B,Y)$$

из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{S}et$. Обращая все стрелки в предыдущем примере, мы можем охарактеризовать копроизведение как объект, включающийся в диаграмму

$$A \xrightarrow{\iota_A} A \otimes B \xleftarrow{\iota_B} B\,,$$

универсальную в том смысле, что для любой пары стрелок в $\mathcal{C}$

$$A \xrightarrow{\varphi} Y \xleftarrow{\psi} B$$

имеется единственный морфизм $\varphi \otimes \psi\colon A \otimes B \to Y$, такой что $\varphi = (\varphi \otimes \psi) \circ \iota_A$ и $\psi = (\varphi \otimes \psi) \circ \iota_B$.

Упражнение 1.14. Убедитесь, что если такая универсальная диаграмма существует, то она единственна с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного со стрелками ι_A, ι_B, и что любая пара стрелок $\alpha : A_1 \to A_2$, $\beta : B_1 \to B_2$ задаёт единственный такой морфизм $\alpha\otimes\beta : A_1\otimes B_1 \to A_2\otimes B_2$, что $\iota_A\circ\alpha = (\alpha\otimes\beta)\circ\alpha$.

Копроизведение в категории множеств и топологических пространств это дизъюнктное объединение $A\otimes B = A\sqcup B$. В категории групп это свободное произведение групп[1]

[1] Т. е. фактор свободной группы, порождённой дизъюнктным объединением $A \sqcup B$, по наименьшей нормальной подгруппе соотношений, позволяющих заменять пару соседних лежащих в одной группе букв их произведением. К примеру, $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} \simeq \mathbb{F}_2$ это свободная (некоммутативная) группа с двумя образующими.

$A \otimes B = A * B$. В категории модулей над кольцом[1] копроизведение совпадает с произведением и равно прямой сумме модулей $A \otimes B = A \times B = A \oplus B$. В категории коммутативных колец с единицей копроизведение $A \otimes B$ это тензорное произведение колец[2].

Пример 1.16 (свободные модули)
Обозначим через $R\text{-}\mathcal{M}od$ категорию левых модулей над фиксированным кольцом R. Для любого множества $E \in \operatorname{Ob} \mathcal{S}et$ ковариантный функтор

$$R\text{-}\mathcal{M}od \to \mathcal{S}et\,, \quad M \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{S}et}(E, M)\,,$$

копредставим *свободным* R-модулем с базисом E. Мы будем обозначать такой свободный модуль через $R \otimes E$. По определению, он состоит из формальных линейных комбинаций $\sum\limits_{e \in E} x_e e$ элементов множества E с коэффициентами $x_e \in R$, лишь конечное число из которых отлично от нуля.

Упражнение 1.15. Установите функториальный по M и E изоморфизм

$$\operatorname{Hom}_{R\text{-}\mathcal{M}od}(R \otimes E, M) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{S}et}(E, M)\,. \tag{1-15}$$

[1] В частности, в категории $\mathcal{A}b$ абелевых групп.

[2] Т. е. тензорное произведение подлежащих абелевых групп, как модулей над $\mathbb{Z}$, с покомпонентным умножением: $(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 \cdot a_2) \otimes (b_1 \cdot b_2)$.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 1.1. Транзитивность очевидна, рефлексивность — взять $\xi = \mathrm{Id}$, кососимметричность: в силу возможности сокращать слева (соотв. справа), равенства $\varphi = \psi\xi = \varphi\xi'\xi$ (соотв. $\varphi = \xi\psi = \xi\xi'\psi$) влекут $\xi'\xi = \mathrm{Id}$ (соотв. $\xi\xi' = \mathrm{Id}$), а равенства $\psi = \varphi\xi' = \psi\xi\xi'$ (соотв. $\psi = \varphi\xi' = \psi\xi\xi'$) влекут $\xi\xi' = \mathrm{Id}$ (соотв. $\xi\xi' = \mathrm{Id}$)

Упр. 1.6. Типичный ответ: «$\ln|x| + C$, где C — произвольная константа» *неверен*[1]. На самом деле деле C является сечением *постоянного пучка* $\mathbb{R}^{\sim}$ над несвязным открытым множеством $\mathbb{R} \smallsetminus 0$.

Упр. 1.12. Элементу $a \in F(A)$ отвечает естественное преобразование

$$f_X\colon\ \mathrm{Hom}(A, X) \to F(X)\,,$$

посылающее стрелку $\varphi\colon\ A \to X$ в значение отображения $F(\varphi)\colon\ F(A) \to F(X)$ на элементе a. Обратное отображение сопоставляет естественному преобразованию f_* значение отображения $f_A\colon\ h^A(A) \to F(A)$ на элементе $\mathrm{Id}_A \in h^A(A)$. Проверяется это с помощью построенной по произвольной стрелке $\varphi\colon\ A \to X$ диаграммы

$$\begin{tikzcd} h^A(A) = \mathrm{Hom}(A,A) \arrow[r, "h^A(\varphi)"] \arrow[d, "f_A"'] & \mathrm{Hom}(A,X) = h^A(X) \arrow[d, "f_X"] \\ F(A) \arrow[r, "F(\varphi)"] & F(X)\,, \end{tikzcd} \tag{2-23}$$

верхняя строка которой переводит Id_A в φ, так что $f_X(\varphi) = F(\varphi)\big(f_A(\mathrm{Id}_A)\big)$.

[1] И в былые годы абитуриентам мехмата случалось получать за такой ответ двойку на устном вступительном экзамене по математике.