## Комплексы и когомологии

**ГА4◇1.** Для комплексов $A$, $B$ (левых) модулей над ассоциативным кольцом с единицей рассмотрим комплекс $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(A,B) \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_i \mathrm{Hom}^i(A,B)$, где $\mathrm{Hom}^i(A,B) \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_\nu \mathrm{Hom}\left(A^\nu, B^{\nu+i}\right)$, с дифференциалом $d : \psi \mapsto d_B\psi - (-1)^{|\psi|}\psi d_A$, где $\psi \in \mathrm{Hom}^{|\psi|}(A,B)$ однороден степени $|\psi|$. Положим $\mathrm{Hom}(A,B) \overset{\text{def}}{=} \ker d \cap$ $\cap \mathrm{Hom}^0_{\mathrm{DG}}(A,B)$ и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Ho}}(A,B) \overset{\text{def}}{=} H^0\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(A,B)\right) = \mathrm{Hom}(A,B)/\operatorname{im} d$. Покажите, что **а)** комплексы с группами Hom в качестве морфизмов образуют абелеву категорию[1] **б)** комплексы с группами $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}$ в качестве морфизмов образуют DG-категорию[2] **в)** комплексы с группами $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Ho}}$ в качестве морфизмов образуют категорию[3] **г)** любой морфизм $\varphi \in \mathrm{Hom}(A,B)$ корректно задаёт гомоморфизм градуированных модулей $\varphi_* : \bigoplus_i H^i(A) \to \bigoplus_i H^i(B)$ **д)** если $\varphi = \psi$ в $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Ho}}(A,B)$, то $\varphi_* = \psi_*$ **е)** функторы когомологий $A \mapsto \bigoplus_i H^i(A)$ перестановочны с фильтрующимися копределами в $\mathcal{C}om$.

**ГА4◇2.** В категории $\mathcal{C}om$ постройте на каждом комплексе $K$ функториальную по $K$ исчерпывающую убывающую фильтрацию подкомплексами $\cdots \supset F^i \supset F^{i+1} \supset \cdots$, каждый присоединённый фактор которой $G^i = F^i / F^{i+1}$ имеет единственный ненулевой модуль когомологий, причём последний располагается в степени $i$ и равен **а)** $K^i$ **б)** $H^i(K)$.

**ГА4◇3.** Функция $\alpha : \mathrm{Ob}\,\mathcal{A} \to A$ из объектов абелевой категории $\mathcal{A}$ в абелеву группу $A$ называется *аддитивной*, если для любой точной тройки $0 \to K \to L \to M \to 0$ в $\mathcal{A}$ выполняется соотношение $\alpha(L) = \alpha(K) + \alpha(M)$. Докажите для любой аддитивной функции $\alpha$ и любого ограниченного[4] комплекса $K$ ***формулу Эйлера*** $\sum(-1)^i\alpha\left(K^i\right) = \sum(-1)^i\alpha\left(H^i(K)\right)$.

**ГА4◇4.** Функториально сопоставьте точной тройке $0 \to K \xrightarrow{\varphi} L \xrightarrow{\psi} M \to 0$ в категории $\mathcal{C}om$ точную последовательность $\cdots \to H^i(K) \xrightarrow{\varphi_*} H^i(L) \xrightarrow{\psi_*} H^i(M) \xrightarrow{\delta} H^{i+1}(K) \xrightarrow{\varphi_*} H^{i+1}(L) \to \cdots$.

**ГА4◇5.** Для коммутативного кольца $K$ и элемента $f \in K$ обозначим через $K_f$ двучленный комплекс $0 \to K \to K \to 0$, сосредоточенный в степенях 0 и 1, с дифференциалом $x \mapsto fx$.

**а)** Для произвольного комплекса $K$-модулей $L$ постройте длинную точную последовательность

$$\cdots \to H^i(L) \xrightarrow{x\mapsto fx} H^i(L) \to H^i(K_f \otimes L) \to H^{i+1}(L) \xrightarrow{x\mapsto fx} H^{i+1}(L) \to \cdots$$

**б)** Для последовательности элементов $f_1, f_2, \dots, f_m \in K$, в которой $f_i$ ни при каком $i$ не делит нуль в $K/(f_1, f_2, \dots, f_{i-1})$, вычислите когомологии комплекса $K_{f_1 f_2 \cdots f_m} \overset{\text{def}}{=} \bigotimes_\nu K_{f_\nu}$.

**ГА4◇6.** Вычислите когомологии комплекса $0 \to \Lambda^m V \to \Lambda^{m-1}V \to \dots \to \Lambda^1 V \to \Lambda^0 V \to 0$, где $V = K^m$ свободный $K$-модуль с базисом $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$, с дифференциалом[5] $d = \sum f_i \frac{\partial}{\partial\xi_i}$.

**ГА4◇7.** Обозначим через $x_i$ и $\xi_i$ образы стандартных базисных векторов модуля $V = K^m$ в симметрической и внешней алгебрах $SV$ и $\Lambda V$ соответственно и рассмотрим следующие два эндоморфизма $K$-модуля $SV \otimes \Lambda V = \bigoplus_{k,m} S^k V \otimes \Lambda^m V$:

$$\partial = \sum x_i \otimes \frac{\partial}{\partial\xi_i} : S^k V \otimes \Lambda^m V \to S^{k+1}V \otimes \Lambda^{m-1}V, \quad f \otimes \omega \mapsto \sum_{i=1}^n x_i \cdot f \otimes \frac{\partial\omega}{\partial\xi_i},$$

$$d = \sum \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes \xi_i : S^k V \otimes \Lambda^m V \to S^{k-1}V \otimes \Lambda^{m+1}V, \quad f \otimes \omega \mapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \otimes \xi_i \wedge \omega.$$

**а)** Покажите, что они не зависят от выбора базиса в $V$ и $\partial^2 = 0 = d^2$.

**б)** Вычислите s-коммутатор $\partial d + d\partial$ и когомологии обоих дифференциалов.

---

[1] Она называется *категорией комплексов* и обозначается $\mathcal{C}om$.

[2] Т. е. дифференциал на $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}$ связан с композицией *формулой Лейбница*: $d(\varphi\psi) = (d\varphi)\psi + (-1)^{|\varphi|}\varphi(d\psi)$. Эта категория называется DG-*категорией комплексов* и обозначается $\mathcal{C}om_{\mathrm{DG}}$.

[3] Она называется *гомотопической категорией комплексов* и обозначается $\mathcal{Ho}$.

[4] Комплекс $K$ называется *ограниченным сверху* (соотв. *снизу*), если $K^i = 0$ при всех $i \gg 0$ (соотв. при всех $i \ll 0$), и просто *ограниченным*, если он ограничен и сверху и снизу.

[5] Напомню, что *грассмановы* частные производные удовлетворяют *градуированному* правилу Лейбница $\frac{\partial}{\partial\xi_i}(\omega\wedge\eta) = \frac{\partial\omega}{\partial\xi_i}\wedge\eta +$ $+(-1)^{|\omega|}\omega\wedge\frac{\partial\eta}{\partial\xi_i}$.

Персональный табель ________________________________________.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

**Листок № 4 (18.10.2018)**

| № | дата | кто принял | подпись |
|---|---|---|---|
| 1а | | | |
| б | | | |
| в | | | |
| г | | | |
| д | | | |
| е | | | |
| 2а | | | |
| б | | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |
| 5а | | | |
| б | | | |
| 6 | | | |
| 7а | | | |
| б | | | |