## Итоговый письменный экзамен за семестровый курс

Задачи можно решать в любом порядке. Полное решение каждой задачи оценивается в 10 баллов. Один ответ без объяснений оценивается в нуль баллов вне зависимости от того, верный он или нет. Для получения 100%-ного результата достаточно набрать 50 баллов. Общение и использование любых электронных приборов или печатных материалов, за исключением табеля и листков с задачами, запрещается. Собственноручными записями пользоваться можно.

**Задача 1 (10 баллов).** Для каждого целого неотрицательного $m$ обозначим через $[m\rangle$ категорию циклически упорядоченных против часовой стрелки комплексных корней $(m+1)$-й степени из единицы, в которой $\mathrm{Hom}(x,y)$ состоит из проходимой против часовой стрелки дуги[1] $xy$ и всех дуг, получающихся добавлением к ней любого натурального числа оборотов против часовой стрелки. Для каждого $x \in \mathrm{Ob}[m\rangle$ обозначим через $\tau_x \in \mathrm{End}(x)$ эндоморфизм, задаваемый одним оборотом по окружности. Определим *малую циклическую категорию* $\Lambda$ следующим образом: объекты $\Lambda$ суть категории $[m\rangle$, а стрелки $\varphi : [n\rangle \to [m\rangle$ суть такие функторы, что $\varphi(\tau_x) = \tau_{\varphi(x)}$ для всех $x \in \mathrm{Ob}[n\rangle$. Доопределите представимый предпучок $h_{[0\rangle} : [m\rangle \mapsto \mathrm{Hom}_\Lambda([m\rangle, [0\rangle)$ на $\Lambda$ так, чтобы он принимал значения не в $\mathcal{S}et$, а в $\Lambda$, и задавал инволютивную[2] эквивалентность категорий $\Lambda^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{\sim} \Lambda$.

**Задача 2.** Сопоставим аддитивному функтору $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}b$ из малой абелевой категории $\mathcal{A}$ в абелевы группы малую категорию $\mathcal{F}$ с множеством объектов $\mathrm{Ob}\,\mathcal{F} = \bigsqcup_{A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}} F(A)$ и множеством морфизмов из $a \in F(A)$ в $b \in F(B)$, образованным всеми такими стрелками $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)$, что $F\varphi(a) = b$.

**а) (10 баллов)** Найдите в категории функторов $\mathcal{A} \to \mathcal{A}b$ копредел диаграммы $\mathcal{F}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{F}un(\mathcal{A}, \mathcal{A}b)$, сопоставляющей объекту $a \in F(A)$ категории $\mathcal{F}$ копредставимый функтор $h^A$, а стрелке $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(a,b)$ из $a \in F(A)$ в $b \in F(B)$ — естественное преобразование $\varphi^* : h^B \to h^A$ правого умножения на $\varphi$.

**б) (10 баллов)** Верно ли, что функтор $F$ точен слева, если и только если эта диаграмма фильтрующаяся?

**Задача 3 (10 баллов).** Докажите, что следующие три свойства категории левых модулей над ассоциативным кольцом $R$ с единицей эквивалентны: **а)** $\mathrm{Ext}^2_R(M,N) = 0$ для всех $M$, $N$ **б)** $\mathrm{Ext}^n_R(M,N) = 0$ при $n \neq 0, 1$ для всех $M$, $N$ **в)** всякий подмодуль любого свободного модуля проективен.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & C \arrow[d, hook] \\
A \arrow[r, hook] & F \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & D \arrow[d, two heads] \\
 & E \arrow[r, equal] & E
\end{tikzcd}$$

**Задача 4 (10 баллов).** Пусть точные тройки $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$ и $C \hookrightarrow D \twoheadrightarrow E$ в абелевой категории $\mathcal{A}$ с достаточным числом инъективных (или проективных) объектов задаются когомологическими классами $\eta \in \mathrm{Ext}^1(C,A)$ и $\zeta \in \mathrm{Ext}^1(E,C)$. Покажите, что для существования изображённой справа коммутативной диаграммы, в верхней строке и правом столбце которой стоят эти тройки, необходимо и достаточно обращения в нуль произведения Ионеды $\eta\zeta \in \mathrm{Ext}^2(E,A)$.

**Задача 5 (10 баллов).** Может ли тривиальный модуль $\mathbb{Z}$ над групповой алгеброй $\mathbb{Z}[G]$ конечной группы $G \neq 1$ иметь конечную проективную резольвенту в категории $\mathbb{Z}[G]$-$\mathcal{M}od$?

**Задача 6 (10 баллов).** Обозначим через $K$ комплекс $\Bbbk[x] \otimes \Bbbk[x] \to \Bbbk[x] \otimes \Bbbk[x]$, сосредоточенный в степенях $-1$, $0$, где $\Bbbk$ — поле, тензорное произведение берётся над $\Bbbk$, а дифференциал задаётся умножением на $x \otimes 1 - 1 \otimes x$ в коммутативной $\Bbbk$-алгебре $\Bbbk[x] \otimes \Bbbk[x]$. Вычислите когомологии $n$-й тензорной степени $K^{\otimes n}$ комплекса $K$ над $\Bbbk$.

**Задача 7 (10 баллов).** Пусть $\Bbbk$ — поле, $V$ — векторное пространство с базисом $x_1, \dots, x_n$ над $\Bbbk$, и $n \times n$-матрица $q = \left(q_{ij}\right) \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$ имеет $q_{ii} = 1$ при всех $i$ и $q_{ij} = q_{ji}^{-1}$ при всех $i \neq j$. Опишите двойственную алгебру к квадратичной алгебре *квантовых многочленов* $\Bbbk_q[x_1, \dots, x_n] = \mathbb{T}V \,/\, (R)$, где $(R) \subset \mathbb{T}V$ — двусторонний идеал тензорной алгебры $\mathbb{T}V$, порождённый $\Bbbk$-линейной оболочкой $R$ всевозможных разностей $x_i \otimes x_j - q_{ij} \cdot x_j \otimes x_i \in V \otimes V$, явно опишите комплекс Кошуля алгебры $\Bbbk_q[x_1, \dots, x_n]$ и выясните, является ли она кошулевой[3].

[1] При $y = x$ эта дуга состоит из одной точки и задаёт тождественный эндоморфизм объекта $x$.

[2] Т. е. обратную самой себе.

[3] Напомню, что квадратичная алгебра $A = \mathbb{T}V \,/\, (R)$ называется *кошулевой*, если точен её *комплекс Кошуля* $\mathcal{K}_A = A^! \otimes A^*$, где $A^! = \mathbb{T}V^* \,/\, (\mathrm{Ann}\, R)$ — двойственная квадратичная алгебра, а дифференциал $d : \mathcal{K}_A \to \mathcal{K}_A$ задаётся умножением на элемент Казимира $\mathrm{Id}_V \in V^* \otimes V \subset A^! \otimes A$ в правом $A^! \otimes A$-модуле $\mathcal{K}_A$, на котором элемент $b \in A^!$ действует правым умножением на $b$ в алгебре $A^!$, а элемент $a \in A$ — оператором $a^* : A^* \to A^*$, двойственным к левому умножению на $a$ в алгебре $A$.