Гомологии и когомологии групп и алгебр.

Терминология и обозначения. Пусть ассоциативная алгебра A с единицей над коммутативным кольцом K обладает *аугументацией*, т. е. тождественным на $K \cdot 1 \subset A$ эпиморфизмом алгебр $\varepsilon : A \twoheadrightarrow K$. Для каждого левого A-модуля M мы полагаем $H_i(A, M) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Tor}_i^A(K, M)$ и $H^i(A, M) = \operatorname{Ext}_A^i(K, M)$, где K обозначает A-модуль $K = A/\ker\varepsilon$. Под (ко)гомологиями группы G с коэффициентами в G-модуле M (над K) всегда понимаются (ко)гомологии её групповой алгебры $K[G]$ с аугументацией $\varepsilon : \sum_{g\in G} x_g \cdot g \mapsto \sum_{g\in G} x_g \in K$.

ГА7◇1. Для циклической группы C порядка n с образующей σ положим $N \overset{\text{def}}{=} 1 + \sigma + \sigma^2 + \cdots \sigma^{n-1} \in \mathbb{Z}[C]$. Покажите, что комплекс $\cdots \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[C] \xrightarrow{\sigma-1} \mathbb{Z}[C] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[C] \xrightarrow{\sigma-1} \mathbb{Z}[C] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$, где N и $(\sigma - 1)$ означают умножения на них, является свободной резольвентой тривиального $\mathbb{Z}[C]$-модуля $\mathbb{Z}$ и найдите в категории $\mathbb{Z}[C]$-модулей **а)** $H^i(C_n, \mathbb{Z})$ **б)** $H_i(C_n, \mathbb{Z})$ **в)** $H^i(C_n \times C_m, \mathbb{Z})$ **г)** $H_i(C_n \times C_m, \mathbb{Z})$.

ГА7◇2. Пусть F — свободная группа с базисом X. Покажите, что $0 \to \ker\varepsilon \to \mathbb{Z}[F] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$ это свободная резольвента $\mathbb{Z}$ и вычислите все $H^i(F, \mathbb{Z})$ и $H_i(F, \mathbb{Z})$.

ГА7◇3. Для левого линейного представления группы G в векторном пространстве V отображение множеств $D : G \to V$ со свойством $D(gh) = gD(h) + D(g)$ называется *V-дифференцированием*[1] группы G. Дифференцирования вида $D_v : g \mapsto gv - v$, где $v \in V$, называются *главными*. Покажите, что дифференцирования образуют абелеву группу $\operatorname{Der}(G, V)$ по сложению, изоморфную $\operatorname{Hom}_G(\ker\varepsilon, V)$, а главные дифференцирования составляют в ней подгруппу $\operatorname{PrDer}(G, V)$, изоморфную V/V^G, причём $\operatorname{Der}(G, V)/\operatorname{PrDer}(G, V) \simeq H^1(G, V)$.

ГА7◇4. В условиях зад. ГА7◇3 сопоставим каждому отображению множеств $G \times G \to V$, $(g, h) \mapsto [g, h]$, операцию на $E = V \times G$, действующую по формуле $(v, g) \cdot (w, h) \overset{\text{def}}{=} \big(v + gw + [g, h]\,,\, gh\big)$. Покажите, что **а)** E становится группой, если и только если скобка $[g, h]$ является нормализованным 2-коциклом группы G со значениями в V, т. е. удовлетворяет при всех $f, g, h \in G$ соотношениям $[g, 1] = [1, g] = 0$ и $f[g, h] - [fg, h] + [f, gh] - [f, g] = 0$ **б)** сопоставление скобке группы задаёт биекцию $H^2(G, V) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Ext}^2_{\Bbbk[G]}(\Bbbk, V)$ с классами групп E, содержащих V в качестве абелевой нормальной подгруппы с фактором $E/V \simeq G$ и присоединённым действием, задаваемым исходным представлением G в V, с точностью изоморфизмов, тождественных и на V и на G.

ГА7◇5. Установите для любой группы G, её подгруппы $H \subset G$ и H-модуля U канонические изоморфизмы: **а)** $H_i(G, \operatorname{Ind}(U)) \simeq H_i(H, U)$ **б)** $H^i(G, \operatorname{Coind}(U)) \simeq H^i(H, U)$.

ГА7◇6*. Для конечного расширения Галуа $\Bbbk \subset \mathbb{K}$ с группой Галуа $G = \operatorname{Aut}_{\Bbbk} \mathbb{K}$ покажите при всех $i > 0$, что $H_i(G, \mathbb{K}) = H^i(G, \mathbb{K}) = 0$.

ГА7◇7 (бар-конструкция). Для ассоциативной алгебры A с единицей над полем $\Bbbk$ обозначим через $\mathbb{B}_n = \mathbb{B}_n(A) \overset{\text{def}}{=} A^{\otimes(n+2)}$ тензорное произведение $(n + 2)$ копий векторного пространства A над $\Bbbk$, и рассмотрим дифференциал $\partial \overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \partial_\nu : \mathbb{B}_n \to \mathbb{B}_{n-1}$, где для каждого $n \geqslant 0$ и $0 \leqslant \nu \leqslant n$

$$\partial_\nu : a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \mapsto a_0 \otimes \cdots \otimes a_{\nu-1} \otimes \big(a_\nu a_{\nu+1}\big) \otimes a_{\nu+2} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}\,.$$

Покажите, что *бар-конструкция* $\cdots \xrightarrow{\partial} \mathbb{B}_2 \xrightarrow{\partial} \mathbb{B}_1 \xrightarrow{\partial} \mathbb{B}_0 \xrightarrow{\partial} A \to 0$

а) является свободной резольвентой $A - A$-бимодуля A в категории $A - A$-бимодулей

б) для любого левого A-модуля M тензорное произведение $\mathbb{B} \underset{A}{\otimes} M$, в котором $\mathbb{B}$ рассматривается как правый A-модуль, является свободной резольвентой M в категории A-$\mathcal{M}od$ и явно опишите действие дифференциала на элемент $a_0 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes m \in \mathbb{B}_n \underset{A}{\otimes} M \simeq A^{\otimes(n+1)} \underset{\Bbbk}{\otimes} M$

в) когомологии $H^i(A, \Bbbk)$ с коэффициентами в тривиальном модуле $\Bbbk$ суть когомологии DG-алгебры[2] $\mathsf{T}(A^*) = \bigoplus_{k\geqslant 0} A^{*\otimes k}$, умножение в которой — тензорное умножение, а дифференциал $d : \mathsf{T}(A^*) \to \mathsf{T}(A^*)$ степени 1 переводит 1 в 0, каждый ковектор $\alpha : A \to \Bbbk$ из A^* — в билинейную форму $d\alpha(a_1, a_2) = \alpha(a_1 a_2)$ из $A^* \otimes A^*$, и распространяется на всю тензорную алгебру по s-правилу Лейбница

г) тензорное умножение в $\mathsf{T}(A^*)$ корректно индуцирует ассоциативное умножение на $\oplus H^i(A, \Bbbk)$, совпадающее с умножением Ионеды на $\operatorname{Ext}_A^i(\Bbbk, \Bbbk) = H^i(A, \Bbbk)$

---

[1] Отображение $D : R \to M$ кольца R в $R - R$-бимодуль M называется *дифференцированием*, если $D(ab) = D(a)b + aD(b)$. В задаче $R = \Bbbk[G]$, а M это V с тривиальным (тождественным) правым действием G.

[2] Т. е. ассоциативной градуированной алгебры с дифференциалом, удовлетворяющим правилу Лейбница.

Персональный табель ____.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 7 (29.11.2018)

№	дата	кто принял	подпись
1а			
б			
в			
г			
2			
3			
4а			
б			
5а			
б			
6			
7а			
б			
в			
г			