Спектральные последовательности.

ГА5◇1. Точная диаграмма модулей слева называется *точной парой*, а средняя диаграмма

$$
\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "i"] & & D \arrow[dl, "j"] \\ & E \arrow[ul, "k"] & \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} iD \arrow[rr, "i"] & & iD \arrow[dl, "j_1"] \\ & E_1 \arrow[ul, "k_1"] & \end{tikzcd},
\qquad
\begin{tikzcd} i^mD \arrow[rr, "i"] & & i^mD \arrow[dl, "j_m"] \\ & E_m \arrow[ul, "k_m"] & \end{tikzcd},
$$

где $E_1 \overset{\text{def}}{=} \ker jk \,/\, \operatorname{im} jk$, $j_1 : i(x) \mapsto j(x)$, $k_1 : [x] \mapsto k(x)$, называется её *производной*. Покажите, что что:

а) E_1, j_1, k_1 определены корректно и производная тоже является точной парой

б) $E_1 \simeq k^{-1}(\operatorname{im} i)/j(\ker i)$

в) m-тая производная пара, изображённая справа, имеет $E_m \simeq k^{-1}\,(\operatorname{im} i^m)/j\,(\ker i^m)$, $k_m : [x] \mapsto k(x)$ и $j_m = ji^{-m} : i^m(x) \mapsto j(x)$.

ГА5◇2. Пусть модули в исходной точной паре биградуированы: $D = \bigoplus\limits_{p,q\in\mathbb{Z}} D^{p,q}$, $E = \bigoplus\limits_{p,q\in\mathbb{Z}} E^{p,q}$, а морфизмы однородны бистепени $|i| = (-1,1)$, $|j| = (0,0)|$, $|k| = (1,0)$. Разместим модули $E^{p,q}$ в клетки таблицы E_1, а их последовательные производные — в следующие таблицы E_2, E_3, … Убедитесь, что получится спектральная последовательность с $E_r^{p,q} \simeq k^{-1}\left(i^{r-1}D^{p+r-1,q-r+1}\right)/j\left(\ker(i^{r-1}|_{D^{p,q}})\right)$ и $d_r = j_{r-1}k_{r-1} = ji^{1-r}k : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$, переводящим класс $[e]$, такой что $k(e) = i^{r-1}(x)$, в $[j(x)]$.

Предел. Пусть $\forall\, p,q$ существует такое $N = N(p,q)$, что входящий в клетку (p,q) и выходящий из клетки (p,q) дифференциалы во всех таблицах $E_r^{p,q}$ с $r > N$ зануляются, так что корректно определены $E_\infty^{p,q} \overset{\text{def}}{=} E_{N+1}^{p,q} = E_{N+2}^{p,q} = \ldots$. Если существуют модули E_∞^n с такими убывающими фильтрациями $F^pE_\infty^n$, что $E_\infty^n = \bigcup_p F^pE_\infty^n$, $\bigcap_p F^pE_\infty^n = 0$ и $F^pE_\infty^n \,/\, F^{p+1}E_\infty^n = E_\infty^{p,n-p}$, то говорят, что $E_r^{p,q}$ *сходятся* к E_∞^n и пишут $E_r^{p,q} \Rightarrow E_\infty^n$.

ГА5◇3. Пусть каждый член K^m комплекса $\cdots \to K^m \to K^{m+1} \to \cdots$ снабжён конечной убывающей фильтрацией $K^m = F^0K^m \supset F^1K^m \supset F^2K^m \supset \cdots \supset 0$ с $d(F^pK^m) \subset F^pK^{m+1}$ при всех p,m, так что при каждом p имеется подкомплекс $F^pK \subset K$ вида $\cdots \to F^pK^m \to F^pK^{m+1} \to \cdots$ и точная тройка комплексов

$$0 \longrightarrow F^{p+1}K \xrightarrow{\ \iota\ } F^pK \xrightarrow{\ \pi\ } \operatorname{Gr}^pK \longrightarrow 0\,. \tag{1}$$

где $\operatorname{Gr}^pK \overset{\text{def}}{=} F^pK \,/\, F^{p+1}K$. Покажите, что **а)** модули $D^{p,q} = H^{p+q}(F^pK)$, $E^{p,q} = H^{p+q}(G^pK)$ и морфизмы $\iota_* : H^{p+q}(F^{p+1}K) \to H^{p+q}(F^pK)$, $\pi_* : H^{p+q}(F^pK) \to H^{p+q}(\operatorname{Gr}^pK)$, $\delta : H^{p+q}(\operatorname{Gr}^pK) \to H^{p+q}(F^{p+1}K)$ из длинной точной последовательности когомологий точной тройки (1) организуются в биградуированную точную пару, как в зад. ГА5◇2 **б)** в её спектральной последовательности $E_1^{p,q} = H^{p+q}(\operatorname{Gr}^p)$,

$$E_r^{p,q} \simeq \frac{Z_r^{p,q}}{B_r^{p,q}} \simeq \frac{A_r^{p,q} + F^{p+1}K^{p+q}}{dA_{r-1}^{p-r+1,q+r-2} + F^{p+1}K^{p+q}} \simeq \frac{A_r^{p,q}}{dA_{r-1}^{p-r+1,q+r-2} + A_{r-1}^{p+1,q-1}}\,, \quad \text{где}$$

$$A_r^{p,q} \overset{\text{def}}{=} \left\{x \in F^pK^{p+q} \mid dx \in F^{p+r}K^{p+q+1}\right\}\,,\ Z_r^{p,q} \overset{\text{def}}{=} \pi A_r^{p,q} \subset \operatorname{Gr}^pK^{p+q}\,,\ B_r^{p,q} \overset{\text{def}}{=} \pi dA_{r-1}^{p-r+1,q+r-2} \subset \operatorname{Gr}^pK^{p+q}$$

в) эта спектралка сходится к присоединённым факторам убывающей фильтрации на когомологиях $H(K)$, имеющей в качестве $F^pH(K)$ коциклы, лежащие в F^pK, по модулю лежащих в F^pK кограниц.

ГА5◇4. Рассмотрите на тотальном комплексе $\operatorname{Tot}(K)$ бикомплекса $K = \bigoplus K^{p,q}$ две фильтрации ${}^{I}F$ и ${}^{II}F$ с ${}^{I}F^p\operatorname{Tot}^m(K) = \bigoplus_{\nu\geqslant p,\,p+q=n} K^{p,q}$ и ${}^{II}F^q\operatorname{Tot}^m(K) = \bigoplus_{\nu\geqslant q,\,p+q=n} K^{p,q}$ и получите две спектралки: ${}^{I}E_r^{p,q} \Rightarrow H^n(\operatorname{Tot}(K))$ с ${}^{I}E_2^{p,q} = H_{d_1}^p(H_{d_2}^q(K))$ и ${}^{II}E_r^{p,q} \Rightarrow H^n(\operatorname{Tot}(K))$ с ${}^{II}E_2^{p,q} = H_{d_2}^q(H_{d_1}^p(K))$.

ГА5◇5. Пусть комплекс модулей K имеет единственный ненулевой модуль когомологий $H_0(K) = M$. Покажите, что

а) если модуль N таков, что $\operatorname{Ext}^\nu(K_i, N) = 0$ при всех i и $\nu \geqslant 1$, то $\operatorname{Ext}^m(M,N) = H^m\big(\operatorname{Hom}(K,N)\big)$

б) если модуль N таков, что $\operatorname{Tor}_\nu(K_i, N) = 0$ при всех i и $\nu \geqslant 1$, то $\operatorname{Tor}_m(M,N) = H^m(K \otimes N)$.

Персональный табель ____ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 5 (1.11.2018)

№	дата	кто принял	подпись
1а			
б			
в			
2			
3а			
б			
в			
4			
5			