§5. Функторы Tor и Ext

5.1. Инъективные и проективные резольвенты. Пусть абелева категория $\mathcal{A}$ имеет достаточно много проективных (соотв. инъективных) объектов, т. е. любой её объект является фактором проективного (соотв. подобъектом инъективного) объекта. Тогда любой объект $M \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ включается в точные последовательности

$$\cdots \to P_3 \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0 \tag{5-1}$$

$$0 \to M \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to I^3 \to \cdots , \tag{5-2}$$

где все P_ν проективны, а все I^μ инъективны. Для этого надо зафиксировать эпиморфизм $\pi_0 : P_0 \twoheadrightarrow M$ из какого-нибудь проективного объекта P_0 и положить $R_0 = \ker \pi_0$, потом зафиксировать эпиморфизм $\pi_1 : P_1 \twoheadrightarrow R_0$ из какого-нибудь проективного объекта P_1 и положить $R_1 = \ker \pi_1$ и т. д., после чего склеить все полученные точные тройки $R_i \hookrightarrow P_i \twoheadrightarrow R_{i-1}$ в одну длинную точную последовательность (5-1), где каждый морфизм $\partial_i : P_i \to P_{i-1}$ является композицией проекции $\pi_i : P_i \twoheadrightarrow R_{i-1}$ и включения $R_{i-1} \hookrightarrow P_{i-1}$. Инъективная версия (5-2) строится симметричным образом.

Пример 5.1 (свободная резольвента модуля и сизигии)
Каждый правый модуль M над ассоциативным кольцом S является фактором свободного. Гомоморфизм свободного модуля $F_0 = G_0 \otimes S$ с базисом G_0, отправляющий базисный вектор $g \in G_0$ в некоторый элемент $m_g \in M$, сюрьективен , если и только если элементы m_g, $g \in G_0$, линейно порождают M над S. Таким образом, выбор сюрьекции $\pi_0 : G_0 \otimes S \to M$ это в точности выбор множества образующих в M. Модуль M называется *конечно порождённым*, если множество образующих G_0 можно выбрать конечным. Ядро $R_0 = \ker \pi_0 \subset G_0 \otimes S$ состоит из таких[1] $r = \sum_{g \in G_0} g \otimes \varrho_g \in F_0$, что $\sum_{g \in G_0} m_g \varrho_g = 0$ в M, т. е. элементами R_0 являются в точности линейные соотношения между выбранными образующими. Поэтому R_0 называется *модулем соотношений* или *нулевых сизигий* между образующими m_g. Выбор следующей сюрьекции $\pi_1 : G_1 \otimes S \to R_0$ означает выбор некоторого множества G_1 *образующих соотношений* — таких, что любое линейное соотношение между элементами m_g является их линейной комбинацией. Модуль M называется *конечно представимым*, если он порождается конечным набором образующих и имеет конечное множество образующих линейных соотношений между ними, т. е. когда оба множества G_0 и G_1 можно сделать конечными. Ядро $R_1 = \ker \pi_1 \subset G_1 \otimes S$ состоит из линейных соотношений между образующими соотношениями и называется модулем *первых сизигий*. Он завит как от выбора образующих, так и от выбора образующих соотношений. Далее процесс продолжается по индукции.

Например, идеал $M = (x_1, x_2, x_3)$ в кольце многочленов $S = \Bbbk[x_1, x_2, x_3]$, где $\Bbbk$ — поле, имеет три образующих x_1, x_2, x_3, так что возникает эпиморфизм[2]

$$\pi_0 : S^3 \twoheadrightarrow M , \quad e_1 \mapsto x_1 , \; e_2 \mapsto x_2 , \; e_3 \mapsto x_3 . \tag{5-3}$$

Его ядро $R_0 = \ker \pi_0 \subset S$ содержит три очевидных соотношения:

$$r_1 = x_3 e_2 - x_2 e_3 , \quad r_2 = x_3 e_1 - x_1 e_3 , \quad r_3 = x_2 e_1 - x_1 e_2 , \tag{5-4}$$

[1] Напомним, что в наборе коэффициентов $(\varrho_g)_{g \in G_0}$ почти все $\varrho_g = 0$.

[2] Векторы e_1, e_2, e_3 образуют стандартный базис свободного модуля S^3 в левой части (5-3).

так что возникает гомоморфизм[1]

$$\pi_1 : S^3 \to \ker \pi_0 , \quad f_1 \mapsto r_1 , \; f_2 \mapsto r_2 , \; f_3 \mapsto r_3 . \tag{5-5}$$

На самом деле, модуль $R_0 = \ker \pi_0$ порождается соотношениями (5-4) и гомоморфизм (5-5) сюрьективен, хотя это и не вполне очевидно. Ядро R_1 гомоморфизма π_1 тоже ненулевое: между векторами $r_1, r_2, r_3 \in S^3$ из формулы (5-4) имеется очевидное соотношение $x_1 r_1 - x_2 r_2 + x_3 r_3 = 0$ (проверьте!), так что возникает гомоморфизм

$$\pi_2 : S \to \ker \pi_1 , \quad 1 \mapsto x_1 f_1 - x_2 f_2 + x_3 f_3 .$$

Сюрьективность обоих гомоморфизмов π_1, π_2 вытекает *a posteriori* из того, что построенный нами комплекс $0 \to S \to S^3 \to S^3 \to M \to 0$, дифференциалы которого задаются матрицами

$$\partial_0 = (x_1, x_2, x_3) : S^3 \to M , \quad \partial_1 = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix} : S^3 \to S^3 , \quad \partial_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : S \to S^3$$

является частью комплекса Кошуля из форм. (4-22) на стр. 73 (убедитесь в этом!) для регулярной[2] последовательности элементов $x_1, x_2, x_3 \in S$:

$$0 \to \Lambda^3 S^3 \xrightarrow{\partial} \Lambda^2 S^3 \xrightarrow{\partial} \Lambda^1 S^3 \xrightarrow{\partial} \Lambda^0 S^3 \to S/(x_1, x_2, x_3) \to 0 , \quad \partial = \sum x_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} ,$$

который точен согласно предл. 4.2 на стр. 74. Таким образом, регулярность последовательности элементов коммутативного кольца S означает, среди прочего, что в порождённом ими идеале, рассматриваемом как S-модуль, между этими элементами есть только очевидные «грассмановы» сизигии вида (5-4), имеющиеся в любом наборе элементов коммутативного кольца.

Определение 5.1 (канонические резольвенты)
Получающиеся удалением M из точных последовательностей (5-1) и (5-2) комплексы

$$\cdots \to P_3 \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to 0 \quad \text{и} \quad 0 \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to I^3 \to \cdots ,$$

которые состоят из проективных (соотв. инъективных) объектов и имеют единственную ненулевую (ко)гомологию $H_0(P) = M = H^0(I)$, называются, соответственно, *проективной* (или *канонической левой*) и *инъективной* (или *канонической правой*) *резольвентами* объекта M и обозначается P^M и I_M. Названия и обозначения объясняются тем, что сопоставления $M \mapsto P^M$ и $M \mapsto I_M$ являются функторами из категории $\mathcal{A}$ в гомотопическую категорию комплексов $\mathcal{H}o(\mathcal{A})$. Это вытекает из следующей леммы.

[1] Векторы f_1, f_2, f_3 образуют стандартный базис свободного модуля S^3 в левой части (5-5).
[2] См. опр. 4.4 на стр. 73.

Лемма 5.1
Если в диаграмме с точными строками

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_3^P"] & P_2 \arrow[r, "\partial_2^P"] \arrow[d, dashed, "\varphi_2^P"] & P_1 \arrow[r, "\partial_1^P"] \arrow[d, dashed, "\varphi_1^P"] & P_0 \arrow[r, "\partial_0^P"] \arrow[d, dashed, "\varphi_0^P"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
\cdots \arrow[r, "\partial_3^Q"'] & Q_2 \arrow[r, "\partial_2^Q"'] & Q_1 \arrow[r, "\partial_1^Q"'] & Q_0 \arrow[r, "\partial_0^Q"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

все объекты P_i проективны, то любая вертикальная стрелка $\varphi : M \to N$ достраивается до морфизма комплексов единственным с точностью до гомотопической эквивалентности набором вертикальных стрелок φ_i^P. Симметричным образом, в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\partial_0^Q"] \arrow[d, "\varphi"] & Q^0 \arrow[r, "\partial_1^Q"] \arrow[d, dashed, "\varphi_I^0"] & Q^1 \arrow[r, "\partial_2^Q"] \arrow[d, dashed, "\varphi_I^1"] & Q^2 \arrow[r, "\partial_3^Q"] \arrow[d, dashed, "\varphi_I^2"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\partial_0^I"'] & I^0 \arrow[r, "\partial_1^I"'] & I^1 \arrow[r, "\partial_2^I"'] & I^2 \arrow[r, "\partial_3^I"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

с точными строками и инъективными I^ν любая вертикальная стрелка $\varphi : N \to M$ тоже достраивается до морфизма комплексов единственным с точностью до гомотопической эквивалентности набором вертикальных стрелок φ_I^ν.

Доказательство. Пусть $\varphi_{-1}^P = \varphi$, и по индукции стрелка φ_{i-1}^P уже построена. Так как P_i проективен, стрелка $\varphi_{i-1}^P \circ \partial_i^P : P_i \to \ker \partial_{i-1}^Q$ поднимается вдоль эпиморфизма $\partial_i^Q : Q_i \twoheadrightarrow \ker \partial_{i-1}^Q$ до такой стрелки $\varphi_i^P : P_i \to Q_i$, что $\partial_i^Q \varphi_i^P = \varphi_{i-1}^P \partial_i^P$. Это доказывает существование подъёма. Чтобы установить его единственность, достаточно убедиться, что любой подъём φ^P нулевого морфизма $\varphi = 0$ гомотопен нулю, т. е. построить такие диагональные стрелки γ_i в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_3^P"] & P_2 \arrow[r, "\partial_2^P"] \arrow[d, "\varphi_2^P"] \arrow[dl, dashed, "\gamma_2"'] & P_1 \arrow[r, "\partial_1^P"] \arrow[d, "\varphi_1^P"] \arrow[dl, dashed, "\gamma_1"'] & P_0 \arrow[r, "\partial_0^P"] \arrow[d, "\varphi_0^P"] \arrow[dl, dashed, "\gamma_0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "0"] \arrow[dl, dashed, "\gamma_{-1}"'] & 0 \\
\cdots \arrow[r, "\partial_3^Q"'] & Q_2 \arrow[r, "\partial_2^Q"'] & Q_1 \arrow[r, "\partial_1^Q"'] & Q_0 \arrow[r, "\partial_0^Q"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

что $\varphi_i^P = \partial_{i+1}^Q \gamma_i + \gamma_{i-1} \partial_i^P$. Пусть $\gamma_{-1} = 0$ и по индукции стрелка γ_{i-1} уже построена. Разность $\varphi_i^P - \gamma_{i-1}\partial_i^P$ переводит P_i в ядро $\ker \partial_i^Q$, поскольку

$$\partial_i^Q(\varphi_i^P - \gamma_{i-1}\partial_i^P) = (\varphi_{i-1}^P - \partial_i^Q \gamma_{i-1})\partial_i^P = \gamma_{i-2}\partial_{i-1}^P \partial_i^P = 0 .$$

Следовательно, эта разность поднимается вдоль сюрьекции $\partial_{i+1}^Q : Q_{i+1} \twoheadrightarrow \ker \partial_i^Q$ до такой стрелки $\gamma_i : P_i \to Q_{i+1}$, что $\partial_{i+1}^Q \gamma_i = \varphi_i^P - \gamma_{i-1}\partial_i^P$. □

Упражнение 5.1. Докажите симметричное утверждение про инъективную резольвенту.

Следствие 5.1
Все проективные резольвенты произвольно заданного объекта M гомотопически эквивалентны друг другу. То же верно и для инъективных резольвент.

Доказательство. Пусть P и Q — две различных проективных резольвенты для M. Тождественный морфизм $\mathrm{Id}_M : M \to M$ поднимается до морфизмов комплексов $\alpha : P \to Q$ и $\beta : Q \to P$. Поскольку композиции $\alpha\beta : Q \to Q$ и $\beta\alpha : P \to P$ тоже поднимают Id_M, они гомотопны тождественным подъёмам Id_Q и Id_P соответственно. Дословно это же рассуждение проходит и для инъективных резольвент. $\square$

Следствие 5.2
Сопоставления $M \to P^M$ и $M \to I_M$ задают функторы из категории $\mathcal{A}$ в полные подкатегории гомотопической категории $\mathcal{Ho}(\mathcal{A})$, образованные комплексами из проективных и инъективных объектов категории $\mathcal{A}$ соответственно. $\square$

Лемма 5.2 (резольвента точной тройки)
Для любой точной тройки $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ в $\mathcal{A}$ и любых проективных резольвент $P' \twoheadrightarrow M'$ и $P'' \twoheadrightarrow M''$ у объекта M имеется проективная резольвента P, как градуированный объект изоморфная прямой сумме $P \simeq P' \oplus P''$ и оснащённая таким дифференциалом, что диаграмма[1]

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P' \arrow[r, "\iota'"] \arrow[d] & P \arrow[r, "\pi''"] \arrow[d] & P'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

коммутативна, а её верхняя строчка является точной тройкой в категории[2] $\mathcal{Com}(\mathcal{A})$.

Доказательство. Повторим описанное в начале n° 5.1 пошаговое построение проективной резольвенты M, подстраиваясь под уже заданные резольвенты для крайних членов тройки. Сначала рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
P'_0 \arrow[r, hook, "\iota'_0"] \arrow[d, "\partial'_0"'] \arrow[dr, "\tau_0"] & P'_0 \oplus P''_0 \arrow[r, two heads, "\pi''_0"] \arrow[d, dashed, "\partial_0"] & P''_0 \arrow[d, "\partial''_0"] \arrow[dl, dashed, "\eta_0"'] \\
M' \arrow[r, hook, "\alpha"'] & M \arrow[r, two heads, "\beta"'] & M'' ,
\end{tikzcd} \tag{5-6}$$

в которой $\tau_0 = \alpha\partial'_0$, а $\eta_0 : P''_0 \to M$ является подъёмом стрелки $\partial''_0 : P''_0 \twoheadrightarrow M''$ вдоль сюрьекции $\beta : M \twoheadrightarrow M''$. Стрелка $\partial_\nu : P'_0 \oplus P''_0 \to M$, однозначно задаваемая стрелками τ_0 и η_0, делает все квадраты коммутативными, превращая диаграмму (5-6) в точную тройку вертикальных двучленных комплексов. Её длинная точная последовательность когомологий имеет вид

$$0 \to \ker \partial'_0 \to \ker \partial_0 \to \ker \partial''_0 \to \operatorname{coker} \partial'_0 \to \operatorname{coker} \partial_0 \to \operatorname{coker} \partial''_0 \to 0\,.$$

[1] Морфизмы ι' и π'' которой взяты из канонической диаграммы прямой суммы

[2] Но, вообще говоря, нерасщепима в категории $\mathcal{Com}$.

Поскольку ∂_0' и ∂_0'' сюрьективны, построенный нами морфизм ∂_0 тоже сюрьективен, и мы имеем изображённую слева коммутативную диаграмму с точными строками, где мы положили $K_0' = \ker \partial_0'$, $K_0 = \ker \partial_0$, $K_0'' = \ker \partial_0''$:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
K_0' \arrow[r, hook, "\alpha_0"] \arrow[d, hook] & K_0 \arrow[r, dashed, two heads, "\beta_0"] \arrow[d, hook, dashed] & K_0'' \arrow[d, hook] \\
P_0' \arrow[r, hook, "\iota_0'"] \arrow[d, "\partial_0'"'] & P_0' \oplus P_0'' \arrow[r, two heads, "\pi_0''"] \arrow[d, dashed, "\partial_0"] & P_0'' \arrow[d, "\partial_0''"] \\
M' \arrow[r, hook, "\alpha"] \arrow[d] & M \arrow[r, two heads, "\beta"] \arrow[d, dashed] & M'' \arrow[d] \\
0 & 0 & 0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
K_1' \arrow[r, hook, "\alpha_1"] \arrow[d, hook] & K_1 \arrow[r, two heads, "\beta_1"] \arrow[d, hook, dashed] & K_1'' \arrow[d, hook] \\
P_1' \arrow[r, hook, "\iota_1'"] \arrow[d] \arrow[dr, "\tau_1"] & P_1' \oplus P_1'' \arrow[r, two heads, "\pi_1''"] \arrow[d, dashed] & P_1'' \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "\eta_1"'] \\
K_0' \arrow[r, hook, "\alpha_0"] \arrow[d] & K_0 \arrow[r, two heads, "\beta_0"] \arrow[d] & K_0'' \arrow[d] \\
0 & 0 & 0
\end{tikzcd}
$$

К её верхней строке применимо дословно то же рассуждение, что и к исходной точной тройке, в результате чего мы получаем изображённый справа второй этаж искомой резольвенты, где $\tau_1 : P_1' \to K_0$ является композицией вертикальной стрелки $P_1' \twoheadrightarrow K_0'$ с вложением $\alpha_0 : K_0' \hookrightarrow K_0$, стрелка $\eta_1 : P_1'' \to K_0$ является подъёмом стрелки $P_1'' \twoheadrightarrow K_0''$ вдоль эпиморфизма $\beta_0 : K_0 \twoheadrightarrow K_0''$, а стрелка $P_1' \oplus P_1'' \to K$, однозначно задаётся стрелками τ_1 и η_1. Продолжая в том же духе, мы получим согласованный набор диаграмм, которые склеиваются по вертикали в требуемые резольвенты

$$
\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "\partial_3'"] & \vdots \arrow[d, dashed, "\partial_3"] & \vdots \arrow[d, "\partial_3''"] \\
P_2' \arrow[r, hook, "\iota_2'"] \arrow[d, "\partial_2'"] & P_2' \oplus P_2'' \arrow[r, two heads, "\pi_2''"] \arrow[d, dashed, "\partial_2"] & P_2'' \arrow[d, "\partial_2''"] \\
P_1' \arrow[r, hook, "\iota_1'"] \arrow[d, "\partial_1'"] & P_1' \oplus P_1'' \arrow[r, two heads, "\pi_1''"] \arrow[d, dashed, "\partial_1"] & P_1'' \arrow[d, "\partial_1''"] \\
P_0' \arrow[r, hook, "\iota_0'"] \arrow[d, "\partial_0'"] & P_0' \oplus P_0'' \arrow[r, two heads, "\pi_0''"] \arrow[d, dashed, "\partial_0"] & P_0'' \arrow[d, "\partial_0''"] \\
M' \arrow[r, hook, "\alpha"] \arrow[d] & M \arrow[r, two heads, "\beta"] \arrow[d, dashed] & M'' \arrow[d] \\
0 & 0 & 0\,.
\end{tikzcd}
\tag{5-7}
$$

□

Упражнение 5.2. Сформулируйте и докажите симметричную версию лем. 5.2 для инъективных резольвент.

Лемма 5.3 (резольвента комплекса)
Над элементами любого комплекса $\cdots \to M_{\nu+1} \to M_\nu \to M_{\nu-1} \to \cdots$ в категории $\mathcal{A}$ можно надстроить проективные резольвенты $P_\nu \twoheadrightarrow M_\nu$ (внимание: каждый P_ν является комплексом!) таким образом, что поднимающая дифференциалы комплекса M последовательность морфизмов комплексов $\cdots \to P_{\nu+1} \to P_\nu \to P_{\nu-1} \to \cdots$ будет комплексом в категории $\mathcal{C}om(\mathcal{A})$, причём в категории градуированных объектов каждый член этого комплекса будет расщепляться в прямую сумму

$$P_\nu = \operatorname{im}\partial_{\nu+1} \oplus H_\nu \oplus \operatorname{im}\partial_\nu\,,$$

в которой $H_\nu = H_\nu(P)$ является комплексом ν-тых гомологий комплекса (комплексов) P, а $\operatorname{im}\partial_{\nu+1}$ и $\operatorname{im}\partial_\nu$ изоморфны комплексам-образам приходящего в комплекс P_ν и сходящего из комплекса P_ν дифференциалов $P_{\nu+1} \to P_\nu \to P_{\nu-1}$. Более того, каждый комплекс когомологий $H_\nu(P)$ является проективной резольвентой объекта $H_\nu(M)$.

Иными словами, над комплексом M надстраивается коммутативная диаграмма проективных модулей $P_{p,q}$ с точными столбцами

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & P_{\nu+1,2} \arrow[r] \arrow[d] & P_{\nu,2} \arrow[r] \arrow[d] & P_{\nu-1,2} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & P_{\nu+1,1} \arrow[r] \arrow[d] & P_{\nu,1} \arrow[r] \arrow[d] & P_{\nu-1,1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & P_{\nu+1,0} \arrow[r] \arrow[d] & P_{\nu,0} \arrow[r] \arrow[d] & P_{\nu-1,0} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & M_{\nu+1} \arrow[r] \arrow[d] & M_\nu \arrow[r] \arrow[d] & M_{\nu-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd} \tag{5-8}$$

которые являются проективными резольвентами объектов M_ν. Каждая строка этой диаграммы является комплексом, каждый член которого распадается в прямую сумму $P_{p,q} \simeq B_{p+1,q} \oplus Q_{p,q} \oplus B_{p,q}$, где $Q_{p,q} = H_p(P_{\bullet,q})$ является p-ой гомологией q-той строки, а $B_{p+1,q}$ и $B_{p,q}$ изоморфны образам приходящего в $P_{p,q}$ и исходящего из $P_{p,q}$ горизонтальных дифференциалов. Действие вертикального дифференциала на гомологии горизонтальных дифференциалов превращает объекты $Q_{p,\bullet}$ в проективные резольвенты когомологий $H_p(M)$ комплекса M.

Доказательство. Развалим исходный комплекс M на точные тройки вида

$$\operatorname{im}\partial_{\nu+1} \hookrightarrow \ker\partial_\nu \twoheadrightarrow H_\nu(M) \quad \text{и} \quad \ker\partial_\nu \hookrightarrow M_\nu \twoheadrightarrow \operatorname{im}\partial_\nu$$

Выберем для каждого ν проективные резольвенты $B_\nu \twoheadrightarrow \operatorname{im}\partial_\nu$, $Q_\nu \twoheadrightarrow H_\nu(M)$ и достроим их по лем. 5.2 до проективных резольвент

$$B_{\nu+1} \oplus Q_\nu \twoheadrightarrow \ker(\partial_\nu) \quad \text{и} \quad B_{\nu+1} \oplus Q_\nu \oplus B_\nu \twoheadrightarrow M_\nu$$

так, чтобы предыдущие точные тройки в категории $\mathcal{A}$ поднимались до расщепляющихся в категории градуированных объектов точных троек

$$B_{\nu+1} \hookrightarrow B_{\nu+1} \oplus Q_\nu \twoheadrightarrow Q_\nu \quad \text{и} \quad B_{\nu+1} \oplus Q_\nu \hookrightarrow B_{\nu+1} \oplus Q_\nu \oplus B_\nu \twoheadrightarrow B_\nu$$

в категории $\mathcal{C}om(\mathcal{A})$, которые мы обратно сложим в комплекс (комплексов)

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "\partial_{\nu+1}"] & B_{\nu+1} \oplus Q_\nu \oplus B_\nu \arrow[r, "\partial_\nu"] \arrow[d, equal] & B_\nu \oplus Q_{\nu-1} \oplus B_{\nu-1} \arrow[r, "\partial_{\nu-1}"] \arrow[d, equal] & \cdots \\ & P_\nu & P_{\nu-1} & \end{tikzcd}$$

с дифференциалом, тождественно отображающим третье слагаемое $B_\nu \subset P_\nu$ на первое слагаемое $B_\nu \subset P_{\nu-1}$ и аннулирующим два других слагаемых. По построению, ν-тый комплекс гомологий этого комплекса комплексов $H_\nu(P) = Q_\nu$ является проективной резольвентой для $H_\nu(M)$, а каждый комплекс P_ν является проективной резольвентой для M_ν. □

Определение 5.2 (резольвента Картана – Эйленберга)
Бикомплекс $C_{p,q}$, который состоит из проективных модулей $P_{p,q}$ из лем. 5.3 и получается из коммутативной диаграммы (5-8) изменением знаков вертикальных дифференциалов во всех столбцах с нечётными номерами, называется *проективной резольвентой Картана – Эленберга* комплекса M. Бикомплекс $C_{p,q}$ тоже имеет точные столбцы, являющиеся проективными резольвентами объектов M_ν, а расположенные в ν-м столбце гомологии его комплексов-строк доставляют проективную резольвенту гомологии $H_\nu(M)$ и отщепляются в категории градуированных объектов от $C_{p,q}$ прямыми слагаемыми.

Упражнение 5.3. Постройте для каждого комплекса $\cdots \to M^{\nu-1} \to M^\nu \to M^{\nu+1} \to \cdots$ *инъективную резольвенту Картана – Эйленберга*, т. е. такой бикомплекс $I^{p,q}$ инъективных объектов с дифференциалами степени $+1$ по горизонтали и вертикали, столбцы которого являются инъективными резольвентами объектов M^p, а гомологии комплексов-строк с морфизмами, индуцированными вертикальными дифференциалами, являются инъективными резольвентами гомологий $H_p(M)$ и в категории градуированных объектов отщепляются от $I^{p,q}$ прямыми слагаемыми.

5.2. Функторы Tor. Рассмотрим произвольное ассоциативное кольцо R с единицей, правый R-модуль M и левый R-модуль N, выберем для последних проективные резольвенты $P^M \twoheadrightarrow M$ и $P^N \twoheadrightarrow N$, дифференциалы в которых обозначим через ∂^M и ∂^N, и образуем комплексы абелевых групп $P^M \otimes_R N$ и $M \otimes_R P^N$ с дифференциалами $\partial^M \otimes_R \mathrm{Id}_N$ и $\mathrm{Id}_M \otimes_R \partial^N$. Первый из них получается применением функтора $Y \mapsto M \otimes_R Y$ к комплексу P^N, а второй — применением функтора $X \mapsto X \otimes_R N$ к комплексу P^M. Также рассмотрим бикомплекс абелевых групп $B_{\mu,\nu} = P^M_\mu \otimes_R P^N_\nu$ с горизонтальным дифференциалом $\partial_1 = \partial^M \otimes_R \mathrm{Id}_N$ и вертикальным дифференциалом $\partial_2 = \mathrm{Id}_M \otimes_R \partial^N$ и образуем его тотальный комплекс $\mathrm{Tot}(B) = P^M \otimes_R P^N$ с дифференциалом[1] $\partial^M \otimes_R \mathrm{Id}_N + \mathrm{Id}_M \otimes_R \partial^N$.

[1] Действующим на элементы с учётом того же кошулева правила знаков.

Лемма 5.4
Для левого (соотв. правого) проективного модуля P функтор $X \mapsto P \otimes_R X$ (соотв. функтор $Y \mapsto M \otimes_R Y$) точен.

Доказательство. Поскольку $X \otimes_R R \simeq X$ и $X \otimes_R (\bigoplus R) \simeq \bigoplus X$, функтор тензорного умножения на свободный модуль изоморфен функтору взятия прямой суммы модуля с самим собою и, стало быть, точен. Для проективного модуля P найдётся такой модуль Q, что модуль $P \oplus Q$ свободен. Тогда для любой точной тройки модулей $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$ возникает коммутативная диаграмма с точной верхней строкой

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \otimes_R (P \oplus Q) \arrow[r] \arrow[d, equal] & B \otimes_R (P \oplus Q) \arrow[r] \arrow[d, equal] & C \otimes_R (P \oplus Q) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & (A \otimes_R P) \oplus (A \otimes_R Q) \arrow[r] & (B \otimes_R P) \oplus (B \otimes_R Q) \arrow[r] & (C \otimes_R P) \oplus (C \otimes_R Q) \arrow[r] & 0\,,
\end{tikzcd}$$

где вертикальные стрелки означают канонические изоморфизмы дистрибутивности, а все морфизмы в нижней строке задаются диагональными матрицами. Поэтому обе компоненты нижней строки тоже точны. □

Лемма 5.5
Группы гомологий $H_k(P^M \otimes_R N)$, $H_k(M \otimes_R P^N)$ и $H_k(P^M \otimes_R P^N)$ канонически изоморфны друг другу при всех k, не зависят от выбора проективных резольвент и функториальны по M и N.

Доказательство. Для доказательства первого утверждения вычислим гомологии бикомплекса B при помощи двух спектральных последовательностей[1] из предл. 4.4 на стр. 81 с ${}^{I}E^2_{p,q} = H^{\partial_1}_p\left(H^{\partial_2}_q(B)\right)$ и ${}^{II}E^2_{p,q} = H^{\partial_2}_q\left(H^{\partial_1}_p(B)\right)$, сходящихся к градуированным факторам некоторых фильтраций на $H^{\partial_1+\partial_2}_{p+q}(P^M \otimes_R P^N)$. Поскольку p-й столбец бикомплекса B получен тензорным умножением проективной резольвенты P^N модуля N на проективный модуль P^M_p, он точен всюду кроме нулевого члена, имеющего $H_0(P^M_p \otimes_R P^N) \simeq P^M_p \otimes_R H_0(P^N) = P^M_p \otimes_R N$. Таким образом, все ненулевые модули ${}^{I}E^2_{p,q}$ сосредоточены в строке $q = 0$. Поэтому следующий лист уже является стабильным: $E^2 = E^\infty$. Он состоит из модулей $E^2_{p,0} = E^\infty_{p,0} \simeq H_p(P^M \otimes_R N)$ и имеет ровно один ненулевой элемент на каждой диагонали $p + q = n$. Это означает, что фильтрация на $H_{p+q}(P^M \otimes_R P^N)$ имеет ровно один ненулевой фактор, т. е. $H_p(P^M \otimes_R N) \simeq H_p(P^M \otimes_R P^N)$. Вторая спектралка ведёт себя симметрично: q-я строка бикомплекса B является результатом тензорного умножения проективной резольвенты P^M модуля M на проективный модуль P^N_q и точна всюду кроме нулевого члена, где имеет $H_0(P^M \otimes_R P^N_q) \simeq$ $\simeq M \otimes_R P^N_q$. Тем самым, все ненулевые модули ${}^{II}E^2_{p,q}$ сосредоточены в столбце $p = 0$, и $E^2_{0,q} = E^\infty_{0,q} \simeq H_q(M \otimes_R P^N)$, что даёт второй изоморфизм $H_q(M \otimes_R P^N) \simeq H_q(P^M \otimes_R P^N)$ и завершает доказательство первого утверждения. Второе и третье утверждения вытекают из того, что тензорное умножение комплексов на любой фиксированный модуль

[1] Преобразованных в текущие гомологические нижнеиндексные обозначения.

сохраняет гомотопическую эквивалентность, а значит корректно задаёт функтор из категории $\mathcal{H}o$ в себя.

Упражнение 5.4. Убедитесь, что если морфизм комплексов $\alpha : P \to Q$ стягивается гомотопией γ, то для любого модуля M морфизм $\alpha \otimes_R \mathrm{Id}_M : P \otimes_R M \to Q \otimes_R M$ стягивается гомотопией $\gamma \otimes_R \mathrm{Id}_M$.

Тем самым, при фиксированных M и k сопоставление $N \mapsto H_k(M \otimes_R P^N)$ является композицией функтора $R\text{-}\mathcal{M}od \to \mathcal{H}o$, $N \mapsto P^N$, функтора $\mathcal{H}o \to \mathcal{H}o$, $C \mapsto M \otimes_R C$, и функтора $\mathcal{H}o \to \mathcal{A}b$, $C \mapsto H_k(C)$. □

Определение 5.3 (функторы Tor)
Канонически изоморфные друг другу абелевы группы из лем. 5.5 обозначаются

$$\mathrm{Tor}_i^R(M, N) \stackrel{\text{def}}{=} H_i(P^M \otimes_R N) \simeq H_i(P^M \otimes_R P^N) \simeq H_i(M \otimes_R P^N)$$

и называются *левыми производными функторами* от тензорного произведения[1]. Если понятно (или не важно) над каким кольцом R рассматриваются модули, мы пишем просто $\mathrm{Tor}_i(M, N)$. Поскольку функтор $X \mapsto X \otimes_R N$ точен справа, он переводит точную последовательность $P_1^M \to P_0 \to M \to 0$ в точную последовательность

$$P_1^M \otimes_R N \to P_0 \otimes_R N \to M \otimes_R N \to 0\,,$$

откуда $\mathrm{Tor}_0^R(M, N) = H_0(P^M \otimes_R N) = M \otimes_R N$, чем отчасти и объясняется название «производный функтор». Ещё одним аргументом является предл. 5.7 ниже.

Упражнение 5.5. Покажите, что если P проективен, то $\mathrm{Tor}_i(P, M) = 0$ для всех M и всех $i > 0$.

Предложение 5.1
Для любой точной тройки модулей $0 \to A \to B \to C \to 0$ и любого модуля N имеется длинная точная последовательность Tor'ов

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_{i+1}(C, N) \to \mathrm{Tor}_i(A, N) \to \mathrm{Tor}_i(B, N) \to \mathrm{Tor}_i(C, N) \to \mathrm{Tor}_{i-1}(A, N) \to \cdots$$
$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1(A, N) \to \mathrm{Tor}_1(B, N) \to \mathrm{Tor}_1(C, N) \to A \otimes N \to B \otimes N \to C \otimes N \to 0$$

Доказательство. Рассмотрим согласованные проективные резольвенты элементов тройки, доставляемые лем. 5.2 на стр. 95. Они образуют точную тройку комплексов

$$0 \to P^A \to P^B \to P^C \to 0\,,$$

в которой $P^B = P^A \oplus P^C$ как градуированный модуль. Поскольку

$$P^B \otimes N \simeq (P^A \otimes N) \oplus (P^B \otimes N)$$

как градуированная абелева группа, тройка комплексов

$$0 \to P^A \otimes N \to P^B \otimes N \to P^C \otimes N \to 0$$

тоже точна. Её длинная точная последовательность когомологий как раз и имеет требуемый вид. □

[1] А также *i-тым M-кручением* в N или же *i-тым N-кручением* в M.

Упражнение 5.6. Убедитесь, что функторы Tor_i дистрибутивны по отношению к прямым суммам и что над коммутативным кольцом R имеется канонический изоморфизм $\mathrm{Tor}_i^R(M,N) \simeq \mathrm{Tor}_i^R(N,M)$.

Пример 5.2 (Tor_1 и кручение)
Пусть элемент $r \in R$ не является левым делителем нуля. Тогда правый R-модуль R/rR обладает двучленной свободной резольвентой $R \to R$ с дифференциалом $x \mapsto rx$. Для любого левого R-модуля N, группы $\mathrm{Tor}_0^R(R/rR,N)$ и $\mathrm{Tor}_1^R(R/rR,N)$ суть ядро и коядро эндоморфизма $N \to N$, $\nu \mapsto r\nu$, задаваемого левым умножением на r, т. е.

$$\mathrm{Tor}_0^R(R/rR,N) = N/rN \tag{5-9}$$

$$\mathrm{Tor}_1^R(R/rR,N) = \mathrm{Tors}_r(M) = \{m \in M \mid rm = 0\}\,. \tag{5-10}$$

Тем самым, $\mathrm{Tor}_1^R(R\,/\,rR,N)$ является r-кручением в N. Более общим образом, пусть правый R-модуль M обладает двучленной свободной резольвентой $R^n \to R^m$, дифференциал которой задаётся $m \times n$ матрицей $r = (r_{ij})$. Это означает, что модуль M порождается m элементами $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$, связанными n линейными соотношениями $\sum_i \mu_i r_{ij} = 0$, коэффициенты которых располагаются *по столбцам* матрицы r. Тогда $\mathrm{Tor}_1^R(M,N)$ и $\mathrm{Tor}_0^R(M,N) = M \otimes_R N$ суть ядро и коядром морфизма $N^n \to N^m$, задаваемого левым умножением на матрицу r:

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_n \end{pmatrix} \mapsto r \cdot \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_j r_{1j}\nu_j \\ \vdots \\ \sum_j r_{nj}\nu_j \end{pmatrix}.$$

Тем самым, $\mathrm{Tor}_1^R(M,N) \subset N^n$ состоит из всех наборов $(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$, удовлетворяющих m линейным соотношениям $\sum_j r_{ij}\nu_j = 0$, коэффициенты которых стоят *по строкам* матрицы r. Обратите внимание, что точная последовательность

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^R(M,N) \to N^n \xrightarrow{r} N^m \to \mathrm{Tor}_0^R(M,N) \to 0$$

это в точности правый кусок длинной точной последовательности из предл. 5.7, написанной для точной тройки $0 \to F^n \to F^m \to M \to 0$. В нашей ситуации эта длинная последовательность Tor'ов сводится к четырём членам:

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^R(M,N) \to F^n \otimes_R N \to F^m \otimes_R N \to M \otimes_R N \to 0\,.$$

Пример 5.3 (абелевы группы)
Поскольку все подмодули конечно порождённого свободного $\mathbb{Z}$-модуля тоже свободны, каждый конечно порождённый $\mathbb{Z}$-модуль обладает свободной резольвентой длины 2. Поэтому $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(A,B) = 0$ при всех $i \geqslant 2$ для любых конечно порождённых абелевых групп A, B. Так как произвольная абелева группа является фильтрованным копределом (объединением) своих конечно порождённых подгрупп, а тензорное умножение и когомологии коммутируют с фильтрованными копределами, для всех абелевых групп A, B имеем $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(A,B) = 0$ при $i \neq 0, 1$.

Каждая абелева группа F без кручения является фильтрованным копределом подгрупп, изоморфных $\mathbb{Z}^n$. Так как $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^n, A) = 0$ при всех $i \neq 0$ по упр. 5.5, для всех абелевых групп A и любой абелевой группы F без кручения имеем $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(F, A) = 0$ при всех $i \neq 0$.

Циклическая группа $\mathbb{Z}/(n)$ имеет свободную резольвенту $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ с дифференциалом $z \mapsto nz$. Тензорно умножая её на A получаем двучленный комплекс $A \to A$ с дифференциалом $a \mapsto na$. Поэтому $\mathrm{Tor}_0^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(n), A) = A/(nA)$, а

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(n), A) = \{a \in A \mid na = 0\}$$

состоит из элементов n-кручения в A. Из сказанного вытекает, абелева группа F свободна от кручения , если и только если $\mathrm{Tor}_1(F, A) = 0$ для всех A.

Упражнение 5.7. Убедитесь, что $\mathrm{Tor}_0^{\mathbb{Z}}\big(\mathbb{Z}/(m), \mathbb{Z}/(n)\big)$ и $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}\big(\mathbb{Z}/(m), \mathbb{Z}/(n)\big)$ оба изоморфны $\mathbb{Z}/(m, n)$.

Поскольку группа $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ является фильтрованным копределом групп $\mathbb{Z}/(n)$ относительно морфизмов включения $\mathbb{Z}/(n) \hookrightarrow \mathbb{Z}/(m)$, $[1] \mapsto [m/n]$, для всех $n \mid m$, группа $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, A)$ является копределом (объединением) всех подгрупп кручения в A, т. е.

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, A) = \mathrm{Tors}(A) = \{a \in A \mid \exists\, z \in \mathbb{Z} : za = 0\}$$

это в точности полная подгруппа кручения в A.

Упражнение 5.8. Установите для любого кольца R, правого идеала $I \subset R$ и левого идеала $J \subset R$ изоморфизм $\mathrm{Tor}_1(R/I, R/J) \simeq (I \cap J)/IJ$.

5.3. Плоские модули. Левый R-модуль L называется *плоским*, если функтор тензорного умножения $\mathcal{M}od\text{-}R \to \mathcal{A}b$, $X \mapsto X \otimes_R L$ точен. Плоские правые R-модули определяются симметрично. При тензорном умножении на плоский модуль проективная резольвента любого модуля остаётся точным комплексом. Поэтому $\mathrm{Tor}_i^R(M, L) = 0$ при $i \neq 0$ для любого правого R-модуля M и плоского левого R-модуля L. Наоборот, если $\mathrm{Tor}_1^R(M, L) = 0$ для всех M, то из длинной точной последовательности Tor'ов[1] вытекает, что тензорное умножение на L точно слева, и значит, L — плоский. В частности, все проективные модули являются плоскими.

Пример 5.4 (плоскость локализации)
Пусть мультипликативная система $S \subset R$ удовлетворяет условиям Оре из прим. 2.17 на стр. 34. Тогда построенный там модуль левых дробей $S^{-1}R$ является плоским правым R-модулем, поскольку является копределом фильтрующейся диаграммы свободных правых R-модулей $s^{-1}R$ ранга 1 с базисными элементами s^{-1}, по одному модулю для каждого $s \in S$, относительно системы морфизмов $s^{-1}R \to (rs)^{-1}R$, $s^{-1} \mapsto (rs)^{-1}r$, по одному для каждой такой пары $(s, r) \in S \times R$, что $rs \in S$. Поскольку когомологии и тензорное произведение перестановочны с фильтрованными копределами, равенство $\mathrm{Tor}_1^R(R, N) = 0$ для всех N влечёт равенство $\mathrm{Tor}_1^R(S^{-1}R, N) = 0$ для всех N.

Упражнение 5.9. Убедитесь, что $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ являются плоскими $\mathbb{Z}$-модулями.

Предложение 5.2
Следующие условия на левый R-модуль L эквивалентны друг другу:

[1] См. предл. 5.7 на стр. 113.

(1) L является плоским

(2) для всех конечно представимых левых R-модулей N канонический морфизм[1]

$$\varkappa_N : \ \mathrm{Hom}_R(N,R)\otimes_R L \to \mathrm{Hom}_R(N,L), \quad \xi\otimes\ell \mapsto \big(n\mapsto \xi(n)\cdot\ell\big), \tag{5-11}$$

является изоморфизмом

(3) любой гомоморфизм $\varphi : \ N \to L$ из конечно представимого левого модуля пропускается через свободный модуль конечного ранга, т. е. существует такие гомоморфизмы $\varphi_L : \ R^n \to L$, $\psi_N : \ N \to R^n$, что $\varphi = \varphi_L\psi_N$

(4) категория $\mathcal{F}_L$, объектами которой являются гомоморфизмы $\varphi : \ R^n \to L$ из свободных модулей конечного ранга в L, а стрелки из этого гомоморфизма в гомоморфизм $\psi : \ R^m \to L$ суть такие гомоморфизмы $\eta : \ R^n \to R^m$, что $\varphi = \psi\eta$, является фильтрующейся и L является копределом тавтологической диаграммы $\mathcal{F}_L \to R\text{-}\mathcal{M}od$ забывающей про стрелки $\varphi : \ R^n \to L$ и оставляющей только стрелки $\eta : \ R^n \to R^m$.

Доказательство. Докажем, что (1) ⇒ (2). Применим к представлению модуля N

$$R^m \to R^n \to N \to 0$$

точные слева функторы[2] $\mathrm{Hom}_R(*,R)\otimes_R L$ и $\mathrm{Hom}_R(*,L)$. Тогда связывающие значения этих функторов естественные преобразования (5-11) впишутся в коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(N,R)\otimes_R L \arrow[r] \arrow[d, "\varkappa_N"'] & \mathrm{Hom}_R(R^n,R)\otimes_R L \arrow[r] \arrow[d, "\varkappa_{R^n}"'] & \mathrm{Hom}_R(R^m,R)\otimes_R L \arrow[d, "\varkappa_{R^m}"'] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(N,L) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(R^n,L) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(R^m,L)\,,
\end{tikzcd}$$

где две правые вертикальные стрелки являются изоморфизмами, поскольку над модулем $N = R^k$ естественное преобразование (5-11) является прямой суммой k естественных преобразований $\varkappa_R : \ \mathrm{Hom}_R(R,R)\otimes_R L \to \mathrm{Hom}_R(R,L)$, переводимых в тождественное отображение Id_L каноническими изоморфизмами

$$\mathrm{Hom}_R(R,R) \xrightarrow{\sim} R\,, \quad R\otimes_R L \xrightarrow{\sim} L \quad \text{и} \quad \mathrm{Hom}_R(R,L) \xrightarrow{\sim} L\,.$$

Следовательно, левая вертикальная стрелка тоже изоморфизм.

Свойство (3) является иной формулировкой свойства (2): представимость гомоморфизма $\varphi : \ N \to L$ в виде $\varphi = \sum \xi_i \otimes \ell_i$ для некоторых $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n : \ N \to R$ и $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n \in L$ как раз и означает, что φ является композицией гомоморфизмов

$$N \to R^n\,,\ n \mapsto \sum_i \xi_i(n)\cdot e_i \quad \text{и} \quad R^n \to L\,,\ e_i \mapsto \ell_i\,,$$

[1] Как обычно, $\mathrm{Hom}_R(N,R)$ рассматривается как правый R-модуль, на котором действие R задаётся левым действием на аргументе: $(\xi r)n \overset{\text{def}}{=} \xi(rn)$. Изоморфизм (5-11) является аналогом канонического изоморфизма $V^*\otimes W \simeq \mathrm{Hom}(V,W)$ для векторных пространств над полем.

[2] Первый из них является композицией точного слева функтора $\mathrm{Hom}_R(*,R)$ и точного функтора $*\otimes_R L$.

где $e_1, e_2, \dots, e_n$ это стандартный базис в R^n.

Докажем, что (3) ⇒ (4). Сначала убедимся, что категория $\mathcal{F}_L$ фильтруется. Из любых двух объектов $\varphi : R^n \to L$, $\psi : R^m \to L$ ведут стрелки в объект $\varphi+\psi : R^n \oplus R^m \to L$. Для любых двух стрелок $\eta_1, \eta_2 : R^n \to R^m$ между объектами $\varphi : R^n \to L$, $\psi : R^m \to L$ их коуравнитель $\mathrm{coker}(\eta_1 - \eta_2)$ конечно представим. В силу (3) каноническая стрелка $\mathrm{coker}(\eta_1 - \eta_2) \to L$ пропускается через некоторый объект $R^k \to L$ категории $\mathcal{F}_L$. Поэтому этот объект тоже уравнивает стрелки η_1, η_2. Копредел тавтологической диаграммы $\mathcal{F}_L \to R\text{-}\mathcal{M}od$ совпадает с объединением образов всех морфизмов $R^n \to L$ категории $\mathcal{F}_L$, которое очевидно равно L.

Упражнение 5.10. Убедитесь в этом.

Импликация (4) ⇒ (1) устанавливается также, как в прим. 5.4: поскольку копредел фильтрованной диаграммы абелевых групп является точным функтором и перестановочен с тензорным произведением, равенства $\mathrm{Tor}_1^R(N, R^n) = 0$ влекут равенство $\mathrm{Tor}_1^R(N, L) = 0$ для всех N. □

Следствие 5.3
Всякий конечно представимый плоский модуль P проективен.

Доказательство. Воспользуемся характеризацией (3) из предл. 5.2, взяв $N = L = P$. Поскольку $\mathrm{Id}_P : P \to P$ является композицией морфизмов $P \to R^n$ и $R^n \to P$, модуль P является прямым слагаемым в R^n. □

Предложение 5.3
Плоскость левого R-модуля L равносильна инъективности правого R-модуля

$$L^\vee \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Доказательство. Плоскость L означает, что для всякого вложения правых R-модулей $\varphi : M_1 \hookrightarrow M_2$ гомоморфизм абелевых групп $\varphi \otimes \mathrm{Id}_L : M_1 \otimes L \to M_2 \otimes L$ инъективен. Поскольку функтор $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(*, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ точен[1], это равносильно сюрьективности двойственного гомоморфизма $(\varphi \otimes \mathrm{Id}_L)^\vee : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M_2 \otimes_R L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M_1 \otimes_R L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, который отождествляются каноническими изоморфизмами сопряжённости[2]

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M_2 \otimes_R L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) &\simeq \mathrm{Hom}_R\left(M_2, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\right) \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M_1 \otimes_R L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) &\simeq \mathrm{Hom}_R\left(M_1, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\right) \end{aligned} \tag{5-12}$$

с гомоморфизмом $h_{L^\vee}(\varphi) : \mathrm{Hom}_R(M_2, L^\vee) \to \mathrm{Hom}_R(M_1, L^\vee)$. Сюрьективность последнего для всех вложений $\varphi : M_1 \hookrightarrow M_2$ означает инъективность модуля $L^\vee$. □

Упражнение 5.11. Покажите, что для любой абелевой группы A имеется каноническое вложение $A \hookrightarrow A^{\vee\vee}$, сюрьективное для конечно порождённых групп.

Следствие 5.4
Левый R-модуль L является плоским тогда и только тогда, когда для каждого правого идеала $J \subset R$ выполняется любое из двух эквивалентных друг другу условий:

[1] В силу того, что $\mathbb{Z}$-модуль $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ инъективен.
[2] См. предл. 2.3 на стр. 24.

(1) умножение[1] $J \otimes_R L \to JL$, $x \otimes v \mapsto xv$, является изоморфизмом

(2) $\mathrm{Tor}_1^R(R/J, L) = 0$.

Доказательство. Равносильность условий (1) и (2) вытекает из длинной точной последовательности $\mathrm{Tor}^R(*, L)$ для точной тройки $0 \to J \to R \to R/J \to 0$

$$\mathrm{Tor}_1^R(R, L) = 0 \to \mathrm{Tor}_1^R(R/J, L) \to J \otimes_R L \to L \to (R/J) \otimes_R L \to 0\,.$$

Сюрьективный гомоморфизм умножения $J \otimes_R L \twoheadrightarrow JL$ инъективен , если и только если стрелка $J \otimes_R L \hookrightarrow R \otimes_R L$ в этой последовательности инъективна, что означает равенство $\mathrm{Tor}_1^R(R/J, L) = 0$. С другой стороны, в силу точности функтора $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(*, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, инъективность стрелки $J \otimes_R L \hookrightarrow R \otimes_R L$, равносильна сюрьективности двойственной стрелки $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R \otimes_R L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(J \otimes_R L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, которая по сопряжённости (5-12) совпадает со стрелкой $\mathrm{Hom}_R(R, L^\vee) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_R(J, L^\vee)$, где $L^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ как в предл. 5.3. Таким образом, модуль L удовлетворяет условию (1) тогда и только тогда, когда модуль $L^\vee$ удовлетворяет условию лем. 3.2 на стр. 54: для любого идеала $J \subset R$ каждый гомоморфизм $J \to L^\vee$ продолжается до гомоморфизма $R \to L^\vee$, что означает инъективность модуля $L^\vee$. Последняя равносильна плоскости модуля L. □

5.3.1. Неканонические резольвенты. Ограниченный справа комплекс модулей A называется *N-ациклической резольвентой* модуля M, *пригодной для вычисления* Tor, если единственным ненулевым модулем гомологий комплекса A является $H_0(A) \simeq M$ и $\mathrm{Tor}_i(A_k, N) = 0$ при всех $i > 0$ для каждого члена A_k комплекса A. Например, любая *плоская* резольвента L модуля M, получающаяся удалением M из точной последовательности модулей $\cdots \to L_2 \to L_1 \to L_0 \to M \to 0$, в которой все L_k — плоские, является N-ациклической резольвентой пригодной для вычисления $\mathrm{Tor}(M, N)$ с любым модулем N.

Предложение 5.4
Для любой N-ацикличной резольвенты A модуля M, пригодной для вычисления Tor, при каждом k имеется канонический изоморфизм $\mathrm{Tor}_k(M, N) = H_k(A \otimes N)$.

Доказательство. Обозначим через C проективную резольвенту Картана – Эйленберга комплекса[2] A и вычислим гомологии тотального комплекса $\mathrm{Tot}(C \otimes N)$ бикомплекса $C \otimes N$, полученного из C применением функтора $X \mapsto X \otimes N$. Согласно предл. 4.4 на стр. 81, к ним сходятся две спектральных последовательности с

$${}^{I}E^2_{p,q} = H^{\partial_1}_p\left(H^{\partial_2}_q(C \otimes N)\right) \quad \text{и} \quad {}^{II}E^2_{p,q} = H^{\partial_2}_q\left(H^{\partial_1}_p(C \otimes N)\right),$$

где H^{∂_1} и H^{∂_2} означают когомологии действующих, соответственно, по строкам и по столбцам дифференциалов, индуцированных дифференциалами $\partial_1 = \partial_1^C \otimes \mathrm{Id}_N$ и $\partial_2 = \partial_2^C \otimes \mathrm{Id}_N$. Так как по столбцам бикомплекса C стоят проективные резольвенты модулей A_p, когомологии $H^{\partial_2}_q(C_{p,*} \otimes N) \simeq \mathrm{Tor}_q(A_p, N)$ нулевые при $q > 0$ и равны $A_p \otimes N$

[1] Напомню, что $JL \overset{\text{def}}{=} \{x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_mv_m \mid x_i \in J,\ v \in L\}$.
[2] См. опр. 5.2 на стр. 98.

при $q = 0$. Поэтому ${}^{I}E^{2}p, q = {}^{I}E^{\infty}_{p,q} = H_p(A \otimes N)$ при $q = 0$ и нулевые при $q \neq 0$. Следовательно, $H_k(\mathrm{Tot}\, C) \simeq H_k(A \otimes N)$. С другой стороны, гомологии комплексов строк бикомплекса C являются проективными резольвентами гомологий комплекса A и как градуированные модули отщепляются от строк прямыми слагаемыми. Следовательно, $H^{\partial_1}_p(C_{*,q} \otimes N) = H^{\partial_1}_p(C_{*,q}) \otimes N$ есть результат тензорного умножения q-того члена проективной резольвенты модуля $H_p(A)$ на N. Тем самым, ${}^{II}E^{2}_{p,q} \simeq \mathrm{Tor}_q\left(H_p(A), N\right)$ отличны от нуля только при $p = 0$ и в этом случае равны $\mathrm{Tor}_q(M, N)$. Поэтому ${}^{II}E^{2} = {}^{II}E^{\infty}$ и $H_k(\mathrm{Tot}\, C) \simeq \mathrm{Tor}_k(M, N)$. □

Предложение 5.5
Для любой плоской резольвенты $L \twoheadrightarrow M$ правого R-модуля M и любого ограниченного справа комплекса левых модулей K, единственным ненулевым модулем гомологий которого является $H_0(K) \simeq N$, группы $\mathrm{Tor}^R_k(M, N) \simeq H_k\left(\mathrm{Tot}(L \otimes_R K)\right)$ при всех k.

Доказательство. К гомологиям $H_{p+q}\left(\mathrm{Tot}(L \otimes_R K)\right)$ сходится спектральная последовательность с $E^2_{p,q} = H^{\partial_L \otimes 1}_p\left(H^{1 \otimes \partial_K}_q(L \otimes_R K)\right)$. Поскольку p-тый столбец бикомплекса $L \otimes_R K$ получается применением к комплексу K точного функтора $X \mapsto L_p \otimes_R X$ и сменой знака у нечётных дифференциалов, он точен всюду кроме нулевого члена, где $H^{1\otimes\partial_K}_0(L \otimes_R K) \simeq L \otimes_R H_0(K) \simeq L \otimes_R N$. Поэтому $E^2_{p,q} = E^{\infty}_{p,q}$ сосредоточены в строке $q = 0$ и равны $E^2_{p,0} = H^{\partial_L \otimes 1}_p(L \otimes_R N) = \mathrm{Tor}^R_p(M, N)$. □

Теорема 5.1 (спектральная последовательность Кюннета)
Если ограниченные справа комплексы правых R-модулей K_k и левых R-модулей L_ℓ

$$\cdots \to K_{k+1} \to K_k \to K_{k-1} \to \cdots \quad \text{и} \quad \cdots \to L_{\ell+1} \to L_\ell \to L_{\ell-1} \to \cdots$$

имеют $\mathrm{Tor}^R_i(K_k, L_\ell) = 0$ при $i \neq 0$ для всех[1] k, ℓ, то имеется спектральная последовательность гомологического типа с

$$E^2_{p,q} = \bigoplus_{k+\ell=q} \mathrm{Tor}^R_p\big(H_k(K), H_\ell(L)\big),$$

сходящаяся к градуированным факторам некоторой возрастающей с ростом p фильтрации на $H_{p+q}(K \otimes_R L)$.

Доказательство. Обозначим через $C(K)$ и $C(L)$ проективные резольвенты Картана – Эйленберга[2] комплексов K и L. Каждая из них представляет собою бикомплекс, p-й столбец которого, как градуированная абелева группа, имеет вид

$$C_p = P^{B_p} \oplus P^{H_p} \oplus P^{B_{p-1}}, \tag{5-13}$$

где P^{B_p} и P^{H_p} суть проективные резольвенты для модулей p-х границ B_p и гомологий[3] H_p комплексов K и L, а горизонтальный дифференциал $\partial_1 : C_p \to C_{p-1}$ действует на сумму (5-13) тождественно отображая первое слагаемое на третье и аннулируя

[1] Например, это условие выполняется, когда один из комплексов состоит из плоских модулей.
[2] См. опр. 5.2 на стр. 98.
[3] См. доказательство лем. 5.3 на стр. 96.

два других слагаемых. По отношению к действию вертикальных дифференциалов ∂_2^K и ∂_2^L p-е столбцы бикомплексов $C(K)$ и $C(L)$ являются проективными резольвентами модулей K_p и L_p. Тензорное произведение тотальных комплексов

$$T = \mathrm{Tot}(C(K)) \otimes \mathrm{Tot}(C(L))$$

можно рассматривать как свёртку бикомплекса с компонентами

$$T_{p,q} = \bigoplus_{\substack{k+\ell=p\\ i+j=q}} C_{k,i}(K) \otimes C_{\ell,j}(L)$$

и дифференциалами $D_1 = \partial_1^K \otimes 1 + 1 \otimes \partial_1^L$ и $D_2 = \partial_2^K \otimes 1 + 1 \otimes \partial_2^L$, где ∂_1^K и ∂_1^L суть горизонтальные, а ∂_2^K и ∂_2^L — вертикальные дифференциалы бикомплексов $C(K)$ и $C(L)$ соответственно.

Упражнение 5.12. Убедитесь, что $T = \bigoplus_{p,q} T_{p,q}$, что дифференциал комплекса T действительно равен $D_1 + D_2$, и что $D_1 D_2 + D_2 D_1 = 0$.

К гомологиям $H_{p+q}(T)$ сходится две спектральных последовательности. Таблица ${}^{I}E^1$ первой из них образованна гомологиями горизонтального дифференциала D_1 и имеет в q-том столбце прямую сумму $\bigoplus_{k+\ell=q} P^{H_k(K)} \otimes P^{H_\ell(L)}$ тензорных произведений проективных резольвент для модулей гомологий комплексов K и L. Поэтому p-я группа гомологий q-го столбца относительно вертикального дифференциала D_2 имеет заявленный в теореме вид ${}^{I}E^2_{p,q} = \bigoplus_{k+\ell=q} \mathrm{Tor}_p^R\big(H_k(K), H_\ell(L)\big)$.

Таблица ${}^{II}E^1$ второй спектральной последовательности образована гомологиями вертикального дифференциала D_2 в комплексах $T_{p,*}$, которые являются прямыми суммами комплексов $C_{k,*}(K) \otimes C_{\ell,*}(L)$ с $k + \ell = p$, вычисляющих $\mathrm{Tor}^R(K_k, L_\ell)$. Так как по условию один из комплексов K, L состоит из плоских модулей, эти гомологии отличны от нуля только при $q = 0$ и равны ${}^{II}E^1_{p,0} = \bigoplus_{k+\ell=p} K_k \otimes L_\ell$. Поэтому следующая таблица ${}^{II}E^2_{p,q} = {}^{II}E^\infty_{p,q}$ является предельной и имеет на каждой диагонали $p + q = n$ ровно одну ненулевую клетку, в которой стоит $H_{p+q}(K \otimes L)$. □

Следствие 5.5 (формула Кюннета)
Пусть в условиях теор. 5.1 ограниченный справа комплекс L состоит из плоских левых R-модулей и вдобавок все образы $B_i = \mathrm{im}(\partial^L : L_{i+1} \to L_i)$ его дифференциала тоже плоские. Тогда для любого ограниченного справа комплекса K правых R-модулей имеется точная последовательность

$$0 \to \bigoplus_{\alpha+\beta=n} H_\alpha(K) \otimes_R H_\beta(L) \to H_n(K \otimes_R L) \to \bigoplus_{\gamma+\delta=n-1} \mathrm{Tor}_1^R\big(H_\gamma(K), H_\delta(L) \to 0\,. \quad (5\text{-}14)$$

Доказательство. Ядро $Z_i = \ker(\partial : L_i \to L_{i-1})$ каждого дифференциала комплекса L включается в точную тройку $0 \to Z_i \to L_i \to B_{i-1} \to 0$. Ассоциированная с нею длинная точная последовательность $\mathrm{Tor}^R(N, *)$, где N — произвольный правый R-модуль, показывает, что плоскость всех модулей L_i и B_i влечёт плоскость все модулей Z_i. Тем самым, модули гомологий комплекса L имеют плоские резольвенты длины два:

$$0 \to B_{q+1} \to Z_q \to H_q(L) \to 0\,,$$

и, стало быть, $\mathrm{Tor}_p^R(H_k(K), H_\ell(L)) = 0$ при $p \neq 0, 1$ для всех k, ℓ. Тем самым, спектральная последовательность из теор. 5.1 стабилизируется на второй таблице $E^2_{p,q} = E^\infty_{p,q}$, которая сосредоточена в двух столбцах $p = 0, 1$ и имеет вид

$$\begin{array}{cccc}
0 & \bigoplus\limits_{\alpha+\beta=q+1} H_\alpha(K)\otimes_R H_\beta(L) & \bigoplus\limits_{\gamma+\delta=q+1} \mathrm{Tor}_1^R\big(H_\gamma(K)\otimes_R H_\delta(L)\big) & 0\\
0 & \bigoplus\limits_{\alpha+\beta=q} H_\alpha(K)\otimes_R H_\beta(L) & \bigoplus\limits_{\gamma+\delta=q} \mathrm{Tor}_1^R\big(H_\gamma(K)\otimes_R H_\delta(L)\big) & 0\\
0 & \bigoplus\limits_{\alpha+\beta=q-1} H_\alpha(K)\otimes_R H_\beta(L) & \bigoplus\limits_{\gamma+\delta=q-1} \mathrm{Tor}_1^R\big(H_\gamma(K)\otimes_R H_\delta(L)\big) & 0\,,
\end{array}$$

а это и означает, что группа $H_n(M \otimes_R L)$ является расширением вида (5-14). □

Замечание 5.1. В точной тройке $0 \to Z_i \to L_i \to B_{i-1} \to 0$ из плоскости модулей Z_i и B_i вытекает плоскость модуля L_i. Поэтому вместо плоскости модулей L_i в условии сл. 5.5 можно было бы требовать плоскость модулей Z_i. Кроме того, можно было не накладывать никаких условий на комплекс L, но наложить симметричные условия на комплекс K: потребовать плоскость всех его границ $B_i(K)$ и либо плоскость всех циклов $Z_i(K)$, либо плоскость самих модулей K_i.

5.4. Сизигии градуированных модулей. Обозначим через

$$S = SV^* = \bigoplus_{d\geqslant 0} S^d V^*$$

градуированную алгебру полиномов на $(n+1)$-мерном векторном пространстве V над полем $\Bbbk$. Выбор координат в V, т. е. базиса $x_0, x_1, \dots, x_n$ в V^*, задаёт изоморфизм $S \simeq \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]$ и отождествляет однородную компоненту $S^d V^*$ с подпространством однородных многочленов степени d, которое мы дальше будем обозначать просто через S^d. Напомню, что S-модуль M называется *градуированным*, если $M = \bigoplus\limits_{\mu\in\mathbb{Z}} M^\mu$ как векторное пространство над $\Bbbk$ и $S^d \cdot M^\mu \subset M^{\mu+d}$ для всех μ и d. Например, любой идеал $I = (f_1, f_2, \dots, f_m) \subset S$, порождённый однородными многочленами f_i, является градуированным модулем $I = \bigoplus I^\mu$ с однородными компонентами $I^\mu = I \cap S^\mu$.

Упражнение 5.13. Убедитесь в этом.

Градуированные S-модули вместе с однородными гомоморфизмами степени нуль в качестве стрелок образуют $\Bbbk$-линейную абелеву категорию — ядра, коядра, аддитивная структура и изоморфизм образа с кообразом в ней те же, что и в категории (градуированных) векторных пространств над $\Bbbk$. Описанную в прим. 5.1 на стр. 92 свободную резольвенту для градуированного S-модуля M тоже можно сделать состоящей из градуированных модулей и морфизмов степени нуль. Для этого обозначим через $S[-d]$ свободный S-модуль ранга 1 с базисным элементом e степени d. Это означает, что компонента μ-той степени у $S[-d]$ изоморфна $S^{\mu-d}$, и согласуется с нашими предыдущими договорённостями[1]. Если градуированный S-модуль M порождается

[1]См. n° 4.1 на стр. 64.

однородными элементами[1] $f_i \in M^{d_i}$, то в качестве стартового члена свободной резольвенты для M можно взять сюрьекцию

$$\partial_0 : \bigoplus_i S[-d_i] \twoheadrightarrow M\,, \tag{5-15}$$

переводящую базисный элемент e_i из i-того модуля $S[-d_i]$ в образующую $f_i \in M$. Таким образом, гомоморфизм (5-15) однороден степени нуль.

Система однородных образующих f_i называется *минимальной*, если ни одна из образующих не является S-линейной комбинацией остальных.

Упражнение 5.14. Убедитесь, что минимальность образующих f_i равносильна тому, что в любой линейной зависимости $\sum h_i f_i = 0$ с однородными полиномиальными коэффициентами $h_i \in S$ все $\deg h_i > 0$. Убедитесь также, что модуль линейных зависимостей между любыми однородными элементами $m_1, m_2, \dots, m_n$ порождается линейными зависимостями с однородными коэффициентами одинаковых степеней.

Очевидно, что каждая система однородных образующих любого градуированного модуля содержит минимальную подсистему. Рассмотрим сюрьекцию (5-15) для минимальной системы однородных образующих модуля M и далее, следуя описанной в прим. 5.1 на стр. 92 процедуре, построим свободную градуированную резольвенту модуля M, точно также выбирая на каждом шагу в очередном градуированном модуле сизигий $R_i = \ker \partial_i$ минимальную систему однородных образующих. Полученная в результате свободная резольвента

$$\cdots \to \bigoplus_{i_3} S[-q_{i_3}] \to \bigoplus_{i_2} S[-q_{i_2}] \to \bigoplus_{i_1} S[-q_{i_1}] \to \bigoplus_{i_0} S[-q_{i_0}] \to M \to 0 \tag{5-16}$$

называется *минимальной*. Не смотря на имеющийся на каждом шагу произвол в выборе минимальных однородных образующих очередного ядра, ранги свободных модулей, из которых состоит минимальная градуированная свободная резольвента, не зависят от выбора резольвенты[2], ибо допускают следующее инвариантное описание.

Предложение 5.6
Для любой минимальной резольвенты (5-16) ранг p-того свободного градуированного модуля $F_p = \bigoplus_{i_p} S[-q_{i_p}]$ в ней равен размерности над полем $\Bbbk$ векторного пространства $\operatorname{Tor}_p^S(M, \Bbbk)$, где $\Bbbk = S/(x_1, x_2, \dots, x_n)$ это тривиальный S-модуль, на котором все x_i действуют нулём.

Доказательство. В минимальной резольвенте (5-16) каждый дифференциал

$$\partial_p : \bigoplus_{i_p} S[-d_{i_p}] \to \bigoplus_{i_{p-1}} S[-d_{i_{p-1}}]$$

[1] Поскольку каждый градуированный модуль порождается своими однородными компонентами, в нём всегда можно выбрать однородные образующие.

[2] На самом деле не трудно показать, что любые две минимальные резольвенты (5-16) изоморфны друг другу (не канонически), но нам это не понадобится.

задаётся матрицей из однородных многочленов, столбцы которой являются коэффициентами однородных линейных зависимостей между минимальными однородными образующими градуированного модуля $R_{p-1} = \ker \partial_{p-1}$. В силу минимальности резольвенты все эти коэффициенты имеют положительные степени. Поэтому тензорное умножение над S на тривиальный модуль $\Bbbk$, где все переменные x_i действует нулём, превращает минимальную резольвенту (5-16) в комплекс градуированных векторных пространств[1]

$$\cdots \to \bigoplus_{i_3} \Bbbk[-q_{i_3}] \to \bigoplus_{i_2} \Bbbk[-q_{i_2}] \to \bigoplus_{i_1} \Bbbk[-q_{i_1}] \to \bigoplus_{i_0} \Bbbk[-q_{i_0}] \to M \to 0$$

с нулевыми дифференциалами. Поэтому размерность векторного пространства

$$\operatorname{Tor}_p^S(M, \Bbbk) \simeq \bigoplus_{i_p} \Bbbk[-d_{i_p}]$$

над полем $\Bbbk$ равна рангу модуля $F_p = \bigoplus_{i_p} S[-q_{i_p}]$ над S. □

Теорема 5.2 (теорема Гильберта о сизигиях)
Длина минимальной свободной резольвенты любого градуированного модуля M над симметрической алгеброй $S = SV^* \simeq \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]$ не превышает $\dim V + 1$ (т. е. ненулевые члены резольвенты могут быть лишь в степенях $n + 1 \geqslant p \geqslant 0$).

Доказательство. Согласно предл. 5.6, для любой минимальной резольвенты

$$\cdots \to F_2 \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$$

выполнено равенство $\operatorname{rk}_S F_p = \dim_{\Bbbk} \operatorname{Tor}_p^S(M, \Bbbk)$. Вычисляя $\operatorname{Tor}_p^S(M, \Bbbk)$ при помощи тензорного умножения на M свободной резольвенты модуля $\Bbbk = S/(x_0, \dots, x_n)$, доставляемой комплексом Кошуля $K_{x_0,\dots,x_n}$ регулярной последовательности[2] $x_0, \dots, x_n$

$$0 \to \Lambda^{n+1} V^* \otimes S \to \cdots \to \Lambda^2 V^* \otimes S \to V^* \otimes S \to S \to \Bbbk \to 0\,,$$

мы заключаем, что $\operatorname{Tor}_p^S(M, \Bbbk) = 0$ при всех $p \geqslant n + 2$. □

5.5. Функторы Ext. Зафиксируем проективную резольвенту P^M и инъективную резольвенту I_N для левых[3] модулей M и N над произвольным кольцом R с единицей и рассмотрим комплексы левых R-модулей $\operatorname{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^M, N)$ и $\operatorname{Hom}_{\mathrm{DG}}(M, I_N)$, где модули M и N рассматриваются как комплексы с ровно одни ненулевым объектом, расположенном в степени нуль. Таким образом, комплекс $\operatorname{Hom}_{\mathrm{DG}}(M, I_N)$ имеет дифференциал $\varphi \mapsto d_{I_N} \circ \varphi$ совпадает с результатом применения функтора $\operatorname{Hom}(M, *)$ к комплексу I_N, а комплекс $\operatorname{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^M, N)$ имеет дифференциал $\varphi \mapsto (-1)^{|\varphi|} \varphi \circ \partial^{P^M}$ и отличается от результата применения функтора $\operatorname{Hom}(*, N)$ к комплексу P^M сменой знака

[1] Где $\Bbbk[-m] = S[-m] \otimes_S \Bbbk$ означает одномерное векторное пространство, находящееся в степени m.
[2] См. прим. 4.6 на стр. 74.
[3] Мы рассматриваем левые модули лишь для определённости, всё сказанное в этом разделе в равной степени относится и к правым R-модулям. Но — в отличие от того, с чем мы имели дело ранее — кольцо должно действовать на оба модуля с одной и той же стороны.

всех нечётных дифференциалов. Рассмотрим также бикомплекс $B^{p,q} = \mathrm{Hom}\left(P^M_p, I^q_N\right)$ с горизонтальным дифференциалом $d_1 : \varphi \mapsto (-1)^{|\varphi|}\varphi \circ \partial^{P^M}$ и вертикальным дифференциалом $d_2 : \varphi \mapsto d_{I_N} \circ \varphi$. Его тотальный комплекс $\mathrm{Tot}(B) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^M, I_N)$ имеет дифференциал $\varphi \mapsto d_{I_N} \circ \varphi + (-1)^{|\varphi|}\varphi \circ \partial^{P^M}$.

Лемма 5.6
R-модули $H^k\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^M, N)\right)$, $H^k\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(M, I_N)\right)$ и $H^k\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^M, I_N)\right)$ канонически изоморфны друг другу при всех k, не зависят от выбора проективных резольвент и функториальны по M и N.

Доказательство. Вычислим когомологии бикомплекса $B^{\mu,\nu} = \mathrm{Hom}\left(P^M_\mu, I^\nu_N\right)$ при помощи двух сходящихся к $H^{p+q}\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^M, I_N)\right)$ спектралок[1] с

$$ {}^{I}E_2^{p,q} = H_1^p\left(H_2^q(B)\right) \quad \text{и} \quad {}^{II}E_2^{p,q} = H_2^q\left(H_1^p(B)\right) . $$

Так как p-й столбец бикомплекса B получается применением к инъективной резольвенте I_N модуля N точного функтора $\mathrm{Hom}\left(P^M_p, *\right)$, он точен во всех положительных степенях, а в нижней строке имеет когомологию

$$ H^0\left(\mathrm{Hom}(P^M_p, I_N)\right) \simeq \mathrm{Hom}\left(P^M_p, H^0(I_N)\right) = \mathrm{Hom}\left(P^M_p, N\right) . $$

Поэтому ненулевые клетки таблицы ${}^{I}E_2^{p,q}$ сосредоточены в строке $q = 0$ и равны

$$ E_2^{p,0} = E_\infty^{p,0} \simeq H^p\left(\mathrm{Hom}(P^M_p, N)\right) , $$

откуда $H^p\left(\mathrm{Hom}(P^M_p, N)\right) \simeq H^p\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^M, I_N)\right)$. Аналогично, q-я строка бикомплекса B получается применением $\mathrm{Hom}\left(*, I^q_N\right)$ к проективной резольвенте P^M и сменой знака у нечётных дифференциалов. Она точна всюду вне нулевого столбца, где

$$ H^0\left(\mathrm{Hom}(P^M, I^q_N)\right) \simeq \mathrm{Hom}\left(H_0(P^M), I^q_N\right) = \mathrm{Hom}\left(M, I^q_N\right) . $$

Поэтому ненулевые клетки таблицы ${}^{I}E_2^{p,q}$ сосредоточены в строке $q = 0$ и равны

$$ E_2^{p,0} = E_\infty^{p,0} \simeq H^p\left(\mathrm{Hom}(M, I_N)\right) . $$

Следовательно, $H^q\left(\mathrm{Hom}(M, I_N)\right) \simeq H^q\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^M, I_N)\right)$, что доказывает первое утверждение. Остальные утверждения вытекают из того, что функторы $\mathcal{C}om \to \mathcal{C}om$, переводящие комплекс C в комплексы $\mathrm{Hom}(M, C)$ и $\mathrm{Hom}(C, N)$, где M и N — фиксированные R-модули, сохраняет гомотопическую эквивалентность, а значит корректно задаёт функторы $\mathcal{H}o \to \mathcal{H}o$.

Упражнение 5.15. Пусть морфизм комплексов $\alpha : P \to Q$ стягивается гомотопией γ. Убедитесь, что для любых модулей M и N морфизмы $\alpha_* : \mathrm{Hom}(M, P) \to \mathrm{Hom}(M, Q)$ и $\alpha^* : \mathrm{Hom}(Q, N) \to \mathrm{Hom}(P, N)$ стягиваются гомотопиями γ_* и γ^* соответственно.

Тем самым, при фиксированных M и k сопоставление $N \mapsto H^k\left(\mathrm{Hom}(M, I_N)\right)$ является композицией функтора $R\text{-}\mathcal{M}od \to \mathcal{H}o$, $N \mapsto I_N$, функтора $\mathcal{H}o \to \mathcal{H}o$, $C \mapsto \mathrm{Hom}(M, C)$, и функтора $\mathcal{H}o \to \mathcal{A}b$, $C \mapsto H^k(C)$. □

[1] См. предл. 4.4 на стр. 81.

Определение 5.4
Изоморфные модули из предыдущей лем. 5.6 обозначаются

$$\mathrm{Ext}^i(M,N) \overset{\text{def}}{=} H^i\left(\mathrm{Hom}(P^M,N)\right) \simeq H^i\left(\mathrm{Hom}(M,I_N)\right) \simeq H^i\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^M,I_N)\right) \qquad (5\text{-}17)$$

и называются *правыми производными функторами* от функтора Hom или *модулями расширений M* посредством N. Если важно указать кольцо, над которым рассматриваются модули, мы будем писать $\mathrm{Ext}^i_R(M,N)$. Поскольку проективные и инъективные модули является одночленными резольвентами самих себя, для проективного P, инъективного I и любого M получаем $\mathrm{Ext}^i_R(M,I) = \mathrm{Ext}^i_R(P,M) = 0$ при при всех $i \neq 0$.

Пример 5.5 (Ext^1 и расширения)
Точная тройка вида $0 \to N \to X \to M \to 0$ называется *расширением M* посредством N. Под изоморфизмом расширений понимается (автоматически биективный) гомоморфизм между средними членами троек, индуцирующий тождественное отображение на подмодуле N и фактор модуле M. Покажем, что классы точных троек с точностью до изоморфизма находятся в биекции с элементами группы $\mathrm{Ext}^1(M,N)$.

Для этого зафиксируем для модуля M свободную резольвенту

$$\cdots \to F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\partial_0} M \to 0$$

и обозначим базисные векторы в F_0, F_1 и F_2 через g_j, r_j и s_k соответственно. Дифференциалы ∂_1 и ∂_2 действуют на строки из базисных векторов умножением справа на матрицы $\varrho = (\varrho_{ij})$ и $\sigma = (\sigma_{ki})$, по столбцам которых стоят[1], соответственно, коэффициенты образующих линейных зависимостей $\partial_0(\Gamma_j) = \sum_i m_i\varrho_{ij} = 0$ между порождающими модуль M векторами $m_i = \partial_0(g_i)$ и коэффициенты образующих линейных зависимостей $\partial_1(P_k) = \sum_j \Gamma_j\sigma_{jk} = \sum_j \varrho_{ij}\sigma_{jk} = 0$ между предыдущими образующими линейными зависимостями $\Gamma_j = \partial_1(r_j) = \sum_i g_i\sigma_{ij} \in F_0$. Модуль X содержит элементы x_i, которые проектируются в образующие m_i модуля M при эпиморфизме $X \twoheadrightarrow M$. Для каждого линейного соотношения Γ_j между образующими m_i, линейная комбинация $\sum_i x_i\varrho_{ji} \in X$ проектируется в $\sum_i \varrho_{ji}m_i = 0$, и стало быть, лежит в N. Тем самым, выбор прообразов x_i для образующих модуля M относительно проекции $X \twoheadrightarrow M$ задаёт набор элементов $n_j = \sum_i x_i\varrho_{ji} \in N$, а значит, гомоморфизм $\xi_x : F_1 \to N$, $f_j \mapsto n_j$. Так как для каждого линейного соотношения P_k между базисными линейными зависимостями $\Gamma_j \in F_0$ в модуле M выполняется равенство

$$\sum_j n_j\sigma_{jk} = \sum_{ji} x_i\varrho_{ij}\sigma_{jk} = \sum_i x_i \sum_j \varrho_{ij}\sigma_{jk} = 0\,,$$

композиция $\xi \circ \partial_2 : s_k \mapsto \sum_j n_j\sigma_{jk}$ нулевая, т. е. в комплексе $\mathrm{Hom}(F,N)$ выполняется равенство $\partial_2^*(\xi_x) = 0$, означающее, что морфизм $\xi_x \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(F,N)$ является 1-коциклом. Любые другие элементы $y_i \in X$, проектирующиеся в образующие m_i, имеют вид $y_i = x_i + n_i'$ для некоторых $n_i' \in N$, задающих гомоморфизм $\beta : F_0 \to N$, $e_i \mapsto n_i'$. Они определяют свой 1-коцикл $\xi_y \in \mathrm{Hom}^1_{\mathrm{DG}}(F,N)$, действующий на F_1 по правилу

$$\xi_y : f_j \mapsto \sum_i y_i\varrho_{ij} = \sum_i x_i\varrho_{ij} + \sum_i n_i'\varrho_{ij} = \xi_x(f_j) + \beta\partial_1(f_j)\,.$$

[1]См. прим. 5.1 на стр. 92.

Таким образом, ξ_y отличается от ξ_x на кограницу, и расширение X корректно задаёт класс когомологий $\xi_X \in \mathrm{Ext}^1(M,N)$. Наоборот, любой коцикл $\xi : F_1 \to N$ задаёт модуль $X \supset N$, порождённый над N элементами x_i, находящимися в биекции с образующими m_i модуля M и удовлетворяющими соотношениям $\sum_i x_i \varrho_{ji} = \xi(f_j)$ для каждого образующего соотношения Γ_j в M. Проекция $X \twoheadrightarrow M$ корректно задаётся правилами $x_i \mapsto m_i$ и $n \mapsto 0$ для всех $n \in N$.

Упражнение 5.16. Убедитесь в этом и проверьте, что изоморфным расширениям отвечают когомологичные коциклы.

Предложение 5.7
Имеется канонический изоморфизм бифункторов $\mathrm{Ext}^0(M,N) \simeq \mathrm{Hom}(M,N)$, и для любой точной тройки модулей $0 \to A \to B \to C \to 0$ и любых модулей M, N имеются длинные точные последовательности модулей

$$0 \to \mathrm{Hom}(M,A) \to \mathrm{Hom}(M,B) \to \mathrm{Hom}(M,C) \to \mathrm{Ext}^1(M,A) \to \mathrm{Ext}^1(M,B) \to \cdots$$
$$\cdots \to \mathrm{Ext}^{k-1}(M,C) \to \mathrm{Ext}^k(M,A) \to \mathrm{Ext}^k(M,B) \to \mathrm{Ext}^k(M,C) \to \mathrm{Ext}^{k+1}(M,A) \to \cdots$$

$$0 \to \mathrm{Hom}(C,N) \to \mathrm{Hom}(B,N) \to \mathrm{Hom}(A,N) \to \mathrm{Ext}^1(C,N) \to \mathrm{Ext}^1(B,N) \to \cdots$$
$$\cdots \to \mathrm{Ext}^{k-1}(A,N) \to \mathrm{Ext}^k(C,N) \to \mathrm{Ext}^k(B,N) \to \mathrm{Ext}^k(A,N) \to \mathrm{Ext}^{k+1}(C,N) \to \cdots$$

Доказательство. Первое следует из того, что функтор $X \mapsto \mathrm{Hom}(M,X)$ сохраняет ядра и переводит точную последовательность $0 \to N \to I^0 \to I^1$ в точную последовательность $0 \to \mathrm{Hom}(M,N) \to \mathrm{Hom}(M,I^0) \to \mathrm{Hom}(M,I^1)$. Второе следует из лем. 5.2, позволяющей выбрать у модулей A, B, C такие проективные резольвенты P^A, P^B, P^C и инъективные резольвенты I_A, I_B, I_C, которые образуют в категории $\mathcal{C}om$ точные тройки

$$0 \to P^A \to P^B \to P^C \to 0 \quad \text{и} \quad 0 \to I_A \to I_B \to I_C \to 0,$$

расщепляющиеся в категории градуированных R-модулей. Последнее обстоятельство влечёт за собою точность в категории $\mathcal{C}om$ троек комплексов

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(M,I_A) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(M,I_B) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(M,I_C) \to 0$$
$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P_C,N) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P_B,N) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P_A,N) \to 0\,,$$

длинные точные последовательности когомологий которых и дают требуемое. □

Упражнение 5.17. Убедитесь, что функторы Ext^i дистрибутивны по отношению к конечным прямым суммам.

Пример 5.6 (абелевы группы)
Для свободной абелевой группы F и произвольной группы A имеем $\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}}(F,A) = 0$ при всех $i \neq 0$. Циклический модуль кручения $\mathbb{Z}/(n)$ имеет двучленную свободную резольвенту $\mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z}$ с дифференциалом $z \mapsto nz$. Поэтому $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}/(n),M) = 0$ при $i \neq 0, 1$. Остающиеся две группы

$$\mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(n),M) = \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(n),M) = \mathrm{Tors}_n(M) = \{m \in M \mid nm = 0\}\,,$$
$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(n),M) = \mathrm{Tor}_0^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(n),M) = M/nM\,.$$

В частности, $\mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(n), \mathbb{Z}/(m)) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(n), \mathbb{Z}/(m)) \simeq \mathbb{Z}/(m,n)$. На этом сходство с функтором $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}$ кончается. Функтор $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}$ не симметричен, и для вычисления $\mathrm{Ext}(N, \mathbb{Z})$ надо использовать инъективную резольвенту $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$. Тем самым, $\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z}) = 0$ при $i \neq 0, 1$ для всех M. Если N является группой кручения, то $\mathrm{Hom}(N, \mathbb{Q}) = 0$, и значит, $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = N^\vee$ (ср. с предл. 5.3 на стр. 104).

Упражнение 5.18. Покажите, что $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[p^{-1}], \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}_p$ — кольцо целых p-адических чисел.

5.6. Неканонические резольвенты. Ограниченный справа комплекс A называется *левой ацикличной резольвентой* объекта M, *пригодной для вычисления* $\mathrm{Ext}(*, N)$, если единственной ненулевой гомологией комплекса A является $H_0(A) \simeq M$ и вдобавок $\mathrm{Ext}^i(A_k, N) = 0$ при всех $i > 0$ и всех k. Таковы, например, все проективные резольвенты. Симметричным образом, ограниченный слева комплекс B называется *правой ацикличной резольвентой* объекта N, *пригодной для вычисления* $\mathrm{Ext}(M, *)$, если единственной ненулевой гомологией комплекса B является $H^0(B) \simeq N$ и при этом $\mathrm{Ext}^i(M, B^k) = 0$ при всех $i > 0$ и всех k. Таковы, к примеру, все инъективные резольвенты. Теми же рассуждениями, что и в n° 5.3.1 доказываются

Предложение 5.8
Для любых пригодных для вычисления Ext левой ацикличной резольвенты A объекта M и правой ацикличной резольвенты B объекта N при всех k имеют место канонические изоморфизмы $\mathrm{Ext}^k(M, N) \simeq H_k\big(\mathrm{Hom}(A, N)\big) \simeq H^k\big(\mathrm{Hom}(M, B)\big)$. □

Предложение 5.9
Пусть единственными ненулевыми (ко)гомологиями ограниченного слева комплекса K и ограниченного справа комплекса L являются $H^0(K) \simeq M$ и $H_0(L) \simeq N$. Тогда при каждом k имеется канонический изоморфизм

$$\mathrm{Ext}^k(M, N) \simeq H^k\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^M, L)\right) \simeq H^k\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(K, I_N)\right),$$

где P^M и I_N суть проективная и инъективная резольвенты объектов M и N. □

Упражнение 5.19. Докажите эти два предложения при помощи подходящих спектральных последовательностей.

Пример 5.7 (явное соответствие между коциклами в предл. 5.9)
Пусть класс $[\xi] \in \mathrm{Ext}^k(M, N)$ представлен коциклом $\xi : M \to I^k_N$ в комплексе модулей $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(M, I_N)$, где I_N — инъективная резольвента модуля N, как в опр. 5.4, и пусть модуль M включается в точную последовательность $0 \to M \to K^0 \to K^1 \to K^2 \to \cdots$, так что единственной ненулевой когомологией комплекса K, получающегося выбрасыванием из этой последовательности модуля M, является $H^0(K) \simeq M$. Тогда коциклу ξ можно *канонически* сопоставить коцикл $\xi_K \in \mathrm{Hom}^k_{\mathrm{DG}}(K, I_N)$, представляющий тот же класс $[\xi_K] = [\xi] \in \mathrm{Ext}^k(M, N)$ в модуле когомологий $H^k\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(K, I_N)\right)$, отождествлённом с $\mathrm{Ext}^k(M, N)$ согласно предл. 5.9. Для этого этого по лем. 5.1 продолжим стрелку ξ

до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\xi"] & K^0 \arrow[r, "d_K^0"] \arrow[d, dashed, "\xi^0"] & K^1 \arrow[r, "d_K^1"] \arrow[d, dashed, "\xi^1"] & K^2 \arrow[r, "d_K^2"] \arrow[d, dashed, "\xi^2"] & \cdots \arrow[r, "d_K^{\nu-1}"] & K^\nu \arrow[r, "d_K^\nu"] \arrow[d, dashed, "\xi^\nu"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \operatorname{im}\xi \arrow[r, hook] & I_M^k \arrow[r, "d_I^k"] & I_M^{k+1} \arrow[r, "d_I^{k+1}"] & I_M^{k+2} \arrow[r, "d_I^{k+2}"] & \cdots \arrow[r, "d_I^{k+\nu-1}"] & I_M^{k+\nu} \arrow[r, "d_I^{k+\nu}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

При чётном k полученное отображение $K \to I_N[k]$ является коциклом в $\mathrm{Hom}^k_{\mathrm{DG}}(K, I_N)$, и мы положим $\xi_K^\nu = \xi^\nu$. При нечётном k коцикличность означает антикоммутирование с дифференциалами, и мы положим ξ_K^ν равным коциклу, получающемуся из (ξ^ν) сменой знака у всех стрелок с нечётными номерами, что делает все квадраты кроме самого левого антикоммутативными. На языке формул оба случая охватываются одним предписанием

$$\xi_K^\nu \overset{\text{def}}{=} (-1)^{k\nu}\xi^\nu\,. \tag{5-18}$$

Формальная выкладка, доказывающая, что это коцикл, такова:

$$[d, \xi_K]^\nu = d_I^{k+\nu}\xi_K^\nu - (-1)^k\xi_K^{\nu+1}d_K^\nu = (-1)^{k\nu}\left((-1)^\nu d_I^{k+\nu}\xi^\nu - \xi^{\nu+1}d_K^\nu\right) = 0\,.$$

Упражнение 5.20. Убедитесь, что если коцикл $\xi = d_I\gamma \in \mathrm{Hom}^k_{\mathrm{DG}}(M, I_N)$ был кограницей отображения $\gamma : M \to I_N^{k-1}$, то по лем. 5.1 это отображение поднимается до такой гомотопии $\gamma_K \in \mathrm{Hom}^{k-1}_{\mathrm{DG}}(K, I_N)$, что $\xi_K = [d, \gamma] = d_I\gamma - (-1)^{k-1}\gamma d_K$.

Таким образом, мы получаем корректно определённое отображение

$$H^k\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(M, I_N)\right) \to H^k\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(K, I_N)\right)\,. \tag{5-19}$$

Обратное к нему отображение сопоставляет коциклу $\xi_K \in \mathrm{Hom}^k_{\mathrm{DG}}(K, I_N)$ композицию

$$\xi_K^0 \circ \iota : M \to I_N^k\,.$$

Упражнение 5.21. Убедитесь, что гомотопные нулю коциклы при этом переходят в границы комплекса $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(M, I_N)$, и постройте явный изоморфизм

$$H^k\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P_M, N)\right) \xrightarrow{\sim} H^k\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P_M, L)\right)$$

аналогичный только что предъявленному изоморфизму(5-19).

Обратите внимание, что мы дали явное конструктивное доказательство предл. 5.9.

Теорема 5.3 (спектральная последовательность Кюннета для Hom'ов)
Если у ограниченного справа комплекса $\cdots \to K_{k+1} \to K_k \to K_{k-1} \to \cdots$ и ограниченного слева комплекса $\cdots \to L^{\ell-1} \to L^\ell \to L^{\ell+1} \to \cdots$ все $\mathrm{Ext}^i(K_j, L^k) = 0$ при $i \neq 0$ для всех[1] j и k, то имеется спектральная последовательность когомологического типа с

$$E_2^{p,q} = \bigoplus_{k+\ell=q} \mathrm{Ext}^p\left(H_k(K), H^\ell(L)\right),$$

сходящаяся к градуированным факторам некоторой убывающей с ростом p фильтрации на $H^{p+q}\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(K, L)\right)$.

[1]Например, это условие выполнено, когда K состоит из проективных объектов или L состоит из инъективных объектов.

Доказательство. Обозначим через P и I проективные резольвенты Картана – Эйленберга[1] комплексов K и L. Это бикомплексы, p-е столбцы которых, как градуированные объекты, имеют вид

$$P_p = P^{B_p} \oplus P^{H_p} \oplus P^{B_{p-1}} \quad \text{и} \quad I^p = I_{B^p} \oplus I_{H^p} \oplus I_{B^{p+1}}\,, \tag{5-20}$$

где P^{B_p}, P^{H_p} и I_{B^p}, I_{H^p} суть проективные и инъективные резольвенты для модулей p-х (ко)границ $B_p = B_p(K)$, $B^p = B^p(L)$ и (ко)гомологий $H_p = H_p(K)$, $H^p = H^p(L)$ комплексов K, L, а горизонтальные дифференциалы $\partial_1 : P_p \to P_{p-1}$ и $\delta_1 : I^p \to I^{p+1}$ действуют на суммы (5-20) тождественно отображая первое слагаемое на третье и аннулируя два других слагаемых. По отношению к действию вертикальных дифференциалов ∂_2 и d_2 p-е столбцы бикомплексов P и I являются, соответственно, проективной и инъективной резольвентами объектов K_p и L^p. Комплекс $T = \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(\mathrm{Tot}\,P, \mathrm{Tot}\,I)$ можно рассматривать как свёртку бикомплекса с компонентами

$$T^{p,q} = \bigoplus_{\substack{k+\ell=p\\ i+j=q}} \mathrm{Hom}(P_{k,i}, I^{\ell,j})$$

и дифференциалами $D_1 : \varphi \mapsto d_1 \circ \varphi - (-1)^{|\varphi|}\varphi \circ \partial_1$ и $D_2 =: \varphi \mapsto d_2 \circ \varphi - (-1)^{|\varphi|}\varphi \circ \partial_2$, где ∂_1 и d_1 суть горизонтальные, а ∂_2 и d_2 — вертикальные дифференциалы бикомплексов P и I соответственно.

Упражнение 5.22. Убедитесь, что $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(\mathrm{Tot}\,P, \mathrm{Tot}\,I) = \bigoplus_{p,q} T^{p,q}$, дифференциал комплекса $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(\mathrm{Tot}\,P, \mathrm{Tot}\,I)$ действительно равен $D_1 + D_2$, и $D_1D_2 = -D_2D_1$.

К гомологиям $H^{p+q}\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(\mathrm{Tot}\,P, \mathrm{Tot}\,I)\right)$ сходится две спектральных последовательности. Таблица ${}^{I}E^1$ первой из них образованна гомологиями горизонтального дифференциала D_1 и имеет в q-том столбце прямую сумму $\bigoplus_{k+\ell=q} \mathrm{Hom}\left(P^{H_k}, I_{H_\ell}\right)$, т. е. представляет собою комплекс, вычисляющий $\bigoplus_{k+\ell=q} \mathrm{Ext}(H_k, H^\ell)$: p-я группа когомологий q-го столбца относительно вертикального дифференциала D_2 имеет заявленный в теореме вид ${}^{I}E^2_{p,q} = \bigoplus_{k+\ell=q} \mathrm{Ext}^p\left(H_k(K), H^\ell(L)\right)$. Таблица ${}^{II}E^1$ второй спектральной последовательности образована гомологиями вертикального дифференциала D_2 в комплексах $T^{p,*}$, которые являются прямыми суммами комплексов $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}\left(P_{k,*}, I^{\ell,*}\right)$ с $k + \ell = p$, вычисляющих $\mathrm{Ext}^q(K_k, L^\ell)$. По условию, они отличны от нуля только при $q = 0$ и равны ${}^{II}E^1_{p,0} = \bigoplus_{k+\ell=p} \mathrm{Hom}(K_k, L^\ell)$. Поэтому следующая таблица ${}^{II}E^2_{p,q} = {}^{II}E^\infty_{p,q}$ является предельной и имеет на каждой диагонали $p + q = n$ ровно одну ненулевую клетку, и там стоит $H_{p+q}\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(K, L)\right)$. □

Следствие 5.6 (формула универсальных коэффициентов)
Пусть в условиях теор. 5.3 ограниченный справа комплекс K состоит из проективных объектов и вдобавок все образы $B_i = \mathrm{im}(\partial : K_{i+1} \to K_i)$ его дифференциала тоже проективны. Тогда для любого ограниченного слева комплекса L имеется точная последовательность

$$0 \to \bigoplus_{\gamma+\delta=n+1} \mathrm{Ext}^1\left(H_\gamma(K), H^\delta(L)\right) \to H_n\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(K, L)\right) \to \mathrm{Hom}^n_{\mathrm{DG}}\left(H(K), H(L)\right) \to 0\,. \tag{5-21}$$

[1] См. опр. 5.2 на стр. 98.

Доказательство. Применение к точной тройке $0 \to Z_i \to K_i \to B_{i-1} \to 0$ функтора $\mathrm{Hom}(\,*\,, N)$ в произвольный объект N показывает, что $\mathrm{Ext}^k(Z_i, N) = 0$ при $k \neq 0$ для всех i, т. е. все Z_i тоже проективны. Поскольку, гомологии комплекса K имеют проективные резольвенты длины два

$$0 \to B_{q+1} \to Z_q \to H_q(L) \to 0\,,$$

при $p \neq 0, 1$ все $\mathrm{Ext}^p(H_k(K), H_\ell(L)) = 0$ для всех k, ℓ, и спектральная последовательность из теор. 5.1 стабилизируется на второй таблице $E^2_{p,q} = E^\infty_{p,q}$, сосредоточенной в двух столбцах $p = 0, 1$:

$$\begin{array}{cccc}
0 & \bigoplus\limits_{\alpha+\beta=q+1} \mathrm{Hom}\left(H_\alpha(K), H_\beta(L)\right) & \bigoplus\limits_{\gamma+\delta=q+1} \mathrm{Ext}^1\left(H_\gamma(K), H_\delta(L)\right) & 0 \\
0 & \bigoplus\limits_{\alpha+\beta=q} \mathrm{Hom}\left(H_\alpha(K), H_\beta(L)\right) & \bigoplus\limits_{\gamma+\delta=q} \mathrm{Ext}^1\left(H_\gamma(K), H_\delta(L)\right) & 0 \\
0 & \bigoplus\limits_{\alpha+\beta=q-1} \mathrm{Hom}\left(H_\alpha(K), H_\beta(L)\right) & \bigoplus\limits_{\gamma+\delta=q-1} \mathrm{Ext}^1\left(H_\gamma(K), H_\delta(L)\right) & 0\,.
\end{array}$$

Это и означает, что $H_n(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(K, L))$ является расширением вида (5-14). □

Замечание 5.2. Вместо проективности объектов K_i в условии сл. 5.6 можно было бы требовать проективность всех Z_i. Кроме того, можно было не накладывать никаких условий на комплекс K, но наложить симметричные условия на комплекс L: потребовать инъективность всех его границ $B_i(L)$, а также инъективность либо всех L_i, либо всех циклов $Z_i(L)$.

5.7. Умножение Ионеды. Для любой тройки объектов A, B, C композиция морфизмов

$$\mathrm{Hom}(B, C) \otimes \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A, C)\,, \quad (\beta, \alpha) \mapsto \beta \circ \alpha\,,$$

канонически продолжается до *умножения Ионеды* или $\smile$-произведения

$$\mathrm{Ext}^j(B, C) \otimes \mathrm{Ext}^i(A, B) \to \mathrm{Ext}^{i+j}(A, C)\,, \tag{5-22}$$

которое вычисляется любым из следующих эквивалентных способов. Зафиксируем проективные и инъективные резольвенты P^A, P^B, P^C и I_A, I_B, I_C модулей A, B, C. Рассмотрим в DG-категории комплексов композиции

$$\begin{gathered}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^B, P^C) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^A, P^B) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^A, P^C) \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^B, C) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^A, P^B) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^A, C) \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^B, I_C) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^A, P^B) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^A, I_C) \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(B, I_C) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^A, I_C) \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(I_B, I_C) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^A, I_B) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^A, I_C) \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(I_B, I_C) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(A, I_B) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(A, I_C) \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(I_B, I_C) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(I_A, I_B) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(I_A, I_C)\,.
\end{gathered} \tag{5-23}$$

Из правила Лейбница вытекает, что композиция коциклов β и α является коциклом:

$$d(\beta\circ\alpha)=(d\beta)\circ\alpha+(-1)^i\beta\circ(d\alpha)=0\circ\alpha+(-1)^i\beta\circ 0=0\,.$$

Добавление к α или β кограницы не меняет класса когомологий их композиции:

$$(\alpha+d\gamma)\circ\beta=\alpha\circ\beta+(d\gamma)\circ\beta=\alpha\circ\beta+d(\gamma\circ\beta)$$
$$\alpha\circ(\beta+d\gamma)=\alpha\circ\beta+\alpha\circ(d\gamma)=\alpha\circ\beta+d(\alpha\circ\gamma)\,.$$

Следовательно, каждая композиция в (5-23) корректно задаёт на когомологиях умножение (5-22), причём в силу естественности всех изоморфизмов $H^k(\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}})\simeq\mathrm{Ext}^k$ из лем. 5.6 все семь строчек в (5-23) приводят к одному и тому же умножению (5-22).

Пример 5.8 (продолжение прим. 5.7)
Вычислим композицию класса $[\xi]\in\mathrm{Ext}^i(A,B)$ и класса $[\eta]\in\mathrm{Ext}^j(B,C)$, представленных коциклами $\xi:\,A\to I_B^i$ из комплекса $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(A,I_B)$ и $\eta:\,B\to I_C^j$ из комплекса $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(B,I_C)$. Для этого по рецепту из лем. 5.1 поднимем стрелку η до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "\eta"] & I_B^0 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, dashed, "\eta^0"] & I_B^1 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, dashed, "\eta^1"] & I_B^2 \arrow[r, "d_3"] \arrow[d, dashed, "\eta^2"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \operatorname{im}\eta \arrow[r, hook, "d_j"'] & I_C^j \arrow[r, "d_{j+1}"'] & I_C^{j+1} \arrow[r, "d_{j+2}"'] & I_C^{j+2} \arrow[r, "d_{j+3}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

и положим $\eta_{I_B}^{\nu}=(-1)^{j\nu}\eta^{\nu}$. Получим коцикл $\eta_{I_B}\in\mathrm{Hom}^j_{\mathrm{DG}}(I_B,I_C)$ который можно перемножить с коциклом ξ согласно предпоследней строчке в (5-23). Получающаяся композиция $\eta\circ\xi_{I_B}\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(A,I_C)$ представляет собою стрелку

$$\eta\circ\xi_{I_B}^i=(-1)^{ij}\eta^i\circ\xi:\,A\to I_C^{i+j}\,,$$

которая является коциклом комплекса $\mathrm{Hom}(A,I_C)$ и представляет класс произведения Ионеды $[\eta]\smile[\xi]\in\mathrm{Ext}^{i+j}(A,C)$. Если бы класс $[\xi]$ был представлен коциклом $\xi':\,P_i^A\to B$, то тот же самый класс $[\eta]\smile[\xi]\in\mathrm{Ext}^{i+j}(A,C)$ можно было бы гораздо проще представить в когомологиях комплекса $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^A,I_C)$ однородным морфизмом $P^A\to I_C$ степени $i+j$, единственной ненулевой компонентой которого является композиция $\xi'\eta:\,P_i^A\to I_C^j$ (убедитесь, что это коцикл).

5.7.1. Класс точной последовательности. Каждой точной последовательности

$$0\to N\xrightarrow{\varphi_0}E_1\xrightarrow{\varphi_1}E_2\xrightarrow{\varphi_2}\cdots\xrightarrow{\varphi_{n-2}}E_{n-1}\xrightarrow{\varphi_{n-1}}E_n\xrightarrow{\varphi_n}M\to 0 \qquad (5\text{-}24)$$

можно канонически сопоставить класс когомологий $\vartheta=\vartheta(\varphi_0,\dots,\varphi_n)\in\mathrm{Ext}^n(M,N)$ со следующими свойствами:

(EC0) для изоморфизма $0\to N\xrightarrow[\sim]{\varphi_0}M\to 0$ класс $\vartheta(\varphi_0)=\varphi_0^{-1}\in\mathrm{Hom}(M,N)$

(EC1) класс $\vartheta(\varphi_0,\varphi_1)$ точной тройки $0 \longrightarrow N \xrightarrow{\varphi_0} E \xrightarrow{\varphi_1} M \longrightarrow 0$ равен образу тождественных эндоморфизмов $\mathrm{Id}_M \in \mathrm{Hom}(M,M)$ и $\mathrm{Id}_N \in \mathrm{Hom}(N,N)$ соответственно под действием связывающих гомоморфизмов

$$\delta^M:\ \mathrm{Hom}(M,M) \to \mathrm{Ext}^1(M,N) \quad \text{и} \quad \delta_N:\ \mathrm{Hom}(N,N) \to \mathrm{Ext}^1(M,N)$$

из длинных точных последовательностей Ext'ов, возникающих при применении к тройке функторов $h^M = \mathrm{Hom}(M,*)$ и $h_M\ \mathrm{Hom}(*,N)$

(EC2) класс $\vartheta = \vartheta(\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_n) \in \mathrm{Ext}^n(M,N)$ последовательности (5-24), которая возникает при слиянии двух более коротких точных последовательностей

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\varphi_0} E_1 \xrightarrow{\varphi_1} E_2 \xrightarrow{\varphi_2} \cdots \xrightarrow{\varphi_{r-2}} E_{r-1} \xrightarrow{\varphi_{r-1}} E_r \xrightarrow{\zeta} L \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\eta} E_{r+1} \xrightarrow{\varphi_{r+1}} E_{r+2} \xrightarrow{\varphi_{r+2}} \cdots \xrightarrow{\varphi_{n-2}} E_{k-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} E_n \xrightarrow{\varphi_n} M \longrightarrow 0$$

и имеет $\varphi_r = \eta\zeta$, равен произведению Ионеды классов

$$\vartheta(\varphi_0,\dots,\varphi_{r-1},\zeta) \in \mathrm{Ext}^r(L,N) \quad \text{и} \quad \vartheta(\eta,\varphi_{r+1},\dots,\varphi_n) \in \mathrm{Ext}^{n-r}(M,L)$$

(EC3) $a_0a_1\dots a_k\vartheta(a_0\varphi_0, a_1\varphi_1,\dots,a_k\varphi_k) = \vartheta(\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_k)$ для любых $a_i \in R$

(EC4) для каждой коммутативной диаграммы с точными строками

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "\varphi'_0"] \arrow[d, "\eta"'] & E'_1 \arrow[r, "\varphi'_1"] \arrow[d] & E'_2 \arrow[r, "\varphi'_2"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "\varphi'_{k-2}"] & E'_{k-1} \arrow[r, "\varphi'_{k-1}"] \arrow[d] & E'_k \arrow[r, "\varphi'_k"] \arrow[d] & M' \arrow[r] \arrow[d, "\zeta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N'' \arrow[r, "\varphi''_0"] & E''_1 \arrow[r, "\varphi''_1"] & E''_2 \arrow[r, "\varphi''_2"] & \cdots \arrow[r, "\varphi''_{k-2}"] & E''_{k-1} \arrow[r, "\varphi''_{k-1}"] & E''_k \arrow[r, "\varphi''_k"] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

в $\mathrm{Ext}^k(M'',N')$ имеет место равенство произведений Ионеды

$$\vartheta(\varphi''_0,\varphi''_1,\dots,\varphi''_k) \smile \eta = \zeta \circ \vartheta(\varphi'_0,\varphi'_1,\dots,\varphi'_k),$$

в частности, когда $N' = N'' = N$, $\eta = \mathrm{Id}_N$, $M' = M'' = M$, $\zeta = \mathrm{Id}_N$, классы верхней и нижней строки одинаковы: $\vartheta(\varphi'_0,\varphi'_1,\dots,\varphi'_k) = \vartheta(\varphi''_0,\varphi''_1,\dots,\varphi''_k)$.

Строятся все эти классы так. Выберем проективную резольвенту $P \twoheadrightarrow M$, инъективную резольвенту $N \hookrightarrow I$ и по лем. 5.1 достроим тождественные эндоморфизмы Id_N, Id_M до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
P_{k+1} \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{k+1}"] & P_k \arrow[r] \arrow[d, "\pi_k"'] \arrow[ddr, dashed, "\eta"'] & P_{k-1} \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{k-1}"'] & P_{k-2} \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{k-2}"'] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "\pi_1"'] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "\pi_0"'] \arrow[ddr, dashed, "\zeta"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal, "\mathrm{Id}_M"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\varphi_0"] \arrow[d, equal, "\mathrm{Id}"'] & E_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\iota^0"] & E_2 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\iota^1"] & \cdots \arrow[r, "\varphi_{k-2}"] & E_{k-1} \arrow[r, "\varphi_{k-1}"] \arrow[d, "\iota^{k-2}"] & E_k \arrow[r, "\varphi_k"] \arrow[d, "\iota^{k-1}"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\iota^k"] & 0 \arrow[d, "\iota^{k+1}"'] \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & I^0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & I^{k-2} \arrow[r] & I^{k-1} \arrow[r] & I^k \arrow[r] & I^{k+1}
\end{tikzcd} \tag{5-25}$$

Из левого верхнего квадрата видно, что стрелка $\pi_k \in \mathrm{Hom}^k_{\mathrm{DG}}(P, N)$ является коциклом в $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P, N)$. Её класс $[\pi_k] \in \mathrm{Ext}^k(M, N)$ также представляется изображённым пунктиром коциклом $\eta = \iota^0\varphi_0\pi_k = \iota^0\pi_{k-1}\partial_P : P_k \to I^0$ комплекса $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P, I)$. Аналогично, правый нижний квадрат показывает, что стрелка $\iota^k \in \mathrm{Hom}^k_{\mathrm{DG}}(M, I)$ тоже является коциклом, и её класс $[\iota^k] \in \mathrm{Ext}^k(M, N)$ также представляется изображённым пунктиром коциклом $\zeta = \iota^k\varphi_k\pi_0 = d_I\iota^{k-1}\pi_0 : P_0 \to I^k$ комплекса $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P, I)$.

Упражнение 5.23. Пусть верхняя и нижняя строки коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
A^i \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, dashed, "f"] & A^{i+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, dashed, "g"] & A^{i+2} \arrow[d, "\gamma"] \\
B^{i+k-1} \arrow[r, "\partial"'] & A^{i+k} \arrow[r, "\partial"'] & A^{i+k-1}
\end{tikzcd}$$

являются фрагментами комплексов A и B. Рассмотрим стрелки

$$f \stackrel{\text{def}}{=} \partial \circ \alpha = \beta \circ \partial \quad \text{и} \quad g \stackrel{\text{def}}{=} \partial \circ \beta = \gamma \circ \partial$$

как различные однородные элементы степени k в комплексе $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(A, B)$, единственными ненулевыми компонентами которых являются сами эти стрелки. Убедитесь, что разность $g - (-1)^{k-1} f = \partial\beta - (-1)^{k-1}\beta\partial = [\partial, \beta]$ является когранницей в комплексе $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(A, B)$.

Из упр. 5.23 вытекает, что в (5-25) коцикл η когомологичен $(-1)^{k(k-1)}\zeta = \zeta$. Таким образом возникает класс $[\pi_k] = [\eta] = [\zeta] = [\iota^k] \in \mathrm{Ext}^k(M, N)$. Он обозначается

$$(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\vartheta(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k) \stackrel{\text{def}}{=} [\pi_k] = [\eta] = [\zeta] = [\iota^k] \in \mathrm{Ext}^k(M, N) \tag{5-26}$$

и называется *классом точной последовательности*

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\varphi_0} E_1 \xrightarrow{\varphi_1} E_2 \xrightarrow{\varphi_2} \cdots \xrightarrow{\varphi_{k-2}} E_{k-1} \xrightarrow{\varphi_{k-1}} E_k \xrightarrow{\varphi_k} M \longrightarrow 0\,.$$

Обратите внимание, что прямо по построению этот класс обладает свойством (EC4). Свойство (EC3) получается из (EC4) и коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "a_0\varphi_0"] \arrow[d, "a_0\cdots a_k"'] & E_1 \arrow[r, "a_1\varphi_1"] \arrow[d, "a_1\cdots a_k"'] & E_2 \arrow[r, "a_2\varphi_2"] \arrow[d, "a_2\cdots a_k"'] & \cdots \arrow[r, "a_{k-2}\varphi_{k-2}"] & E_{k-1} \arrow[r, "a_{k-1}\varphi_{k-1}"] \arrow[d, "a_{k-1}a_k"'] & E_k \arrow[r, "a_k\varphi_k"] \arrow[d, "a_k"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}_M"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\varphi_0"] & E_1 \arrow[r, "\varphi_1"] & E_2 \arrow[r, "\varphi_2"] & \cdots \arrow[r, "\varphi_{k-2}"] & E_{k-1} \arrow[r, "\varphi_{k-1}"] & E_k \arrow[r, "\varphi_k"] & M \arrow[r] & 0\,.
\end{tikzcd}$$

Упражнение 5.24. Убедитесь, что при $k = 0$ класс (5-26) удовлетворяет (EC0).

Чтобы установить согласованность слияния двух точных последовательностей с произведением Ионеды их классов, о которой идёт речь в (EC2), нам понадобится известное школьное правило сложения треугольных чисел[1]:

Упражнение 5.25. Убедитесь, что $\frac{n(n+1)}{2} + \frac{m(m+1)}{2} = \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} - nm$.

[1] Собственно ради свойства (EC2) в формулу (5-26) и был внедрён столь витиеватый знак.

Рассмотрим коммутативную диаграмму, верхние вертикальные стрелки которой справа налево продолжают тождественный морфизм Id_M коммутативными квадратами вплоть до стрелки π_{n-r}, затем наклонная пунктирная стрелка π'_{n-r} поднимает стрелку π_{n-r} вдоль эпиморфизма ζ, а последующие наклонные стрелки продолжают стрелку π'_{n-r} коммутативными параллелограммами дальше влево:

$$\begin{tikzcd}
 & P_n \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\pi'_n"'] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\pi'_{n-1}"'] & \cdots \arrow[r] & P_{n-r} \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\pi'_{n-r}"'] \arrow[d, "\pi_{n-r}"] & P_{n-r-1} \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{n-r-1}"] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "\pi_0"] & M \arrow[d, equal] \\
N \arrow[r, "\varphi_0"'] \arrow[d, equal] & E_1 \arrow[r, "\varphi_1"'] \arrow[d, "\iota_0"'] & \cdots \arrow[r, "\varphi_{r-1}"'] & E_r \arrow[r, two heads, "\zeta"'] \arrow[d, "\iota_{r-1}"'] & L \arrow[r, hook, "\eta"] \arrow[d, "\iota_r"'] & E_{r+1} \arrow[r, "\varphi_{r+1}"] \arrow[dl, dashed, "\iota'_r"] & \cdots \arrow[r, "\varphi_{n-1}"] & E_n \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[dl, dashed, "\iota'_{n-1}"] & M \arrow[dl, dashed, "\iota'_n"] \\
N \arrow[r, "\varphi_0"] & I_0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & I_{r-1} \arrow[r] & I_r \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & I^{n-1} \arrow[r] & I^n\,. &
\end{tikzcd}$$

Симметричным образом, нижние вертикальные стрелки продолжают тождественный морфизм Id_N слева направо коммутативными квадратами вплоть до стрелки ι_r, которая затем расширяется вдоль мономорфизма η до наклонной пунктирная стрелки ι'_r, и та продолжается коммутативными параллелограммами дальше направо. Произведение $\vartheta\left(\varphi_0, \dots, \varphi_{r-1}\zeta\right) \smile \vartheta\left(\eta, \varphi_{r+1}, \dots, \zeta\right) \in \mathrm{Ext}^n(M, N)$ представляется взятым со знаком $\frac{r(r+1)}{2} + \frac{(n-r)(n-r+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} + r(n-r)$ когомологическим классом коцикла $\beta = \iota_r\pi_{n-r} : P_{n-r} \to I_r$ из комплекса[1] $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P, I)$. Из упр. 5.23 и предыдущей коммутативной диаграммы, перерисованной в виде

$$\begin{tikzcd}
P_n \arrow[r] \arrow[d, "\pi'_n"'] \arrow[ddr, dashed, "\alpha"'] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\pi'_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & P_{n-r} \arrow[r] \arrow[d, "\pi'_{n-r}"'] \arrow[ddr, dashed, "\beta"'] & P_{n-r-1} \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{n-r-1}"] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\pi_0"'] \arrow[ddr, dashed, "\gamma"'] & M \arrow[d, equal] \\
N \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & E_1 \arrow[r] \arrow[d, "\iota_0"] & \cdots \arrow[r, "\varphi_{r-1}"] & E_r \arrow[r, "\eta\zeta"] \arrow[d, "\iota_{r-1}"'] & E_{r+1} \arrow[r, "\varphi_{r+1}"] \arrow[d, "\iota'_r"] & \cdots \arrow[r] & E_n \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\iota'_{n-1}"'] & M \arrow[d, "\iota'_n"] \\
N \arrow[r, hook] & I_0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & I_{r-1} \arrow[r] & I_r \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & I^{n-1} \arrow[r] & I^n\,,
\end{tikzcd}$$

мы заключаем, что β когомологичен коциклу $(-1)^{r(n-1)}\alpha$. Так как класс $\vartheta(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ представляется коциклом $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}[\alpha]$ и $r(n-r)+r(n-1) \equiv 0 \pmod 2$, мы убеждаемся в справедливости (EC2). Свойство (EC1) вытекает из следующего более общего факта, весьма полезного в конкретных вычислениях.

Предложение 5.10

Обозначим через $\vartheta \in \mathrm{Ext}^1(M, N)$ класс, ассоциированной с точной тройкой

$$0 \to N \xrightarrow{\nu} E \xrightarrow{\mu} M \to 0\,.$$

Тогда для любого модуля A в длинных точных последовательностях когомологий, возникающих при применении к этой тройке функторов $h^A = \mathrm{Hom}(A, *)$ и $h_A = \mathrm{Hom}(*, A)$ связывающий гомоморфизм $\delta^A : \mathrm{Ext}^k(A, M) \to \mathrm{Ext}^{k+1}(A, N)$ задаётся левым $\smile$-умножением на класс ϑ: $\xi \mapsto \vartheta\smile\xi$, а связывающий гомоморфизм $\delta_A : \mathrm{Ext}^k(N, A) \to \mathrm{Ext}^{k+1}(M, A)$ задаётся правым $\smile$-умножением на класс $(-1)^{k+1}\vartheta$: $\xi \mapsto (-1)^{k+1}\xi \smile \vartheta$.

[1] Написанная стрелка является единственной ненулевой компонентой этого коцикла.

Доказательство. Выберем проективную резольвенту $P^A \twoheadrightarrow A$, инъективную резольвенту $N \hookrightarrow I_N$ и рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$
\begin{tikzcd}
 & P^A_{k+1} \arrow[r, "\partial^A_{k+1}"] \arrow[d, "\eta"'] \arrow[ddr, dashed, "\alpha"'] & P^A_k \arrow[d, "\xi'"'] \arrow[dr, "\xi"] \arrow[ddr, dashed, "\beta"'] & & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, equal, "\mathrm{Id}_N"'] & E \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\iota^0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\iota^1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\iota"'] & I^0_M \arrow[r, "d^0_M"'] & I^1_M\,. &
\end{tikzcd}
\tag{5-27}
$$

Нижние два квадрата задают класс $\vartheta(\nu,\mu) = -[\iota^1] \in \mathrm{Ext}^1(M,N)$, где $\iota^1 : M \to I^1_M$ рассматривается как коцикл комплекса $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(M, I_N)$. Верхняя трапеция описывает действие связывающего гомоморфизма δ^A на класс $[\xi] \in \mathrm{Ext}^k(A,M)$, представленный коциклом $\xi : P^A_k \to M$ комплекса $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^A, M)$: сначала стрелка ξ поднимается вдоль эпиморфизма μ до стрелки $\xi' : P^A_k \to E$, потом переводится дифференциалом комплекса $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P,E)$ в стрелку[1] $(-1)^{k+1}\xi' \circ \partial^A_{k+1} : P^A_{k+1} \to E$, которая пропускается через N, так как ξ — коцикл, и даёт такую стрелку $\eta : P^A_{k+1} \to N$, что диаграмма (5-27) становится коммутативной, а класс $\delta^A[\xi] \in \mathrm{Ext}^{k+1}(M,N)$ представляется в когомологиях комплекса $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^A, N)$ коциклом $(-1)^{k+1}\eta$. Этот же класс представляется в когомологиях комплекса $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^A, I_N)$ коциклом $(-1)^{k+1}\alpha = (-1)^{k+1}\iota\circ\eta$, который по упр. 5.23 когомологичен в $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(P^A, I_N)$ коциклу $-\beta = -\iota^1 \circ \xi$, задающему произведение Ионеды $\vartheta[\xi]$.

Второе утверждение доказывается рассмотрением симметричной диаграммы, связывающей проективную резольвенту $P^M \twoheadrightarrow M$ с инъективной резольвентой $A \hookrightarrow I_A$:

$$
\begin{tikzcd}
P^M_1 \arrow[r, "\partial^M_1"] \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[ddr, dashed, "\alpha"] & P^M_0 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi_0"'] \arrow[ddr, dashed, "\beta"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal, "\mathrm{Id}_M"] & 0 \\
N \arrow[r, "\nu"'] \arrow[dr, "\xi"'] & E \arrow[r, "\mu"'] \arrow[d, "\xi'"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\eta"] & 0 \\
 & I^k_A \arrow[r, "d^k_A"'] & I^{k+1}_A\,. &
\end{tikzcd}
$$

Связывающий гомоморфизм $\delta_A : \mathrm{Ext}^k(N,A) \to \mathrm{Ext}^{k+1}(M,A)$ переводит коцикл ξ комплекса $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DG}}(N, I_A)$ в коцикл η того же комплекса (без знаков!), а коцикл β, представляющий тот же класс из $\mathrm{Ext}^k(M,A)$, но в когомологиях комплекса $\mathrm{Hom}(P^M, I_A)$, когомологичен по упр. 5.23 коциклу $(-1)^k\alpha$. Произведение $[\xi] \circ \vartheta(\nu,\mu)$ представляется к тех же когомологиях коциклом $-\alpha = -\xi \circ \pi_1$. □

[1] См. прим. 4.3 на стр. 68.

Упр. 5.5. Проективный модуль является 1-членной проективной резольвентой самого себя.

Упр. 5.6. Первое следует из того, что все три функтора $N \mapsto P^N$, $C \mapsto M \otimes C$, $C \mapsto H_k(C)$ перестановочны с прямыми суммами, а второе — из того, что над коммутативным кольцом имеется канонический изоморфизм $P^M \otimes P^N \simeq P^N \otimes P^M$.

Упр. 5.11. Поскольку для любого элемента $a \in A$ существует морфизм[1] $\psi : A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ с $\psi(a) \neq 0$, сопоставление элементу $a \in A$ гомоморфизма вычисления

$$\mathrm{ev}_a : \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad \psi \mapsto \psi(a)$$

задаёт вложение $A \hookrightarrow A^{\vee\vee}$. Покажем, что для $A = \mathbb{Z}$ это изоморфизм. Двойственная группа $\mathbb{Z}^\vee \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (изоморфизм сопоставляет гомоморфизму $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ значение $\varphi(1) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$). Вложение $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}^{\vee\vee}$ переводит $n \in \mathbb{Z}$ в $n \cdot \mathrm{Id} : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $x \mapsto nx$. Каждый ненулевой гомоморфизм $\psi : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ имеет такой вид. Действительно, пусть $\psi([1/m]) \neq 0$. Так как $m[1/m] = 0$, значение $\psi([1/m]) = [n/m] = n[1/m]$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$. Тогда для любого $k \neq 0$ тоже имеем $k\psi([1/(km)]) = \psi([1/m]) = n[1/m]$, откуда $\psi([1/(km)]) = n[1/(km)]$ и $\psi(1/k) = m\psi(1/(km)) = n[1/k]$, т. е. $\psi = n \cdot \mathrm{Id}$. Тем самым, $\mathbb{Z}^{\vee\vee} \simeq \mathbb{Z}$. Поскольку функтор $h_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$ перестановочен с конечными прямыми суммами, $F^{\vee\vee} \simeq F$ для любой конечно порождённой свободной группы $F = \mathbb{Z}^n$. Если группа A является фактором такой группы F, то коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal] & A \arrow[d, hook] \\ F^{\vee\vee} \arrow[r, two heads] & A^{\vee\vee} \end{tikzcd},$$

левая вертикальная стрелка в которой биективна, а обе горизонтальные стрелки эпиморфны, показывает, что правая инъективная вертикальная стрелка тоже биективна. Тем самым $A^{\vee\vee} \simeq A$ для любой конечно порождённой абелевой группы A.

Упр. 5.13. Однородная компонента степени d любого полинома $f = \sum h_i f_i \in I$ имеет вид $\sum h_i^{(d-d_i)} f_i$, где $h_i^{(\alpha)}$ означает однородную компоненту степени α полинома h_i. Тем самым, $f^{(d)} \in I \cap S_d$, т. е. вместе с каждым многочленом f идеал I содержит и все однородные компоненты f, откуда $I \subset \bigoplus\limits_\nu I \cap S_\nu$.

Упр. 5.14. Если в линейной зависимости $\sum h_i f_i = 0$ с однородными h_i имеется h_k с $\deg h_k = 0$, то $h_k \in \Bbbk$ и образующая f_k выражается через остальные. Наоборот, если $f_k = \sum_{i \neq k} g_i f_i$ для некоторых $g_i \in S$, то беря в этом равенстве однородную компоненту степени $d = \deg f_k$, получим выражение $f_k = \sum_{i \neq k} g^{(d-d_i)} f_i$, где $d_i = \deg f_i$ и $g^{(k)}$ означает однородную компоненту степени k многочлена g. Это приводит к линейной зависимости $f_k - \sum_{i \neq k} h_i f_i = 0$ с однородными $h_k = 1$ и $h_i = g^{(d-d_i)}$.

Что касается второго утверждения, то каждая линейная зависимость $\sum h_i f_i = 0$ является суммой своих однородных компонент степени d, имеющих вид

$$f_k = \sum_{i \neq k} g^{(d-d_i)} f_i\,.$$

---

[1]См. упр. 3.18 на стр. 54.

В свободном модуле $\bigoplus_i S[-d_i]$ такой однородной зависимости отвечает вектор

$$(g_1^{d-d_1}, \dots, g_m^{d-d_m}),$$

каждая компонента которого $g_i^{d-d_i} \in S[-d_i]$ имеет степень d в модуле $S[-d_i]$.

Упр. 5.16. На языке формул переход к изоморфному расширению означает дословно то же самое, что и выбор других прообразов y_i при проекции $X \twoheadrightarrow M$ для образующих $m_i \in M$.

Упр. 5.17. Все функторы $M \mapsto P^M$, $N \mapsto I_N$, $C \mapsto \mathrm{Hom}(M, C)$, $C \mapsto \mathrm{Hom}(C, N)$, $C \mapsto H^k(C)$ перестановочны с конечными прямыми суммами.

Упр. 5.18. Воспользуйтесь точной тройкой $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[p^{-1}] \to \operatorname{colim} \mathbb{Z}/(p^n) \to 0$ и тем, что функтор $\mathrm{Hom}(\,*\,, A)$ переводит копределы в пределы.