А. Л. Городенцев[1]

Геометрическое введение в алгебраическую геометрию

Целью этих занятий является знакомство с проективной геометрией и классическими примерами проективных многообразий, а также с современным языком схем и простейшими геометрическими свойствами абстрактных алгебраических многообразий и морфизмов между ними. Курс задумывался как трамплин для тех, кто собирается читать более продвинутые книги и статьи по алгебраической геометрии, и одновременно — как дайджест этой науки, адресованный тем, кто специализируется в других областях.

Севастополь – Екатеринбург – Москва
2012

[1]ВШЭ, ИТЭФ, НМУ, e-mail:gorod@itep.ru, http://gorod.bogomolov-lab.ru

Оглавление

§1. Проективное пространство

1.1. Соглашения об обозначениях. Всюду далее мы обозначаем через V векторное пространство над полем $\Bbbk$, а через V^* — двойственное пространство однородных линейных функций $V \to \Bbbk$. Значение функции $\varphi \in V^*$ на векторе $v \in V$ обозначается одним из трёх способов:

$$\varphi(v) = \langle\, \varphi\,,\, v\,\rangle = \mathrm{ev}_v(\xi)\,.$$

Через $\{e_i\}$ и $\{x_i\}$ по умолчанию обозначаются двойственные базисы пространств V и V^*:

$$\big\langle\, x_i\,,\, e_j\,\big\rangle = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases}$$

Через $SV^* = \bigoplus_{d\geqslant 0} S^dV^*$ обозначается *симметрическая алгебра* пространства V^*, т. е. алгебра *многочленов* от x_i. Она градуирована подпространствами $S^dV^* \subset SV^*$ *однородных* многочленов степени d, которые являются конечными линейными комбинациями одночленов вида $\varphi_1\varphi_2\,\ldots\,\varphi_d$ с $\varphi_i \in V^*$.

Через $\mathbb{A}(V)$ мы обозначаем ассоциированное с V *аффинное точечное* пространство[1].

1.2. Проективное пространство. С $(n+1)$-мерным векторным пространством V над произвольным полем $\Bbbk$ помимо $(n+1)$-мерного аффинного пространства $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(V)$ связано n-мерное *проективное пространство* $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$, точки которого — одномерные векторные подпространства в V, или, что то же самое, проходящие через начало координат аффинные прямые в $\mathbb{A}(V)$. Чтобы видеть их как «обычные» точки, внутрь $\mathbb{A}(V)$ следует поместить экран — не содержащую начала координат аффинную гиперплоскость $U_\xi \subset \mathbb{A}(V)$, задаваемую неоднородным линейным уравнением $\xi(x) = 1$, где $\xi \in V^*$ — любая ненулевая линейная форма на V (см. рис. 1◇1).

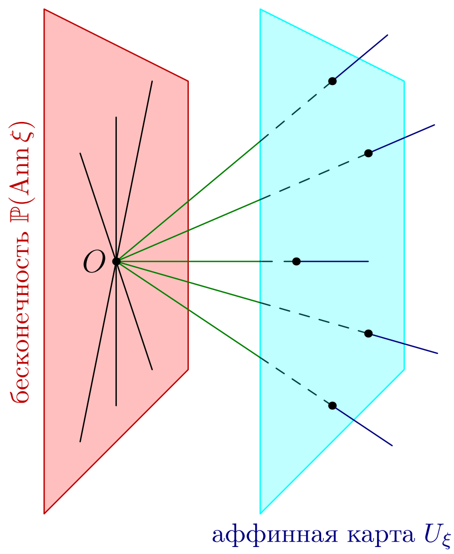


Рис. 1◇1. Проективный мир.

Упражнение 1.1. Убедитесь, что сопоставление

$$\xi \mapsto U_\xi$$

задаёт биекцию между ненулевыми ковекторами $\xi \in V^*$ и не проходящими через начало координат аффинными гиперплоскостями в $\mathbb{A}(V)$.

Всякий такого рода экран U_ξ называется *аффинной картой* на $\mathbb{P}(V)$. В карте U_ξ видны все одномерные подпространства, порождённые векторами $v \in V$ с $\xi(v) \neq 0$. Дополнение $\mathbb{P}_n \setminus U_\xi$ состоит из одномерных подпространств n-мерного векторного подпространства $\mathrm{Ann}\,(\xi) = \{v \in V \mid \langle\, \xi\,,\, v\,\rangle = 0\} \subset V$ — проходящей через начало координат параллельной копии гиперплоскости U_ξ. Эти одномерные подпространства

[1] его точки, по определению, взаимно однозначно соответствуют векторам из V, и их можно представлять себе как «концы» этих векторов, отложенных от отвечающей нулевому вектору $\vec{0} \in V$ точки $O \in \mathbb{A}(V)$

составляют $(n-1)$-мерное проективное пространство $\mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{P}(\mathrm{Ann}\,(\xi)$, которое называется *бесконечно удалённой гиперплоскостью* карты U_ξ. Точки $\mathbb{P}(\mathrm{Ann}\,\xi)$ можно воспринимать как *направления* в аффинной карте U_ξ.

Итак, n-мерное проективное пространство $\mathbb{P}_n$ разбивается в объединение непересекающихся аффинных пространств всех промежуточных размерностей:

$$\mathbb{P}_n = U_\xi \sqcup \mathbb{P}(\mathrm{Ann}\,\xi) = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \mathbb{P}_{n-2} = \cdots = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{A}^0$$

(где $\mathbb{A}^0 = \mathbb{P}_0$ — это одна точка).

Упражнение 1.2. Какое соотношение на q получится, если независимо подсчитать количества точек, из которых состоят левая и правая части этого разбиения над конечным полем из q элементов?

1.2.1. Глобальные однородные координаты. Фиксируем на векторном пространстве V координаты $x_0, x_1, \ldots, x_n$ относительно какого-нибудь базиса $e_0, e_1, \ldots, e_n$. Ненулевые векторы $v = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ и $w = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$ задают одну и ту же точку $p \in \mathbb{P}_n$, если и только если их координаты пропорциональны. Это равносильно равенству отношений[1] $x_\mu : x_\nu = y_\mu : y_\nu$ для всех $0 \leqslant \mu \neq \nu \leqslant n$. Таким образом, точкам $p \in \mathbb{P}_n$ корректно соответствуют не сами координаты, а только отношения $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$ между ними. Эти отношения называется *однородными координатами* точки p в базисе $e_0, e_1, \ldots, e_n$.

1.2.2. Локальные аффинные координаты. Рассмотрим на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ аффинную карту $U_\xi = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}(V) \mid \xi(x) = 1\}$, отвечающую какому-нибудь ненулевому ковектору $\xi \in V^*$. Любые n ковекторов $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in V^*$, таких что $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ образуют базис в V^*, задают внутри карты U_ξ *локальные аффинные координаты*. А именно, если векторы $e_0, e_1, \ldots, e_m \in V$ составляют двойственный к $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ базис, то точка $e_0 \in U_\xi$ будет началом отсчёта аффинной координатной системы, а векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ будут базисными векторами в векторном пространствеAnn ξ, с которым ассоциировано аффинное пространство U_ξ.

Чтобы вычислить локальные аффинные координаты точки $p \in \mathbb{P}_n$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$, следует сначала выбрать в одномерном подпространстве, отвечающем точке p, вектор $v = p/\xi(p) \in U_\xi$, такой что $\xi(v) = 1$, а затем вычислить значения n линейных форм ξ_ν на этом векторе. Отметим, что получающиеся таким образом значения локальных аффинных координат $x_i(p) = \xi_i(v) = \xi_i(p)/\xi(p)$ (где $1 \leqslant i \leqslant n$) *нелинейно* зависят от однородных координат точки p.

Пример 1.1 (проективная прямая)
$\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\Bbbk^2)$ покрывается двумя аффинными картами $U_0 = U_{x_0}$ и $U_1 = U_{x_1}$, представляющими собою аффинные прямые с уравнениями $x_0 = 1$ и $x_1 = 1$ (см. рис. 1◊2). Карта U_0 покрывает все точки $\mathbb{P}_1$ кроме вертикальной координатной оси $(0 : 1)$, которая является единственной бесконечно удалённой точкой для карты U_0. Точка $(x_0 : x_1)$ с $x_0 \neq 0$ видна в карте U_1 как $\left(1 : \frac{x_1}{x_0}\right)$ и функция $t = x_1|_{U_0} = x_1/x_0$ может использоваться в качестве локальной аффинной координаты в этой карте. Карта U_1 покрывает все точки $(x_0 : x_1) = \left(\frac{x_0}{x_1} : 1\right)$ с $x_1 \neq 0$, и функция $s = x_0|_{U_1} = x_0/x_1$ годится в качестве локальной координаты в U_1. Единственной бесконечно удалённой точкой для карты U_1 явля-

[1] где равенства вида $0 : x = 0 : y$ и $x : 0 = y : 0$ также допускаются

ется горизонтальная координатная ось $(1 : 0)$. Координаты s и t одной и той же точки $(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}_1$, видимой сразу в обеих картах, связаны соотношением $s = 1/t$.

Упражнение 1.3. Убедитесь в этом.

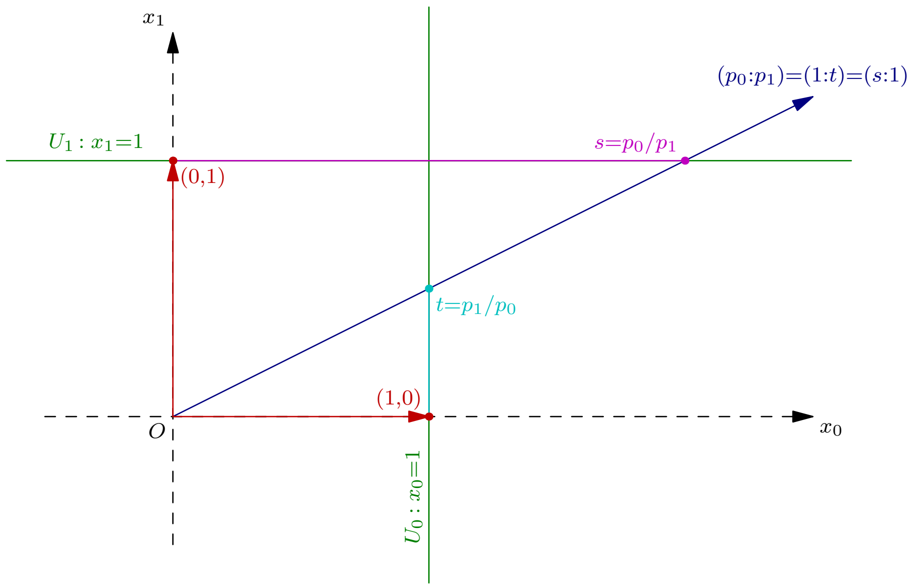


Рис. 1◇2. Стандартные карты на $\mathbb{P}_1$.

Поэтому $\mathbb{P}_1$ можно воспринимать как результат склейки двух аффинных координатных прямых $\mathbb{A}^1$ (одна — с координатой s, другая — с координатой t) по дополнению до начала координат по следующему правилу: точка с координатой s на одной прямой приклеивается к точке с координатой $t = 1/s$ на другой.

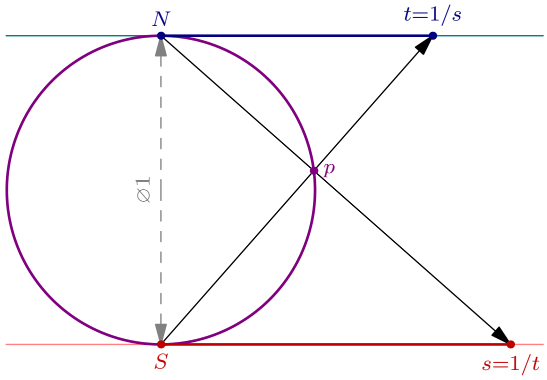


Рис. 1◇3. $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \simeq S^1$.

Если основное поле $\Bbbk = \mathbb{R}$, то в результате такой склейки мы получим окружность диаметра 1, картами на которой служат две диаметрально противоположные касательные прямые (см. рис. 1◇3), а отображения окружности на карты суть центральные проекции из точек, диаметрально противоположных к точке касания этой карты с окружностью.

Точно также при $\Bbbk = \mathbb{C}$ в результате склейки двух экземпляров комплексной аффинной прямой $\mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$ по правилу $s \leftrightarrow t = 1/s$ мы получим сферу диаметра 1, для которой наши карты являются диаметрально противоположными касательными плоскостями, а сопоставление точке сферы точки на карте задаётся центральной проекцией из диаметрально противоположного к точке касания «полюса» сферы, как на рис. 1◇4: если ориентации касательных плоскостей выбраны согласованным образом, как на рис. 1◇4, комплексные числа s и t будут иметь противоположные аргументы и — согласно рис. 1◇3 — обратные модули.

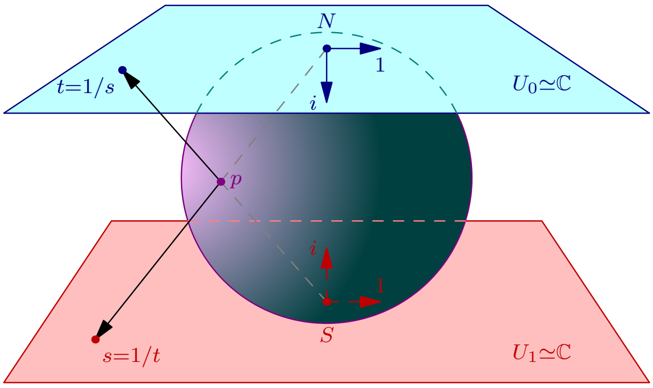


Рис. 1◇4. $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \simeq S^2$.

Проективно-геометрический взгляд на окружность как на прямую, к которой «добавили бесконечно удалённую точку» хорошо согласуется с представлениями о бесконечности, принятыми в математическом анализе: если мы занимаемся анализом на аффинной прямой с координатой t, то стремлению t к бесконечности отвечает стремление точки $s = 1/t$ к нулю; при $st \neq 0$ величины t и $s = 1/t$ являются координатами одной и той же точки $p = (s : 1) = (1 : t) \in \mathbb{P}_1$ и эта точка стремится при $t \to \infty$ к точке $(0 : 1) \in \mathbb{P}_1$, которая не видна в карте с координатой t и является началом координат в карте с координатой s (обратите внимание, что эта картина одинаково осмысленна как над $\mathbb{R}$, так и над $\mathbb{C}$).

Упражнение 1.4. Убедитесь, что вещественные проективные пространства $\mathbb{RP}_2$ и $\mathbb{RP}_3$ — это лента Мёбиуса с заклеенной диском границей[1] и группа $\mathrm{SO}(\mathbb{R}^3)$ собственных изометрий трёхмерного евклидова пространства.

Пример 1.2 (стандартное аффинное покрытие $\mathbb{P}_n$)
Набор из $(n+1)$ аффинных карт $U_\nu = U_{x_\nu}$, задаваемых в $\mathbb{A}^{n+1}$ уравнениями $\{x_\nu = 1\}$, называется *стандартным открытым покрытием* $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\Bbbk^{n+1})$. Для каждого $\nu = 0, 1, \dots, n$ в качестве стандартных локальных аффинных координат на U_ν берутся n форм

$$t_i^{(\nu)} = x_i|_{U_\nu} = \frac{x_i}{x_\nu} \quad \text{с} \quad 0 \leqslant i \leqslant n\,, \; i \neq \nu\,.$$

Таким образом, пространство $\mathbb{P}_n$ можно представлять себе как результат склейки $(n+1)$ различных копий $U_0, U_1, \dots, U_n$ аффинного пространства $\mathbb{A}^n$ по их фактическим пересечениям внутри $\mathbb{P}_n$. В однородных координатах на $\mathbb{P}_n$ пересечение $U_\mu \cap U_\nu$ состоит из

[1] напомним, что границей ленты Мёбиуса, так же как и границей круга, является окружность

всех таких x, у которых обе координаты x_μ и x_ν не обращаются в 0. В локальных аффинных координатах на U_μ и U_ν это подмножество задаётся, соответственно, неравенствами $t_\nu^{(\mu)} \neq 0$ и $t_\mu^{(\nu)} \neq 0$. При этом точка $t^{(\mu)} \in U_\mu$ склеивается с точкой $t^{(\nu)} \in U_\nu$, если и только если $t_\nu^{(\mu)} = 1/t_\mu^{(\nu)}$ и $t_i^{(\mu)} = t_i^{(\nu)}/t_\mu^{(\nu)}$ для $i \neq \mu, \nu$. Правые части этих равенств называются *функциями перехода* от локальных координат $t^{(\nu)}$ к локальным координатам $t^{(\mu)}$.

1.3. Задание фигур полиномиальными уравнениями. Если в $(n+1)$-мерном пространстве V над полем $\Bbbk$ зафиксированы координаты $x_0, x_1, \dots, x_n$, то каждому многочлену $f \in \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]$ можно сопоставить функцию

$$\tilde{f} : \mathbb{A}(V) \to \Bbbk,$$

значение которой в точке $p = (p_0, p_1, \dots, p_n)$ равно $f(p_0, p_1, \dots, p_n)$. Функции $\mathbb{A}(V) \to \Bbbk$, получающиеся таким способом, называются *полиномиальными* функциями на аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$.

Упражнение 1.5. Покажите, что полиномиальные функции образуют подалгебру[1] в алгебре всех функций $\mathbb{A}(V) \to \Bbbk$, причём эта подалгебра не зависит от выбора базиса в V, использованного для её определения.

Упражнение 1.6. Покажите, что над конечным полем $\Bbbk$ любая функция $\mathbb{A}(V) \to \Bbbk$ может быть (многими способами) записана в виде $\tilde{f}$ с разными $f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$, и что, напротив, над бесконечным полем имеются неполиномиальные функции $\mathbb{A}(V) \to \Bbbk$, а равенство полиномиальных функций $\tilde{f} = \tilde{g}$ влечёт равенство многочленов $f = g$.

Множество нулей многочлена f на аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$ обозначается через

$$V(f) = \{p \in \mathbb{A}(V) \mid f(p) = 0\}$$

и называется *аффинной алгебраической гиперповерхностью* степени $\deg f$. Пересечения аффинных алгебраических гиперповерхностей, т. е. множества решений систем полиномиальных уравнений на координаты, называются *аффинными алгебраическими многообразиями*. Например, аффинными многообразиями являются аффинные подпространства — они задаются системами линейных уравнений.

На проективном пространстве $\mathbb{P}(V)$ никакой отличный от константы многочлен от однородных координат *не задаёт* никакой функции. Тем не менее, для любого *однородного* многочлена f степени d множество его нулей

$$V(f) \overset{\text{def}}{=} \{\, v \in V \mid f(v) = 0 \,\}$$

является корректно определенным подмножеством в $\mathbb{P}(V)$, поскольку

$$f(v) = 0 \iff f(\lambda v) = \lambda^d f(v) = 0$$

Иначе говоря, аффинная гиперповерхность $V(f) \subset \mathbb{A}(V)$ представляет собой конус, образованный проходящими через начало координат прямыми, которые являются точками

[1] т. е. подкольцо и одновременно векторное подпространство

проективного пространства. Множество этих точек $V(f) \subset \mathbb{P}(V)$ называется *проективной алгебраической гиперповерхностью* степени $\deg f$. Пересечения проективных гиперповерхностей, т. е. множества ненулевых решений[1] систем однородных полиномиальных уравнений, называются *проективными алгебраическими многообразиями.*

Простейшими примерами проективных многообразий являются *проективные подпространства* $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V)$, ассоциированные с векторными подпространствами $U \subset \subset V$ — они задаются системами однородных линейных уравнений. Например, проективная прямая (ab) представляет собою проективизацию линейной оболочки векторов a и b, т. е. состоит из всевозможных точек вида $\lambda a + \mu b$ и может быть задана системой линейных уравнений $\xi(x) = 0$, где ξ пробегает подпространство $\operatorname{Ann}(a) \cap \operatorname{Ann}(b)$ (или любой базис в этом подпространстве). Отношение $(\lambda : \mu)$ коэффициентов из разложения вектора $\lambda a + \mu b \in (a, b)$ можно использовать в качестве внутренней однородной координаты на прямой (ab).

Упражнение 1.7. Покажите, что для любых двух проективных подпространств $K, L \subset \mathbb{P}_n$ выполняется неравенство $\dim(K \cap L) \geqslant \dim K + \dim L - n$ (в частности, любые две прямые на $\mathbb{P}_2$ пересекаются).

Пример 1.3 (аффинные коники)
Посмотрим как выглядит в различных аффинных картах плоская проективная кривая C степени 2, заданная в однородных координатах на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ уравнением

$$x_0^2 + x_1^2 = x_2^2 \tag{1-1}$$

В стандартной карте U_{x_1}, где $x_1 = 1$, в локальных координатах

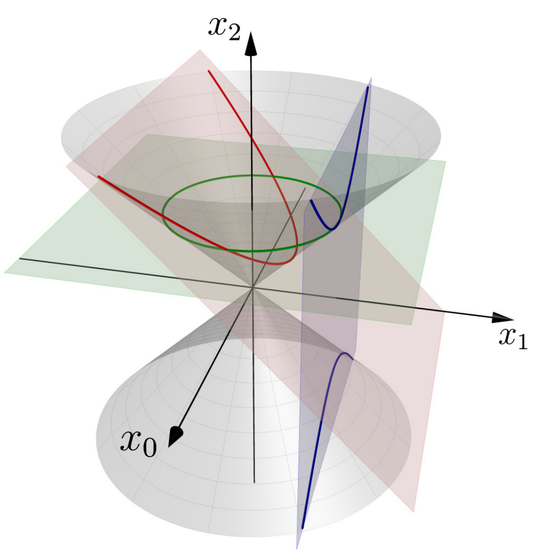


Рис. 1⋄5. Конус.

$$t_0 = x_0|_{U_{x_1}} = x_0/x_1$$
$$t_2 = x_2|_{U_{x_1}} = x_2/x_1$$

уравнение (1-1) превращается в уравнение гиперболы $t_2^2 - t_0^2 = 1$. В стандартной карте U_{x_2}, где $x_2 = 1$, с локальными координатами

$$t_0 = x_0|_{U_{x_2}} = x_0/x_2$$
$$t_1 = x_1|_{U_{x_2}} = x_1/x_2$$

мы получим уравнение окружности $t_0^2 + t_1^2 = 1$. В карте $U_{x_1+x_2}$, где $x_1 + x_2 = 1$, в локальных аффинных координатах

$$t = x_0|_{U_{x_1+x_2}} = x_0/(x_1 + x_2)$$
$$u = (x_2 - x_1)|_{U_{x_1+x_2}} = (x_2 - x_1)/(x_2 + x_1)$$

мы получим уравнение параболы $t^2 = u$ (надо перенести x_1^2 в (1-1) слева направо и поделить обе части на $x_2 + x_1$).

[1]рассматриваемых с точностью до умножения на ненулевые константы

Таким образом, аффинные эллипс, гипербола и парабола суть изображения одной и той же проективной кривой (1-1) в различных картах. Вид C в карте $U \subset \mathbb{P}_2$ определяется тем, как располагается по отношению к C бесконечно удалённая прямая этой карты: эллипс, парабола и гипербола возникают, соответственно, когда эта прямая не пересекается с C, касается C и пересекается с C в двух различных точках (см. рис. 1◇5).

1.3.1. Проективное замыкание аффинной гиперповерхности $S = V(f) \subset \mathbb{A}^n$ это такая проективная гиперповерхность $\overline{S} = V(\overline{f}) \subset \mathbb{P}_n$ той же степени, что и S, пересечение которой со стандартной аффинной картой U_0 совпадает с X. Если (неоднородный) многочлен степени d, задающий S имеет вид

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_0 + f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + \ \cdots \ + f_d(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

где каждый f_i однороден степени i, то проективное замыкание $\overline{S}$ задаётся однородным многочленом

$$\overline{f}(x_0, x_1, \dots, x_n) = f_0 \cdot x_0^d + f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot x_0^{d-1} + \ \cdots \ + f_d(x_1, x_2, \dots, x_n)\,,$$

который получается из f умножением каждого монома на подходящую степень x_0, дополняющую степень всего монома до d, и превращается в f при $x_0 = 1$. Дополнение $\overline{S} \smallsetminus S = \overline{S} \cap U_0^{(\infty)}$ задаётся в однородных координатах $(x_1 : x_2 : \cdots : x_n)$ бесконечно удалённой гиперплоскости $x_0 = 0$ уравнением $f_d(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$. Таким образом, лежащие на бесконечности точки гиперповерхности $\overline{S}$ — это в точности нули старшей однородной компоненты уравнения, задающего S. В аффинной геометрии их обычно называют *асимптотическими направлениями* гиперповерхности S.

Например проективным замыканием аффинной кубической кривой $x_1 = x_2^3$ является проективная кривая $x_0^2 x_1 = x_2^3$, которая имеет ровно одну бесконечно удалённую точку $(0 : 1 : 0)$ и выглядит в аффинной карте U_1 как полукубическая парабола $x_0^2 = x_2^3$ с остриём в этой точке.

1.3.2. Пространство гиперповерхностей. Однородные многочлены фиксированной степени d вместе с нулевым многочленом образуют конечномерное векторное подпространство, которое мы будем обозначать через

$$S^d V^* \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]\,.$$

Поскольку пропорциональные уравнения задают одну и ту же гиперповерхность, гиперповерхности степени d являются точками проективного пространства $\mathbb{P}(S^d V^*)$, которое мы будем называть *пространством гиперповерхностей* степени d в $\mathbb{P}(V)$.

Упражнение 1.8. Найдите размерность пространства гиперповерхностей d-той степени в $\mathbb{P}_n$.

Поскольку уравнение $f(p) = 0$ при фиксированном $p \in \mathbb{P}(V)$ является *линейным уравнением на* $f \in S^d V^*$, гиперповерхности степени d, проходящие через заданную точку p, образуют проективную гиперплоскость в пространстве всех гиперповерхностей.

Проективные подпространства в пространстве гиперповерхностей называются *линейными системами* гиперповерхностей. По определению, всякая гиперповерхность из линейной системы, порождённой гиперповерхностями

$$V(f_1),\, V(f_2),\, \dots\,,\, V(f_m)\,,$$

задаётся уравнением вида

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_m f_m = 0\,,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \Bbbk$ — некоторые константы. В частности, любая гиперповерхность из такой системы обязательно содержит пересечение

$$V(f_1) \cap V(f_2) \cap \dots \cap V(f_m)\,.$$

По старинной традиции, одномерные и двумерные линейные системы также называются *пучками* и *связками* соответственно. Поскольку любая прямая в проективном пространстве имеет непустое пересечение с любой гиперплоскостью, всякий пучок гиперповерхностей (над любым полем!) всегда содержит гиперповерхность, проходящую через любую наперёд заданную точку.

Пример 1.4 (наборы точек на $\mathbb{P}_1$ и кривая Веронезе)
Фиксируем двумерное векторное пространство $U \simeq \Bbbk^2$ с координатами x_0, x_1 и рассмотрим проективную прямую $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$. Всякое конечное множество точек

$$p_1, p_2, \dots, p_d \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$$

(среди которых допускаются и совпадающие) является алгебраической гиперповерхностью, а именно, множеством нулей однородного многочлена d-той степени

$$f(x_0, x_1) = \prod_{\nu=1}^{d} \det(x, p_\nu) = \prod_{\nu=1}^{d} (p_{\nu,1} x_0 - p_{\nu,0} x_1)\,, \quad \text{где } p_\nu = (p_{\nu,0} : p_{\nu,1})\,. \tag{1-2}$$

По аналогии с (неоднородными) многочленами от одной переменной, задающими конфигурации точек на аффинной прямой $\mathbb{A}_1$, мы будем называть точки $p_\nu \in \mathbb{P}_1$ *корнями* однородного многочлена f от переменных x_0, x_1. В этом смысле разложение (1-2) аналогично разложению многочлена от одной переменной на линейные множители, отвечающие корням. В частности, у однородного многочлена степени d от двух переменных имеется не более d различных корней на $\mathbb{P}_1$, а если поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, то таковых корней, с учётом кратностей[1], будет ровно d. Таким образом, над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ всевозможные d-точечные конфигурации на $\mathbb{P}_1$ взаимно однозначно соответствуют точкам проективного пространства $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U^*)$, ассоциированного с $(d+1)$-мерным векторным пространством однородных многочленов степени d от x_0, x_1.

Конфигурации, в которых все d точек слипаются в одну, образуют (над любым полем!) алгебраическую кривую $C_d \subset \mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U^*)$, которая называется *кривой Веронезе* степени d или *рациональной нормальной кривой* d-той степени. Эта кривая является образом *отображения Веронезе*

$$\mathbb{P}_1^\times = \mathbb{P}\left(U^*\right) \xrightarrow{v_d} \mathbb{P}_d = \mathbb{P}\left(S^d U^*\right)\,, \tag{1-3}$$

[1]под кратностью корня p понимается максимальная степень линейной формы $\det(t, p)$, на которую делится f

переводящего линейную форму $\varphi \in U^*$ (задающую одну точку $p \in \mathbb{P}(U)$) в её d-ю степень $\varphi^d \in S^d(U^*)$ (задающую d-кратную точку p). Если записывать формы $\varphi \in U^*$ и $f \in S^d(U^*)$ в виде

$$\varphi(x) = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 \quad \text{и} \quad f(x) = \sum_\nu a_\nu \cdot \binom{d}{\nu} x_0^{d-\nu} x_1^\nu$$

и использовать отношения коэффициентов $(\alpha_0 : \alpha_1)$ и $(a_0 : a_1 : \dots : a_d)$ в качестве однородных координат на $\mathbb{P}_1^\times = \mathbb{P}(U^*)$ и на $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U^*)$ соответственно, кривая Веронезе будет задаваться параметрическим уравнением

$$(\alpha_0 : \alpha_1) \longmapsto (a_0 : a_1 : \dots : a_d) = \left(\alpha_0^d : \alpha_0^{d-1}\alpha_1 : \alpha_0^{d-2}\alpha_1^2 : \dots : \alpha_1^d\right) . \tag{1-4}$$

Таким образом, C_d состоит из всех точек $(a_0 : a_1 : \dots : a_d) \in \mathbb{P}_d$, координаты которых составляют геометрическую прогрессию. Это условие равносильно тому, что

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{d-2} & a_{d-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{d-1} & a_d \end{pmatrix} = 1 ,$$

и может быть выражено системой однородных уравнений второй степени — обращением в нуль всех 2×2-миноров этой матрицы.

Например, кривая $C_2 \subset \mathbb{P}_2$ образована всеми квадратными трёхчленами

$$a_0 x_0^2 + 2a_1 x_0 x_1 + a_2 x_1^2 ,$$

которые являются полными квадратами. Она задаётся известным из школы уравнением

$$D/4 = -\det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} = a_1^2 - a_0 a_2 = 0 \tag{1-5}$$

и допускает следующее параметрическое задание:

$$a_0 = \alpha_0^2 , \quad a_1 = \alpha_0 \alpha_1 , \quad a_2 = \alpha_1^2 . \tag{1-6}$$

Пересечение кривой (1-4) с произвольной гиперплоскостью, заданной уравнением

$$A_0 a_0 + A_1 a_1 + \dots + A_d a_d = 0 ,$$

состоит из Веронезе-образов тех точек $(\alpha_0 : \alpha_1) \in \mathbb{P}_1$, в которых обращается в нуль однородный многочлен $\sum A_\nu \cdot \alpha_0^{d-\nu} \alpha_1^\nu$ степени d. Поскольку таких точек не более d, никакие $d+1$ точек кривой Веронезе не лежат в одной гиперплоскости. Отсюда вытекает, что при $2 \leqslant m \leqslant d$ никакие $m+1$ точек кривой C_d не лежат в одном $(m-1)$-мерном подпространстве. Отметим, что над алгебраически замкнутым полем пересечение кривой C_d с любой гиперплоскостью состоит в точности из d точек[1] — именно поэтому мы и сказали выше, что *степень* кривой C_d равна d.

[1]некоторые из которых могут совпадать друг с другом

1.4. Дополнительные подпространства и проекции. Проективные подпространства $K = \mathbb{P}(U)$ и $L = \mathbb{P}(W)$ пространства $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ называются *дополнительными*, если $K \cap L = \varnothing$ и $\dim K + \dim L = n - 1$. Например, любые две непересекающиеся прямые в $\mathbb{P}_3$ дополнительны. На языке линейной алгебры дополнительность означает, что соответствующие векторные пространства $U, W \subset V$ трансверсальны: $U \cap V = \{0\}$, и

$$\dim U + \dim W = \dim K + 1 + \dim L + 1 = (n+1) = \dim V \ ,$$

откуда $V = U \oplus W$. В этом случае любой вектор $v \in V$ имеет единственное разложение $v = u + w$ с $u \in U$ и $w \in W$, причём обе компоненты этого разложения отличны от нуля, если v не содержится ни в U, ни в W. Это означает, что для любой точки $p \notin K \sqcup L$ существует единственная прямая $\ell = (q, r)$, проходящая через p и пересекающая каждое из подпространств K, L.

Упражнение 1.9. Убедитесь в этом.

Для каждой пары дополнительных подпространств $K, L \subset \mathbb{P}_n$ *проекция на L из K*

$$\pi_L^K : (\mathbb{P}_n \setminus K) \to L \ ,$$

тождественно действует на L и переводит каждую точку $p \in \mathbb{P}_n \setminus (K \sqcup L)$ в точку пересечения с L единственной прямой, проходящей через p и пересекающей как K, так и L. В однородных координатах $(x_0 : x_1 : \ \dots \ : x_n)$, согласованных с разложением $V = U \oplus W$ так, что $(x_0 : x_1 : \ \dots \ : x_m)$ являются координатами в K, а $(x_{m+1} : x_{m+2} : \ \dots \ : x_n)$ — в L, проекция π_L^K просто удаляет первые $(m+1)$ координат x_ν с $0 \leqslant \nu \leqslant m$.

Пример 1.5 (проектирование коники на прямую)
Спроектируем гладкую конику C из прим. 1.3, заданную уравнением $x_0^2 + x_1^2 = x_2^2$, из точки $p = (1 : 0 : 1) \in C$ на прямую L, заданную уравнением $x_0 = 0$. В стандартной аффинной карте U_2, где $x_2 = 1$, эта проекция $\pi_L^p : C \to L$ выглядит как на рис. 1◊6. Она является *бирациональной биекцией* между L и C в том смысле, что однородные координаты соответственных точек $q = (q_0 : q_1 : q_2) \in C$ и $t = (0 : t_1 : t_2) = \pi_L^p(q) \in L$ суть *рациональные* алгебраические функции друг друга:

$$\begin{aligned} (t_1 : t_2) &= (q_1 : (q_2 - q_0)) \\ (q_0 : q_1 : q_2) &= \\ &= ((t_1^2 - t_2^2) : 2\,t_1 t_2 : (t_1^2 + t_2^2)) \end{aligned} \tag{1-7}$$

Упражнение 1.10. Проверьте эти формулы и обратите внимание, что когда (t_1, t_2) пробегает $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ вторая из них перечисляет все пифагоровы тройки[1] $(q_0 : q_1 : q_2)$.

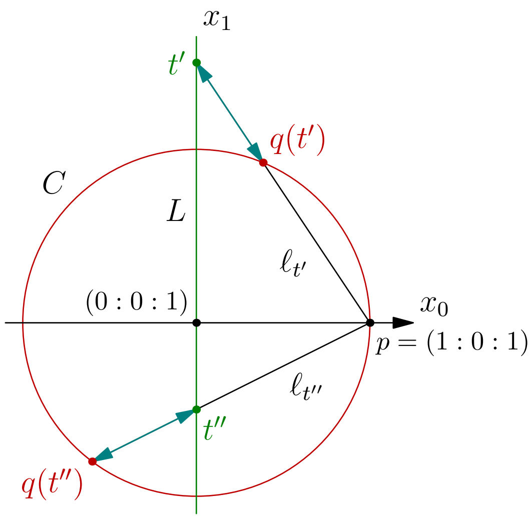


Рис. 1◊6. Проектирование коники.

а само отображение $\pi_L^p : C \to L$ взаимно однозначно, если доопределить его в точке p так, чтобы она переходила в точку пересечения прямой L и касательной к C в точке p прямой

[1] т. е. все целые решения уравнения Пифагора $q_0^2 + q_1^2 = q_2^2$

$x_0 = x_2$ (на рис. 1◇6 это пересечение происходит в бесконечной точке $t = (0 : 1 : 0)$). В самом деле, каждая проходящая через p прямая $\ell_t = (pt)$, за исключением касательной, пересекает C ещё ровно в одной точке $q = q(t)$, отличной от p, и координаты этой точки q рационально выражаются через коэффициенты уравнения прямой ℓ_t, являющиеся рациональными функциями от t, и координаты точки p.

Отметим, что коника C переводится в конику Веронезе $a_1^2 = a_0 a_2$ из (1-5) обратимой линейной заменой координат

$$\begin{cases} a_0 = x_2 + x_0 \\ a_1 = x_1 \\ a_2 = x_2 - x_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0 = (a_0 - a_2)/2 \\ x_1 = a_1 \\ x_0 = (a_0 + a_2)/2 \end{cases}$$

и параметризация (1-6) кривой Веронезе при этой замене коодинат превращается в точности в параметризацию (1-7).

1.5. Линейные проективные изоморфизмы. Всякий линейный изоморфизм векторных пространств $F : U \xrightarrow{\sim} W$ корректно определяет биекцию $\overline{F} : \mathbb{P}(U) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(W)$, которая называется *проективным линейным преобразованием* или *проективным изоморфизмом.*

Упражнение 1.11. Рассмотрим две гиперплоскости $L_1,\ L_2 \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ и точку $p \notin L_1 \cup L_2$. Убедитесь, что проекция из p задаёт проективный изоморфизм $\gamma_p : L_1 \xrightarrow{\sim} L_2$.

Лемма 1.1
Для любых двух упорядоченных наборов из $(n+2)$ точек

$$\{p_0, p_1, \dots, p_{n+1}\} \in \mathbb{P}(U)\,, \quad \{q_0, q_1, \dots, q_{n+1}\} \in \mathbb{P}(W)\,,$$

в каждом из которых никакие $(n+1)$ точек не лежат в одной гиперплоскости, существует единственный с точностью до пропорциональности линейный изоморфизм $F : U \xrightarrow{\sim} W$, такой что $\overline{F}(p_i) = q_i$ при всех i.

Доказательство. Зафиксируем некоторые векторы u_i и w_i, представляющие точки p_i и q_i, и возьмём $\{u_0, u_1, \dots, u_n\}$ и $\{w_0, w_1, \dots, w_n\}$ в качестве базисов в U и W. Оператор $F : U \to W$ тогда и только тогда переводит точку p_i в точку q_i, когда $F(u_i) = \lambda_i w_i$ для некоторых ненулевых $\lambda_i \in \Bbbk$. В частности, для того, чтобы точки $p_0, p_1, \dots, p_n$ переводились преобразованием $\overline{F}$ в точки $q_0, q_1, \dots, q_n$, необходимо и достаточно, чтобы оператор F в выбранных нами базисах имел диагональную матрицу с произвольными ненулевыми константами $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ по главной диагонали. Заметим теперь, что в разложении

$$u_{n+1} = x_0 u_0 + x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n$$

все координаты x_i отличны от нуля, поскольку в противном случае $n+1$ точка[1] оказались бы в одной гиперплоскости, заданной условием обращения этой координаты в нуль. Если аналогичным образом разложить вектор $w_{n+1} = y_0 w_0 + y_1 w_1 + \cdots + y_n w_n$ и записать равенство $F(u_{n+1}) = \lambda_{n+1} w_{n+1}$ в виде системы равенств на координаты, мы получим на константы $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ соотношения $y_i = \lambda_{n+1} \lambda_i x_i$ (при всех $0 \leqslant i \leqslant n$), из которых

[1] а именно, p_{n+1} и все p_i с номерами, отличными от номера занулившейся координаты вектора u_{n+1}

$(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_{n+1}^{-1} \cdot (y_1/x_1, y_2/x_2, \dots, y_n/x_n)$. Таким образом, матрица оператора F определена однозначно с точностью до постоянного множителя $\lambda_{n+1}^{-1} \neq 0$. □

Следствие 1.1
Две матрицы тогда и только тогда задают одинаковые проективные изоморфизмы, когда они пропорциональны. □

1.5.1. Линейная проективная группа. Согласно лем. 1.1 линейные проективные автоморфизмы пространства $\mathbb{P}(V)$ образуют группу, изоморфную фактор группе полной линейной группы $\mathrm{GL}(V)$ по подгруппе гомотетий $H = \{\lambda \cdot \mathrm{Id} \mid \lambda \neq 0\} \subset \mathrm{GL}(V)$. Эта фактор группа обозначается $\mathrm{PGL}(V) = \mathrm{GL}(V)/H$ и называется *проективной линейной группой*. Если при помощи выбора базиса отождествить линейную группу $\mathrm{GL}(V)$ с группой невырожденных матриц GL_{n+1}, проективная группа $\mathrm{PGL}(V)$ отождествится с группой PGL_{n+1} невырожденных матриц, рассматриваемых с точностью до пропорциональности.

1.5.2. Дробно-линейные преобразования прямой. Группа $\mathrm{PGL}_2(\Bbbk)$ состоит из классов пропорциональности матриц $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с $ad - bc \neq 0$. Она действует на $\mathbb{P}_1$ по правилу

$$(x_0 : x_1) \xmapsto{\overline{A}} ((ax_0 + bx_1) : (cx_0 + dx_1)) .$$

В стандартной аффинной карте $U_1 \simeq \mathbb{A}^1$ с аффинной координатой $t = x_0/x_1$, это действие имеет вид дробно линейного преобразования

$$t \longmapsto \frac{at+b}{ct+d}$$

Единственное дробно линейное преобразование, переводящее три заданных различных точки q, r, s в ∞, 0, 1, очевидно, таково:

$$t \longmapsto \frac{t-r}{t-q} \cdot \frac{s-r}{s-q} \tag{1-8}$$

1.6. Гомографии. Многие геометрические задачи так или иначе связаны с такими соответствиями между точками одной проективной прямой и точками другой проективной прямой, что координаты соответственных точек *алгебраически* выражаются друг через друга. Простейшими такими соответствиями являются бирациональные[1] биекции, или *гомографии*.

Лемма 1.2
Если над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ имеется биективное отображение

$$\varphi : \mathbb{P}_1 \smallsetminus \{\text{конечное множество}\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1 \smallsetminus \{\text{конечное множество}\} ,$$

которое в некоторой аффинной карте с аффинной координатой t может быть задано формулой

$$t \mapsto \varphi(t) = g(t)/h(t) , \quad \text{где} \quad g, h \in \Bbbk[t] , \tag{1-9}$$

то φ является дробно линейным изоморфизмом (и, в частности, однозначно продолжается на всю прямую).

[1]соответствие между точками называется *бирациональным*, если координаты соответственных точек являются рациональными функциями друг друга

Доказательство. В однородных координатах $(x_0 : x_1)$, для которых $t = x_0/x_1$, формула (1-9), задающая отображение φ, может быть переписана[1] в виде

$$\varphi : (x_0 : x_1) \mapsto \big(F(x_0, x_1) : G(x_0, x_1)\big) \ ,$$

где F и G не пропорциональные друг другу однородные многочлены от (x_0, x_1) одинаковой степени $d = \deg F = \deg G$. Обозначим проективизацию пространства однородных многочленов степени d от (x_0, x_1) через $\mathbb{P}_d$. Если точка $\vartheta = (\vartheta_0 : \vartheta_1) \in \mathbb{P}_1$ имеет при отображении φ ровно один прообраз, то однородный многочлен $\vartheta_1 \cdot F(x_0, x_1) - \vartheta_0 \cdot G(x_0, x_1)$ имеет на $\mathbb{P}_1$ ровно один корень $x = \varphi^{-1}(\vartheta)$, который над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ автоматически является d-кратным. Поэтому отвечающая многочлену $\vartheta_1 F - \vartheta_0 G$ точка прямой $(FG) \subset \mathbb{P}_d$ лежит в на кривой Веронезе $C_d \subset \mathbb{P}_d$ из прим. 1.4 на стр. 11. Поскольку поле $\Bbbk$ бесконечно, а отображение φ биективно вне конечного множества точек, кривая C_d и прямая (F, G) имеют в $\mathbb{P}_d$ бесконечно много точек пересечения. Но в прим. 1.4 мы видели, что при $d \geqslant 2$ никакие три точки кривой C_d не лежат на одной прямой. Поэтому $d = 1$ и $\varphi \in \mathrm{PGL}_2(\Bbbk)$. □

Пример 1.6 (песпективы)
Важным примером гомографии является центральная проекция прямой $\ell_1 \subset \mathbb{P}_2$ на другую прямую $\ell_2 \subset \mathbb{P}_2$ из произвольной точки $o \notin \ell_1 \cup \ell_2$ (см. рис. 1◇7). Мы будем называть такую гомографию *перспективой* с центром o и обозначать $o : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$.

Упражнение 1.12. Убедитесь, что перспектива в самом деле является гомографией (т. е. биективна и рациональна).

Гомография $\varphi : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$ является перспективой тогда и только тогда, когда она переводит точку пересечения прямых $\ell_1 \cap \ell_2$ в себя. В самом деле, беря в качестве o точку пересечения прямых $(a, \varphi(a))$ и $(b, \varphi(b))$, соединяющих произвольные точки $a, b \in \ell_1 \smallsetminus \ell_2$ с их образами $\varphi(a), \varphi(b) \in \ell_2$ (см. рис. 1◇7), видим, что перспектива $o : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$ действует на три точки a, b и $\ell_1 \cap \ell_2$ также, как и φ, и, стало быть, совпадает с φ, т. к. дробно линейный изоморфизм однозначно определяется своим действием на три различных точки.

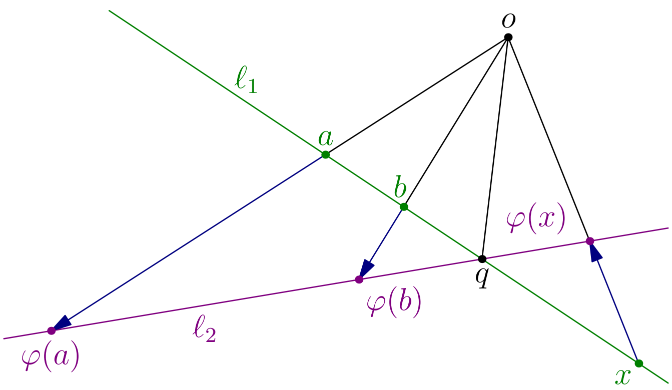


Рис. 1◇7. Перспектива.

[1] возможно, после некоторой модификации конечного множества, на котором отображение φ не определено

Предложение 1.1

Пусть прямые $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$ пересекаются в точке $q = \ell_1 \cap \ell_2$. Если гомография $\varphi : \ell_1 \rightleftarrows \ell_2$ является композицией двух перспектив:

$$\varphi = \left(b_1 : \ell \to \ell_2\right) \circ \left(b_2 : \ell_1 \to \ell\right) , \quad \text{где} \quad b_1 \in \ell_1 \,,\; b_2 \in \ell_2 \,, \tag{1-10}$$

то $b_2 = \varphi(b_1)$, а прямая ℓ проходит через точки $\varphi(q)$ и $\varphi^{-1}(q)$. Наоборот, любая гомография $\varphi : \ell_1 \rightleftarrows \ell_2$ представляется в виде композиции (1-10), где точка $b_1 \in \ell_1$ произвольна, $b_2 = \varphi(b_1)$, а прямая ℓ *не зависит* от выбора $b_1 \in \ell_1$.

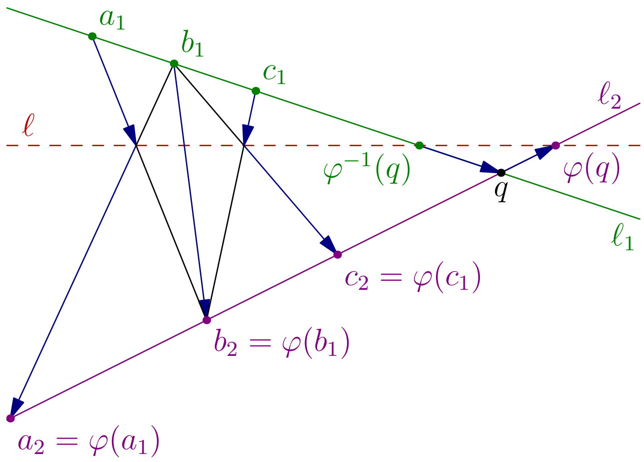


Рис. 1⋄8. Перекрёстная ось.

Доказательство. Первое утверждение очевидно из рис. 1⋄8. Для доказательства второго рассмотрим произвольные три различных и отличных от $q = \ell_1 \cap \ell_2$ точки $a_1, b_1, c_1 \in \ell_1$ и обозначим через $a_2, b_2, c_2 \in \ell_2$ их образы относительно φ. Возьмём в качестве ℓ прямую, проходящую через точки пересечения пар «перекрёстных» прямых

$$\left(a_1 b_2\right) \cap \left(b_1, a_2\right) \quad \text{и} \quad \left(c_1 b_2\right) \cap \left(b_1, c_2\right) \,.$$

Из рис. 1⋄8 видно, что композиция из правой части (1-10) переводит a_1, b_1, c_1 соответственно в a_2, b_2, c_2 и, стало быть, совпадает с φ.

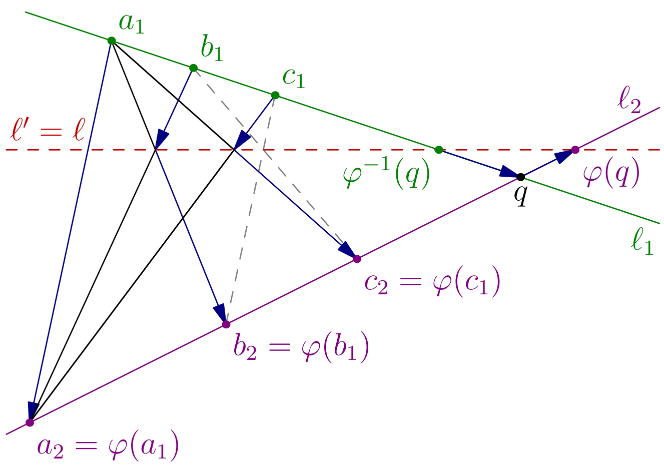


Рис. 1⋄9. Равенство $\ell' = \ell$.

Чтобы убедиться, что прямая ℓ не зависит от b_1 повторим предыдущее рассуждение, заменив в нём тройку a_1, b_1, c_1 — тройкой c_1, a_1, b_1 (см. рис. 1◇9). Получим разложение φ в композицию перспектив $\varphi = \left(a_1 : \ell' \to \ell_2\right) \circ \left(a_2 : \ell' \to \ell\right)$, в котором прямая ℓ' проходит через точки пересечения пар перекрёстных прямых $\left(a_1 c_2\right) \cap \left(c_1, a_2\right)$ и $\left(b_1 a_2\right) \cap \left(a_1, b_2\right)$. Обе прямые ℓ и ℓ' проходят через точку $\left(b_1 a_2\right) \cap \left(a_1, b_2\right)$, а также — по первому утверждению — через точки[1] $\varphi(q)$ и $\varphi^{-1}(q)$. Поэтому $\ell = \ell'$. □

Следствие 1.2 (перекрёстная ось гомографии)
Для любой гомографии $\varphi : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$ ГМТ пересечений перекрёстных прямых

$$(x, \varphi(y)) \cap (y, \varphi(x)) ,$$

где $x \neq y$ независимо пробегают ℓ_1, представляет собою прямую, проходящую через точки $\varphi\left(\ell_1 \cap \ell_2\right)$ и $\varphi^{-1}\left(\ell_1 \cap \ell_2\right)$ (эта прямая называется *перекрёстной осью*[2] гомографии φ).

Замечание 1.1. Обратите внимание, что предл. 1.1 и сл. 1.2 справедливы и в случае, когда точки $\varphi\left(\ell_1 \cap \ell_2\right)$ и $\varphi^{-1}\left(\ell_1 \cap \ell_2\right)$ совпадают друг с другом и с точкой $\ell_1 \cap \ell_2$, так что сами по себе они не определяют перекрёстную ось ℓ однозначно.

Упражнение 1.13. На $\mathbb{P}_2$ даны две прямые ℓ_1 и ℓ_2. Гомография $\varphi : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$ переводит три данные точки $a_1, b_1, c_1 \in \ell_1$ в три данные точки $a_2, b_2, c_2 \in \ell_2$. Одной линейкой постройте образ $\varphi(x)$ произвольно заданной точки $x \in \ell_1$.

1.7. Двойное отношение. Рассмотрим проективную прямую $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\Bbbk^2)$ со стандартными однородными координатами $(x_0 : x_1)$ и аффинной координатой $x = x_0/x_1$. Отметим, что разность аффинных координат $a = a_0/a_1$ и $b = b_0/b_1$ любых двух точек $a = (a_0 : a_1)$ и $b = (b_0 : b_1)$ с точностью до множителя совпадает с определителем их однородных координат:

$$a - b = \frac{a_0}{a_1} - \frac{b_0}{b_1} = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{a_1 b_1} = \frac{\det(a, b)}{a_1 b_1} .$$

Определение 1.1
Для четырёх различных точек $p_1,\, p_2,\, p_3,\, p_4 \in \mathbb{P}_1$ величина

$$[p_1,\, p_2,\, p_3,\, p_4] = \frac{\left(p_1 - p_3\right)\left(p_2 - p_4\right)}{\left(p_1 - p_4\right)\left(p_2 - p_3\right)} = \frac{\det\left(p_1, p_3\right) \cdot \det\left(p_2, p_4\right)}{\det\left(p_1, p_4\right) \cdot \det\left(p_2, p_3\right)} . \tag{1-11}$$

называется *двойным отношением*[3] этих четырёх точек.

1.7.1. Геометрический смысл двойного отношения. Согласно (1-8) двойное отношение $[p_1,\, p_2,\, p_3,\, p_4] \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\Bbbk^2)$ представляет собою образ точки p_4 при единственном дробно линейном автоморфизме $\mathbb{P}_1$, переводящем точки $p_1,\, p_2,\, p_3$ в точки ∞, 0, 1 соответственно. Отсюда сразу следует, что двойное отношение четырёх различных точек

[1]совпадающие друг с другом, если φ перспектива
[2]по-английски *cross-axis*
[3]по-английски *cross-ratio*

может принимать любые значения кроме ∞, 0 и 1 и что две упорядоченных четвёрки точек тогда и только тогда переводятся одна в другую дробно линейным преобразованием прямой, когда их двойные отношения одинаковы.

Упражнение 1.14. Докажите последнее утверждение.

Поскольку замена однородных координат является именно таким преобразованием, мы заключаем, что правая часть равенства (1-11) не зависит от выбора однородных координат, а средняя часть (содержащая разности аффинных координат точек) не зависит ни от выбора аффинной карты, ни от выбора локальной аффинной координаты в ней (при условии, что карта содержит все четыре точки, т. е. значения p_1, p_2, p_3, p_4 конечны).

Упражнение 1.15. Убедитесь в этом прямым вычислением.

1.7.2. Действие симметрической группы $\mathfrak{S}_4$. Выясним, как изменяется двойное отношение при перестановках точек. Из формулы (1-11) очевидно, что нормальная подгруппа Клейна $\mathfrak{D}_2 \subset \mathfrak{S}_4$, состоящая из тождественного преобразования и трёх пар независимых транспозиций[1], не меняет двойного отношения:

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = [p_2, p_1, p_4, p_3] = [p_3, p_4, p_2, p_1] = [p_4, p_3, p_2, p_1] \tag{1-12}$$

Поэтому действие группы перестановок $\mathfrak{S}_4$ на множестве значений двойного отношения данных четырёх точек пропускается через действие фактор группы[2]

$$\mathfrak{S}_4/\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{S}_3\,,$$

которая кроме класса тождественного отображения содержит ещё три отражения (классы транспозиций $(1,2)$, $(1,3)$ и $(1,4)$) и два поворота (классы циклов $(1,2,3)$ и $(1,3,2)$). Если обозначить значение двойных отношений (1-12) через ϑ, из (1-11) получаем

$$\begin{aligned}
{}[p_1, p_2, p_3, p_4] = [p_2, p_1, p_4, p_3] = [p_3, p_4, p_2, p_1] = [p_4, p_3, p_2, p_1] &= \vartheta\\
[p_2, p_1, p_3, p_4] = [p_1, p_2, p_4, p_3] = [p_3, p_4, p_1, p_2] = [p_4, p_3, p_1, p_2] &= 1/\vartheta\\
[p_3, p_2, p_1, p_4] = [p_2, p_3, p_4, p_1] = [p_1, p_4, p_2, p_3] = [p_4, p_1, p_2, p_3] &= \vartheta/(\vartheta-1)\\
[p_4, p_2, p_3, p_1] = [p_2, p_4, p_1, p_3] = [p_3, p_1, p_2, p_4] = [p_1, p_3, p_2, p_4] &= 1-\vartheta\\
[p_2, p_3, p_1, p_4] = [p_3, p_2, p_4, p_1] = [p_1, p_4, p_3, p_2] = [p_4, p_1, p_3, p_2] &= (\vartheta-1)/\vartheta\\
[p_3, p_1, p_2, p_4] = [p_1, p_3, p_4, p_2] = [p_2, p_4, p_1, p_3] = [p_4, p_2, p_1, p_3] &= 1/(1-\vartheta)\,.
\end{aligned} \tag{1-13}$$

Упражнение 1.16. Проверьте это.

[1]напомним, что если отождествить симметрическую группу $\mathfrak{S}_4$ с собственной группой куба, переставляющей 4 его диагонали, то возникает сюрьективный гомоморфизм $\mathfrak{S}_4 \twoheadrightarrow \mathfrak{S}_3$, задаваемый действием группы куба на трёх отрезках, соединяющих центры противоположных граней; ядом этого гомоморфизма является группа двуугольника $\mathfrak{D}_2$, или группа Клейна, состоящая из тождественного отображения и трёх поворотов на 180° вокруг осей, проходящих через центры противоположных граней куба

[2]т. е. группы треугольника, ср. с зад. 1.14 и зад. 1.11 ниже

1.7.3. Специальные четвёрки точек. Из формул (1-13) видно, что имеются три специальных значения $\vartheta = -1,\ 2,\ 1/2$, которые удовлетворяют соотношениям

$$\vartheta = \frac{1}{\vartheta}\,, \quad \vartheta = \frac{\vartheta}{\vartheta - 1} \quad \text{и} \quad \vartheta = 1 - \vartheta$$

и, соответственно, не меняются при транспозициях $(1,2)$, $(1,3)$ и $(1,4)$ и циклически переставляются двумя поворотами, а также два специальных значения ϑ, которые равны корням уравнения[1]

$$\vartheta^2 - \vartheta + 1 = 0 \iff \vartheta = \frac{\vartheta - 1}{\vartheta} \iff \vartheta = \frac{1}{1 - \vartheta}$$

и не меняются при поворотах, но переставляются между собой при транспозициях. Мы будем называть четвёрки точек с такими двойными отношениями *специальными*, поскольку при перестановках таких точек двойное отношение пробегает, соответственно, три и два различных значения. Если же четвёрка точек не специальная, то при перестановках точек в такой четвёрке все 6 значений (1-13) будут различны.

1.7.4. Гармонические пары точек. Четыре точки $\{a, b; c, d\} \in \mathbb{P}_1$ называются *гармоническими*, если двойное отношение

$$[a, b, c, d] = -1\,. \tag{1-14}$$

Геометрически это условие означает, что в аффинной карте, для которой точка a является бесконечностью, точка b является центром тяжести точек c и d. При его выполнении говорят также, что пары точек $\{a, b\}$ и $\{c, d\}$ *гармоничны* по отношению друг к другу. Алгебраически, гармоничность двух пар точек по n° 1.7.3 равносильна тому, что их двойное отношение не меняется при перестановке точек в одной из этих пар, а также тому, что двойное отношение не меняется при перестановке пар между собою[2]. Таким образом, *гармоничность* — это *симметричное* отношение на множестве *неупорядоченных* пар точек на $\mathbb{P}_1$.

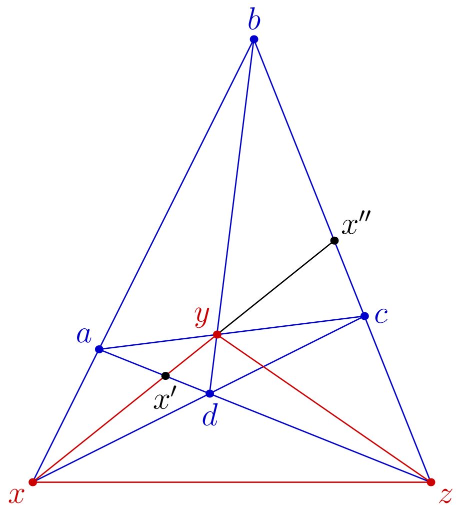


Рис. 1⋄10. Четырёхвершинник.

Пример 1.7 (четырёхвершинник)

С каждой четвёркой точек $a, b, c, d \in \mathbb{P}_2$, никакие 3 из которых не коллинеарны, связана конфигурация из трёх пар прямых, соединяющих пары данных точек (см. рис. 1⋄10) и называемых *сторонами* четырёхвершинника $abcd$. Пусть эти прямые пересекаются в точках

$$x = (ab) \cap (cd)\,, \;\; y = (ac) \cap (bd)\,, \;\; z = (ab) \cap (cd)\,. \tag{1-15}$$

Покажем, что в каждом из трёх пучков прямых с центрами в точках x, y, z пара сторон четырёхвершинника гармонична паре сторон треугольника xyz. Для этого запараметризуем пучок всех проходящих через точку x прямых точками прямой (ad) или точками прямой (bc) и проверим, что прямая (xy) пересекает прямые (ad) и (bc) по таким

[1] т. е. отличным от -1 кубическим корням из единицы в поле $\Bbbk$

[2] см. первые две формулы в (1-13)

точкам x', x'', что $[a, d, z, x'] = [b, c, z, x''] = -1$. В самом деле, т. к. центральные проекции из x и из y являются дробно линейными изоморфизмами между прямыми (ad) и (bc), мы имеем следующие равенства двойных отношений соответственных точек: $[a, d, z, x'] = [b, c, z, x''] = [d, a, z, x']$. Коль скоро при перестановке первых двух точек двойное отношение не поменялось, оно равно -1, что и требовалось.

Задачи для самостоятельного решения к §1

Задача 1.1. При каком условии на три прямые ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 на проективной плоскости $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ в пространстве V можно выбрать базис так, чтобы каждая прямая ℓ_i была бесконечно удалённой для стандартной аффинной карты $U_i = \{(x_0 : x_1 : x_2) \mid x_i \neq 0\}$?

Задача 1.2. Укажите три точки $A, B, C \in \mathbb{P}_2$ так, чтобы точки

$$A' = (1 : 0 : 0)\,, \quad B' = (0 : 1 : 0) \quad \text{и} \quad C' = (0 : 0 : 1)$$

оказались лежащими, соответственно, на прямых (BC), (CA) и (AB), а прямые (AA'), (BB') и (CC') пересекались бы в точке $(1 : 1 : 1)$.

Задача 1.3. Пусть основное поле $\Bbbk$ конечно и состоит из q элементов. Сколько всего имеется k-мерных а) векторных подпространств в $\Bbbk^n$ б) аффинных подпространств в $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(\Bbbk^n)$ в) проективных подпространств в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\Bbbk^{n+1})$? Найдите пределы этих количеств при $q \to 1$.

Задача 1.4. Рассмотрим в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ аффинную карту $U_\xi = \{v \in V \mid \xi(v) \neq 0\}$, отвечающую какому-нибудь ненулевому $\xi \in V^*$, и k-мерное проективное подпространство $K = \mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}_n$, ассоциированное с каким-нибудь $(k+1)$-мерным векторным подпространством $W \subset V$. Покажите, что либо $K \cap U_\xi = \varnothing$, либо $K \cap U_\xi$ видимо в U_ξ как k-мерное аффинное подпространство.

Задача 1.5. Подмножество $\Phi \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ таково, что в каждой аффинной карте, с которой оно пересекается, его видно как k-мерное аффинное подпространство (где $k < n$ фиксировано). Обязательно ли $\Phi = \mathbb{P}(W)$ для некоторого $(k+1)$-мерного векторного подпространства $W \subset V$? Всегда ли существуют аффинные карты, в которых Φ вообще не видно?

Задача 1.6. Докажите для любых двух проективных подпространств $K, L \subset \mathbb{P}_n$ неравенство $\dim(K \cap L) \geqslant \dim K + \dim L - n$.

Задача 1.7. Нетождественный проективный автоморфизм $\overline{F}$ называется *инволюцией*, если $\overline{F}^2 = \mathrm{Id}$. Покажите, что всякая инволюция на проективной прямой над алгебраически замкнутым полем имеет ровно две различных неподвижных точки.

Задача 1.8 (проективная двойственность). Пространства $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ и $\mathbb{P}_n^\times = \mathbb{P}(V^*)$ называются *двойственными*. Покажите, что

а) каждое из них является пространством гиперплоскостей в другом

б) правило $\mathbb{P}(W) \longleftrightarrow \mathbb{P}(\operatorname{Ann} W)$ устанавливает оборачивающую включение биекцию между k-мерными проективными подпространствами в $\mathbb{P}_n$ и $(n-k-1)$ – мерными проективными подпространствами в $\mathbb{P}_n^\times$

в) с учётом (а) биекция из (б) имеет следующее геометрическое описание: подпространству $H \subset \mathbb{P}_n$ соответствует множество всех содержащих это подпространство гиперплоскостей, причём множество сие есть проективное пространство размерности $n - \dim H - 1$.

Задача 1.9 (теорема Паппа). Пусть точки a_1, b_1, c_1 коллинеарны и точки a_2, b_2, c_2 коллинеарны. Покажите, что тройка точкек пресечений прямых

$$(a_1b_2) \cap (a_2b_1)\ ,\quad (b_1c_2) \cap (b_2c_1)\ ,\quad (c_1a_2) \cap (c_2a_1)$$

также коллинеарна.

Задача 1.10. Сформулируйте и докажите двойственное утверждение к теореме Паппа.

Задача 1.11 (первая теорема Дезарга). Даны два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ на $\mathbb{P}_2$. Покажите, что три точки пересечения пар их соответственных[1] сторон коллинеарны тогда и только тогда, когда три прямые, проходящие через пары соответственных вершин, пересекаются в одной точке[2].

Задача 1.12 (вторая теорема Дезарга). На прямой ℓ, не проходящей через точки a, b, c, заданы три различных точки p, q, r. Докажите, что на прямой ℓ тогда и только тогда имеется инволюция, переводящая точки p, q, r в точки пересечения прямой ℓ с прямыми (bc), (ca) и (ab) соответственно, когда три прямые (ap), (bq) и (cr) пересекаются в одной точке.

Задача 1.13. Пусть симметрическая группа $\mathfrak{S}_4$ переставляет буквы a, b, c, d, стоящие в вершинах четырёхвершинника на рис. 1⋄10. Каждой такой перестановке отвечает по формулам (1-15) перестановка букв x, y, z, стоящих в вершинах ассоциированного с четырёхвершинником треугольника. Покажите, что таким образом получается сюрьективный гомоморфизм $\mathfrak{S}_4 \twoheadrightarrow \mathfrak{S}_3$, ядром которого служит *группа Клейна*, состоящая из тождественной перестановки и трёх пар независимых транспозиций.

Задача 1.14. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ стандартный единичный куб с центром в нуле и обозначим через a, b, c, d одномерные подпространства в $\mathbb{R}^3$, содержащие четыре его диагонали. Покажите, что группа куба действует на четырёхвершиннике $abcd$ в $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ и что это действие задаёт изоморфизм собственной группы куба с симметрической группой $\mathfrak{S}_4$. Убедитесь также, что одномерные подпространства, проходящие через центры граней куба, являются вершинами ассоциированного с четырёхвершинником $abcd$ треугольника, и получите отсюда независимое доказательство гармоничности сторон треугольника сторонам четырёхвершинника.

Задача 1.15. Опишите подгруппу в $\mathrm{PGL}_2(\Bbbk)$, состоящую из всех преобразований

а) оставляющих на месте ∞

б) оставляющих на месте 0 и ∞

в) оставляющих на месте 1 и переставляющих местами 0 и ∞

г) оставляющих на месте 0 и переставляющих местами 1 и ∞

д) оставляющих на месте ∞ и переставляющих местами 0 и 1

[1] т. е. поименованных одинаковыми буквами

[2] треугольники, для которых это так, называются *перспективными*

Получите из этого безо всяких вычислений равенства

$$[p_2,\, p_1,\, p_3,\, p_4] = [p_1,\, p_2,\, p_3,\, p_4]^{-1}$$
$$[p_1,\, p_3,\, p_2,\, p_4] = 1 - [p_1,\, p_2,\, p_3,\, p_4]$$
$$[p_1,\, p_4,\, p_3,\, p_2] = \frac{[p_1,\, p_2,\, p_3,\, p_4] - 1}{[p_1,\, p_2,\, p_3,\, p_4]}\,.$$

Задача 1.16. Покажите, что для любых пяти различных точек $p_1, p_2, \dots, p_5 \in \mathbb{P}_1$ выполняется равенство $[p_1,\, p_2,\, p_3,\, p_4] \cdot [p_1,\, p_2,\, p_4,\, p_5] \cdot [p_1,\, p_2,\, p_5,\, p_3] = 1$.

Задача 1.17. Даны 8 различных точек $p_1,\, p_2,\, p_3,\, p_4,\, q_1,\, q_2,\, q_3,\, q_4 \in \mathbb{P}_1$. Докажите равенство

$$[p_1,\, p_2,\, q_3,\, q_4] \cdot [p_2,\, p_3,\, q_1,\, q_4] \cdot [p_3,\, p_1,\, q_2,\, q_4] \times \\ \times [q_1,\, q_2,\, p_3,\, p_4] \cdot [q_2,\, q_3,\, p_1,\, p_4] \cdot [q_3,\, q_1,\, p_2,\, p_4] = 1\,.$$

Задача 1.18. Одной короткой линейкой проведите прямую, соединяющую две заданные на листе бумаги точки, расстояние между которыми больше длины линейки.

Задача 1.19. В стандартной карте $U_0 \subset \mathbb{P}_2$ даны кривые
а) $y = x^2$ б) $y = x^3$ в) $y^2 + (x-1)^2 = 1$ г) $y^2 = x^2(x+1)$.
Напишите их уравнения в картах U_1 и U_2 и нарисуйте все эти 12 кривых.

Задача 1.20. Вложим евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{CP}_2$ в качестве действительной части стандартной аффинной карты U_0. а) Найдите в $\mathbb{CP}_2$ две точки, лежащие на всех кривых степени 2, видных в $\mathbb{R}^2$ как окружности. б) Всякая ли коника, проходящая через эти две точки и имеющая хотя бы 3 неколлинеарные точки в $\mathbb{R}^2$, видна в $\mathbb{R}^2$ как окружность?

Задача 1.21 (правило Крамера). Рассмотрим n линейно независимых линейных форм на координатном пространстве $\Bbbk^{n+1}$

$$\alpha_1(x) = a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n$$
$$\alpha_2(x) = a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\alpha_n(x) = a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n$$

и обозначим через $A = \left(a_{ij}\right) \in \mathrm{Mat}_{n\times(n+1)}(\Bbbk)$ матрицу коэффициентов этих форм, записанных по строкам, а через A_i для $0 \leqslant i \leqslant n$ — $n \times n$-матрицу, которая получается выкидыванием i-того столбца из $n \times (n+1)$-матрицы A. Покажите, что в проективном пространстве $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\Bbbk^{n+1})$ гиперплоскости $\mathrm{Ann}\,\alpha_1$, $\mathrm{Ann}\,\alpha_1$, …, $\mathrm{Ann}\,\alpha_n$ пересекаются в единственной точке $p = (p_0 : p_1 : \dots : p_n)$, однородные координаты которой находятся по правилу Крамера: $p_i = (-1)^i \det A_i$.

Задача 1.22 (рациональная нормальная кривая). Рассмотрим 2-мерное векторное пространство U с базисом $t_0,\, t_1$, векторы которого $\alpha_0 t_0 + \alpha_1 t_1$ будем воспринимать как однородные линейные многочлены от переменных (t_0, t_1), и используем отношение $(\alpha_0 : \alpha_1)$ в качестве однородной координаты на $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$. Обозначим через $S^d U$ пространство однородных многочленов степени d от (t_0, t_1), условимся записывать такие многочлены в виде $\sum\limits_{n=0}^{d}\binom{d}{n}a_n t_0^n t_1^{d-n}$ и используем $(a_0 : a_1 : \ \dots \ : a_n)$ как однородные координаты на $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U)$. Покажите, что все перечисяемые далее кривые $C \subset \mathbb{P}_d$ переводятся друг в друга подходящими линейными проективными автоморфизмами:

а) C — образ отображения $c_d : \mathbb{P}(U) \to \mathbb{P}(S^d U)$, $\psi \mapsto \psi^d$

б) C — образ любого отображения $\mathbb{P}(U) \to^F \mathbb{P}(S^d U)$ заданного в однородных координатах формулой $t = (\alpha_0 : \alpha_1) \longmapsto \big(f_0(\alpha) : f_1(\alpha) : \ \dots \ : f_d(\alpha)\big)$, где $f_m(\alpha)$ — линейно независимые однородные многочлены степени d от $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1)$.

в) фиксируем любые $d+1$ различных точек $p_0, p_1, \dots, p_d \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$; C — образ отображения $\mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_d$ задаваемого в однородных координатах формулой

$$\alpha = (\alpha_0 : \alpha_1) \longmapsto \left(\frac{1}{\det(p_0, \alpha)} : \frac{1}{\det(p_1, \alpha)} : \cdots : \frac{1}{\det(p_d, \alpha)}\right),$$

где мы как обычно полагаем для $a = (a_0 : a_1)$ и $b = (b_0 : b_1)$ на $\mathbb{P}_1$

$$\det(a, b) = a_0 b_1 - a_1 b_0$$

г) фиксируем $d+3$ точки $p_1, p_2, \dots, p_d$, a, b, $c \in \mathbb{P}_d$ так, чтобы никакие $(d+1)$ из них не лежали в одной гиперплоскости, обозначим через $\ell_i \simeq \mathbb{P}_1$ пучок гиперплоскостей, проходящий через все точки p_ν, кроме p_i, и зададим проективные изоморфизмы $\psi_{ij} : \ell_j \to^{\sim} \ell_i$ так, чтобы 3 гиперплоскости пучка ℓ_j, проходящие через точки a, b, c, переходили в аналогичные 3 гиперплоскости пучка ℓ_i; кривая[1]

$$C = \bigcup_{H \in \ell_1} H \cap \psi_{21}(H) \cap \ \dots \ \cap \psi_{n1}(H).$$

Задача 1.23. Покажите, что над бесконечным полем никакие $m+1$ разных точек рациональной нормальной кривой C_n не лежат в одном $(m-1)$-мерном подпространстве при $2 \leqslant m \leqslant n$.

Задача 1.24. Покажите, что любые $n+3$ точки в $\mathbb{P}_n$, никакие $n+1$ из которых линейно не зависимы, лежат на единственной рациональной нормальной кривой C_n.

Задача 1.25*. Покажите, что два упорядоченных набора из $n+3$ точек на $\mathbb{P}_n$, такие что в каждом из наборов никакие $n+1$ точек не лежат в одной гиперплоскости, тогда и только тогда переводятся друг в друга проективным автоморфизмом, когда на проведённых через эти наборы рациональных нормальных кривых совпадают двойные отношения любых четвёрок соответственных точек.

Задача 1.26. В проективизации $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(S^3 U)$ пространства однородных кубических многочленов от t_0, t_1 рассмотрим проекции кубики Веронезе[2] $C_3 \subset \mathbb{P}_3$

а) из точки t_0^3 на плоскость $\left(3\,t_0^2 t_1,\ 3\,t_0 t_1^2,\ t_1^3\right)$

б) из точки $3\,t_0^2 t_1$ на плоскость $\left(t_0^3,\ 3\,t_0 t_1^2,\ t_1^3\right)$

в) из точки $t_0^3 + t_1^3$ на плоскость $\left(t_0^3,\ 3\,t_0^2 t_1,\ 3\,t_0 t_1^2\right)$.

---

[1] ср. с зад. 1.21

[2] образованной полными кубами $(\alpha_0 t_0 + \alpha_1 t_1)^3$, где $(\alpha_0 : \alpha_1)$ пробегает $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$

Для каждой из этих трёх кривых напишите параметрическое и «внешнее» уравнения в каждой из трёх стандартных аффинных карт на плоскости – образе проекции и нарисуйте все девять получающихся аффинных кривых. Убедитесь, что над алгебраически замкнутым полем кривая (в) имеет самопересечение.

Задача 1.27. Выведите из предыдущей задачи, что гладкая[1] кубическая кривая $C \subset \mathbb{P}_2$ не допускает рациональной параметризации[2].

[1]без самопересечений и заострений, или, что то же самое, без таких точек $p \in C$, что любая проходящая через p прямая пересекает C с кратностью $\geqslant 2$

[2]подсказка: всякая допускающая рациональную параметризацию плоская кривая степени d получается проектированием кривой Веронезе $C_d \subset \mathbb{P}_d$ на подходящую плоскость $\mathbb{P}_2 \subset \mathbb{P}_d$

§2. Проективные квадрики

Всюду в этом параграфе мы предполагаем, что $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$.

2.1. Квадрики и билинейные формы. Гиперповерхность степени два $Q = V(q) \subset \mathbb{P}(V)$, задаваемая в проективном пространстве $\mathbb{P}(V)$ ненулевым однородным квадратичным многочленом $q \in S^2V^*$, называется *проективной квадрикой.* В однородных координатах $(x_0 : x_1 : \ \dots \ : x_n)$ относительно какого-нибудь базиса $e_0, e_1, \dots, e_n \in V$ квадратичный многочлен $q(x) \in \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]$ можно записать в виде

$$q(x) = \sum_{i,j} a_{ij}\, x_i x_j = x \cdot A \cdot {}^t x \,,$$

где $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ — строка координат, ${}^t x$ — транспонированный ей столбец координат, а $A = (a_{ij})$ — *симметричная* матрица, которая при $i \neq j$ имеет в качестве $a_{ij} = a_{ji}$ половину коэффициента при $x_i x_j$ в многочлене $q(x)$ (здесь существенно $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$).

Иначе говоря, для любого однородного многочлена $q(x)$ второй степени существует единственная симметричная билинейная форма

$$\tilde{q} \,:\, V \times V \xrightarrow{(u,w) \mapsto \tilde{q}(u,w)} \Bbbk \,,$$

такая что $q(x) = \tilde{q}(x,x)$. Эта симметричная билинейная форма называется *поляризацией* квадратичной формы q и выражается через q несколькими эквивалентными способами:

$$\tilde{q}(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij}\, x_i y_j = \frac{1}{2} \sum_i y_i \frac{\partial q(x)}{\partial x_i} = x \cdot A \cdot {}^t y = \\ = \frac{1}{2}\Big(q(x+y) - q(x) - q(y)\Big) = \frac{1}{4}\Big(q(x+y) - q(x-y)\Big)\,. \quad \text{(2-1)}$$

Матрица A представляет собою *матрицу Грама* формы $\tilde{q}$ в базисе $\{e_i\}$: $\quad a_{ij} = \tilde{q}(e_i, e_j)$.

Упражнение 2.1. Проверьте, что в другом базисе $(e'_0, e'_1, \dots, e'_n) = (e_0, e_1, \dots, e_n) \cdot C$ новая матрица Грама A' выражается через A по формуле $A' = {}^tC \cdot A \cdot C$.

2.1.1. Определитель и ранг квадратичной формы. Из упр. 2.1 вытекает, что при линейной замене координат *определитель Грама* $\det A$ умножается на *ненулевой квадрат* определителя матрицы перехода: $\det(A') = \det(A) \cdot \det^2(C)$. Таким образом, класс определителя Грама по модулю умножения на ненулевые квадраты из поля $\Bbbk$, не зависит от выбора базиса и является инвариантом квадрики по отношению к линейным заменам координат. Мы будем называть этот класс *определителем* формы q и обозначать $\det(q)$. Если $\det q \neq 0$, квадрика $V(q)$ называется *невырожденной* (или *гладкой*), в противном случае — *вырожденной* (или *особой*).

Ещё одним важным инвариантом квадрики по отношению к линейным заменам координат является ранг её матрицы Грама. Он называется *рангом* формы q.

Упражнение 2.2. Убедитесь, что ранг матрицы Грама не зависит от выбора базиса.

2.1.2. Проективная эквивалентность квадрик. Квадрики называются *проективно эквивалентными*, если они переводится друг в друга линейным проективными автоморфизмами объемлющего пространства.

Теорема 2.1 (теорема Лагранжа)
Для любой квадрики над произвольным полем $\Bbbk$ характеристики $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$ существует базис, в котором её матрица Грама диагональна.

Доказательство. Индукция по $\dim V$ (при $\dim V = 1$ доказывать нечего). Поскольку $q \not\equiv 0$, найдётся $e \in V$, такой что $q(e) = \tilde{q}(e,e) \neq 0$. Примем его за первый базисный вектор и обозначим через $e^{\perp} = \{\, u \in V \mid \tilde{q}(u,e) = 0 \,\}$ ортогональное относительно формы $\tilde{q}$ дополнение к натянутому на e одномерному подпространству $\Bbbk \cdot e$. Пространство V является ортогональной прямой суммой $V = (\Bbbk \cdot e) \oplus e^{\perp}$, т. к. $(\Bbbk \cdot e) \cap e^{\perp} = 0$, и любой вектор $v \in V$ представляется в виде

$$v = \frac{\tilde{q}(v,e)}{\tilde{q}(e,e)} \cdot e + u\,,$$

где $u = v - e \cdot \tilde{q}(v,e)/\tilde{q}(e,e) \in e^{\perp}$ (обязательно убедитесь в этом!). Если $q|_{e^{\perp}} \equiv 0$, искомый базис состоит из e и произвольных базисных векторов пространства $e^{\perp}$. Если $q|_{e^{\perp}} \not\equiv 0$, то по индукции в $e^{\perp}$ есть базис $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ с диагональной матрицей Грама. Тогда матрица Грама базиса $e,\ e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ тоже диагональна. □

Следствие 2.1
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ всякая квадрика задаётся в подходящих однородных координатах уравнением $x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{r-1}^2 = 0$, где r — ранг квадрики. В частности, две квадрики проективно эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый ранг.

Доказательство. Ненулевые диагональные элементы матрицы Грама становятся единицами при замене базисных векторов e_i на $e_i / \sqrt{q(e_i)}$. □

2.1.3. Пример: квадрики на $\mathbb{P}_1$. Согласно теореме Лагранжа произвольная квадратичная форма от двух переменных (над любым полем, в котором $1+1 \neq 0$) в подходящем базисе задаётся либо уравнением $x_0^2 + ax_1^2 = 0$ с $a \neq 0$, либо уравнением $x_0^2 = 0$. В первом случае определитель формы $\det(q)$ с точностью до умножения на квадраты равен a, и форма невырождена. Во втором случае $\det(q) = 0$ и форма вырождена.

Вырожденная квадрика $x_0^2 = 0$ называется *двойной точкой*, поскольку её уравнение — это квадрат линейной формы x_0, задающей точку $(0 : 1)$.

Неособая квадрика $x_0^2 + ax_1^2 = 0$ либо пуста, либо состоит из двух точек. Первое равносильно тому, что $-a$ не является квадратом в $\Bbbk$, и над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ такого не бывает. Если же $-a = \delta^2$, то $x_0^2 + ax_1^2 = (x_0 - \delta x_1)(x_0 + \delta x_1)$ имеет на $\mathbb{P}_1$ два разных корня $(\pm\delta : 1)$.

Поскольку $-a$ с точностью до умножения на квадрат совпадает с $-\det(q)$, строение квадрики, задаваемой на $\mathbb{P}_1$ произвольного вида формой $q(x) = a_0x_0^2 + 2a_1x_0x_1 + a_2x_1^2$, полностью определяется классом её *дискриминанта* $D/4 \overset{\text{def}}{=} -\det(q) = a_1^2 - a_0a_2$ по модулю умножения на ненулевые квадраты: если он нулевой, то квадрика является двойной точкой, если он единичный — парой различных точек, если он не квадрат (что бывает только над незамкнутыми полями) — квадрика пуста.

Следствие 2.2
Для пересечения произвольных квадрики Q и прямой ℓ имеется ровно 4 взаимоисключающие возможности: или $\ell \subset Q$, или $\ell \cap Q$ это одна двойная точка, или $\ell \cap Q$ состоит из 2 различных точек, или $\ell \cap Q = \varnothing$, причём над алгебраически замкнутым последний случай невозможен. □

2.1.4. Корреляция, ядро и особые точки. Со всякой билинейной формой q на V связан линейный *оператор корреляции* $\hat{q} : V \to V^*$, переводящий вектор $v \in V$ в линейную форму $\hat{q}(v) : V \to \Bbbk$ «скалярного умножения» на v:

$$\hat{q}(v) \;:\; w \mapsto \tilde{q}(w, v)\;.$$

Упражнение 2.3. Проверьте, что матрица оператора корреляции, записанная в двойственных базисах $e_1, e_2, \dots, e_n \in V$ и $x_1, x_2, \dots, x_n \in V^*$ совпадает с матрицей Грама A квадратичной формы q.

В частности, невырожденность q равносильна тому, что $\hat{q}$ изоморфизм. Пространство

$$\ker \hat{q} = \{\, v \in V \mid \forall\, w \in V \;\, \tilde{q}(w, v) = 0 \}$$

называется *ядром* квадратичной формы q. Поскольку $\dim \ker \hat{q} = \dim V - \operatorname{rk} A$, мы ещё раз видим, что ранг формы является её инвариантом (не зависит от координат).

Проективизация ядра $\operatorname{Sing} Q \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\ker \hat{q}) \subset \mathbb{P}(V)$ называется *множеством особых точек* (или *вершинным пространством*) квадрики Q. Обратите внимание, что $\operatorname{Sing} Q \subset Q$.

Теорема 2.2
Пересечение $Q' = L \cap Q$ особой квадрики Q с любым дополнительным к $\operatorname{Sing} Q$ проективным подпространством $L \subset \mathbb{P}(V)$ представляет собой невырожденную квадрику в L, и исходная квадрика Q является *линейным соединением*[1] Q' и $\operatorname{Sing} Q$.

Доказательство. Пусть $K = \ker \hat{q}$ и $L = \mathbb{P}(U)$. Тогда $V = U \oplus K$. Если вектор $u \in U$ лежит в ядре ограничения $\hat{q}|_U$, то $q(u, u') = 0$ для всех $u' \in U$. Записывая произвольный вектор $v \in V$ как $v = u' + u''$ с $u' \in U$ и $u'' \in K$, получаем $\tilde{q}(u, v) = \tilde{q}(u, u'') + \tilde{q}(u, u') = 0$ для всех $v \in V$, откуда $u \in U \cap \ker \hat{q} = 0$. Таким образом, ограничение $q|_U$ невырождено.

Если прямая ℓ проходит через точку $p \in \operatorname{Sing} Q$ и не лежит на квадрике Q, то ограничение формы q на ℓ является ненулевой особой квадратичной формой, а значит, $Q \cap \ell$ — это двойная точка p. Тем самым, каждая прямая, пересекающая $\operatorname{Sing} Q$, либо целиком лежит на Q, либо больше нигде не пересекает квадрику. □

2.1.5. Касательное пространство. Прямая ℓ, проходящая через точку $p \in Q$, называется *касательной* к Q в p, если ℓ либо лежит на Q целиком, либо пересекает Q по двойной точке p. Объединение всех прямых, касающихся Q в точке p, называется *касательным пространством* к квадрике Q в точке $p \in Q$ и обозначается $T_p Q$.

Лемма 2.1
Прямая $\ell = (ab)$ касается квадрики Q, заданной уравнением $q(x) = 0$, в точке $a \in Q$ тогда и только тогда, когда $\tilde{q}(a, b) = 0$.

[1] т. е. объединением всех прямых, пересекающих как Q', так и $\operatorname{Sing} Q$

Доказательство. Пусть $\ell = \mathbb{P}(U)$. Матрица Грама ограничения $q|_U$ имеет в базисе $\{a, b\}$ вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \tilde{q}(a,b) \\ \tilde{q}(b,a) & \tilde{q}(b,b) \end{pmatrix},$$

и $\det q|_U = 0 \iff \tilde{q}(a,b) = \tilde{q}(b,a) = 0$. □

Следствие 2.3
Видимый из точки $b \notin Q$ контур[1] квадрики Q высекается из Q гиперплоскостью

$$\operatorname{Ann} \hat{q}(b) = \{x \mid \tilde{q}(b,x) = 0\}.$$

Следствие 2.4
Следующие условия на точку $a \in Q \subset \mathbb{P}(V)$ эквиваленты друг другу:
1) $p \in \operatorname{Sing} Q$ 2) $T_pQ = \mathbb{P}(V)$ — это всё пространство 3) $\forall\, i \quad \dfrac{\partial q}{\partial x_i}(p) = 0$. □

Следствие 2.5
Если точка $p \in Q$ неособа, то $T_pQ = \{x \in \mathbb{P}_n \mid \tilde{q}(p,x) = 0\}$ является гиперплоскостью коразмерности 1. □

2.2. Проективная двойственность. Пространства $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ и $\mathbb{P}_n^\times \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}(V^*)$ называются *двойственными* проективными пространствами. Геометрически, каждое из них есть пространство гиперплоскостей в другом: однородное линейное уравнение $\langle\, \xi\,,\, v\,\rangle = 0$ на $\xi \in V^*$ и $v \in V$ при фиксированном $\xi \in \mathbb{P}^\times$ задаёт гиперплоскость в $\mathbb{P}_n$, а при фиксированном $v \in \mathbb{P}_n$ — гиперплоскость в $\mathbb{P}_n^\times$, состоящую из всех гиперплоскостей в $\mathbb{P}_n$, проходящих через точку $v \in \mathbb{P}_n$.

Биекция $U \leftrightarrows \operatorname{Ann}(U)$ между векторными подпространствами дополнительных размерностей в двойственных пространствах V и V^* при переходе к проективизациям устанавливает для каждого $m = 0, 1, \dots, (n-1)$ обращающую включения биекцию между m-мерными проективными подпространствами в $\mathbb{P}_n$ и $(n-1-m)$-мерными проективными подпространствами в $\mathbb{P}_n^\times$. Эта биекция называется *проективной двойственностью.* Она переводит проективное подпространство $L = \mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}_n$ в проективное подпространство $L^\times = \mathbb{P}(\operatorname{Ann}(U)) \subset \mathbb{P}_n^\times$, образованное всеми гиперплоскостями, содержащими L, и позволяет переговаривать геометрические утверждения в двойственные геометрические утверждения, которые могут довольно сильно отличаться от исходных. Например, условие коллинеарности трёх точек двойственно условию наличия у трёх гиперплоскостей общего подпространства коразмерности 2.

2.2.1. Полярное преобразование. Корреляция $\hat{q} : V \xrightarrow{\sim} V^*$, ассоциированная с невырожденной квадратичной формой q, индуцирует линейный проективный изоморфизм

$$\overline{q} : \mathbb{P}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(V^*)$$

который называется *полярным преобразованием* (или *поляритетом*) квадрики Q. Поляритет переводит точку $p \in \mathbb{P}_n$ в гиперплоскость $L \subset \mathbb{P}_n$, заданную уравнением $\tilde{q}(p,x) = 0$. Точка p и гиперплоскость L в этом случае называются *полюсом* и *полярой* друг друга относительно квадрики Q.

[1] т. е. ГМТ касания с Q всевозможных касательных, опущенных на Q из b

Геометрически, поляра точки, не лежащей на квадрике, — это гиперплоскость, высекающая видимый из этой точки контур квадрики, а поляра точки, лежащей на квадрике, — это гиперплоскость, касающаяся квадрики в этой точке. Таким образом, всякую квадрику Q можно охарактеризовать как ГМТ, лежащих на своих полярах.

Поскольку условие $\tilde{q}(a, b) = 0$ симметрично по a и b, точка a лежит на поляре точки b, если и только если точка b лежит на поляре точки a. Такие точки называются *сопряжёнными* относительно квадрики Q.

Упражнение 2.4. Постройте[1] поляру данной точки и полюс данной прямой при полярном преобразовании евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ относительно заданной окружности[2].

Предложение 2.1
Пусть $a, b \notin Q$ и прямая (ab) пересекает Q в двух различных точках c, d. Точки a, b тогда и только тогда сопряжены относительно квадрики Q, когда они гармоничны по отношению к точкам c, d.

Доказательство. Поучительно дать два независимых доказательства — геометрическое и алгебраическое.

Геометрическое рассуждение. Обозначим проходящую через точки a, b, c, d прямую через ℓ. Сопряжение относительно квадрики Q задаёт на прямой ℓ инволюцию

$$\sigma_Q : \ell \to \ell ,$$

переводящую точку $x \in \ell$ в единственную лежащую на прямой ℓ сопряжённую к x точку $\sigma_Q(x) = \ell \cap \overline{q}(x)$, где $\overline{q}(x) \subset \mathbb{P}_n$ — полярная точке x гиперплоскость. Точки c и d неподвижны относительно σ_Q. Если σ_Q меняет местами a и b, то $[a, b, c, d] = [b, a, c, d]$, откуда $[a, b, c, d] = -1$. Наоборот, если $[a, b, c, d] = -1$, то отображение $\sigma_{c,d} : \ell \to \ell$, переводящее точку $x \in \ell$, в единственную точку $y \in \ell$, такую что $[x, y, c, d] = -1$, действует на точки a, b, c, d так же, как σ_Q, и является инволютивной гомографией, ибо биективно и бирационально.

Упражнение 2.5. Убедитесь в этом, и покажите, что для любых двух точек $c, d \in \ell$ существует единственная инволюция $\sigma_{c,d} : \ell \to \ell$, для которой точки c и d являются неподвижными, причём в любой аффинной карте, где $d = \infty$, эта инволюция выглядит как центральная симметрия относительно c.

Таким образом, $\sigma_Q = \sigma_{c,d}$, а значит, a и b сопряжены относительно Q.

Алгебраическое рассуждение. Ограничение квадрики Q на прямую (cd) задаётся в однородных координатах $(x_0 : x_1)$ относительно базиса c, d квадратичной формой

$$q(x) = \det(x, c) \cdot \det(x, d) ,$$

поляризация которой есть $\tilde{q}(x, y) = \frac{1}{2}\left(\det(x, c) \cdot \det(y, d) + \det(y, c) \cdot \det(x, d)\right)$. Условие сопряжённости $\tilde{q}(a, b) = 0$ означает, что $\det(a, c) \cdot \det(b, d) = -\det(b, c) \cdot \det(a, d)$ или $[a, b, c, d] = -1$. □

[1] в настоящий момент желающие могут пользоваться циркулем и линейкой, но в действительности для выполнения этого построения достаточно одной линейки (см. рис. 2◇10 на стр. 41, а также зад. 2.11 и зад. 2.12 на стр. 50)

[2] что особенно интересно, когда прямая не пересекает окружности, а точка лежит внутри ограниченного ею круга

Предложение 2.2
Для неособой квадрики G и произвольной квадрики Q в $\mathbb{P}_n$ гиперплоскости, полярные относительно квадрики G точкам $p \in Q$, образуют в двойственном проективном пространстве $\mathbb{P}_n^\times$ квадрику в $Q_G^\times$ того же ранга, что и квадрика Q. Если Q и G имеют в некоторых однородных координатах на $\mathbb{P}_n$ матрицы Грама A и Γ соответственно, то квадрика $Q_G^\times$ имеет в двойственных однородных координатах на $\mathbb{P}_n^\times$ матрицу $\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}$.

Доказательство. Поляритет $\hat{g} : \mathbb{P}_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_n^\times$ гладкой квадрики $G \subset \mathbb{P}_n$ переводит точку из $\mathbb{P}_n$ со столбцом координат x в точку двойственного пространства $\mathbb{P}_n^\times$ со строкой координат

$$\xi = x^t \cdot \Gamma$$

и является проективным изоморфизмом. Таким образом, полярные гиперплоскости ξ точек $x \in Q$ задаются в $\mathbb{P}_n^\times$ уравнением, которое получается подстановкой в уравнение $x^t \cdot A \cdot x = 0$ квадрики Q точек $x = \Gamma^{-1}\xi^t$. В результате получаем на ξ требуемое уравнение $\xi \cdot \Gamma^{-1}A\Gamma^{-1} \cdot \xi^t = 0$. □

Следствие 2.6
Касательные пространства гладкой квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$ образуют в $\mathbb{P}_n^\times$ гладкую квадрику $Q^\times$. Матрицы Грама квадрик Q и $Q^\times$ в двойственных базисах пространств $\mathbb{P}_n$ и $\mathbb{P}_n^\times$ обратны друг другу.

Доказательство. Положим в предыдущей теореме $G = Q$ и $\Gamma = A$, и заметим, что гиперплоскости, полярные точкам $p \in Q$ относительно самой же квадрики Q — это в точности касательные пространства T_pQ. □

2.2.2. Поляритеты над незамкнутыми полями. Над алгебраически незамкнутыми полями имеются квадратичные формы q, задающие *пустые* квадрики Q. Однако задаваемые такими квадриками полярные преобразования геометрически вполне наблюдаемы.

Упражнение 2.6. Опишите геометрически полярное преобразование евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ относительно «мнимой» окружности $x^2 + y^2 = -1$.

На языке поляритетов пустота квадрики означает, что никакая точка не лежит на своей поляре.

Лемма 2.2
Два поляритета совпадают , если и только если задающие их квадратичные формы пропорциональны.

Доказательство. Это сразу следует из лем. 1.1. □

Теорема 2.3
Над алгебраически замкнутым полем две квадрики совпадают тогда и только тогда, когда их уравнения пропорциональны.

Доказательство. Пусть $Q = Q'$. Поскольку при ограничении на любое дополнительное к $\operatorname{Sing} Q = \operatorname{Sing} Q'$ подпространство уравнения обеих квадрик не поменяются, можно считать обе квадрики невырожденными, а тогда всё следует из лем. 2.2. □

Определение 2.1
Проективизация пространства квадратичных форм на V

$$\mathbb{P}_{\frac{n(n+3)}{2}} = \mathbb{P}\left(S^2V^*\right) \tag{2-2}$$

называется *пространством квадрик*[1] на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$.

Упражнение 2.7. Убедитесь, что размерность пространства квадрик на $\mathbb{P}_n$ именно такая как в (2-2).

2.3. Коники. Квадрики на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$, $\dim V = 3$, называются *проективными кониками.* Они образуют пятимерное проективное пространство $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2V^*)$. Над алгебраически замкнутым полем имеются ровно три проективно неэквивалентных коники:

- *двойная прямая* $x_0^2 = 0$ (ранг 1, все точки особые);
- *распавшаяся коника*[2] $x_0^2 + x_1^2 = 0$ (ранг 2, одна особая точка);
- *гладкая коника* $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$.

Обратите внимание, что распавшаяся коника является линейным соединением особой точки и гладкой квадрики[3] на прямой, не проходящей через особую точку.

2.3.1. Параметризация гладкой коники. Всякая непустая гладкая коника[4] $C \subset \mathbb{P}_2$ допускает квадратичную *рациональную параметризацию* — отображение $\varphi : \mathbb{P}_1 \rightleftharpoons \mathbb{P}_2$ задаваемое в однородных координатах тройкой взаимно простых однородных многочленов второй степени $\varphi(t_0, t_1) = \big(\varphi_0(t_0, t_1) : \varphi_1(t_0, t_1) : \varphi_2(t_0, t_1)\big) \in \mathbb{P}_2$ и биективно отображающее прямую $\mathbb{P}_1$ на конику $C \subset \mathbb{P}_2$. Геометрически, такая параметризация задаётся проекцией $p : C \rightleftharpoons \ell$ коники C из любой её точки $p \in C$ на любую не проходящую через p прямую ℓ. В самом деле, любая прямая (px) с $x \in \ell$, отличная от касательной прямой T_pC, пересекает конику C по двум различным точкам — p и ещё одной точке $p'(x) \in C$, однородные координаты которой $(\lambda_0 : \lambda_1)$ в базисе p, x на прямой (px) доставляют отличный от $p = (1 : 0)$ корень уравнения

$$(\lambda_0, \lambda_1) \cdot \begin{pmatrix} q(p,p) & q(p,x) \\ q(x,p) & q(x,x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = 0 \quad \iff \quad 2q(p,x) \cdot \lambda_0\lambda_1 + q(x,x) \cdot \lambda_1^2 = 0\,,$$

равный $(\lambda_0 : \lambda_1) = \big(q(x,x) : -2q(p,x)\big)$. Отображение

$$\ell \ni x \mapsto q(x,x) \cdot p - 2q(p,x) \cdot x \in C \subset \mathbb{P}_2 \tag{2-3}$$

и задаёт искомую квадратичную параметризацию коники C точками $x \in \ell$.

Упражнение 2.8. Убедитесь, что три однородных координаты точки

$$q(x,x) \cdot p - 2q(p,x) \cdot x \in \mathbb{P}_2$$

[1] над незамкнутым полем $\Bbbk$ не все точки этого пространства отвечают непустым квадрикам, и разные точки могут задавать одинаковые (скажем, пустые) квадрики, так что правильнее было бы говорить не о «пространстве квадрик», а о «пространстве поляритетов», тем не менее, наше название является общепринятым

[2] т. е. объединение двух прямых $x_0 = \pm i\, x_1$, пересекающихся в особой точке $(0 : 0 : 1)$

[3] т. е. пары различных точек

[4] над любым полем $\Bbbk$ с $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 0$

являются однородными полиномами степени 2 от пары внутренних однородных координат $(x_0 : x_1)$ точки $x \in \ell$ относительно произвольного базиса на прямой ℓ, и что формула (2-3) корректно сопоставляет точке $x = T_pC \cap \ell$ точку $p \in C$.

Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ квадратичную параметризацию гладкой коники можно получить преобразовав её уравнение подходящей линейной заменой однородных координат на $\mathbb{P}_2$ к виду Веронезе[1]

$$\det\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix} = a_0a_2 - a_1^2 = 0 \tag{2-4}$$

и воспользовавшись рациональной параметризацией коники Веронезе (2-4) по формуле

$$(\alpha_0 : \alpha_1) \mapsto (a_0 : a_1 : a_2) = (\alpha_0^2 : \alpha_0\alpha_1 : \alpha_1^2)\,. \tag{2-5}$$

Упражнение 2.9. Убедитесь, что проекция коники $a_0a_2 - a_1^2 = 0$ из точки $(1 : 1 : 1)$ на прямую $a_1 = 0$, переводит точку $(\alpha_0^2 : \alpha_0\alpha_1 : \alpha_1^2)$ в точку $(\alpha_0 : 0 : \alpha_1)$.

Предложение 2.3
Гладкая коника пересекает произвольную кривую, заданную однородным уравнением степени d, не более, чем по $2d$ точкам, либо целиком содержится в этой кривой в качестве компоненты.

Доказательство. Запараметризуем конику однородными полиномами степени 2 от параметра $t = (t_0 : t_1) \in \mathbb{P}_1$. Значения t, при которых коника пересекает кривую с уравнением $f(x) = 0$, являются корнями однородного уравнения $f\big(q(t)\big) = 0$, левая часть которого либо тождественно равна нулю, либо имеет степень $2d$. В первом случае вся коника содержится в кривой, во втором случае имеется не более $2d$ различных корней. □

Предложение 2.4
Каждые 5 точек в $\mathbb{P}_2$ лежат на некоторой конике. Если никакие 4 из пяти точек не коллинеарны, то такая коника единственна, а если никакие 3 не коллинеарны, то она ещё и невырождена.

Доказательство. При фиксированном $p \in V$ уравнение $q(p) = 0$ линейно по $q \in S^2V^*$. Поэтому коники, проходящие через $p \in \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ образуют гиперплоскость в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2V^*)$. Поскольку любые 5 гиперплоскостей в $\mathbb{P}_5$ имеют непустое пересечение, требуемая коника существует. Если какие-то три из точек коллинеарны, а никакие четыре — нет, коника содержит прямую, проходящую через три коллинеарные точки, и стало быть, распадается в объединение этой прямой и прямой, проходящей через две оставшиеся точки. Тем самым, такая коника единственна. Если никакие три из точек не коллинеарны, любая проходящая через них коника автоматически неособа, и значит, единственна по предл. 2.3. □

[1]напомним (см. прим. 1.4 на стр. 11), что *коника Веронезе* $C_{\text{ver}} \subset \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2U^*)$ состоит из всех квадратичных форм $a_0\,x_0^2 + 2a_1\,x_0x_1 + a_2\,x_1^2$ на двумерном пространстве $U \simeq \Bbbk^2$ с координатами (x_0, x_1), которые являются полными квадратами линейных форм $\alpha_0x_0 + \alpha_1x_1 \in U^*$

Следствие 2.7

Каждые 5 прямых без тройных пересечений на $\mathbb{P}_2$ касаются единственной невырожденной коники.

Доказательство. Это утверждение проективно двойственно предыдущему: 5 точек на $\mathbb{P}_2^\times$, двойственные к данным пяти прямым на $\mathbb{P}_2$, лежат на единственной гладкой конике $C \subset \mathbb{P}_2^\times$, и двойственная ей коника $C \subset \mathbb{P}_2$ есть единственная гладкая коника, касающаяся пяти данных прямых. □

Пример 2.1 (геометрическая классификация гомографий)

Пусть гомография $\varphi : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$ между двумя несовпадающими прямыми $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$ переводит три различные точки $a_1, b_1, c_1 \in \ell_1$, отличные от точки пересечения прямых $q = \ell_1 \cap \ell_2$, соответственно, в точки $a_2, b_2, c_2 \in \ell_2$. Для геометрического устройства такой гомографии есть ровно две разных возможности, представленные на рис. 2◇1 и рис. 2◇2: либо три прямые (a_1, a_2), (b_1, b_2) и (c_1, c_2), соединяющие соответственные точки, проходят через одну точку p, либо — не проходят через одну точку.

Как мы видели в прим. 1.6, первое означает, что φ является перспективой с центром в p, и это равносильно тому, что $\varphi(q) = q$.

Во втором случае никакие три из прямых ℓ_1, ℓ_2 и (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) не пересекаются в одной точке, и по сл. 2.7 существует единственная и автоматически гладкая коника C, касающаяся всех пяти этих прямых. Преобразование $C : \ell_1 \to \ell_2$, переводящее точку $x \in \ell_1$ в точку пересечения прямой ℓ_2 с отличной от ℓ_1 касательной, опущенной из x на C, является гомографией ℓ_1 на ℓ_2, т. к. биективно и рационально: уравнения пары касательных, опущенных из x на C, суть точки пересечения двойственной коники $C^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$ с прямой $x^\times = \mathrm{Ann}\,(x)$; одна из этих точек — уравнение прямой ℓ_1 — дана, так что вторая — уравнение прямой (x, y) — рационально через неё выражается. Поскольку C и φ одинаково действуют на a_1, b_1, c_1, гомография $C : \ell_1 \to \ell_2$ совпадает φ. Обратите внимание, что образом и прообразом точки $q = \ell_1 \cap \ell_2$ в этом случае являются точки пересечения $\ell_2 \cap C$ и $\ell_1 \cap C$ соответственно.

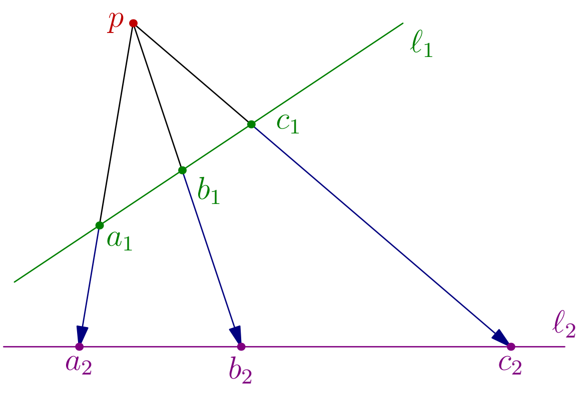


Рис. 2◇1. Перспектива $p : \ell_1 \to \ell_2$.

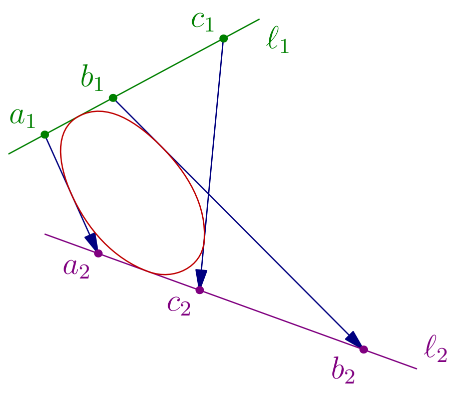


Рис. 2◇2. Гомография $C : \ell_1 \to \ell_2$.

Итак, каждая гомография $\ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$ либо является перспективой, либо высекается семейством касательных к некоторой гладкой конике. В обоих случаях центр p и коника

C определяются по гомографии *однозначно*. Перспектива может рассматриваться как вырожденный случай гомографии $C : \ell_1 \to \ell_2$, отвечающий особой конике C, распавшейся в объединение двух прямых, пересекающихся в центре перспективы[1].

Предложение 2.5 (теорема о вписанно-описанных треугольниках)
Два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ вписаны в одну и ту же гладкую конику Q', если и только если они описаны вокруг одной и той же гладкой коники Q''.

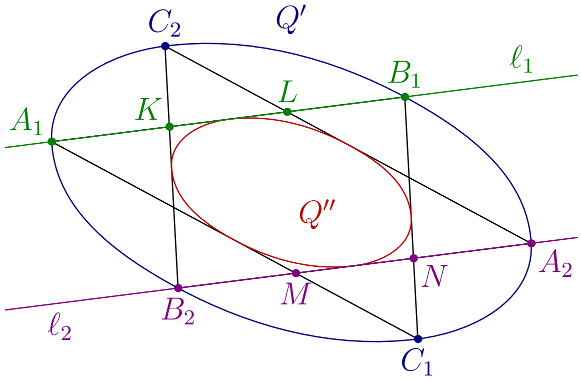


Рис. 2◇3. Вписанно-описанные треугольники.

Доказательство. Пусть 6 точек $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ лежат на одной конике Q' (см. рис. 2◇3). Рассмотрим прямые $\ell_1 = (A_1B_1)$, $\ell_2 = (A_2B_2)$ и обозначим через $C_2 : \ell_1 \xrightarrow{\sim} Q'$ и $C_1 : Q' \xrightarrow{\sim} \ell_2$ проекцию прямой ℓ_1 из точки C_2 на конику Q' и проекцию коники Q' на прямую ℓ_2 из точки C_1. Композиция этих двух проекций

$$[C_1 : Q' \xrightarrow{\sim} \ell_2] \circ [C_2 : \ell_1 \xrightarrow{\sim} Q'] \ : \ \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$$

переводит $A_1 \mapsto M$, $K \mapsto B_2$, $L \mapsto A_2$, $B_1 \mapsto N$ и является неперспективой гомографией. Значит, она задаётся семейством касательных к некоторой гладкой конике Q'', вписанной в оба треугольника. Обратная импликация проективно двойственна только что доказанной. □

Следствие 2.8 (поризм Понселе для треугольников)
Если пара коник Q' и Q'' такова, что существует треугольник $A_1B_1C_1$, одновременно вписанный в Q' и описанный около Q'', то такой же треугольник $A_2B_2C_2$ (одновременно вписанный в Q и описанный около Q') можно нарисовать стартовав *с любой* точки $A_2 \in Q' \smallsetminus Q''$.

Доказательство. В самом деле, проведём из A_2 две касательных (A_2B_2) и (A_2C_2) к конике Q'' до их пересечения с Q' в точках $B_2, C_2 \in Q'$, как на рис. 2◇3. По предл. 2.5, треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ описаны вокруг некоторой коники, а поскольку существует лишь одна коника, касающаяся пяти прямых (AB), (BC), (CA), (A_2B_2), (A_2C_2), эта коника и есть Q''. □

Пример 2.2 (построение коники линейкой)
Точки коники C, проходящей через пять данных точек $p_1, p_2, \dots, p_5$, никакие 3 из которых не коллинеарны, можно эффективно строить одной линейкой (см. рис. 2◇4).

[1]сами прямые могут в этом случае выбираться многими способами — подойдут любые две прямые, соединяющие соответственные точки гомографии

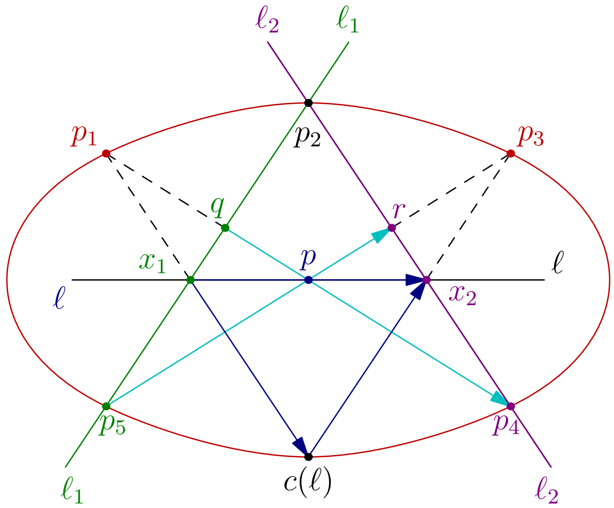


Рис. 2⋄4. Трассировка коники линейкой.

Проведём прямые $\ell_1 = (p_2p_5)$, $\ell_2 = (p_2p_4)$ и рассмотрим точку $p = (p_1p_4) \cap (p_3p_5)$. Перспектива $p : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$ совпадает с композицией проекции $p_1 : \ell_1 \xrightarrow{\sim} C$ прямой ℓ_1 на конику C из точки $p_1 \in C$ и $p_3 : C \xrightarrow{\sim} \ell_2$ проекции коники C на прямую ℓ_2 из точки $p_3 \in C$, поскольку они одинаково действуют на лежащие на прямой ℓ_1 три точки p_2, p_5 и $q = \ell_1 \cap (p_2p_4)$ (см. рис. 2⋄4). Поэтому для любой прямой ℓ, проходящей через p и пересекающейся с прямыми ℓ_1 и ℓ_2 в точках x_1 и x_2 соответственно, точка $c(\ell) = (p_1x_1) \cap (p_2x_2)$ лежит на C и прочертит эту конику, когда ℓ пробежит пучок прямых через p.

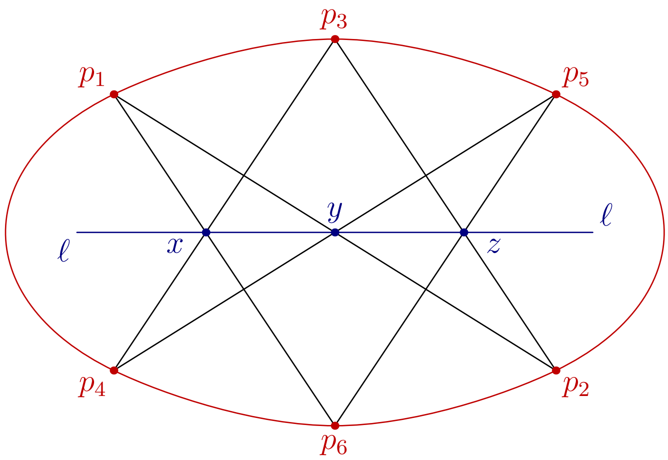


Рис. 2⋄5. Гексограмма Паскаля.

Теорема 2.4 (теорема Паскаля)
Шесть точек $p_1, p_2, \ldots, p_6$, никакие 3 из которых не коллинеарны, тогда и только тогда лежат на одной гладкой конике, когда коллинеарны три точки пересечений

$$x = (p_3p_4) \cap (p_6p_1)\,, \quad y = (p_1p_2) \cap (p_4p_5)\,, \quad z = (p_2p_3) \cap (p_5p_6)$$

пар «противоположных сторон» шестиугольника $p_1, p_2, \ldots, p_6$ (ср. рис. 2⋄6 и рис. 2⋄5).

Доказательство. Полагая $\ell_1 = (p_3 p_4)$ и $\ell_2 = (p_3 p_2)$, как на рис. 2◇5, мы видим, что условие $z \in (xy)$ означает, что x переходит в z при перспективе

$$y : \ell_1 \to \ell_2 , \tag{2-6}$$

которая, согласно прим. 2.2, раскладывается в композицию проекций

$$\big(p_5 : C \xrightarrow{\sim} \ell_2\big) \circ \big(p_1 : \ell_1 \xrightarrow{\sim} C\big) \tag{2-7}$$

где C — гладкая коника, проходящая через $p_1, p_2, \dots , p_5$. Но тогда $p_6 = (p_5 z) \cap (p_3 x) \in C$. Наоборот, если $(p_5 z) \cap (p_3 x) \in C$, то точка $z \in \ell_2$ является образом точки $x \in \ell_1$ при композиции проекций (2-7), а значит, и при перспективе (2-6), откуда $z \in (xy)$. □

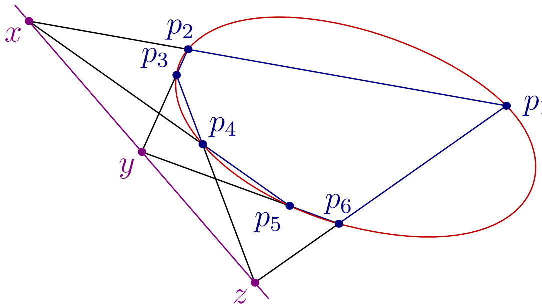


Рис. 2◇6. Вписанный шестиугольник.

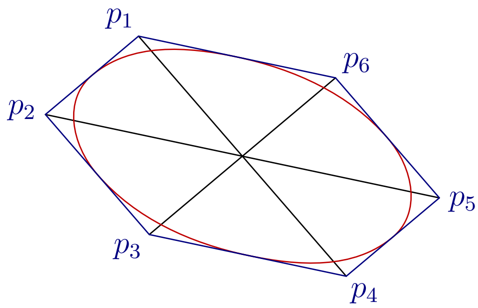


Рис. 2◇7. Описанный шестиугольник.

Следствие 2.9 (теорема Брианшона)
Шестиугольник $p_1, p_2, \dots , p_6$ тогда и только тогда описан вокруг некоторой гладкой коники, когда его главные диагонали $(p_1 p_4)$, $(p_2 p_5)$, $(p_3 p_6)$ пересекаются в одной точке (см. рис. 2◇7).

Доказательство. Эта теорема проективно двойственна к теореме Паскаля. □

2.3.2. Внутренняя геометрия гладкой коники. Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ с $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$ проективная плоскость $\mathbb{P}_2$ с заданной на ней гладкой коникой может восприниматься как множество неупорядоченных пар точек $\{p, q\}$ проективной прямой $\mathbb{P}_1$, а сама коника — как множество пар совпадающих точек $\{p, p\}$.

Точнее, рассмотрим проективизацию $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$ двумерного координатного векторного пространства $U = \Bbbk^2$, зафиксируем в U стандартные координаты $x = (x_0, x_1)$ и сопоставим каждой точке $p \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$ одномерное подпространство $\mathrm{Ann}\,(p) \subset U^*$ линейных форм, зануляющихся в p, порождённое линейной формой

$$\det(x, p) = p_1 x_0 - p_0 x_1 , \quad \text{где} \quad p = (p_0 : p_1) .$$

Упражнение 2.10. Покажите, что отображение $\det : \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(U^*) = \mathbb{P}_1^{\times}$, переводящее точку $p \in \mathbb{P}_1$ в класс пропорциональности линейной формы $x \mapsto \det(p, x)$, не зависит от выбора однородных координат и является гомографией.

Далее, сопоставим каждой неупорядоченной паре точек $p = (p_0 : p_1)$, $q = (q_0 : q_1)$ на $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$ множество всех однородных многочленов второй степени, зануляющихся в точках p и q. Такие многочлены образуют в трёхмерном пространстве S^2U^* всех квадратичных форм на U одномерное векторное подпространство, порождённое квадратичной формой

$$f_{p,q}(x) = \det(x,p)\cdot\det(x,q) = a_0(p,q)\cdot x_0^2 + 2\,a_1(p,q)\cdot x_0x_1 + a_2(p,q)\cdot x_1^2\,, \quad \text{где}$$
$$a_0(p,q) = p_1q_1\,, \quad a_1(p,q) = -\frac{1}{2}\,\left(p_1q_0 + p_0q_1\right)\,, \quad a_2(p,q) = p_0q_0\,. \tag{2-8}$$

Упражнение 2.11. Убедитесь, что сопоставляя неупорядоченной паре точек $\{p,q\}$ одномерное подпространство в S^2U^*, порождённое квадратичной формой (2-8), мы получаем биекцию между неупорядоченными парами точек на прямой $\mathbb{P}(U)$ и точками пространства $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2U^*)$ квадрик на $\mathbb{P}(U)$.

Пары совпадающих точек $\{p,p\}$ перейдут при этом в конику Веронезе $C_{\text{ver}} \subset \mathbb{P}(S^2U^*)$, состоящую из ненулевых квадратичных форм (2-8) с нулевым определителем[1]

$$f_p(x) = \det{}^2(x,p) = a_0(p)\cdot x_0^2 + 2\,a_1(p)\cdot x_0x_1 + a_2(p)\cdot x_1^2\,, \quad \text{где}$$
$$a_0(p) = p_1^2\,, \quad a_1(p) = -p_0p_1\,, \quad a_2(p) = p_0^2\,. \tag{2-9}$$

Пары точек вида $\{p,t\}$, где $p \in \mathbb{P}_1$ фиксирована, а t пробегает $\mathbb{P}_1$, переходит в *прямую* $\operatorname{Ann}(p) \subset \mathbb{P}(S^2U^*)$, состоящую из всех квадратичных форм на $\mathbb{P}_1$, зануляющихся в p.

Упражнение 2.12. Убедитесь, что уравнение $f(p) = 0$ является при фиксированном p линейным уравнением на f и, стало быть, задаёт в $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2V^*)$ прямую.

В частности, касательные к конике Веронезе C_{ver}, восстановленные в точках $\{p,p\}$ и $\{q,q\}$, суть прямые, состоящие из точек вида $\{p,t\}$ и $\{q,s\}$ соответственно. Эти две прямые пересекается в точке $\{p,q\}$.

Поскольку над алгебраически замкнутым полем все гладкие коники проективно эквивалентны друг другу, произвольную гладкую конику C на $\mathbb{P}_2$ можно записать в подходящих однородных координатах $(a_0 : a_1 : a_2)$ уравнением $a_1^2 = a_0a_2$ и воспринимать как конику Веронезе.

Пример 2.3 (двойное отношение и внутренние однородные координаты на конике)
Назовём *двойным отношением* четырёх точек P_1, P_2, P_3, P_4 на гладкой конике C двойное отношение проекций этих точек на какую-нибудь прямую $\ell \subset \mathbb{P}_2$ из какой-нибудь пятой точки $P_0 \in C$, отличной от всех четырёх и не лежащей на ℓ, или — что то же самое — двойное отношение в пучке прямых, проходящих через точку P_0, четырёх прямых, проходящих через точки P_1, P_2, P_3, P_4.

Упражнение 2.13. Убедитесь, что это двойное отношение не зависит ни от выбора ℓ, ни от выбора P_0.

Если подходящей линейной заменой координат отождествить конику C с коникой Веронезе C_{ver} и, тем самым, плоскость $\mathbb{P}_2 \supset C$ — с пространством неупорядоченных пар точек на $\mathbb{P}_1$, то определённое выше двойное отношение точек $P_i = \{p_i,p_i\} \in C_{\text{ver}} \subset \mathbb{P}_2$ будет

[1]параметризация коники Веронезе по формулам (2-9) отличается от параметризации (2-5) и является композицией квадратичного вложения Веронезе $\mathbb{P}(U^*) \xrightarrow{\psi(x)\mapsto\psi^2(x)} \mathbb{P}(S^2U^*)$ из (2-5) и гомографии $\det : \mathbb{P}(U) \xrightarrow{(p_0:p_1)\mapsto p_1x_0 - p_0x_1} \mathbb{P}(U^*)$ из упр. 2.10

равно — вне зависимости от способа такого отождествления — двойному отношению точек p_i на $\mathbb{P}_1$.

В самом деле, композиция вложения $\mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} C_{\mathrm{ver}} \subset \mathbb{P}_2$, переводящего $p \in \mathbb{P}_1$ в $\{p, p\} \in C_{\mathrm{ver}}$, и проекции коники C_{ver} из любой её точки на любую не проходящую через эту точку прямую $\ell \subset \mathbb{P}_2$ биективна и рациональна, а значит, является гомографией $\mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \ell$ и сохраняет двойные отношения.

По этой же причине на любой гладкой конике C имеются единственные с точностью до проективного преобразования внутренние однородные координаты: их можно задать либо отождествив конику C с множеством двойных точек $\{a, a\}$ на $\mathbb{P}_1$ и объявив однородными координатами точки $\{a, a\} \in C$ однородные координаты точки a на $\mathbb{P}_1$, либо спроектировав конику C из любой точки $p \in C$ на любую прямую $\ell \not\ni p$ и перенеся при помощи этой проекции на конику C какие-нибудь однородные координаты с прямой ℓ.

Предложение 2.6
Всякий линейный проективный автоморфизм F плоскости $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2U^*)$, переводящий в себя конику Веронезе $C_{\mathrm{ver}} \subset \mathbb{P}(S^2U^*)$, имеет вид $S^2\varphi : \{a, b\} \mapsto \{\varphi(a), \varphi(b)\}$, где

$$\varphi : \mathbb{P}(U) \to \mathbb{P}(U)$$

однозначно определяемая по F гомография на прямой $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$.

Доказательство. Проективный изоморфизм F однозначно задаётся своим действием на какие-нибудь четыре различных точки $P_i = \{p_i, p_i\}$, $i = 1, 2, 3, 4$, на кривой Веронезе C_{ver}. Пусть $F(P_i) = \{q_i, q_i\} \in C_{\mathrm{ver}}$. В силу линейности оператора F, двойное отношение проекций точек P_i на какую-нибудь прямую ℓ из какой-нибудь пятой точки $P_0 \in C_{\mathrm{ver}}$ равно двойному отношению проекций точек $F(P_i)$ на прямую $F(\ell)$ из точки $F(P_0)$. Тем самым, выполняется следующее равенство двойных отношений точек на конике Веронезе C_{ver}:

$$[\,P_1, P_2, P_3, P_4\,] = [\,F(P_1), F(P_2), F(P_3), F(P_4)\,]\,.$$

Тогда на $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$ имеет место равенство двойных отношений

$$[\,p_1, p_2, p_3, p_4\,] = [\,P_1, P_2, P_3, P_4\,] = [\,F(P_1), F(P_2), F(P_3), F(P_4)\,] = [\,q_1, q_2, q_3, q_4\,]\,.$$

Поэтому, существует (автоматически единственная) гомография $\varphi : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$, такая что $\varphi(p_i) = q_i$ для всех $i = 1, 2, 3, 4$.

Упражнение 2.14. Убедитесь, что отображение $S^2\varphi : \{a, b\} \mapsto \{\varphi(a), \varphi(b)\}$ является линейным проективным преобразованием плоскости $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2U^*)$ и явно выпишите его матрицу в координатах $(a_0 : a_1 : a_2)$, если задана матрица φ в координатах $(x_0 : x_1)$ на $\mathbb{P}_1$.

Поскольку $S^2\varphi$ совпадает с F на четырёх точках $P_i \in \mathbb{P}_2$, эти проективные преобразования одинаковы. □

2.3.3. Гомографии на гладкой конике. Будем называть отображение $\varphi : C \to C$ гладкой коники в себя *гомографией*, если оно осуществляет дробно линейное преобразование описанных в прим. 2.3 внутренних однородных координат на этой конике. По лем. 1.2 любое биективное[1] отображение $\varphi : C \to C$, которое во внутренних однородных

[1]всюду, за исключением, может быть, конечного множества точек

координатах на конике задаётся рациональной формулой вида $\varphi(\alpha_0 : \alpha_1) = \big(f(\alpha_0/\alpha_1) : g(\alpha_0/\alpha_1)\big)$, где $f, g \in \Bbbk[t]$, является гомографией. Для любых двух упорядоченных троек различных точек коники существует единственная гомография, переводящая первую тройку точек во вторую с сохранением порядка. В доказательстве предл. 2.6 мы видели, что любая гомография $\varphi : C \to C$ однозначно продолжается до проективного автоморфизма всей плоскости, переводящего конику в себя и индуцирующего на ней гомографию φ.

Пример 2.4 (инволюции)

Нетождественная гомография, обратная самой себе, называется *инволюцией*. Пусть инволюция $\sigma : C_{\text{ver}} \to C_{\text{ver}}$ меняет местами две разных пары точек: $a' \leftrightarrow a''$ и $b' \leftrightarrow b''$ (см. рис. 2◇8). Прямые $(a'a'')$ и $(b'b'')$ пересекаются в какой-то точке $s = \{p, q\} = (a'a'') \cap (b'b'') \notin C$. Очевидно, что действие σ на C_{ver} высекается пучком прямых с центром в точке s в том смысле, что точки $x', x'' \in C_{\text{ver}}$ переводятся друг в друга инволюцией σ тогда и только тогда, когда прямая $(x'x'')$ проходит через точку s.

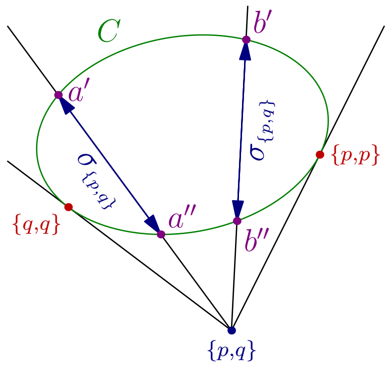


Рис. 2◇8. Инволюция на конике.

Упражнение 2.15. Убедитесь в этом.

Таким образом, над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ каждая инволюция σ на $\mathbb{P}_1$ имеет ровно две различных неподвижных точки[1] p и q, такие что точки $\{p, p\}$ и $\{q, q\}$ на C_{ver} суть точки касания с C_{ver} пары касательных, опущенных на C_{ver} из точки

$$s = \{p, q\} = \big(\{a, a\}\,\{\sigma(a), \sigma(a)\}\big) \cap \big(\{b, b\}\,\{\sigma(b), \sigma(b)\}\big),$$

где $a, b \in \mathbb{P}_1$ — любые две точки, не остающиеся на месте под действием σ. Мы будем обозначать инволюцию с неподвижными точками $p, q \in \mathbb{P}_1$ через $\sigma_{p,q}$.

Упражнение 2.16. Напишите явную формулу, выражающую координаты точек p и q через координаты точек a', a'', b', b'' таких что $\sigma_{pq}(a') = a''$ и $\sigma_{pq}(b') = b''$.

Из сказанного вытекает, в частности, что две инволюции на $\mathbb{P}_1$ совпадают тогда и только тогда, когда у них одни и те же неподвижные точки (ср. с упр. 2.5 на стр. 30).

Упражнение 2.17. Покажите, что любые две различных инволюции проективной прямой всегда одинаково действуют ровно на одну пару точек этой прямой.

Пример 2.5 (перекрёстная ось дробно линейного автоморфизма)

Гомография $\varphi : C_{\text{ver}} \to C_{\text{ver}}$, переводящая три различные точки $a_1, b_1, c_1 \in C_{\text{ver}}$ в точки $a_2, b_2, c_2 \in C_{\text{ver}}$ является композицией проекций $b_2 : C_{\text{ver}} \to \ell$ и $b_1 : \ell \to C_{\text{ver}}$, где

[1]Поучительно сравнить наше геометрическое рассуждение с алгебраическим доказательством этого же факта. Инволюция $\sigma : \mathbb{P}(U) \to \mathbb{P}(U)$ индуцируется линейным автоморфизмом $F : U \to U$, и условие $\sigma^2 = \mathrm{Id}$ означает, что $F^2 = \lambda E$ для некоторого ненулевого $\lambda \in \Bbbk$. Тем самым, оператор F аннулируется многочленом $t^2 - \lambda = \left(t - \sqrt{\lambda}\right) \cdot \left(t + \sqrt{\lambda}\right)$ без кратных корней. Из этого вытекает, что F диагонализуем, и его собственные значения могут быть равны только $\pm\sqrt{\lambda}$. Поскольку $\sigma \neq \mathrm{Id}$, оператор F не скалярен, а значит, имеет ровно два различных собственных вектора с противоположными собственными значениями $\pm\sqrt{\lambda}$

прямая ℓ соединяет точки пересечения $(a_1, b_2) \cap (b_1, a_2)$ и $(c_1, b_2) \cap (b_1, c_2)$ пар перекрёстных прямых на рис. 2⋄9.

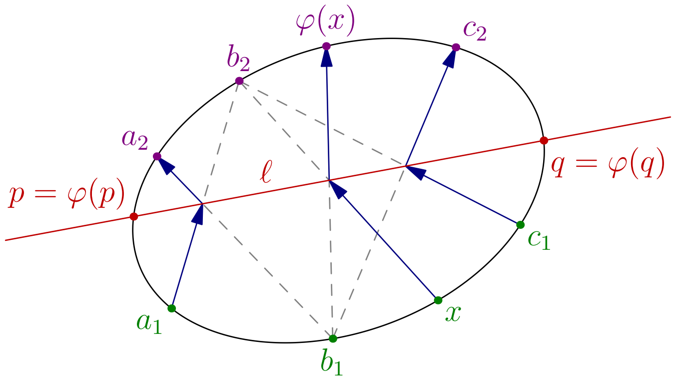


Рис. 2⋄9. Перекрёстная ось гомографии на книке.

Из такого описания следует, что неподвижные точки φ суть точки пересечения $\ell \cap C_{\text{ver}}$. Поэтому прямая ℓ не зависит от выбора точек $a_1, b_1, c_1 \in C_{\text{ver}}$, и φ имеет либо две неподвижные точки, либо одну (в этом случае ℓ касается C_{ver} в этой точке). Таким образом, прямая ℓ представляет собой ГМТ пересечения всех перекрёстных прямых $(x, \varphi(y)) \cap (y, \varphi(x))$ с произвольными различными $x, y \in C_{\text{ver}}$. Это, среди прочего, даёт новое доказательство теоремы Паскаля: три точки пересечений пар противоположных сторон вписанного в C_{ver} шестиугольника $a_1c_2b_1a_2c_1b_2$, будучи точками пересечений перекрёстных прямых гомографии, переводящей a_1, b_1, c_1 в a_2, b_2, c_2, лежат на её перекрёстной оси ℓ.

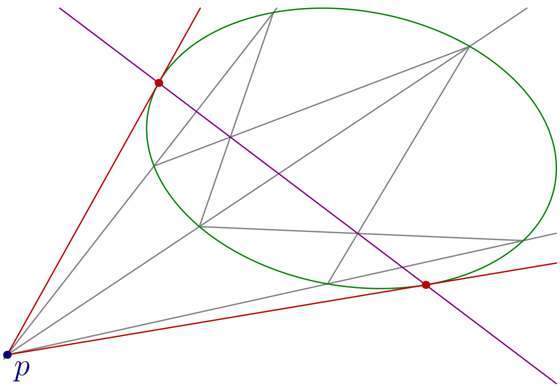


Рис. 2⋄10. Построение касательных.

Отметим, что перекрёстная ось гомографии $\varphi : C \to C$, заданной своим действием на какие-нибудь три точки, легко строится одной линейкой, что позволяет одной линейкой построить образ $\varphi(z)$ любой точки $z \in C$ относительно такой гомографии, а также указать её неподвижные точки. В частности, одной линейкой можно начертить две касательных к данной гладкой конике C из данной точки $s \in \mathbb{P}_2$ — это будут две прямые, соединяющие s с неподвижными точками инволюции $\sigma_s : C \to C$, высекаемой пучком прямых с центром в s. Чтобы найти эти неподвижные точки, проведём через s любые три секущих и начертим перекрёстную ось ℓ_{σ_s} инволюции σ_s (см. рис. 2⋄10). Точки пересечения $\ell_{\sigma_s} \cap C$ будут искомыми точками касания[1].

[1]ещё более простое построение см. ниже в зад. 2.11 на стр. 50

2.4. Квадратичные поверхности. Квадрики в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$, $\dim V = 4$, образуют проективное пространство $\mathbb{P}_9 = \mathbb{P}(S^2V^*)$. Поэтому любые 9 точек в $\mathbb{P}_3$ лежат на некоторой квадрике. В частности, любые три прямые в $\mathbb{P}_3$ лежат на некоторой квадрике — достаточно взять по 3 точки на каждой прямой и провести квадрику через эти 9 точек.

Над алгебраически замкнутым полем особые квадрики в $\mathbb{P}_3$ суть:

- *двойная плоскость* $x_0^2 = 0$ (ранг 1)
- *распавшаяся квадрика*[1] $x_0^2 + x_1^2 = 0$ (ранг 2)
- *простой конус*[2] $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ (ранг 3)

Упражнение 2.18. Покажите, что особая квадрика в $\mathbb{P}_3$ (над произвольным полем) не может содержать трёх попарно непересекающихся прямых.

Таким образом, любые три попарно скрещивающиеся прямые в $\mathbb{P}_3$ лежат на гладкой квадрике.

2.4.1. Квадрика Сегре. Удобной геометрической моделью гладкой квадрики в $\mathbb{P}_3$ является *квадрика Сегре* в проективном пространстве $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}\left(\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\Bbbk)\right)$, состоящая из ненулевых матриц ранга 1:

$$Q_s \overset{\text{def}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix} \neq 0 \;\middle|\; \det \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix} = \alpha_{00}\alpha_{11} - \alpha_{01}\alpha_{10} = 0 \right\}. \tag{2-10}$$

Если ненулевой линейный оператор $F : U \to V$ имеет ранг 1, то одномерный образ F состоит из векторов, пропорциональных некоему ненулевому вектору $v \in V$, а ядро F имеет коразмерность 1 и, тем самым, представляет собою аннулятор некоего ненулевого ковектора $\xi \in U^*$. И вектор $v \in V$, и ковектор $\xi \in U^*$ определяются оператором F однозначно с точностью до пропорциональности, а сам F пропорционален линейному оператору $v \otimes \xi : U \to V$, который действует на векторы $u \in U$ по правилу

$$v \otimes \xi : u \mapsto v \cdot \langle\, \xi \,,\, u \,\rangle \tag{2-11}$$

и называется *тензорным произведением* вектора $v \in V$ и ковектора $\xi \in U^*$.

В ситуации, когда $U = V = \Bbbk^2$, а v и ξ имеют в стандартных двойственных базисах пространств $\Bbbk^2$ и $\Bbbk^{2*}$ координаты $v = (x_0 : x_1)$ и $\xi = (\xi_0 : \xi_1)$, матрица оператора $v \otimes \xi$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_0 & \xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0 x_0 & \xi_1 x_0 \\ \xi_0 x_1 & \xi_1 x_1 \end{pmatrix} \tag{2-12}$$

Сопоставляя паре точек $(\xi, v) \in \mathbb{P}_1^\times \times \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\Bbbk^{2*}) \times \mathbb{P}(\Bbbk^2)$ одномерное подпространство в $\mathrm{Hom}(\Bbbk^2, \Bbbk^2)$, порождённое оператором (2-11) с матрицей (2-12), мы получаем *вложение Сегре*

$$s : \mathbb{P}_1^\times \times \mathbb{P}_1 \hookrightarrow \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}\Big(\mathrm{End}\left(\Bbbk^2\right)\Big),$$

[1] т. е. объединение двух плоскостей $x_0 = \pm i\, x_1$, или, что то же самое, линейное соединение особой прямой (e_2, e_3) и пары точек $(1 : \pm i : 0 : 0)$, составляющих неособую квадрику на дополнительной прямой (e_0, e_1)

[2] т. е. линейное соединение одной особой точки с невырожденной коникой в дополнительной плоскости

биективно отображающее $\mathbb{P}_1^{\times} \times \mathbb{P}_1$ на квадрику Сегре $Q_s \subset \mathbb{P}_3$. При этом два семейства координатных прямых на $\mathbb{P}_1^{\times} \times \mathbb{P}_1$ переходят в два семейства прямых на Q_s.

А именно, координатная прямая $\xi = \text{const}$ изобразится на квадрике Сегре проективизацией двумерного пространства матриц ранга 1 с фиксированным отношением $\xi = (\xi_0 : \xi_1)$ между столбцами, а прямая $v = \text{const}$ — матрицами с фиксированным отношением $x = (x_0 : x_1)$ между строками. В каждом из этих семейств все прямые попарно скрещиваются, а любые две прямые из разных семейств пересекаются, причём каждая точка Q_s является точкой пересечения пары прямых из различных семейств.

Никаких других прямых на квадрике Сегре нет, поскольку всякая прямая, лежащая на Q_s и проходящая через какую-нибудь точку $p \in Q_s$ содержится в плоской конике $Q_s \cap T_p Q_s$, которая исчерпывается парой проходящих через p прямых из описанных выше двух семейств.

Предложение 2.7
Через любые три попарно непересекающиеся прямые в $\mathbb{P}_3$ проходит единственная (и автоматически неособая) квадрика. Эта квадрика представляет собою объединение всех прямых, пересекающих все три заданных.

Доказательство. Всякая квадрика, проходящая через три скрещивающихся прямые, является неособой квадрикой Сегре, заметаемой двумя семействами прямолинейных образующих. Все три заданные прямые должны лежать в одном из них. Но тогда любая прямая из другого семейства пересекают каждую из них, и наоборот, всякая прямая пересекающая каждую из них, лежит на квадрике (ибо пересекает её по трём точкам), причём в другом по отношению к трём заданным прямым семействе. □

2.5. Подпространства, лежащие на квадриках. Размерность максимального по включению проективного пространства, целиком лежащего на квадрике $Q \subset \mathbb{P}_n$, называется *планарностью* квадрики Q. Планарность пустой квадрики будем по определению считать равной -1. Таким образом, 0-планарные квадрики суть непустые квадрики, не содержащие прямых.

Предложение 2.8
Планарность любой гладкой квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$ над произвольным полем $\Bbbk$, $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$, не превышает половины размерности квадрики Q, т. е. не больше целой части $[(n-1)/2]$.

Доказательство. Пусть $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$, $\dim V = n+1$, и $L = \mathbb{P}(W) \subset Q = V(q)$, где $q \in S^2V^*$. Поскольку ограничение формы q на подпространство $W \subset V$ тождественно нулевое, оператор корреляции $\hat{q} : V \to V^*$ переводит подпространство W внутрь подпространства $\operatorname{Ann}(W) \subset V^*$. В силу невырожденности формы q этот оператор инъективен, откуда

$$\dim(W) = \dim \hat{q}(W) \leqslant \dim \operatorname{Ann} W = \dim V - \dim W\,.$$

Таким образом, $2\dim W \leqslant \dim V$, т. е. $2\dim L \leqslant n-1$. □

Лемма 2.3
Сечение неособой квадрики Q произвольной гиперплоскостью Π либо является неособой квадрикой в Π, либо имеет единственную особую точку $p \in \Pi \cap Q$, причём последнее равносильно тому, что $\Pi = T_pQ$ касается квадрики в точке p.

Доказательство. Пусть $Q = V(q) \subset \mathbb{P}(V)$ и $\Pi = \mathbb{P}(W)$. Первый факт следует из оценки:

$$\dim\ker\left(\hat{q}|_W\right) = \dim\left(W \cap \hat{q}^{-1}(\operatorname{Ann} W)\right) \leqslant \\ \leqslant \dim \hat{q}^{-1}(\operatorname{Ann} W) = \dim \operatorname{Ann} W = \dim V - \dim W = 1\,.$$

Если ядро ограничения $\hat{q}|_W$ не нулевое, а одномерное с базисом p, то $p \in Q \cap \Pi$ имеет $\operatorname{Ann}(\hat{q}(p)) = W$, откуда $T_pQ = \Pi$. Наоборот, если $\Pi = T_pQ = \mathbb{P}(\operatorname{Ann}\hat{q}(p))$, то $p \in \operatorname{Ann}\hat{q}(p)$ лежит в ядре ограничения $\hat{q}$ на $\operatorname{Ann}\hat{q}$. □

Предложение 2.9
Пусть $Q \subset \mathbb{P}_{n+1}$ — гладкая n-мерная квадрика над произвольным полем $\Bbbk$, $\operatorname{char}\Bbbk \neq 2$. Тогда m-мерные проективные подпространства $L \subset Q$, проходящие через фиксированную точку $p \in Q$, биективно соответствуют всевозможным $(m-1)$-мерным проективным подпространствам L', лежащим на гладкой $(n-2)$-мерной квадрике $Q' = H \cap Q$, которую квадрика Q высекает из произвольной не проходящей через точку p гиперплоскости $H \simeq \mathbb{P}_{n-1}$ касательного пространства $T_pQ \simeq \mathbb{P}_n$.

Доказательство. Всякая m-мерная плоскость $L \subset Q$, проходящая через точку $p \in Q$, лежит в пересечении $Q \cap T_Q$. Согласно лем. 2.3 это пересечение является особой квадрикой с единственной особой точкой p, а значит, по теор. 2.2 на стр. 28 представляет собою конус с вершиной в точке p над неособой квадрикой Q', которая высекается квадрикой Q в произвольно выбранной не проходящей через p гиперплоскости $H \subset T_pQ$. Поэтому $(m-1)$-мерная плоскость $L' = L \cap H = L \cap Q'$ лежит на Q'. Наоборот, линейное соединение точки p с произвольной $(m-1)$-мерной плоскостью $L' \subset Q'$ содержит p и лежит в Q. □

Следствие 2.10
Мощность множества[1] k-мерных плоскостей, лежащих на гладкой квадрике Q и проходящих через заданную точку $p \in Q$, одинакова для всех точек $p \in Q$. В частности, через *каждую* точку гладкой m-планарной квадрики можно провести лежащую на квадрике m-мерную плоскость.

Доказательство. Если $a, b \in Q$ и $b \notin T_aQ$, то $H = T_aQ \cap T_bQ$ одновременно является не проходящей через a гиперплоскостью в T_aQ и не проходящей через b гиперплоскостью в T_bQ. По предл. 2.9 оба множества лежащих на Q k-мерных плоскостей — плоскости, проходящие через точку a, и плоскости, проходящие через точку b — равномощны множеству всех $(k-1)$-мерных плоскостей, лежащих на гладкой квадрике $Q \cap H$ в H, и значит, равномощны друг другу. Если $b \in T_aQ$, рассмотрим любую точку $c \in Q \smallsetminus (T_aQ \cup T_bQ)$. По уже доказанному, множество лежащих на Q k-мерных плоскостей — проходящих через точку c равномощно как множеству плоскостей, проходящих через точку a, так и множеству плоскостей, проходящих через точку b. □

Следствие 2.11
Гладкая n-мерная квадрика над алгебраически замкнутым полем $[n/2]$-планарна.

[1]на самом деле эти плоскости образуют гладкое проективное многообразие — так называемое *многообразие Фано* (или *изотропный грассманиан*), см. зад. 5.8 на стр. 136

Доказательство. Это так при $n = 0, 1, 2$. Поскольку все гладкие n-мерные квадрики над алгебраически замкнутым полем проективно эквивалентны, общий случай получается индуктивным применением предл. 2.9. □

Следствие 2.12
Гладкая вещественная проективная квадрика $Q_{n,m}$, заданная в $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ уравнением

$$x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + \dots + x_{2m-2}^2 - x_{2m-1}^2 + x_{2m}^2 + x_{2m+1}^2 + \dots + x_n^2 = 0$$

(m минусов и $n + 1 - m \geqslant m$ плюсов), имеет планарность $m - 1$.

Доказательство. Индукция по m. При $m = 0$ все квадрики $Q_{n,0}$ пусты и по определению имеют планарность -1. При $m > 0$ планарность квадрики $Q_{n,m}$ согласно предл. 2.9 и сл. 2.10 ровно на единицу больше планарности квадрики $Q_{n-2,m-1}$, которая высекается квадрикой Q в лежащей внутри касательного пространства к $Q_{n,m}$ в точке $e_0 + e_1 \in Q_{n,m}$ и не проходящей через эту точку $(n-1)$-мерной проективной плоскости, натянутой на базисные векторы $e_2, e_3, \dots, e_n$. □

Следствие 2.13
Гладкие непустые вещественные проективные квадрики по модулю проективной эквивалентности исчерпываются квадриками $Q_{n,m}$ с $m \geqslant 1$, которые попарно не эквивалентны друг другу. □

Пример 2.6 (планарность гладкой квадрики над замкнутым полем)
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ предл. 2.9 позволяет полностью описать по индукции многообразие подпространств максимальной размерности, заметающих неособую квадрику $Q_n \subset \mathbb{P}_{n+1}$.

А именно, гладкая квадрика в $Q_{-1} \subset \mathbb{P}_0$ пуста, нульмерная гладкая квадрика $Q_0 \subset \mathbb{P}_1$ состоит из двух точек. Одномерная гладкая квадрика $Q_1 \subset \mathbb{P}_2$ не содержит прямых, ибо множество прямых $\ell \subset Q_1$, проходящих через задданную точку $p \in Q_1$ — это пустое множество точек на квадрике $Q_{-1} \subset \mathbb{P}_0$. Через каждую точку p гладкой двумерной квадрики $Q_2 \subset \mathbb{P}_3$ проходят две разные прямые, биективно отвечающие двум точкам гладкой квадрики $Q_0 \subset \mathbb{P}_1 \subset T_pQ_2 \smallsetminus \{p\}$. Через каждую точку p гладкой трёхмерной квадрики $Q_3 \subset \mathbb{P}_4$ проходит одномерное семейство прямых, запараметризованное точками гладкой коники $Q_1 \subset \mathbb{P}_2 \subset T_pQ_2 \smallsetminus \{p\}$ и образующее конус над Q_1 с вершиной p. Двумерных плоскостей на гладкой трёхмерной квадрике нет. Гладкая четырёхмерная квадрика $Q_4 \subset \mathbb{P}_5$ не содержит 3-мерных подпространств, но через любую точку $p \in Q_4$ проходят два пучка плоскостей, взаимно однозначно соответствующих двум семействам прямых на квадрике Сегре $Q_2 \simeq \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1 \subset T_pQ_4 \smallsetminus \{p\}$, и т. д. (см. зад. 5.8 на стр. 136).

2.6. Квадрика Плюккера и Gr(2,4). Зафиксируем 4-мерное векторное пространство V, и пусть $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$, а $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$. По определению, *грассманиан* $\mathrm{Gr}(2,4) = \mathrm{Gr}(2,V)$ есть множество всех 2-мерных векторных подпространств $U \subset V$, или — на геометрическом языке — множество всех прямых $\ell \subset \mathbb{P}_3$. Внешний квадрат[1] 2-мерного подпространства

[1]подробнее о внешней алгебре и грассмановых многочленах см. в n° 3.3.2 на стр. 65 ниже

$U \subset V$ представляет собой одномерное подпространство $\Lambda^2 U \subset \Lambda^2 V$, т. е. точку в $\mathbb{P}_5$. Возникающее таким образом отображение

$$\mathfrak{u} : \mathrm{Gr}(2,4) \xrightarrow{U \mapsto \Lambda^2 U} \mathbb{P}(\Lambda^2 V) \tag{2-13}$$

называется *отображением Плюккера*. Его образ состоит из грассмановых многочленов, которые *разложимы* в произведение двух линейных форм. Действительно, равенство $\omega = u_1 \wedge u_2$ в точности означает, что $\omega \in \Lambda^2 U$ для подпространства U, натянутого на пару векторов $u_1, u_2 \in U$. С другой стороны, в пространстве $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ имеется каноническая *квадрика Плюккера*

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \{\, \omega \in \Lambda^2 V \mid \omega \wedge \omega = 0 \,\}\,.$$

Если зафиксировать базис $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ в V и индуцированный мономиальный базис

$$e_{ij} = e_i \wedge e_j$$

в $\Lambda^2 V$, то условие $\omega \wedge \omega = 0$ на грассманову квадратичную форму $\omega = \sum\limits_{i<j} x_{ij} e_{ij}$ запишется в однородных координатах x_{ij} на $\mathbb{P}_5$ в виде (обязательно проверьте!)

$$x_{01}x_{23} - x_{02}x_{13} + x_{03}x_{12} = 0\,,$$

откуда видно, в частности, что плюккерова квадрика неособа.

Упражнение 2.19. Убедитесь, что на координатном языке отображение Плюккера (2-13) переводит подпространство, натянутое на пару векторов $u = \sum u_i e_i$, $w = \sum w_j e_j$ в грассманову квадратичную форму с коэффициентами $x_{ij} = u_i w_j - u_j w_i$, т. е. сопоставляет матрице $\begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ w_0 & w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$ шестёрку её миноров $x_{ij} = \det \begin{pmatrix} u_i & u_j \\ w_i & w_j \end{pmatrix}$.

На бескоординатном языке, P задаётся квадратичной формой $q(\omega) = \tilde{q}(\omega, \omega)$, поляризация которой $\tilde{q}(\omega_1, \omega_2)$ однозначно с точностью до скалярного множителя определятся соотношением: $\omega_1 \wedge \omega_2 = \tilde{q}(\omega_1, \omega_2) \cdot \Omega$, где Ω — произвольный ненулевой вектор одномерного пространства $\Lambda^4 V \simeq \Bbbk$, например, $\Omega = e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$. Поскольку грассмановы многочлены чётной степени коммутируют: $\omega_1 \wedge \omega_2 = \omega_2 \wedge \omega_1$, форма $\tilde{q}$ симметрична.

Лемма 2.4
Форма $\omega \in \Lambda^2 V$ разложима тогда и только тогда, когда $\omega \wedge \omega = 0$.

Доказательство. Если $\omega = u_1 \wedge u_2$, то $\omega \wedge \omega = u_1 \wedge u_2 \wedge u_1 \wedge u_2 = 0$. Чтобы получить обратное, выберем в V *базис Дарбу* $\{\xi_i\}$, в котором ω имеет либо вид $\omega = \xi_0 \wedge \xi_1 + \xi_2 \wedge \xi_3$, либо вид $\omega = \xi_0 \wedge \xi_1$. В первом случае ω неразложима, поскольку $\omega \wedge \omega = 2\,\xi_0 \wedge \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3 \neq 0$. Во втором — разложима и имеет нулевой квадрат. □

Лемма 2.5
Две прямые $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_3$ пересекаются тогда и только тогда, когда их образы при отображении Плюккера (2-13) ортогональны относительно плюккеровой квадрики, т. е.

$$\tilde{q}(\mathfrak{u}(\ell_1), \mathfrak{u}(\ell_2)) = \mathfrak{u}(\ell_1) \wedge \mathfrak{u}(\ell_2) = 0\,.$$

Доказательство. Пусть $\ell_1 = \mathbb{P}(U_1)$, $\ell_2 = \mathbb{P}(U_2)$. Если $U_1 \cap U_2 = 0$, то $V = U_1 \oplus U_2$ и существует базис $\{e_i\} \subset V$ такой, что U_1 натянуто на e_0, e_1 и U_2 натянуто на e_2, e_3. Таким образом, $\mathfrak{u}(U_1) = e_0 \wedge e_1$, $\mathfrak{u}(U_2) = e_2 \wedge e_3$ и $\mathfrak{u}(U_1) \wedge \mathfrak{u}(U_2) = e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \neq 0$. Если $U_1 \cap U_2 \neq 0$, то, взяв $u_0 \subset U_1 \cap U_2$, мы можем написать: $\mathfrak{u}(U_1) = u_0 \wedge u_1$, $\mathfrak{u}(U_2) = u_0 \wedge u_2$ для некоторых u_1, u_2. Следовательно, $\mathfrak{u}(U_1) \wedge \mathfrak{u}(U_2) = u_0 \wedge u_1 \wedge u_0 \wedge u_2 = 0$. □

Следствие 2.14
Плюккерово отображение (2-13) инъективно и определяет биекцию между грассманианом Gr(2, 4) и квадрикой Плюккера $P \subset \mathbb{P}_5$.

Доказательство. Для любых двух различных прямых $\ell_1 \neq \ell_2$ на $\mathbb{P}_3$ найдётся третья прямая ℓ, которая пересекает ℓ_1 и не пересекает ℓ_2. Тогда $\mathfrak{u}(\ell_1) \wedge \mathfrak{u}(\ell) = 0$ и $\mathfrak{u}(\ell_2) \wedge \mathfrak{u}(\ell) \neq 0$, т. е. $\mathfrak{u}(\ell_1) \neq \mathfrak{u}(\ell_2)$ и отображение (2-13) инъективно. То, что его образ равен P, следует из лем. 2.4. □

Упражнение 2.20. Существует ли комплексная 2×4-матрица, шесть 2×2-миноров которой образуют множество: а) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ б) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (если да, предъявите такую матрицу явно).

Следствие 2.15
Для любой точки $p = \mathfrak{u}(\ell) \in P$ квадрика $P \cap T_pP$, высекаемая на квадрике Плюккера касательным пространством в точке p, состоит из плюккеровых образов $\mathfrak{u}(\ell')$ всех прямых $\ell' \subset \mathbb{P}_3$, пересекающих ℓ.

Доказательство. Подпространство $T_pP \subset \mathbb{P}_5$ есть множество нулей линейной формы $\tilde{q}(\mathfrak{u}(\ell), *)$, и, согласно лемме лем. 2.5, $\tilde{q}(\mathfrak{u}(\ell), \mathfrak{u}(\ell')) = 0 \iff \ell \cap \ell' \neq \varnothing$. □

2.6.1. Связки и пучки прямых в $\mathbb{P}_3$. Множество прямых на $\mathbb{P}_3$ называется *связкой*, если оно представляется плоскостью $\pi \subset P \subset \mathbb{P}_5$. Если $\pi \subset P$ натянуто на 3 неколлинеарные точки $p_i = \mathfrak{u}(\ell_i)$, $i = 1, 2, 3$, т. е. $\pi = P \cap T_{p_1}P \cap T_{p_2}P \cap T_{p_3}P$, то по лемме лем. 2.5 и следствию сл. 2.15 соответствующая связка прямых состоит из всех прямых, которые пересекают 3 данные попарно пересекающиеся прямые ℓ_i. Три прямых в $\mathbb{P}_3$ попарно пересекаются только тогда, когда они либо лежат в одной плоскости, либо проходят через одну точку. Таким образом, существуют два геометрически разных типа связок прямых на $\mathbb{P}_3$:

α-плоскость $\pi_\alpha(O) \subset P$ является образом *α-связки*, состоящей из всех прямых, проходящих через данную точку $O \in \mathbb{P}_3$, и линейно порождается плюккеровыми образами любых трёх некомпланарных прямых, проходящих через O;

β-плоскость $\pi_\beta(\Pi) \subset P$ является образом *β-связки*, состоящей из всех прямых, лежащих в данной плоскости $\Pi \in \mathbb{P}_3$, и линейно порождается плюккеровыми образами любых трёх лежащих в Π прямых, не проходящих там через одну точку.

При этом любые две плоскости одного и того же типа обязательно пересекаются ровно по одной точке: $\pi_\beta(\Pi_1) \cap \pi_\beta(\Pi_2) = \mathfrak{u}(\Pi_1 \cap \Pi_2)$, $\pi_\alpha(O_1) \cap \pi_\alpha(O_2) = \mathfrak{u}((O_1O_2))$, а две плоскости $\pi_\beta(\Pi)$ и $\pi_\alpha(O)$ различных типов либо не пересекаются (когда $O \notin \Pi$), либо пересекаются по прямой, изображающей на квадрике Плюккера пучок прямых $\ell \subset \Pi$, проходящих $O \in \Pi$ (когда $O \in \Pi$).

Упражнение 2.21. Покажите, что всякая прямая, лежащая на плюккеровой квадрике, является пересечением α- и β-плоскости (т. е. все пучки прямых в $\mathbb{P}_3$ исчерпываются пучками прямых, лежащих в некоторой плоскости и проходящих там через одну точку).

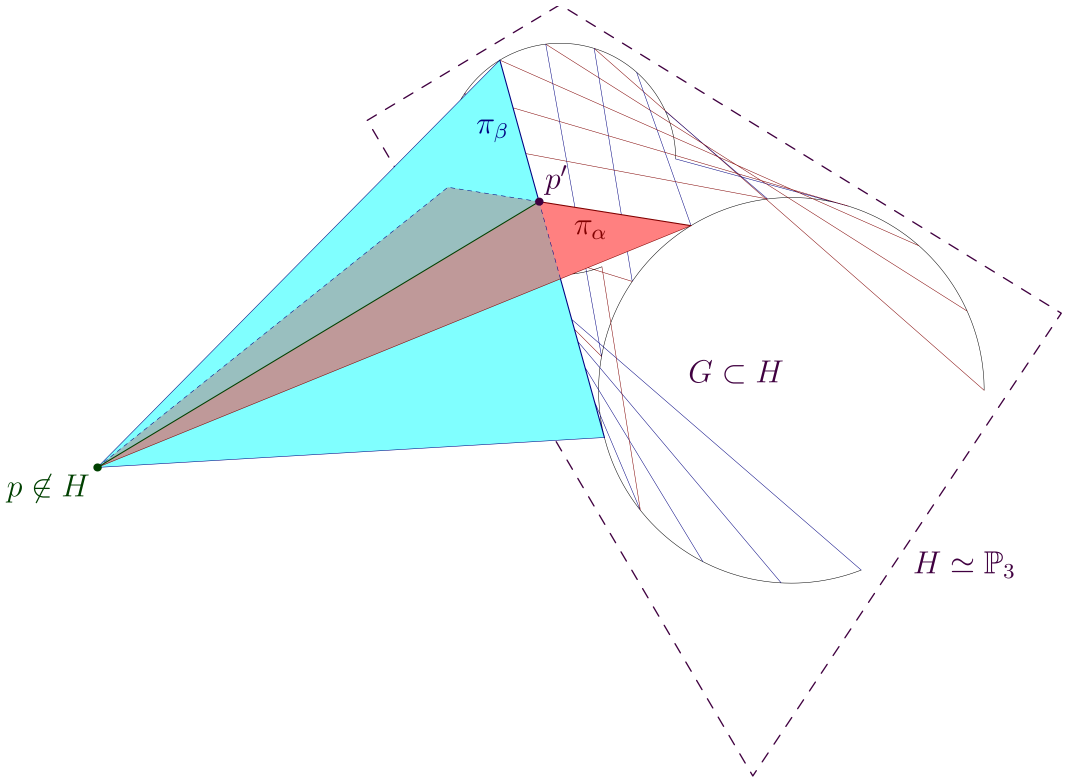


Рис. 2◇11. Конус $C = P \cap T_pP$.

2.6.2. Клеточное разбиение $\mathrm{Gr}(2, 4)$. Фиксируем некоторую 3-мерную гиперплоскость $H \subset T_pP$, дополнительную к точке $p \in P$ в 4-мерном касательном пространстве T_pP к квадрике Плюккера $P \subset \mathbb{P}_5$. Особая квадрика $C = P \cap T_pP$ представляет собой простой конус с вершиной p над неособой квадрикой $G = H \cap P$, изоморфной квадрике Сегре в $\mathbb{P}_3$ (см. рис. 2◇11). Рассмотрим следующую стратификацию плюккеровой квадрики замкнутыми подмножествами:

$$\begin{tikzcd} & & \pi_\alpha \arrow[dr, hook] & & \\ p \arrow[r, hook] & \pi_\alpha \cap \pi_\beta \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & C \arrow[r, hook] & P \\ & & \pi_\beta \arrow[ur, hook] & & \end{tikzcd}$$

Она индуцирует разбиение P в дизъюнктное объединение открытых клеток[1], изоморфных аффинным пространствам:

$$\mathrm{Gr}(2,4) \;=\; \mathbb{A}^0 \sqcup \mathbb{A}^1 \sqcup \begin{pmatrix} \mathbb{A}^2 \\ \sqcup \\ \mathbb{A}^2 \end{pmatrix} \sqcup \mathbb{A}^3 \sqcup \mathbb{A}^4$$

В самом деле, сначала мы имеем проективную прямую без точки: $(\pi_\alpha \cap \pi_\beta) \smallsetminus p \simeq \mathbb{A}^1$, затем пару проективных плоскостей без прямой: $\pi_\alpha \smallsetminus (\pi_\alpha \cap \pi_\beta) \simeq \pi_\beta \smallsetminus (\pi_\alpha \cap \pi_\beta) \simeq \mathbb{A}^2$, далее $C \smallsetminus (\pi_\alpha \cup \pi_\beta) \simeq \mathbb{A}^1 \times \Big(G \smallsetminus \big(G \cap T_{p'}G\big)\Big)$ (поскольку C является конусом над G), и, наконец, $G \smallsetminus (G \cap T_{p'}G) \simeq \mathbb{A}^2$ и $Q \smallsetminus C \simeq \mathbb{A}^4$ в силу следующей леммы:

Лемма 2.6
Проекция неособой квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$ из любой точки $p \in Q$ на произвольную гиперплоскость $H \not\ni p$ устанавливает биекцию[2] дополнения $Q \smallsetminus (Q \cap T_pQ)$ с аффинным пространством $\mathbb{A}^{n-1} = H \smallsetminus (H \cap T_pQ)$.

Доказательство. Каждая прямая, которая проходит через p и не касается Q, пересекает квадрику ещё ровно в одной отличной от p точке, координаты которой, по теореме Виета, рационально зависят от прямой. □

Упражнение 2.22. Если вы знакомы с клеточными гомологиями, покажите, что над $\mathbb{C}$ все группы нечетномерных гомологий $\mathrm{Gr}(2,4)$ равны нулю, а группы четномерных гомологий суть $H_0 = H_2 = H_6 = H_8 = \mathbb{Z}$ и $H_4 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Попытайтесь вычислить и гомологии действительного грассманиана (это сложнее, поскольку в вещественном случае граничные отображения будут нетривиальны).

Задачи для самостоятельного решения к §2

Задача 2.1. Напишите явное уравнение[3], задающее пучок коник, проходящих через точки $a = (1:0:0)$, $b = (0:1:0)$, $c = (0:0:1)$, $d = (1:1:1)$. Сколько в нём

---

[1] каждая аффинная клетка является плотным открытым подмножеством в соответствующем страте предыдущей диаграммы, дополнительное к объединению всех содержащихся в нём стратов меньшей размерности

[2] на самом деле алгебраический изоморфизм, т. е. обратимое преобразование, задаваемое в координатах (как само, так и обратное) рациональными алгебраическими функциями; в частности, над $\Bbbk = \mathbb{C}$ это будет аналитический диффеоморфизм

[3] т. е. квадратичную форму, коэффициенты которой линейно зависят от двух параметров

вырожденных коник?

Задача 2.2. Могут ли все коники в некотором пучке коник быть вырожденными?

Задача 2.3. Пусть в пучке коник присутствует гладкая коника. Может ли в нём быть ровно а) 0 б) 1 в) 2 г) 3 д) 4 вырожденных коники?

Задача 2.4. Могут ли две гладкие коники пересекаться ровно по а) 1 б) 2 в) 3 точкам? Если да, приведите соответствующие примеры.

Задача 2.5. Сколько общих касательных может быть у двух гладких коник?

Задача 2.6 (теорема Ламе). Покажите, что поляры данной точки $a \in \mathbb{P}_2$ относительно всех коник из произвольного пучка коник на $\mathbb{P}_2$ пересекаются в одной точке.

Задача 2.7. Назовём двойным отношением $[a, b, c, d]$ четырёх точек гладкой коники C двойное отношение четырёх прямых $[(pa), (pb), (pc), (pd)]$ в пучке прямых с центром в некоторой пятой точке $p \in C$. Покажите, что оно не зависит от выбора p и что две хорды C тогда и только сопряжены относительно C когда их концы гармоничны на C.

Задача 2.8. Покажите, что ассоциированный с четырёхвершинником $abcd$ треугольник[1] xyz автополярен[2] относительно любой гладкой коники C, проходящей через все 4 вершины a, b, c, d .

Задача 2.9. Покажите, что два треугольника тогда и только тогда перспективны[3], когда они полярны друг другу относительно некоторой коники.

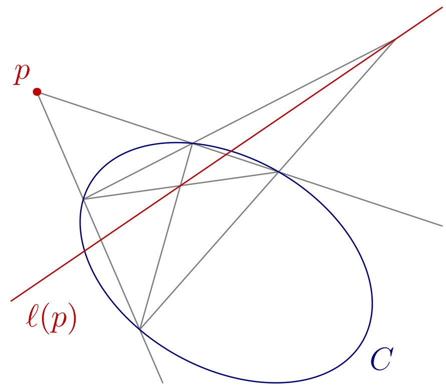


Рис. 2⋄12. Построение поляры.

Задача 2.10. Каково уравнение гладкой коники C в базисе (e_0, e_1, e_2) , если треугольник $e_0e_1e_2$ а) вписан в C б) описан вокруг C в) автополярен относительно C?

Задача 2.11 (построение Штейнера). Обоснуйте показанное на рис. 2⋄12 построение[4] одной линейкой поляры $\ell(p)$ данной точки p относительно данной коники C.

Задача 2.12. Одной линейкой постройте касательную к данной конике C в данной точке $p \in C$.

Задача 2.13. Покажите, что две разных инволюции коммутируют, если и только если пары их неподвижных точек гармоничны, а три разных инволюции тогда и только тогда составляют (вместе с Id_C) группу Клейна $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$, когда прямые, соединяющие пары их неподвижных точек, образуют автополярный треугольник.

Задача 2.14. Используя только линейку, постройте треугольник, вписанный в данную гладкую конику C так, что прямые, содержащие его стороны, проходят через 3 задан-

[1]см. рис. 1⋄10 на стр. 20

[2]симплекс называется *автополярным* относительно гладкой квадрики, если поляра каждой из его вершин содержит все остальные вершины

[3]см. зад. 1.11 на стр. 22

[4]принадлежащее Якобу Штейнеру (1796-1863), см. *Я. Штейнер. Геометрические построения, выполняемые с помощью прямой линии и неподвижного круга.* «Харьковская математическая библиотека», Харьков, 1910 (или любое другое издание)

ные точки. Сколько решений может иметь эта задача?

Задача 2.15. Сформулируйте и решите задачу, проективно двойственную к зад. 2.14.

Задача 2.16 (гомографии между пучками прямых). Для точки $p \in \mathbb{P}_2$ и прямой $\ell \subset \mathbb{P}_2$ условимся обозначать через $p^\times = \operatorname{Ann} p \subset \mathbb{P}_2^\times$ прямую, точки которой задают всевозможные прямые на $\mathbb{P}_2$, проходящие через p, а через $\ell^\times = \operatorname{Ann} \ell \in \mathbb{P}_2$ — уравнение прямой ℓ. Рассмотрим на $\mathbb{P}_2$ два пучка прямых $p_1^\times$ и $p_2^\times$, проходящих через различные точки $p_1, p_2 \in \mathbb{P}_2$. Покажите, что для любой гомографии $\varphi : p_1^\times \xrightarrow{\sim} p_2^\times$ существует единственная коника C, проходящая через p_1 и p_2, такая что $p_1^\times \quad \varphi(\ell') = \ell'' \iff \ell' \cap \ell'' \in C$.

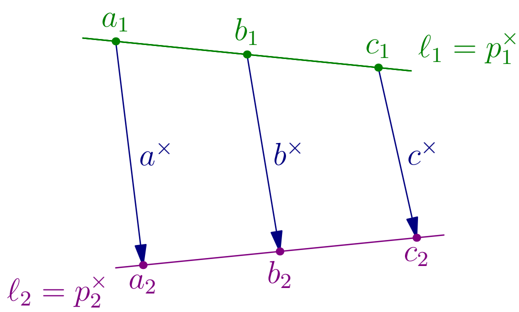


Рис. 2⋄13. Гомография прямых на $\mathbb{P}_2^\times$.

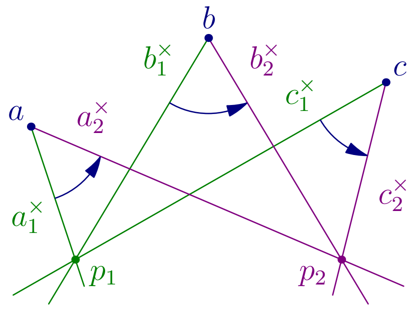


Рис. 2⋄14. Гомография пучков $p_1^\times \xrightarrow{\sim} p_2^\times$.

Для этого рассмотрите любые три прямые $a_1^\times = (p_1, a)$, $b_1^\times = (p_1, b)$ и $c_1^\times = (p_1, c)$ из пучка $p_1^\times$, отвечающие некоторым трём точкам a_1, b_1, c_1 на прямой $p_1^x \subset \mathbb{P}_2^\times$, и их образы $a_2^\times = (p_2, a)$, $b_2^\times = (p_2, b)$ и $c_2^\times = (p_2, c)$ из пучка $p_2^\times$ (см. рис. 2⋄13 и рис. 2⋄14), обозначьте через

$$a = a_1^\times \cap a_2^\times\,,\ b = b_1^\times \cap b_2^\times\,,\ c = c_1^\times \cap c_2^\times$$

точки пересечений соответственных прямых и убедитесь, что никакие четыре из пяти точек p_1, p_2, a, b, c не коллинеарны и что через них проходит единственная коника C. Затем разберите два случая:

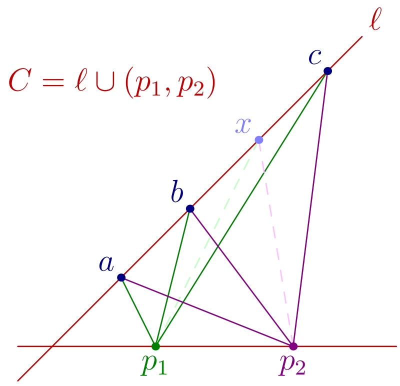


Рис. 2⋄15. Перспектива пучков прямых.

а) если точки a, b, c коллинеарны, как на рис. 2⋄15, или одна из точек a, b, c лежит на прямой (p_1, p_2), то коника C распадается в объединение прямой (p_1, p_2) и ещё одной прямой ℓ, которая представляет собою[1] ГМТ пересечения $\ell' \cap \varphi(\ell')$, где ℓ' пробегает пучок $p_1^\times$

б) если никакие 3 из 5 точек p_1, p_2, a, b, c не коллинеарны[2], как на рис. 2⋄16, то ГМТ пересечения $\ell' \cap \varphi(\ell')$, где ℓ' пробегает пучок $p_1^\times$, — это гладкая коника C .

---

[1]в терминах двойственной плоскости $\mathbb{P}_2^x$ соответствующая гомография $\varphi : \ell_1 \to \ell_2$ является перспективой с центром в точке $\ell^\times \in \mathbb{P}_2^\times$

[2]в терминах двойственной плоскости $\mathbb{P}_2^x$ соответствующая гомография $\varphi : \ell_1 \to \ell_2$ высекается касательными к двойственной конике $C^\times$

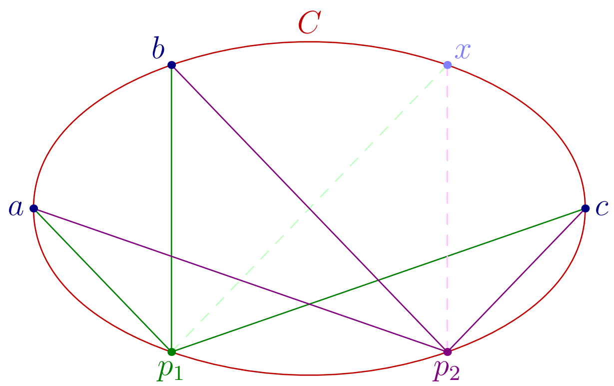


Рис. 2◇16. Неперспективная гомография пучков прямых.

Задача 2.17. В условиях предыдущей задачи покажите, что для любой гомографии

$$\varphi : p_1^\times \xrightarrow{\sim} p_2^\times$$

существует точка, в которой пересекаются все прямые, соединяющие пары точек пересечений $\ell' \cap \varphi(\ell'')$ и $\ell'' \cap \varphi(\ell')$, где $\ell', \ell'' \in p_1^\times$.

Задача 2.18. Для данных четырёх точек p_1, p_2, p_3, $p_4 \in \mathbb{P}_2$, никакие три из которых не коллинеарны, и числа $\vartheta \in \Bbbk$ опишите ГМТ $q \in \mathbb{P}_2$, таких что в пучке $q^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$ всех проходящих через q прямых на $\mathbb{P}_2$ двойное отношение $\left[(qp_1), (qp_2), (qp_3), (qp_4)\right] = \vartheta$.

Задача 2.19* (2-2 соответствия на конике). Будем называть 2-2 *соответствием*[1] на гладкой конике C всякую кривую $\Gamma \subset C \times C$, задаваемую во внутренних однородных координатах на C уравнением $f(x,y) = 0$, где $f \in \Bbbk[x_0, x_1, y_0, y_1]$ однороден степени 2 как по $x = (x_0 : x_1)$, так и по $y = (y_0 : y_1)$, и симметричен: $f(x,y) = f(y,x)$. Пары точек $(p,q) \in \Gamma$ называются *соответственными* (или *образом* и *прообразом* друг друга), что записывается как $q \in \Gamma(p)$, $p \in \Gamma^{-1}(q)$. Соответствие называется *невырожденным*, если у каждой точки, лежащей вне некоторого конечного множества, имеется ровно по два различных образа и прообраза. Покажите, что любое симметричное алгебраическое 2-2 соответствие на C а) либо вырождено, либо имеет не более 4 неподвижных[2] точек
б) является сопряжением относительно некоторой коники[3] C'
в) высекается касательными к некоторой конике[4] C''

Задача 2.20*. Опишите все вырожденные 2-2 соответствия.

Задача 2.21* (поризм Понселе). Фиксируем натуральное $n \geqslant 3$ и две различных гладких коники C_1 и C_2 на $\mathbb{P}_2$. Покажите, что если существует n-угольник, одновременно вписанный в C_1 и описанный около C_2, то такой n-угольник можно нарисовать с вершиной в любой точке $p \in C_1$, за исключением, разве что, конечного множества точек, дающих «вырожденные[5]» n-угольники.

Задача 2.22. Покажите, что следующие три свойства оператора $F : \Bbbk^2 \to \Bbbk^2$ эквивалентны друг другу: а) $F \in T_{\xi \otimes v} Q_s$ б) $F(\mathrm{Ann}\,(\xi)) \subset \Bbbk \cdot v$ в) $F = \xi \otimes w + \eta \otimes v$ для

[1]точнее, *симметричным алгебраическим* 2-2 *соответствием*
[2]т. е. входящих в множество своих (про) образов
[3]т. е. $p, q \in C$ соответственны если и только если они сопряжены относительно C'
[4]т. е. $p, q \in C$ соответственны если и только если прямая (p, q) касается C''
[5]с меньшим числом сторон и/или с повторяющимися сторонами

некоторых $\eta \in \mathbb{P}_1^{\times}$, $w \in \mathbb{P}_1$ и что действие ассоциированного с невырожденным оператором $F \in \mathrm{GL}(\Bbbk^2)$ дробно линейного изоморфизма $\overline{F} : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ на произвольную точку $p = \mathrm{Ann}\,(\xi) \in \mathbb{P}_1$ допускает следующее геометрическое описание: проведём в $\mathbb{P}_3$ плоскость π через точку F и отвечающую ξ прямолинейную образующую $L' = \xi \times \mathbb{P}_1$ на квадрике Сегре $Q_s \subset \mathbb{P}_3$; тогда π пересечёт Q_s по распавшейся конике, состоящей из образующей L' и ещё одной образующей L'', лежащей в другом семействе, и имеющей вид $L'' = \mathbb{P}_1 \times v$, где $v = \overline{F}(p)$.

Задача 2.23. Сколько прямых пересекают 4 данные попарно скрещивающиеся прямые в пространствах а) $\mathbb{P}(\mathbb{C}^4)$ б) $\mathbb{A}(\mathbb{C}^4)$ в) $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ г) $\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$? Найдите все возможные ответы и выясните, какие из них устойчивы к малым шевелениям четырёх данных прямых[1].

Задача 2.24. Из скольких точек состоят над полем $\mathbb{F}_9$ из девяти элементов[2]
а) коника $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ на $\mathbb{P}_2$ б) квадрика $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ в $\mathbb{P}_3$.

Задача 2.25. Рассмотрим в $\mathbb{P}_3$ пару прямых ℓ_1 и ℓ_2 и три точки a, b, c, никакие две из которых не лежат в одной плоскости ни с одной из прямых ℓ_1, ℓ_2. Зададим гомографию

$$\varphi : \ell_1^{\times} \simeq \ell_2^{\times} ,$$

между пучком плоскостей, проходящих через прямую ℓ_1, и пучком плоскостей, проходящих через прямую ℓ_2, отправив три проходящие через точки a, b и c плоскости первого пучка соответственно в три проходящие через точки a, b и c плоскости второго пучка. Верно ли, что фигура, заметаемая в $\mathbb{P}_3$ прямыми пересечений $\pi \cap \varphi(\pi)$, где π пробегает пучок $\ell_1^{\times}$, представляет собою квадрику? Рассмотрите два случая: а) $\ell_1 \cap \ell_2 = \varnothing$ б) $\ell_1 \cap \ell_2 \neq \varnothing$.

Задача 2.26. Пусть $A \in \mathrm{Hom}(U, V) \simeq U^* \otimes V$, $B \in \mathrm{Hom}(V, W) \simeq V^* \otimes W$ — два линейных отображения, разложенные как $A = \sum \alpha_\nu \otimes a_\nu$, $B = \sum \beta_\mu \otimes b_\mu$ с $\alpha_\nu \in U^*$, $a_\nu \in V$, $\beta_\mu \in V^*$, $b_\mu \in W$. Разложите аналогично их произведение $B \circ A \in \mathrm{Hom}(U, W) \simeq U^* \otimes W$.

Задача 2.27. Имеют ли место разложения а) $V^{\otimes 2} \simeq S^2 V \oplus \Lambda^2 V$ б) $V^{\otimes 3} \simeq S^3 V \oplus \Lambda^3 V$ для любого векторного пространства V над полем характеристики нуль? Если да, докажите, если нет, предъявите тензор, который так не раскладывается.

Задача 2.28 (спинорное разложение). Пусть $V = \mathrm{Hom}(U_-, U_+)$, где $\dim U_\pm = 2$. Покажите, что $V = U_-^* \otimes U_+$, разложение $V^{\otimes 2}$ на симметрическую и кососимметрическую сотавляющие иммеет вид

$$\underbrace{\big((S^2 U_-^* \otimes S^2 U_+) \oplus (\Lambda^2 U_-^* \otimes \Lambda^2 U_+) \big)}_{S^2 V} \bigoplus \underbrace{\big((S^2 U_-^* \otimes \Lambda^2 U_+) \oplus (\Lambda^2 U_-^* \otimes S^2 U_+) \big)}_{\Lambda^2 V} .$$

Задача 2.29. Пусть $G \subset \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ — невырожденная квадрика, заданная квадратичной формой g, поляризация которой есть $\widetilde{g}$. Покажите, что билинейная форма $\Lambda^2 \widetilde{g}$ на $\Lambda^2 V$,

[1] указание: примените «метод геометрических мест» — рассмотрите все прямые, пересекающие некоторые три из заданных четырёх, и выясните, какие из них пересекают оставшуюся четвёртую прямую.

[2] напомним, что поле $\mathbb{F}_9 = \mathbb{Z}[x]/(3,\ x^2 + 1)$ состоит из чисел вида $a + b\sqrt{-1}$, где $a, b \in \mathbb{Z}/(3)$ суть вычеты по модулю 3, и $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1 \in \mathbb{Z}/(3)$

которая действует на разложимых бивекторах как

$$\Lambda^2\widetilde{g}(\,v_1\wedge v_2\,,\,w_1\wedge w_2\,)\overset{\text{def}}{=}\det\begin{pmatrix}\widetilde{g}(v_1,w_1) & \widetilde{g}(v_1,w_2)\\ \widetilde{g}(v_2,w_1) & \widetilde{g}(v_2,w_2)\end{pmatrix}\,,$$

является симметричной и невырожденной, и запишите ее явную матрицу Грама в подходящем базисе (допустим, приходящем из ортонормированного базиса для g in V). Покажите, что пересечение соответствующей квадрики $\Lambda^2G\subset\mathbb{P}_5=\mathbb{P}(\Lambda^2V)$ с квадрикой Плюккера состоит из всех касательных к $G\subset\mathbb{P}_3$.

Задача 2.30. Пусть в обозначениях предыдущей задачи $\mathrm{Gr}(2,V)$ — грассманово многообразие прямых в $\mathbb{P}_3=\mathbb{P}(V)$. Покажите, что вложение Плюккера $\mathrm{Gr}(2,V)\hookrightarrow\mathbb{P}(\Lambda^2V)$ переводит два семейства прямых, живущих на квадрике Сегре $G\subset\mathbb{P}(V)=\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(U_-,U_+))$ в пару невырожденных плоских коник, которые вырезаются из квадрики Плюккера $P\subset\mathbb{P}(\Lambda^2V)$ двумя дополнительными плоскостями

$$\Lambda_-=\mathbb{P}\left(S^2U_-^*\otimes\Lambda^2U_+\right)\quad\text{и}\quad\Lambda_+=\mathbb{P}\left(\Lambda^2U_-^*\otimes S^2U_+\right)\,,$$

лежащими в $\mathbb{P}(\Lambda^2\mathrm{Hom}(U_-,U_+))$ по зад. 2.28. Более того, обе коники вложены в эти плоскости по Веронезе, т. е. мы имеем следующую коммутативную диаграмму[1]:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}(U_+) \arrow[rr, hook, "\text{Веронезе}"'] & & \mathbb{P}(S^2U_+)\simeq\Lambda_+ \arrow[d, hook] \\
\mathbb{P}_1^+\times\mathbb{P}_1^- \arrow[u, "\pi_+"] \arrow[d, "\pi_-"'] \arrow[r, "\text{Сегре}", "\sim"'] & G\subset\mathbb{P}\mathrm{Hom}(U_-,U_+) \arrow[r, dashed, "\text{Плюккер}"] & P\subset\mathbb{P}\begin{pmatrix}\Lambda^2U_-^*\otimes S^2U_+\\ \oplus\\ S^2U_-^*\otimes\Lambda^2U_+\end{pmatrix} \\
\mathbb{P}(U_-^*) \arrow[rr, hook, "\text{Веронезе}"] & & \mathbb{P}(S^2U_-^*)\simeq\Lambda_- \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Задача 2.31 (звёздочка Ходжа). В условиях предыдущих трёх задач, оператор Ходжа

$$*\,:\,\Lambda^2V\xrightarrow{\omega\mapsto\omega^*}\Lambda^2V\,,$$

ассоциированный с невырожденной квадратичной формой g на V, определяется соотношением

$$\omega_1\wedge\omega_2^*=\Lambda^2\widetilde{g}(\omega_1,\omega_2)\cdot e_1\wedge e_2\wedge e_3\wedge e_4$$

в котором $\omega_{1,2}\in\Lambda^2$ произвольны, а $e_i\in V$ составляют фиксированный ортонормальный базис формы g. Покажите что это определение корректно (не зависит от выбора базиса), найдите собственные значения и собственные подпространства оператора Ходжа и укажите место последних на предыдущей картинке.

[1]Плюккер пунктирный, ибо отображает прямые в точки

§3. Тензорные заморочки

3.1. Тензорные произведения и многообразия Сегре. С целью сделать изложение самодостаточным и фиксировать обозначения, мы по ходу дела напоминаем все необходимые определения и конструкции, относящиеся к тензорам. Читатель, так или иначе знакомый с этими понятиями может без ущерба для понимания проглядеть этот параграф «по диагонали».

3.1.1. Тензорные произведения. Рассмотрим векторные пространства $V_1, V_2, \dots, V_n$ и W размерностей $d_1, d_2, \dots, d_n$ и m над произвольным полем $\Bbbk$. Отображение

$$\varphi : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to W$$

называется *полилинейным*, если оно линейно по каждому своему аргументу, когда все остальные аргументы произвольным образом фиксированы:

$$\varphi(\, \dots \,, \lambda v' + \mu v'' \,, \, \dots \,) = \lambda \, \varphi(\, \dots \,, \, v' \,, \, \dots \,) \, + \, \mu \, \varphi(\, \dots \,, \, v'' \,, \, \dots \,) \, .$$

Полилинейные отображения можно складывать и умножать на числа, так что они образуют векторное пространство, которое мы обозначим через

$$\mathrm{Hom}(V_1, V_2, \dots, V_n; W) \, .$$

Если зафиксировать в каждом V_i некоторый базис $\{e^{(i)}_1, e^{(i)}_2, \dots, e^{(i)}_{d_i}\}$, а также какой-либо базис $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ в W, то полилинейное отображение $\varphi \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2, \dots, V_n; W)$ можно однозначно задать набором его значений на всех комбинациях базисных векторов:

$$\varphi\big(\, e^{(1)}_{\alpha_1} \,, \, e^{(2)}_{\alpha_2} \,, \, \dots \,, \, e^{(n)}_{\alpha_n} \, \big) = \sum_{\nu} a_{\nu}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} \cdot e^{\nu} \ \in \ W \, ,$$

т. е. набором из $m \cdot \prod d_\nu$ чисел $a_\nu^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} \in \Bbbk$, которые при желании можно воспринимать как элементы некоей «матрицы» $(n+1)$-мерного формата[1] $m \times d_1 \times d_2 \times \cdots \times d_n$.

Отображение φ с заданной матрицей переводит набор векторов $(v_1, v_2, \dots, v_n)$, в котором $v_i = \sum\limits_{\alpha_i = 1}^{d_i} x^{(i)}_{\alpha_i} \, e^{(i)}_{\alpha_i} \in V_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, в вектор

$$\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n) \ = \ \sum_{\nu=1}^{m} \Big(\sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} a_{\nu}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} \cdot x^{(1)}_{\alpha_1} \cdot x^{(2)}_{\alpha_2} \cdot \ \cdots \ \cdot x^{(n)}_{\alpha_n} \Big) \cdot e^{\nu} \ \in \ W \, ,$$

и сложению и умножению на числа отображений отвечают покомпонентные сложение и умножение на числа их матриц. Таким образом,

$$\dim \mathrm{Hom}(V_1, V_2, \dots, V_n; W) = \dim W \cdot \prod_{\nu} \dim V_\nu \, .$$

Упражнение 3.1. Проверьте, что:

а) набор векторов $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$ тогда и только тогда не содержит

[1] если Вы в состоянии таковую себе представить — обычные матрицы, дающие *линейные* отображения $V \to W$, имеют 2-мерный формат $d \times m$

нулевого вектора, когда существует полилинейное отображение φ (куда-нибудь), такое что $\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n) \neq 0$
б) композиция полилинейного отображения $\varphi : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \to U$ с любым линейным оператором $F : U \to W$ является полилинейным отображением.

Рассмотрим какое-нибудь полилинейное отображение

$$\tau : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \to U\,. \tag{3-1}$$

Взятие композиции этого отображения со всевозможными линейными операторами

$$F : U \to W$$

в произвольно зафиксированное пространство W задаёт *линейное* отображение из пространства $\mathrm{Hom}(U, W)$ линейных операторов $U \xrightarrow{F} W$ в пространство полилинейных отображений $\varphi : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \to W$:

$$\mathrm{Hom}(U, W) \xrightarrow{F \mapsto F \circ \tau} \mathrm{Hom}(V_1, V_2, \dots, V_n; W)\,. \tag{3-2}$$

Определение 3.1
Полилинейное отображение (3-1) называется *универсальным*, если *для всех* пространств W линейный оператор (3-2) является изоморфизмом.

Иначе говоря, полилинейное отображение τ универсально, если для любого пространства W и любого полилинейного отображения $\varphi : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \to W$ существует единственный линейный оператор $F : U \to W$ такой, что $\varphi = F \circ \tau$, т. е. пара *полилинейных* сплошных стрелок в диаграмме

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dd, dashed, "F"] \\ V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \arrow[ur, "\tau"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \\ & W \end{tikzcd}$$

всегда замыкается в коммутативный треугольник *единственным* пунктирным *линейным* отображением.

Лемма 3.1
Любые два универсальных полилинейных отображения

$$\tau_1 : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \to U_1 \quad \text{и} \quad \tau_2 : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \to U_2$$

канонически отождествляются при помощи единственного линейного изоморфизма

$$\iota : U_1 \to U_2\,,$$

такого что $\tau_2 = \iota\tau_1$.

Доказательство. Поскольку и U_1, и U_2 оба универсальны, существуют единственные линейные операторы $F_{21} : U_1 \to U_2$ и $F_{12} : U_2 \to U_1$, которые встраиваются в коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[rr, equal, "\mathrm{Id}_{U_1}"] & & U_1 \\
& V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \arrow[ul, "\tau_1"'] \arrow[ur, "\tau_1"] \arrow[dl, "\tau_2"] \arrow[dr, "\tau_2"'] & \\
U_2 \arrow[uu, dashed, "F_{12}"] \arrow[rr, equal, "\mathrm{Id}_{U_2}"'] & & U_2 \arrow[uu, dashed, "F_{21}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[dd, equal, "\mathrm{Id}_{U_1}"'] \arrow[dr, dashed, "F_{21}"] & & & & U_2 \arrow[dd, equal, "\mathrm{Id}_{U_2}"] \arrow[dl, dashed, "F_{12}"'] \\
& U_2 \arrow[dl, dashed, "F_{12}"'] & V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \arrow[l, "\tau_2"'] \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[ull, "\tau_1"'] \arrow[dll, "\tau_1"] \arrow[urr, "\tau_2"] \arrow[drr, "\tau_2"'] & U_1 \arrow[dr, dashed, "F_{21}"] & \\
U_1 & & & & U_2
\end{tikzcd}$$

Обе композиции $F_{21}F_{12} = \mathrm{Id}_{U_2}$, $F_{12}F_{21} = \mathrm{Id}_{U_1}$, поскольку канонические представления $\tau_1 = \varphi \circ \tau_1$, $\tau_2 = \psi \circ \tau_2$ самих универсальных полилинейных отображений, в силу единственности таковых представлений, возможны только с $\varphi = \mathrm{Id}_{U_1}$, $\psi = \mathrm{Id}_{U_2}$. □

Лемма 3.2
Пусть векторы $e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \dots, e_{d_i}^{(i)}$ образуют базис пространства V_i (где $1 \leqslant i \leqslant n$). Обозначим через $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ векторное пространство размерности $\prod d_i$ с базисом

$$e_{\alpha_1}^{(1)} \otimes e_{\alpha_2}^{(2)} \otimes \ldots \otimes e_{\alpha_n}^{(n)}, \quad 1 \leqslant \alpha_i \leqslant d_i \tag{3-3}$$

(всевозможные формальные тензорные произведения базисных векторов $e_\nu^{(\mu)}$). Тогда полилинейное отображение $\tau : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$, переводящее набор базисных векторов $(e_{\alpha_1}^{(1)}, e_{\alpha_2}^{(2)}, \ldots, e_{\alpha_n}^{(n)}) \in V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$ в их тензорное произведение (3-3), является универсальным.

Доказательство. Для любого полилинейного отображения $\varphi : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to W$ и линейного отображения $F : V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n \to W$ равенство $\varphi = F \circ \tau$ как раз и означает, что $F(e_{\alpha_1}^{(1)} \otimes e_{\alpha_2}^{(2)} \otimes \ldots \otimes e_{\alpha_n}^{(n)}) = \varphi(e_{\alpha_1}^{(1)}, e_{\alpha_2}^{(2)}, \ldots, e_{\alpha_n}^{(n)})$ на каждом наборе базисных векторов. □

Определение 3.2
Векторное пространство $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ называется *тензорным произведением* пространств $V_1, V_2, \dots, V_n$, а универсальное полилинейное отображение

$$\tau : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$$

тензорным умножением векторов. Образ $\tau(v_1, v_2, \dots, v_n)$ всякого набора векторов обозначается через $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n$. Такие произведения называются *разложимыми тензорами*.

3.1.2. Многообразия Сегре. Поскольку отображение τ *не* линейно, а только полилинейно, его образ — множество разложимых тензоров — *не является* векторным подпространством в $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$, а образует внутри $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ нелинейное подмногообразие, проективизация которого называется *многообразием Сегре*. Говоря точнее, многообразие Сегре определяется как образ *отображения Сегре* из прямого произведения проективных пространств $\mathbb{P}_{m_i} = \mathbb{P}(V_i)$ в пространство $\mathbb{P}_m = \mathbb{P}\left(V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n\right)$:

$$s : \mathbb{P}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{P}_{m_n} \to \mathbb{P}_m ,$$

которое переводит набор одномерных подпространств $\Bbbk \cdot v_i \subset V_i$, порождённых ненулевыми векторами $v_i \in V_i$, в одномерное подпространство

$$\Bbbk \cdot v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \subset V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n .$$

Упражнение 3.2. Проверьте, что это отображение корректно определено[1] и является вложением.

Поскольку по лем. 3.2 разложимые тензоры линейно порождают всё пространство $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$, многообразие Сегре не лежит ни в какой гиперплоскости. Однако его размерность существенно меньше размерности объемлющего пространства и «общий» (в любом разумном смысле) тензор не разложим. По построению, многообразие Сегре заметается n семействами проективных подпространств размерностей $m_1, m_2, \dots , m_n$, где $m_i = d_i - 1$. Квадрика Сегре из n° 2.4.1 является простейшим примером такого многообразия.

Пример 3.1 (изоморфизм $U^* \otimes V \simeq \mathrm{Hom}(U, V)$ и разложимые операторы)
Для любых двух векторных пространств U и W имеется билинейное отображение

$$U^* \times W \to \mathrm{Hom}(U, V) ,$$

сопоставляющее паре $(\xi, w) \in U^* \times W$ линейное отображение $U \to W$, действующее по правилу

$$U \ni u \longmapsto \xi(u)\, w \in W . \tag{3-4}$$

Это оператор ранга 1, образом которого является 1-мерное подпространство в W, натянутое на вектор w, а ядром — подпространство $\mathrm{Ann}\,(\xi) \subset U$ коразмерности 1.

Упражнение 3.3. Покажите, что всякий оператор $F : U \to W$ ранга 1 представляется в виде (3-4) с подходящими $\xi \in U^*$ и $w \in W$.

В силу универсальности тензорного произведения, существует единственное линейное отображение

$$U^* \otimes V \to \mathrm{Hom}(U, V) \tag{3-5}$$

переводящее каждый разложимый тензор $\xi \otimes w$ в оператор (3-4).

Упражнение 3.4. Покажите, что когда оба пространства U и V конечномерны, это отображение является изоморфизмом.

[1] т. е. тензор $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n$ отличен от нуля и заменяется на пропорциональный при замене векторов v_i на пропорциональные

На геометрическом языке операторы ранга 1, рассматриваемые с точностью до пропорциональности, составляют многообразие Сегре $S \subset \mathbb{P}_{mn-1} = \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(U,W))$. Оно линейно порождает всё пространство $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(U,W))$. Если использовать в качестве однородных координат на $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(V,W))$ матричные элементы (a_{ij}) операторов в каких-нибудь фиксированных базисах, то многообразие Сегре можно задать в этих координатах системой квадратичных уравнений — обращением в нуль всех миноров второго порядка:

$$\det\begin{pmatrix} a_{ij} & a_{ik} \\ a_{\ell j} & a_{\ell k}\end{pmatrix} = a_{ij}a_{\ell k} - a_{ik}a_{\ell j} = 0\,.$$

Отображение Сегре $\mathbb{P}_{n-1}\times\mathbb{P}_{m-1} = \mathbb{P}(U^*)\times\mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}_{mn-1} = \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(U,W))$, переводящее пару точек (ξ, w) в точку $\xi\otimes w$, устанавливает биекцию между произведением проективных пространств и многообразием Сегре. Оно переводит пару точек с однородными координатами $(x_1 : x_2 : \cdots : x_n)$ и $(y_1 : y_2 : \cdots : y_n)$ в точку, однородными координатами которой являются mn всевозможных произведений $x_j y_i$, т. е. матрица $y^t\cdot x$ ранга 1 (произведение столбца y на строку x). Два семейства «координатных плоскостей» $\xi\times\mathbb{P}_{m-1}$ и $\mathbb{P}_{n-1}\times w$ при этом перейдут в два семейства проективных пространств, заметающих многообразие Сегре. При $\dim U = \dim W = 2$ мы получаем в точности обсуждавшуюся в n° 2.4.1 биекцию между $\mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_1$ и детерминантной квадрикой Сегре в $\mathbb{P}_3$.

3.2. Тензорная алгебра и свёртки. Тензорное произведение

$$V^{\otimes n} = \underbrace{V\otimes V\otimes \cdots \otimes V}_{n}$$

называется n-той *тензорной степенью* пространства V. Мы по определению полагаем

$$V^{\otimes 0} = \Bbbk \quad \text{и} \quad V^{\otimes 1} = V\,.$$

Все тензорные степени объединяются в прямую сумму

$$TV \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{n\geqslant 0} V^{\otimes n}\,.$$

Тензорное умножение векторов задаёт на пространстве TV структуру ассоциативной некоммутативной градуированной алгебры. Если выбрать в пространстве V какой-нибудь базис $\{e_\nu\}$, то эта алгебра становится изоморфна алгебре многочленов от *некоммутирующих* переменных e_ν: по лем. 3.2 всевозможные (некоммутативные) мономы вида

$$e_{\nu_1}\otimes e_{\nu_2}\otimes\cdots\otimes e_{\nu_m} \tag{3-6}$$

составят базис пространства TV над $\Bbbk$, и перемножение мономов (3-6) состоит в приписывании их друг к другу через значок $\otimes$. Компонента $V^{\otimes n}\subset TV$ при такой интерпретации становится пространством всех однородных некоммутативных многочленов степени n.

Алгебра TV называется *тензорной алгеброй* пространства V, а также *свободной ассоциативной* $\Bbbk$*-алгеброй*, порожденной пространством V. Второе название обусловлено универсальным свойством вложения

$$\iota : V \hookrightarrow TV \tag{3-7}$$

в качестве подпространства $V^{\otimes 1}$. Это свойство аналогично универсальному свойству базиса свободного модуля: для любой ассоциативной $\Bbbk$-алгебры A и любого $\Bbbk$-линейного отображения векторных пространств $f : V \to A$ существует единственный гомоморфизм алгебр $\alpha : TV \to A$ такой, что $f = \alpha \circ \iota$. Иными словами, гомоморфизмы алгебр $TV \to A$ биективно соответствуют линейным отображениям $V \to A$.

Упражнение 3.5. Следуя доказательству лем. 3.1 убедитесь, что алгебра TV вместе с вложением (3-7) определяются этим свойством однозначно с точностью до единственного изоморфизма алгебр, перестановочного с (3-7), и проверьте, что для описанного выше вложения (3-7) это универсальное свойство действительно выполнено.

3.2.1. Двойственность и полная свёртка. Тензорные степени $V^{\otimes n}$ и $\left(V^*\right)^{\otimes n}$ конечномерного пространства V канонически двойственны друг другу:

$$\left(V^{\otimes n}\right)^* \simeq \left(V^*\right)^{\otimes n} . \tag{3-8}$$

Спаривание между ними называется *полной сверткой* и сопоставляет разложимым тензорам $v = v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$ и $\xi = \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_n \in V^{*\otimes n}$ произведение

$$\langle\, v\,,\, \xi\,\rangle \overset{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^{n} \xi_i(v_i)\,. \tag{3-9}$$

Поскольку правая часть полилинейна по каждому v_i и ξ_i, правило $v \mapsto \langle\, v\,,\, \xi\,\rangle$ корректно продолжается до линейного функционала $V^{\otimes n} \to \Bbbk$, который, в свою очередь, полилинейно зависит от каждого ξ_i, и значит сопоставление разложимому $\xi \in V^{*\otimes n}$ такого функционала корректно продолжается до линейного отображения $V^{*\otimes n} \to \left(V^{\otimes n}\right)^*$, при котором действие разложимых «ковекторных» тензоров на разложимые «векторные» тензоры задаётся правилом (3-9).

Конечномерность существенна для проверки того, что это отображение изоморфизм. Выберем двойственные базисы

$$e_1, e_2, \dots, e_n \subset V\,, \quad x_1, x_2, \dots, x_n \subset V^* \quad : \quad x_i(e_j) = \delta_{ij}$$

и рассмотрим соответствующие базисы в $V^{\otimes n}$ и $\left(V^*\right)^{\otimes n}$ из тензорных мономов

$$e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \quad \text{и} \quad x_{j_1} \otimes x_{j_2} \otimes \cdots \otimes x_{j_s}\,.$$

Из (3-9) немедленно вытекает, что они двойственны друг другу.

Из универсального свойства тензорного произведения $V^{\otimes n}$ тавтологиччески получается ещё одна двойственность — пространство $\left(V^{\otimes n}\right)^*$ линейных отображений $V^{\otimes n} \to \Bbbk$ канонически изоморфно пространству n-линейных форм $\underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n} \to \Bbbk$:

$$\left(V^{\otimes n}\right)^* \simeq \operatorname{Hom}(V,\, \dots\,, V\,;\, \Bbbk)\,. \tag{3-10}$$

Комбинируя изоморфизмы (3-8) и (3-10) получаем канонический изоморфизм

$$\left(V^*\right)^{\otimes n} \simeq \operatorname{Hom}(V,\, \dots\,, V\,;\, \Bbbk)\,, \tag{3-11}$$

который сопоставляет разложимому тензору $\xi = \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_n \in V^{*\otimes n}$ n-линейную форму на $V \times V \times \cdots \times V$ со значениями в поле $\Bbbk$, действующую по правилу

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) \longmapsto \prod_{i=1}^{n} \xi_i(v_i)\,.$$

3.2.2. Частичные свертки. Зафиксируем какие-нибудь два инъективных (но не обязательно монотонных) отображения

$$\{1,2,\ \dots\ ,p\} \xhookleftarrow{I} \{1,2,\ \dots\ ,m\} \xhookrightarrow{J} \{1,2,\ \dots\ ,q\}$$

и будем, как обычно, писать i_ν и j_ν вместо $I(\nu)$ и $J(\nu)$. Образы этих отображений суть упорядоченные (но не обязательно по возрастанию) наборы неповторяющихся индексов $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$, $J = (j_1, j_2, \dots, j_m)$, состоящие из одинакового числа элементов. Линейный оператор

$$c^I_J : V^{*\otimes p} \otimes V^{\otimes q} \to V^{*\otimes(p-m)} \otimes V^{\otimes(q-m)}$$

сворачивающий для каждого $\nu = 1,\ 2,\ \dots\ ,m$ i_ν-тый сомножитель в $V^{*\otimes p}$ с j_ν-тым сомножителем в $V^{\otimes q}$ и оставляющий все остальные сомножители стоящими в том же порядке, в каком они стояли

$$\xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_p \otimes v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_q \longmapsto \prod_{\nu=1}^{m} \xi_{i_\nu}(v_{j_\nu}) \cdot (\bigotimes_{i \notin I} \xi_i) \otimes (\bigotimes_{j \notin J} v_j) \tag{3-12}$$

называется *частичной сверткой* по индексам I и J. Подчеркнём, что при разных выборах отображений I и J будут, как правило, получаться *различные* отображения свёртки.

Пример 3.2 (свертка вектора с полилинейной формой)
Если при помощи изоморфизма (3-11) проинтерпретировать n-линейную форму

$$\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

как тензор из $V^{*\otimes n}$ и свернуть его по первому тензорному сомножителю с вектором $v \in V$, мы получим тензор из $V^{*\otimes(n-1)}$, который можно обратно проинтерпретировать как $(n-1)$-линейную форму на V. Полученная форма называется *внутренним произведением* v и φ и обозначается $i_v\varphi$ или $v \llcorner \varphi$.

Упражнение 3.6. Проверьте, что внутреннее умножение на v есть не что иное, как фиксация v в качестве первого аргумента формы φ:

$$i_v\varphi(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) = \varphi(v, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) .$$

3.2.3. Линейный носитель тензора. Для заданного тензора $t \in V^{\otimes n}$ обозначим через $\mathrm{Supp}(t) \subset V$ пересечение всех векторных подпространств $U \subset V$, таких что $t \in U^{\otimes n}$. Иначе $\mathrm{Supp}(t)$ можно охарактеризовать как наименьшее по включению подпространство $U \subset V$, такое что $t \in U^{\otimes n}$, или как наименьшее по размерности подпространство с таким свойством. Правомочность всех этих переформулировок вытекает из того, что если $t \in U^{\otimes n}$ и $t \in W^{\otimes n}$ для некоторых подпространств $U, W \subset V$, то $t \in (U \cap W)^{\otimes n}$.

В самом деле, выбирем в V базис $e_1,\ \dots\ ,e_p,\ u_1,\ \dots\ ,u_q,\ w_1,\ \dots\ ,w_r,\ v_1,\ \dots\ ,v_s$, такой что e_i образуют базис в $U \cap W$, u_j и w_k дополняют его до базисов в U и W соответственно, а v_m дополняют всё предыдущее до базиса в V, и разложим t по базисным тензорным мономам. Условие $t \in U^{\otimes n} \cap W^{\otimes n}$ означает, что в t входят только мономы, не содержащие никаких иных векторов, кроме e_i, что мы и утверждали.

Определение 3.3
Подпространство $\mathrm{Supp}(t)$, описанное выше, называется *линейным носителем* тензора t, а его размерность $\dim \mathrm{Supp}(t)$ — *рангом* тензора t .

3.2.4. Вырожденные тензоры. Тензоры, ранг которых меньше размерности пространства V, на котором они определены, называются *вырожденными*. Условие $\mathrm{Supp}(t) \neq V$ означает, что тензор t эффективно зависит от меньшего числа «координат», чем имеется в V, т. е. существует линейная замена базиса, уничтожающая часть переменных в многочлене t. Например, если $\dim \mathrm{Supp}(t) = 1$, то $t = c \cdot v^{\otimes n}$ для некоторого $c \in \Bbbk$ и $v \in V$, порождающего $\mathrm{Supp}(t)$.

3.2.5. Линейные порождающие носителя. Для нахождения ранга данного тензора t желательно иметь более явное описание $\mathrm{Supp}(t)$ — например, в виде линейной оболочки конкретного конечного набора векторов, эффективно вычислимого по t. Одно из таких описаний можно получить при помощи свёрток.

А именно, для каждого инъективного (не обязательно монотонного) отображения

$$J = (j_1, j_2, \dots, j_{n-1}) \; : \; \{1,\, 2,\, \dots\,,\, (n-1)\} \hookrightarrow \{1,\, 2,\, \dots\,,\, n\} \tag{3-13}$$

рассмотрим отображение полной свёртки с тензором t, спаривающее ν-й сомножитель $V^{*\otimes(n-1)}$ с j_ν-тым сомножителем t для всех $1 \leqslant \nu \leqslant (n-1)$:

$$\begin{gathered} c_t^I \; : \; V^{*\otimes(n-1)} \to V \\ \xi \longmapsto c_{(j_1, j_2, \dots, j_{n-1})}^{(1,\, 2,\, \dots\,,\, (n-1))}(\xi \otimes t) \end{gathered} \tag{3-14}$$

в результате чего тензор t превращается в линейную комбинацию векторов, стоявших в том тензорном сомножителе, номер которого не попал в образ отображения I. Очевидно, что эта линейная комбинация лежит в $\mathrm{Supp}(t)$.

Теорема 3.1
Пространство $\mathrm{Supp}(t)$ линейно порождается образами всех отображений свёртки (3-14) со всевозможными выборами сворачиваемых индексов (3-13).

Доказательство. Пусть $\mathrm{Supp}(t) = W$. Чтобы убедиться в том, что образы свёрток (3-14) линейно порождают W, достаточно доказать, что каждая линейная форма $\xi \in V^*$, которая аннулирует все подпространства $\operatorname{im}\left(c_t^I\right)$, аннулирует и подпространство W.

Предположим противное: пусть $\xi \in V^*$ имеет ненулевое ограничение на W, но аннулирует все $c_t^I\left(V^{*\otimes(n-1)}\right)$. Выберем в V^* такой базис $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d$, чтобы $\xi_1 = \xi$, а ограничения $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ на W составляли базис в W^*. Обозначим через $w_1, w_2, \dots, w_k$ двойственный к нему базис в W и разложим t по этому базису. Значение $\xi\left(c_t^I\left(\xi_{\nu_1} \otimes \xi_{\nu_2} \otimes \dots \otimes \xi_{\nu_{n-1}}\right)\right)$ равно полной свёртке t с базисным мономом $\xi_1 \otimes \xi_{\nu_1} \otimes \xi_{\nu_2} \otimes \dots \otimes \xi_{\nu_{n-1}}$ (по индексам, переставленным согласно отображению I), которая, в свою очередь, равна коэффициенту при соответствующем двойственном мономе из разложения t. Выбирая подходящие I, мы можем таким образом получить коэффициент при любом содержащем w_1 мономе из разложения t. Следовательно, все эти коэффициенты нулевые, т. е. t не зависит от w_1 и, тем самым, w_1 не входит в $\mathrm{Supp}(t)$ — противоречие. □

3.3. Условия (косо) симметричности. Полилинейное отображение

$$\varphi \; : \; \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{n} \to U \tag{3-15}$$

называется *симметричным*, если при перестановках аргументов оно не изменяет своего значения, и *кососимметричным*, если оно принимает нулевое значение, когда какие-то два из аргументов совпадают.

Упражнение 3.7. Покажите, что значение кососимметричного полилинейного отображения изменяет знак при перестановке любых двух аргументов, а над полем характеристики $\neq 2$ этого условия также и достаточно для кососимметричности.

Симметричные и кососимметричные полилинейные отображения (3-15) составляют в векторном пространстве всех полилинейных отображений $\mathrm{Hom}(V, \dots, V; U)$ подпространства, которые мы будем обозначать, соответственно, через

$$\mathrm{Sym}^n(V, U) \subset \mathrm{Hom}(V, \dots, V; U) \quad \text{и} \quad \mathrm{Skew}^n(V, U) \subset \mathrm{Hom}(V, \dots, V; U).$$

Взятие композиции фиксированного (косо) симметричного отображения

$$\varphi : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n} \to U$$

с линейными операторами $F : U \to W$ задаёт линейное отображения $F \mapsto F \circ \varphi$ из $\mathrm{Hom}(U, W)$ в $\mathrm{Sym}^n(V, W)$ (соотв. в $\mathrm{Skew}^n(V, W)$). (Косо)симметричное полилинейное отображение φ называется *универсальным*, если это отображение — изоморфизм *для всех* W.

Универсальное симметричное полилинейное отображение обозначается через

$$\sigma : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n} \to S^n V \tag{3-16}$$

и называется *коммутативным произведением* векторов, а модуль $S^n V$, в который оно действует, называется n-той *симметрической степенью* модуля V. Произведение

$$\sigma(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

обычно обозначается через $v_1 \cdot v_2 \cdot \cdots \cdot v_n$ или просто $v_1 v_2 \dots v_n$.

Универсальное кососимметричное полилинейное отображение обозначается через

$$\alpha : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n} \to \Lambda^n V \tag{3-17}$$

и называется *внешним* (или *суперкоммутативным*) произведением векторов, а модуль $\Lambda^n V$, в который оно действует, называется n-той *внешней степенью* модуля V. Произведение $\alpha(v_1, v_2, \dots, v_n)$ принято обозначать через $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n$.

Упражнение 3.8. Покажите, что $S^n V$ и $\Lambda^n V$ (если они существуют) единственны с точностью до единственного изоморфизма, коммутирующего с универсальным отображением.

Существование универсального (косо)симметричного полилинейного отображения вытекает из существования тензорного произведения: симметрическая и внешняя степени модуля V получаются из тензорной степени наложением дополнительных соотношений (анти) коммутирования. Это можно сделать одновременно для всех n беря факторы свободной ассоциативной алгебры по (двусторонним) идеалам, порождённым соотношениями (анти) коммутирования.

3.3.1. Симметрическая алгебра пространства V. Рассмотрим в тензорной алгебре TV пространства V двусторонний идеал $\mathcal{I}_{\text{sym}} \subset TV$, порождённый линейным подпространством в $V \otimes V$, натянутым на всевозможные разности

$$u \otimes w - w \otimes u\,. \tag{3-18}$$

По определению, он состоит из конечных линейных комбинаций всевозможных тензоров, которые можно получить из тензоров (3-18), умножая их слева и справа (или одновременно и слева и справа) на любые элементы тензорной алгебры. Пересечение этого идеала с однородной компонентой $V^{\otimes n}$ представляет собою линейную оболочку всевозможных разностей разложимых тензоров вида

$$(\cdots \otimes v \otimes w \otimes \cdots) - (\cdots \otimes w \otimes v \otimes \cdots) \tag{3-19}$$

(обозначенные многоточиями фрагменты не меняются), а весь идеал является прямой сумой таких однородных компонент:

$$\mathcal{I}_{\text{sym}} = \bigoplus_{n \geqslant 0} \left(\mathcal{I}_{\text{sym}} \cap V^{\otimes n}\right)\,.$$

Фактор алгебра $SV \stackrel{\text{def}}{=} TV/\mathcal{I}_{\text{sym}}$ называется *симметрической алгеброй* векторного пространства V, а индуцированное в ней умножение называется *симметрическим умножением* и обозначается точкой (которую принято опускать). Симметрическая алгебра является прямой суммой своих однородных компонент:

$$SV = \bigoplus_{n \geqslant 0} S^n V\,, \quad \text{где} \quad S^n V \stackrel{\text{def}}{=} V^{\otimes n}/(\mathcal{I}_{\text{sym}} \cap V^{\otimes n})\,.$$

Если зафиксировать базис $e_1, e_2, \dots, e_d \subset V$, то алгебру SV можно отождествить с алгеброй $\Bbbk[e_1, e_2, \dots, e_d]$ обычных коммутативных многочленов от базисных векторов e_i, а подпространство $S^n V \subset \Bbbk[e_1, e_2, \dots, e_d]$ — с пространством однородных полиномов степени n.

Упражнение 3.9. Найдите $\dim S^n V$.

Предложение 3.1
Композиция тензорного умножения с факторизацией по $\mathcal{I}_{\text{sym}}$:

$$\sigma \,:\, \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n} \overset{\tau}{\dashrightarrow} V^{\otimes n} \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} S^n(V) \tag{3-20}$$

является универсальной симметрической полилинейной формой (т. е. коммутативным умножением (3-16)).

Доказательство. Любое полилинейное отображение $\varphi \,:\, V \times V \times \cdots \times V \to W$ единственным образом разлагается в композицию $\varphi = F \circ \tau$, где $F \,:\, V^{\otimes n} \to W$ линейно. При этом F пропускается через π тогда и только тогда, когда

$$F(\cdots \otimes v \otimes w \otimes \cdots) = F(\cdots \otimes w \otimes v \otimes \cdots)\,,$$

что равносильно тому что $\varphi(\dots, v, w, \dots) = \varphi(\dots, w, v, \dots)$. □

Упражнение 3.10. Убедитесь, что SV является *свободной коммутативной алгеброй*, порождённой V, в том смысле, что для любой коммутативной $\Bbbk$-алгебры A и любого линейного отображения $f : V \to A$ существует единственный гомоморфизм алгебр $\tilde{f} : SV \to A$ такой, что $f = \widetilde{\varphi} \circ \iota$, где $\iota : V \hookrightarrow SV$ вкладывает V в SV в качестве многочленов первой степени. Проверьте также, что SV и ι определяются этим универсальным свойством однозначно с точностью до единственного изоморфизма алгебр, перестановочного с ι.

3.3.2. Внешняя алгебра пространства V определяется как фактор алгебра

$$\Lambda V \stackrel{\text{def}}{=} TV/\mathcal{I}_{\text{skew}}$$

свободной ассоциативной алгебры TV по двустороннему идеалу $\mathcal{I}_{\text{skew}} \subset TV$, порожденному всеми тензорами вида

$$v \otimes v \in V \otimes V\,. \tag{3-21}$$

Упражнение 3.11. Покажите, что подпространство $\mathcal{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes 2}$ содержит все суммы

$$v \otimes w + w \otimes v \quad (\text{с любыми } v, w \in V)\,,$$

и если $1 + 1$ обратимо в K, то $\mathcal{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes 2}$ линейно порождается такими суммами.

Как и в симметричном случае, идеал $\mathcal{I}_{\text{skew}}$ является прямой суммой своих однородных компонент

$$\mathcal{I}_{\text{skew}} = \bigoplus_{n \geqslant 0} \left(\mathcal{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes n}\right)$$

и его компонента n-той степени $\mathcal{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes n}$ является линейной оболочкой разложимых тензоров вида $(\cdots \otimes v \otimes v \otimes \cdots)$ и по упр. 3.11 содержит все суммы вида

$$(\cdots \otimes v \otimes w \otimes \cdots) + (\cdots \otimes w \otimes v \otimes \cdots)\,. \tag{3-22}$$

Фактор алгебра ΛV называется *внешней* (или *грассмановой*) алгеброй пространства V. Как и симметрическая алгебра, она является прямой суммой подпространств

$$\Lambda^n V = V^{\otimes n}/(\mathcal{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes n})\,.$$

Упражнение 3.12. Докажите, что композиция тензорного умножения с факторизацией по идеалу $\mathcal{I}_{\text{skew}}$

$$\alpha : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n} \overset{\tau}{\dashrightarrow} V^{\otimes n} \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \Lambda^n(V) \tag{3-23}$$

является универсальным кососимметричным полилинейным отображением (3-17).

Индуцированное умножение в алгебре ΛV называется *внешним* (а также *суперкоммутативным* или *грассмановым*) и обозначается $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n$. Согласно упр. 3.11 оно меняет знак при перестановке любых двух последовательных сомножителей, и стало быть, при произвольной перестановке сомножителей внешнее произведение умножается на знак перестановки.

3.3.3. Грассмановы многочлены. Как и в симметрическом случае, фиксация базиса $e_1, e_2, \dots, e_d \subset V$ отождествляет внешнюю алгебру с алгеброй *грассмановых многочленов* от базисных векторов e_i

$$\Lambda V \simeq \Bbbk \langle e_1, e_2, \dots, e_d \rangle \,.$$

По построению, грассмановы переменные e_i *анти*коммутируют $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$, и всякий грассманов моном *линеен* по каждой входящей в него переменной. Таким образом, любой грассманов моном степени n с точностью до знака можно записать в виде

$$e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}\,, \quad \text{где} \quad I = (i_1, i_2, \dots, i_n) \quad \text{и} \quad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leqslant d\,. \tag{3-24}$$

Лемма 3.3

Мономы (3-24) с I, пробегающим все строго возрастающие n-элементные подмножества в $\{1, 2, \dots, d\}$, образуют базис пространства $\Lambda^n V$ однородных грассмановых мономов степени n. В частности, $\Lambda^n V = 0$ для $n > \dim V$, $\dim \Lambda^n V = \binom{d}{n}$, и $\dim \Bbbk \langle e_1, e_2, \dots, e_d \rangle = 2^d$.

Доказательство. Рассмотрим $\binom{d}{n}$-мерное векторное пространство U, базис которого состоит из символов ξ_I, где $I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ пробегает все возрастающие n-элементные подмножества в $\{1, 2, \dots, d\}$. Определим кососимметрическое полилинейное отображение

$$\alpha : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n} \to U \;:\; (e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n}) \longmapsto \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \xi_I \,,$$

где $I = (j_{\sigma(1)}, j_{\sigma(2)}, \dots, j_{\sigma(n)})$ — это единственная *возрастающая* перестановка индексов

$$(j_1, j_2, \dots, j_n)\,.$$

Проверим, что построенное отображение универсально. Для любого кососимметрического полилинейного отображения

$$\varphi : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n} \to W$$

правило $F(\alpha(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n})) \overset{\text{def}}{=} \varphi(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n})$ корректно определяет единственно возможный линейный оператор $U \xrightarrow{F} W$ такой, что $\varphi = F \circ \alpha$. Поэтому имеется канонический изоморфизм между U и $\Lambda^n V$, переводящий ξ_I в $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} = e_I$. □

Упражнение 3.13. Проверьте, что $f(e) \wedge g(e) = (-1)^{\deg(f) \cdot \deg(g)} g(e) \wedge f(e)$ для всех однородных $f(e), g(e) \in \Bbbk \langle e_1, e_2, \dots, e_d \rangle$. В частности, каждый однородный многочлен *четной степени* коммутирует с любым грассмановым многочленом.

Упражнение 3.14. Опишите центр алгебры $\Bbbk \langle e_1, e_2, \dots, e_d \rangle$, т. е. все грассмановы полиномы, коммутирующие с *с каждым* элементом этой алгебры.

Пример 3.3 (линейная замена переменных)
При линейной подстановке $e_i = \sum_{j=1}^{d} a_{ij}\,\xi_j$ базисные мономы e_I меняются на новые базисные мономы ξ_I следующим образом:

$$e_I = e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_n} = \Big(\sum_{j_1} a_{i_1 j_1}\,\xi_j\Big)\wedge\Big(\sum_{j_2} a_{i_2 j_2}\,\xi_j\Big)\wedge\ \cdots\ \wedge\Big(\sum_{j_n} a_{i_n j_n}\,\xi_j\Big) =$$
$$= \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_n\leqslant n}\ \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\,a_{i_1 j_{\sigma(1)}}a_{i_2 j_{\sigma(2)}}\cdots a_{i_n j_{\sigma(n)}}\,\xi_{j_1}\wedge\xi_{j_2}\wedge\cdots\wedge\xi_{j_n} = \sum_J a_{IJ}\,\xi_J\,,$$

где a_{IJ} — это $n\times n$-минор матрицы $\big(a_{ij}\big)$, расположенный в строках с номерами $i_1, i_2, \dots, i_n$ и столбцах с номерами $j_1, j_2, \dots, j_n$, а J пробегает все возрастающие совокупности индексов *длины* $\#J = n$.

Упражнение 3.15. Для всякого строго возрастающего набора индексов $I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ будем называть сумму всех индексов $|I| \overset{\text{def}}{=} \sum_\nu i_\nu$ его *весом*, а количество индексов $\#I \overset{\text{def}}{=} n$ — его *длиной*. Проверьте, что

$$e_I\wedge e_{\hat I} = (-1)^{|I|+\frac{1}{2}\#I(1+\#I)}\cdot e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_d \tag{3-25}$$

для каждых двух *дополнительных* совокупностей индексов I и $\hat I \overset{\text{def}}{=} \{1, 2, \dots, n\}\setminus I$.

Пример 3.4 (соотношения Сильвестра)
Фиксируем два дополнительных набора индексов I и

$$\hat I \overset{\text{def}}{=} \{1, 2, \dots, n\}\setminus I$$

и сделаем замену базиса $e_i = \sum_{j=1}^{d} a_{ij}\,\xi_j$ в равенстве (3-25). Его левая часть $e_I\wedge e_{\hat I}$ после замены превратится в

$$\Big(\sum_{\substack{K:\\ \#K=\#I}} a_{IK}\,\xi_K\Big)\ \wedge\ \Big(\sum_{\substack{L:\\ \#L=(d-\#I)}} a_{\hat I L}\,\xi_L\Big) = (-1)^{\frac{1}{2}\#I(1+\#I)}\sum_{\substack{K:\\ \#K=\#I}}(-1)^{|K|}a_{IK}a_{\hat I\hat K}\,\xi_1\wedge\xi_2\wedge\cdots\wedge\xi_d\,,$$

где $\widehat K = \{1, 2, \dots, d\}\setminus K$, а правая часть — в $(-1)^{\frac{1}{2}\#I(1+\#I)}(-1)^{|I|}\det(a_{ij})\xi_1\wedge\xi_2\wedge\cdots\wedge\xi_d$. Таким образом, для любого набора I строк произвольной квадратной матрице (a_{ij}) справедливы следующие соотношения:

$$\sum_{\substack{K:\\ \#K=\#I}}(-1)^{|K|+|I|}a_{IK}\widehat A_{IK} = \det(a_{ij})\,, \tag{3-26}$$

где $\widehat A_{IK} \overset{\text{def}}{=} a_{\hat I\hat K}$ обозначает $(d-n)\times(d-n)$ - минор, дополнительный[1] к a_{IK}, и суммирование идёт по всем $(n\times n)$ - минорам a_{IK}, содержащимся в строках $(i_1, i_2, \dots, i_n)$. Если теперь

[1] т. е. находящимся в дополнительных строках и столбцах

проделать ту же выкладку, взяв вместо $\hat{I}$ набор $\hat{J}$, дополнительный к $J \neq I$, то в правой части (3-25) мы будем иметь $0 = e_I \wedge e_{\hat{J}}$, что приведёт к соотношению

$$\sum_{\substack{K:\\ \#K=\#I}} (-1)^{|K|+|I|} a_{IK} \widehat{A}_{JK} = 0\,, \tag{3-27}$$

Тождества (3-26) и (3-27) известны как *соотношения Сильвестра* (или теорема о разложении определителя по набору строк и теорема об умножении на чужие алгебраические дополнения). Если как-то упорядочить множество всех мультииндексов I (например, лексикографически), организовать все $(n \times n)$-миноры a_{IJ} в одну квадратную матрицу $A^{(n)} \overset{\text{def}}{=} \left(a_{IJ}\right)$ размера $\binom{d}{n} \times \binom{d}{n}$ и обозначить через $\widehat{A}^{(n)}$ матрицу, (IJ)-элемент которой равен $(-1)^{|I|+|J|}\widehat{A}_{JI}$, то все соотношения Сильвестра «упакуются» в одно короткое матричное равенство

$$A^{(n)} \cdot \widehat{A}^{(n)} = \det(a_{ij}) \cdot E\,.$$

Пример 3.5 (приведение грассмановой квадратичной формы к «нормальным осям») Кососимметричный многочлен, разумеется, нельзя «диагонализовать». Однако любой однородный грассманов многочлен степени два *над любым полем* в подходящем базисе может быть записан в виде

$$\xi_1 \wedge \xi_2 + \xi_3 \wedge \xi_4 + \cdots + \xi_{2r-1} \wedge \xi_{2r}\,, \tag{3-28}$$

который мы будем называть *каноническим*, и который в практических приложениях часто бывает гораздо удобнее «суммы квадратов». Для доказательства перенумеруем переменные так, чтобы грассманова квадратичная форма записывалась в виде

$$q(e) = e_1 \wedge (\alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n) + e_2 \wedge (\beta_3 e_3 + \cdots + \beta_n e_n) + (\text{члены без } e_1 \text{ и } e_2)$$

где $\alpha_2 \neq 0$. Перейдём к новому базису $\{e_1, \xi_2, e_3, \ldots, e_n\}$, в котором

$$\xi_2 = \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n\,,$$

и соответственно, $e_2 = \left(\xi_2 - \beta_3 e_3 - \cdots - \beta_n e_n\right)/\alpha_2$. Получим:

$$\begin{aligned} q = e_1 \wedge \xi_2 + \xi_2 \wedge (\gamma_3 e_3 + \cdots + \gamma_n e_n) + (\text{члены без } e_1 \text{ и } \xi_2) = \\ = (e_1 - \gamma_3 e_3 - \cdots - \gamma_n e_n) \wedge \xi_2 + (\text{члены без } e_1 \text{ и } \xi_2)\,. \end{aligned}$$

Ещё раз перейдём к новому базису $\{\xi_1, \xi_2, e_3, \ldots, e_n\}$, в котором $\xi_1 = e_1 - \gamma_3 e_3 - \cdots - \gamma_n e_n$, и получим

$$q = \xi_1 \wedge \xi_2 + (\text{члены без } \xi_1 \text{ и } \xi_2)$$

Далее вся процедура повторяется по индукции.

Упражнение 3.16. Пусть $q(e) = \sum_{ij} a_{ij}\, e_i \wedge e_j$ — грассманова квадратичная форма, ассоциированная с кососимметричной матрицей Грама $A = \left(a_{ij}\right)$, $a_{ij} = -a_{ji}$. Докажите, что число $2\,r$ (т. е. количество переменных, входящих в каноническое представление (3-28)) не зависит от выбора базиса и равно рангу $\operatorname{rk} A$ матрицы A (в частности, $\operatorname{rk} A$ всегда чётен).

Всюду далее мы по умолчанию считаем, что $\operatorname{char}(\Bbbk) = 0$.

3.3.4. Симметрические и кососимметрические тензоры. Симметрическая группа S_n действует на $V^{\otimes n}$ перестановками сомножителей в разложимых тензорах. А именно, для каждого $g \in S_n$ положим

$$g(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{g(1)} \otimes v_{g(2)} \otimes \cdots \otimes v_{g(n)} . \tag{3-29}$$

Поскольку правая часть полилинейно зависит от $v_1, v_2, \dots, v_n$, эта формул корректно определяет линейный оператор $g : V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$.

Определение 3.4
Тензор $t \in V^{\otimes n}$ называется *симметрическим*, если $g(t) = t$ для всех перестановок $g \in S^n$. Тензор $t \in V^{\otimes n}$ называется *кососимметрическим*, если $g(t) = \operatorname{sgn}(g) \cdot t$ для всех перестановок $g \in S^n$. Подпространства симметрических и кососимметрических тензоров в $V^{\otimes n}$ обозначаются через

$$\begin{aligned} \operatorname{Sym}^n V &= \{\, t \in V^{\otimes n} \mid \sigma(t) = t \quad \forall\, g \in S_n \,\} \\ \operatorname{Skew}^n V &= \{\, t \in V^{\otimes n} \mid g(t) = \operatorname{sgn}(g) \cdot t \quad \forall\, g \in S_n \,\} \end{aligned}$$

3.3.5. Стандартные базисы. Зафиксируем в пространстве V базис

$$e_1, e_2, \dots, e_d .$$

Поскольку вместе с каждым тензорным мономом в любой симметрический тензор входит (с одним и тем же коэффициентом) вся S_n-орбита этого монома, *полные симметрические тензоры* $e_{[m_1,m_2,\dots,m_d]}$, определённые для каждого набора целых неотрицательных чисел $(m_1, m_2, \dots, m_d)$ с $\sum\limits_\nu m_\nu = n$ равенством

$$e_{[m_1,m_2,\dots,m_d]} = \left(\begin{array}{c} \text{сумма всех различных тензорных мономов,} \\ \text{содержащих } m_1 \text{ множителей } e_1,\, m_2 \text{ множителей } e_2, \dots \\ \dots\, m_d \text{ множителей } e_d \end{array}\right) \tag{3-30}$$

образуют базис пространства симметрических тензоров $\operatorname{Sym}^n V$.

Упражнение 3.17. Убедитесь, что сумма в правой части (3-30) состоит из

$$\frac{n!}{m_1!\; m_2! \cdots m_d!}$$

слагаемых.

Аналогичным образом, *полные кососимметрические тензоры*

$$e_{\langle i_1,i_2,\dots,i_n\rangle} = \sum_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g) \cdot e_{i_{g(1)}} \otimes e_{i_{g(2)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{g(n)}} \tag{3-31}$$

составляют базис в пространстве $\operatorname{Skew}^n V$ (сумма в правой части состоит из $n!$ слагаемых).

3.3.6. Симметризация и альтернирование. Над полем характеристики нуль легко написать явные формулы для проекторов n-той тензорной степени $V^{\otimes n}$ на подпространства симметрических и кососимметрических тензоров. Это операторы *симметризации* и *альтернирования*, действующие по правилам

$$\mathrm{sym}_n(t) = \frac{1}{n!}\sum_{g\in S_n} g(t) \;:\quad V^{\otimes n} \to \mathrm{Sym}^n(V) \tag{3-32}$$

$$\mathrm{alt}_n(t) = \frac{1}{n!}\sum_{g\in S_n} \mathrm{sgn}(g)\cdot g(t) \;:\quad V^{\otimes n} \to \mathrm{Skew}^n(V) \tag{3-33}$$

Упражнение 3.18. Установите для любых тензоров $t \in V^{\otimes n}$, $s \in \mathrm{Sym}^n(V)$ и $a \in \mathrm{Skew}^n(V)$ при всех $n \geqslant 2$ соотношения а) $\mathrm{sym}_n(t) \in \mathrm{Sym}^n(V)$ б) $\mathrm{alt}_n(t) \in \mathrm{Skew}^n(V)$ в) $\mathrm{sym}_n(s) = s$ г) $\mathrm{alt}_n(a) = a$ д) $\mathrm{sym}_n(a) = \mathrm{alt}_n(s) = 0$.

Пример 3.6

При $n = 2$ симметризация и альтернирование доставляют прямое разложение

$$V^{\otimes 2} = \mathrm{Sym}^2(V) \oplus \mathrm{Skew}^2(V)\,. \tag{3-34}$$

В самом деле, поскольку каждый разложимый тензор представляется в виде суммы

$$u\otimes w = \frac{u\otimes w + w\otimes u}{2} + \frac{u\otimes w - w\otimes u}{2} = \mathrm{sym}_2(u\otimes w) + \mathrm{alt}_2(u\otimes w)\,,$$

образы проекторов sym_2 и alt_2 порождают $V^{\otimes 2}$, а т. к. каждый из них по упр. 3.18 аннулирует образ другого, эти образы имеют нулевое пересечение. Если интерпретировать $V^{\otimes 2}$ как пространство билинейных форм на V^*, разложение (3-34) будет ни чем иным, как каноническим разложением билинейной формы в сумму симметрической и кососимметрической.

Пример 3.7

Сравнение размерностей показывает, что при $n = 3$ тензор общего вида *не* является суммой своей симметризации и альтернирования. Чтобы найти в пространстве $V^{\otimes 3}$ дополнительное к $\mathrm{Sym}^3(V) \oplus \mathrm{Skew}^3(V)$ подпространство, рассмотрим разность

$$p = E - \mathrm{sym}_3 - \mathrm{alt}_3 = \left(2\,E - T - T^2\right)/\,3\,, \tag{3-35}$$

где через $T \,:\, V^{\otimes 3} \to V^{\otimes 3}$ обозначен оператор, отвечающий циклической перестановке $|123\rangle \in S_3$, а через $E = T^3$ — тождественный оператор. Поскольку

$$p^2 = \left(4E + T^2 + T - 4\,T - 4\,T^2 + 2\,E\right)/\,9 = \left(2E - T - T^2\right)/\,3 = p\,,$$

оператор p является проектором.

Упражнение 3.19. Покажите, что $p\circ\mathrm{alt}_3 = \mathrm{alt}_3\circ p = p\circ\mathrm{sym}_3 = \mathrm{sym}_3\circ p = 0$ и выведите отсюда, что $V^{\otimes 3}$ является прямой суммой $\mathrm{Sym}^3(V)$, $\mathrm{Skew}^3(V)$ и $\mathrm{im}\,(p)$.

Образ проектора p изящно описывается в терминах 3-линенйых форм на V^*.

Упражнение 3.20. Покажите, что $\mathrm{im}\,(p)$ состоит из 3-линейных форм $\varphi \,:\, V^*\times V^*\times V^* \to \Bbbk$, удовлетворяющих $\forall\, \xi,\eta,\zeta \in V^*$ *тождеству Якоби* $\varphi(\xi,\eta,\zeta) + \varphi(\eta,\zeta,\xi) + \varphi(\zeta,\xi,\eta) = 0$, и приведите явный пример такой формы на двумерном пространстве V^*.

При бо́льших n разложение $V^{\otimes n}$ в прямую сумму подпространств тензоров с различными «типами симметрии» становится более сложным и является предметом теории представлений симметрических групп.

Предложение 3.2
Если $\operatorname{char}(\Bbbk) = 0$, то ограничение симметрического умножения[1] $V^{\otimes n} \to S^n V$ на подпространство $\operatorname{Sym}^n \subset V^{\otimes n}$ и ограничение внешнего умножения[2] $V^{\otimes n} \to \Lambda^n V$ на подпространство кососимметрических тензоров $\operatorname{Skew}^n \subset V^{\otimes n}$ являются изоморфизмами векторных пространств. Действие этих изоморфизмов на стандартные базисные мономы (3-30) и (3-31) задаётся формулами

$$e_{[m_1,m_2,\dots,m_d]} \longmapsto \frac{(m_1+m_2+\dots+m_d)!}{m_1!\cdot m_2!\,\cdots\, m_d!}\cdot e_1^{m_1}e_2^{m_2}\dots e_d^{m_d} \in S^nV \tag{3-36}$$

$$e_{\langle i_1,i_2,\dots,i_d\rangle} \longmapsto n!\cdot e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\dots\wedge e_{i_d} \in \Lambda^nV \tag{3-37}$$

Доказательство. Действительно, проекция каждого из $n!/(m_1!\,m_2!\cdots m_d!)$ слагаемых суммы (3-30) в симметрическую алгебру равна коммутативному моному $e_1^{m_1}e_2^{m_2}\dots e_d^{m_d}$, а проекция каждого из $n!$ слагаемых суммы (3-31) во внешнюю алгебру равна грассманову моному $n!\; e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\dots\wedge e_{i_n}$. □

3.3.7. Предостережения. Не смотря на изоморфизмы из предл. 3.2, *под*пространства $\operatorname{Sym}^n V$ и $\operatorname{Skew}^n V$, *содержащиеся* в $V^{\otimes n}$, ни в коем случае не следует путать с *фактор* пространствами S^nV и Λ^nV, которые получаются из $V^{\otimes n}$ *склейкой* некоторых тензоров между собою. Над полем положительной характеристики $\operatorname{char}(\Bbbk) = p$ все симметрические тензоры, степень которых является степенью p, и все кососимметрические тензоры, степень которых больше p, спроектируются при проекциях $V^{\otimes n} \twoheadrightarrow S^nV$ и $V^{\otimes n} \twoheadrightarrow \Lambda^nV$ в *нулевые* элементы симметрической и внешней алгебры. Даже в характеристике нуль стандартные базисные векторы тензорных и полиномиальных пространств *не отождествляются* друг с другом изоморфизмами из предл. 3.2, а переходят лишь в некоторые кратности друг друга. Эти поправочные множители приходится учитывать как при попытке поднять на (супер) симметрические тензоры (супер) коммутативное умножение, которое имеется в симметрической и грассмановой алгебрах, так и при попытке спустить в симметрическую и внешнюю алгебры отображения свёртки, которые имеются между тензорами.

3.4. Поляризация коммутативных многочленов. Зафиксируем в пространстве V базис $e_1, e_2, \dots, e_d$, а в двойственном пространстве V^* — двойственный базис $x_1, x_2, \dots, x_d$, и отождествим симметрическую алгебру SV^* с алгеброй многочленов от координат:

$$SV^* \simeq \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_d]\,.$$

Пользуясь этим изоморфизмом, сопоставим каждому элементу $f \in S^nV^*$ однородную полиномиальную функцию $f_{\text{м}} : V \to \Bbbk$ степени n, значение которой на векторе $v = \sum \alpha_i e_i \in V$ равно числу $f_{\text{м}}(v) = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in \Bbbk$.

[1] т. е. отображения факторизации по соотношениям коммутирования (3-19)
[2] т. е. отображения факторизации по соотношениям антикоммутирования (3-22)

Покажем, что над полем характеристики нуль определённый таким образом гомоморфизм $f \mapsto f_{\text{м}}$ из симметрической алгебры $S^n V^*$ в алгебру функций $V \to \Bbbk$ не зависит от выбора базиса. Согласно предл. 3.2, для каждого элемента $f \in S^n(V^*)$ существует единственный симметричный тензор $\tilde{f} \in \operatorname{Sym}^n V^*$, который проектируется в f при факторизации по соотношениям коммутирования. Этот тензор задаёт симметричную n-линейную форму

$$\tilde{f} : V \times V \times \ldots \times V \to \Bbbk$$

значение которой на наборе векторов $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ равно полной свёртке тензора $\tilde{f}$ с тензором $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n$ и определено канонически (без использования базисов). Многочлен $f_{\text{м}}$ есть не что иное как ограничение этой полилинейной формы на главную диагональ $\Delta \subset V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$:

$$f_{\text{м}}(v) = \tilde{f}(v, v, \ldots, v) \qquad \forall\, v \in V\ . \tag{3-38}$$

В самом деле, полная свёртка базисного симметричного тензора $x_{[m_1, m_2, \ldots, m_d]}$ с тензором $v^{\otimes n}$ представляет собой сумму $n!/(m_1! \cdot m_2! \cdots m_d!)$ одинаковых произведений

$$x_1(v)^{m_1} x_2(v)^{m_2} \cdot x_d(v)^{m_d}$$

и совпадает со значением на векторе v полиномиальной функции $f_{\text{м}}$, построенной по элементу

$$f = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdots m_d!} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdot x_d^{m_d} \in S^n V^*$$

в которую проектируется тензор $x_{[m_1, m_2, \ldots, m_d]}$. А так как линейное по f равенство (3-38) выполнено на базисных элементах, оно выполнено и для любых f.

Коль скоро сопоставление $f \mapsto f_{\text{м}}$ не зависит от выбора базиса, мы будем называть элементы симметрической алгебры SV^* *многочленами*[1] или *полиномиальными функциями* на пространстве V, и не будем делать разницы между f и $f_{\text{м}}$ (в частности, обозначение $f_{\text{м}}$ больше нигде не будет использоваться).

Симметричная n-линейная форма $\tilde{f}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, однозначно связанная с многочленом $f \in S^n V^*$ соотношением (3-38) называется *полной поляризацией* многочлена f.

При $n = 2$ полная поляризация есть не что иное как поляризация квадратичной формы до симметричной билинейной формы, многократно использовавшаяся нами ранее. Для произвольной степени n полная поляризация каждого базисного монома

$$f = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_d^{m_d}$$

степени $\sum m_i = n$, согласно формуле (3-36) из предл. 3.2, имеет вид

$$\tilde{f} = \frac{m_1!\, m_2! \cdots m_d!}{n!} \cdot x_{[m_1, m_2, \ldots, m_d]}\,. \tag{3-39}$$

Полная поляризация произвольного многочлена вычисляется по этим формулам в силу линейности отображения $f \mapsto \tilde{f}$.

[1]как мы, собственно, и делали это до сих пор

Пример 3.8 (двойственность)
Полная свёртка между $V^{\otimes m}$ и $V^{*\otimes m}$ индуцирует (в характеристике нуль) двойственность между пространствами многочленов S^mV и S^mV^*. По определению, результатом спаривания элементов $f \in S^nV$ и $g \in S^nV^*$ является полная свёртка их полных поляризаций $\tilde{f} \in V^{\otimes m}$ и $\tilde{g} \in V^{*\otimes m}$.

Упражнение 3.21. Проверьте, что мономы, составленные из элементов двойственных базисов пространств V и V^*, спариваются при этом по правилу

$$\left\langle e_1^{m_1} e_2^{m_2} \cdots e_d^{m_d}, x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_d^{m_d} \right\rangle = \frac{m_1! \cdot m_2! \cdot \cdots \cdot m_d!}{n!} \tag{3-40}$$

(спаривания между всеми остальными парами базисных векторов нулевые).

3.4.1. Производные и поляры. Фиксируем вектор $v \in V$ и рассмотрим отображение свёртки первого тензорного сомножителя в произведении $V^{*\otimes n}$ с вектором v

$$c_v^1 : V^{*\otimes n} \to V^{*\otimes (n-1)}$$

(на языке n-линейных форм на пространстве V это отображение фиксирует вектор $v \in V$ в качестве первого аргумента n-линейной формы). Применяя его к полной поляризации $\tilde{f}$ многочлена $f \in S^n(V^*)$ и затем проектируя результат из $V^{*\otimes(n-1)}$ обратно в симметрическую степень $S^{n-1}(V^*)$, мы получаем линейное отображение $S^nV^* \to S^{n-1}V^*$, которое включается в качестве нижней горизонтальной стрелки в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} V^{*\otimes n} \supset \mathrm{Sym}^n V^* \arrow[r, "c_v^1"] \arrow[d] & \mathrm{Sym}^{n-1} V^* \subset V^{*\otimes(n-1)} \arrow[d] \\ S^nV^* \arrow[r, "\mathrm{pl}_v"] & S^{n-1}V^* \end{tikzcd}$$

и переводит многочлен $f(x) = \tilde{f}(x, x, \ldots x) \in S^n(V^*)$ в многочлен

$$\mathrm{pl}_v f(x) = \tilde{f}(v, x, \ldots x) \in S^{n-1}(V^*), \tag{3-41}$$

который называется *полярой* вектора v относительно f и линейно зависит как от многочлена f, так и от вектора $v \in V$. При $n = 2$ эта конструкция задаёт полярное преобразование относительно квадрики $f = 0$ в $\mathbb{P}(V)$ и сопоставляет вектору v уравнение его полярной гиперплоскости.

В двойственных базисах $e_1, e_2, \ldots, e_d \in V$ и $x_1, x_2, \ldots, x_d \in V^*$ отображение свёртки по первому индексу с базисным вектором $e_i \in V$ переводит базисный симметрический моном (3-30) в точно такой же базисный моном, но содержащий $(m_i - 1)$ множителей e_i, или в нуль, если $m_i = 0$. Поэтому, по формуле (3-36) из предл. 3.2

$$\mathrm{pl}_{e_i} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_d^{m_d} = \frac{m_i}{n} x_1^{m_1} \cdots x_{i-1}^{m_{i-1}} x_i^{m_i - 1} x_{i+1}^{m_{i+1}} \cdots x_d^{m_d} = = \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial x_i} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_d^{m_d}.$$

Из линейности $\mathrm{pl}_v f$ по v и f мы получаем, что поляра вектора $v = \sum \alpha_i e_i$ относительно многочлена f есть делённая на $\deg f$ *производная* от f в направлении вектора v:

$$\mathrm{pl}_v f = \frac{1}{\deg(f)} \partial_v f = \frac{1}{\deg(f)} \sum \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Отметим, что из сказанного немедленно вытекает независимость правой части этой формулы от выбора двойственных координат в V и V^*, а также коммутирование частных производных между собой: $\partial_u \partial_w = \partial_w \partial_u$ и замечательное равенство между кратными производными

$$m!\ \frac{\partial^m f}{\partial u^m}(w) = n!\ \tilde{f}(\underbrace{u, u, \dots, u}_{m}, \underbrace{w, w, \dots, w}_{n}) = (n-m)!\ \frac{\partial^{n-m} f}{\partial w^{n-m}}(u)\,, \tag{3-42}$$

для любых $u, w \in V$, любого $f \in S^n V^*$ и любого m в пределах $0 \leqslant m \leqslant n$.

Упражнение 3.22. Докажите правило Лейбница: $\partial_v(f \cdot g) = \partial_v(f) \cdot g + f \cdot \partial_v(g)$.

Поскольку форма $\tilde{f}$ симметрична, аргументы в среднем члене формулы (3-42) можно писать в любом порядке. Условимся для упрощения обозначений писать

$$\tilde{f}(u^m, w^{n-m})\,,$$

когда какие-то m аргументов формы $\tilde{f}$ равны u, а остальные $(n-m)$ равны w (не важно в каком порядке).

Из полилинейности и симметричности $\tilde{f}$ дословно тем же рассуждением, что и формула Ньютона для раскрытия скобок в биноме $(u+w)^n$, выводится равенство

$$\tilde{f}(u+w,\ u+w,\ \dots,\ u+w) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \tilde{f}(u^m, w^{n-m})\,,$$

где $n = \deg f$. С учётом (3-42) его можно переписать как *разложение Тейлора*: для любого многочлена f и векторов u, w имеется *точное* равенство

$$f(u+w) = \sum_{m=0}^{\deg f} \frac{1}{m!}\, \partial_w^m f(u)\,, \tag{3-43}$$

правая часть которого симметрична по u и w в силу соотношения (3-42).

Упражнение 3.23. Покажите, что значение полной поляризации многочлена $f \in S^n V^*$ на заданном наборе векторов описывается в терминах частных производных формулой $\tilde{f}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \dfrac{1}{n!}\, \partial_{v_1} \partial_{v_2} \dots \partial_{v_n} f \qquad \forall v_1, v_2, \dots, v_n \in V$.

3.4.2. Линейный носитель многочлена $f \in S^n V^*$ определятся как минимальное подпространство $W \subset V^*$ такое, что $f \in S^n W^*$, и обозначается $\mathrm{Supp}(f)$. Очевидно, что это подпространство совпадает с линейным носителем полной поляризации $\tilde{f} \in \mathrm{Sym}^n V^*$ многочлена f. По теор. 3.1 последний является образом отображения

$$V^{\otimes(n-1)} \to V^*$$

задаваемого полной свёрткой[1] с $\tilde{f}$. Этот образ порождается всеми линейными формами, которые можно получить из f всевозможными $(n-1)$-кратными дифференцированиями вида

$$\frac{\partial^{m_1}}{\partial x_1^{m_1}} \frac{\partial^{m_2}}{\partial x_2^{m_2}} \cdots \frac{\partial^{m_d}}{\partial x_d^{m_d}} f(x)\,, \tag{3-44}$$

[1] из-за симметричности тензора $\tilde{f}$ отображения свёртки из теор. 3.1 не зависят от выбора последовательности индексов J, по которым производится свёртка

с $\sum m_\nu = n-1$. Вклад в коэффициент при x_i у линейной формы (3-44) даёт ровно один коэффициент многочлена f — тот, что стоит при мономе $x_1^{m_1} \dots x_{i-1}^{m_{i-1}} x_i^{m_i+1} x_{i+1}^{m_{i+1}} \dots x_d^{m_d}$. Поэтому, если записать многочлен f в виде

$$f = \sum_{\nu_1+\dots+\nu_d=n} \frac{n!}{\nu_1!\,\nu_2!\,\cdots\,\nu_d!}\, a_{\nu_1\nu_2\dots\nu_d}\, x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2}\,\cdots\, x_d^{\nu_d}\,, \tag{3-45}$$

то линейная форма (3-44) будет иметь вид

$$n!\cdot\sum_{i=1}^{d} a_{m_1\dots m_{i-1}(m_i+1)m_{i+1}\dots m_d} x_i \tag{3-46}$$

и всего таких форм будет $\binom{n+d-2}{d-1}$ (количество способов разложить $n-1$ в сумму d занумерованных целых неотрицательных слагаемых $m_1, m_2, \dots, m_d$). Отсюда мы получаем, например, критерий представимости многочлена в виде n-той степени линейной формы.

Предложение 3.3
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ с $\operatorname{char}(\Bbbk) = 0$ однородный многочлен (3-45) тогда и только тогда является n-той степенью линейной формы, когда ранг $d \times \binom{n+d-2}{d-1}$-матрицы, составленной из коэффициентов линейных форм (3-46), равен единице. В этом случае форма φ, такая что $\varphi^n = f$, также пропорциональна формам (3-46).

Доказательство. В самом деле, из равенства $f = \varphi^n$ вытекает, что $\operatorname{Supp}(f)$ — одномерное пространство, порождённое формой φ, и тогда все формы (3-46) пропорциональны форме φ. Наоборот, если все формы (3-46) пропорциональны друг другу, то $\operatorname{Supp}(f)$ — одномерное пространство $U = \Bbbk\cdot\psi$, порождённое какой-то формой $\psi \in V^*$. Поскольку $S^nU = \Bbbk\cdot\psi^n$ тоже одномерно, условие $f \in S^nU$ означает, что $f = \lambda\psi^n$ для некоторого $\lambda \in \Bbbk$. Если $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, последнее равенство переписывается как $f = \varphi^n$ с $\varphi = \sqrt[n]{\lambda}\cdot\psi$. □

3.4.3. Многообразие Веронезе $V(n,k)$ определяется как образ k-мерного проективного пространства $\mathbb{P}_k = \mathbb{P}(V^*)$ при *отображении Веронезе* n-той степени

$$\mathbb{P}(V^*) \xrightarrow{\varphi\mapsto\varphi^n} \mathbb{P}(S^nV^*) \tag{3-47}$$

или, что то же самое, как множество всех однородных многочленов степени n от k переменных[1], которые являются чистыми n-тыми степенями линейных.

Замечание 3.1. Отметим аналогию между многообразиями Веронезе $V(n,k)$ и многообразиями Грассмана $\operatorname{Gr}(n,k)$ (см. n° 3.6 ниже). С алгебраической точки зрения в обоих случаях речь идёт про многочлены степени n от k переменных, которые максимально вырождены в том смысле, что они эффективно зависят от минимально возможного числа переменных. В коммутативном случае это минимальное число равно единице, и нас

[1]рассматриваемых, как обычно, с точностью до пропорциональности

интересуют однородные многочлены степени n, которые линейной заменой координат приводятся к виду x_1^n. В грассмановом случае минимальное число косокоммутирующих переменных, от которых может эффективно зависеть однородный многочлен n-той степени, равно n, и такой многочлен линейной заменой координат приводятся к виду $x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n$.

Следствие 3.1
Образ вложения Веронезе (3-47) является проективным алгебраическим многообразием, задаваемым системой квадратных уравнений — равенством нулю всех 2×2 миноров $d \times \binom{n+d-2}{d-1}$ матрицы, составленной из коэффициентов линейных форм (3-46). □

Например, однородный многочлен от двух переменных

$$f(x_0, x_1) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \binom{n}{k} \cdot x_0^{n-k} x_1^k$$

тогда и только тогда имеет вид $(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1)^n$, когда

$$\mathrm{rk} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n_1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} = 1\,,$$

что выражается системой квадратных уравнений

$$\det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ a_{i+1} & a_{j+1} \end{pmatrix} = 0$$

на коэффициенты a_i многочлена f, и в этом случае $(\alpha_0 : \alpha_1) = (a_i : a_{i+1})$ для любого i, Такого что $a_i a_{i+1} \neq 0$.

3.4.4. Поляры и касательные к проективной гиперповерхности. Рассмотрим проективную гиперповерхность $S \subset \mathbb{P}(V)$, заданную однородным уравнением $F(x) = 0$ степени n. Пересечение S с произвольной прямой $\ell = (pq)$ состоит из таких точек $\lambda p + \mu q \in \ell$, что отношение $(\lambda : \mu)$ удовлетворяет уравнению $f(\lambda, \mu) = 0$, которое получается подстановкой $x = \lambda p + \mu q$ в уравнение гиперповерхности $F(x) = 0$. Если основное поле алгебраически замкнуто, и прямая ℓ не лежит на S целиком (что означало бы тождественное обращение $f(\lambda, \mu)$ в нуль), то ℓ пересекает S в конечном наборе точек $a_1, a_2, \dots, a_k$, причём если учитывать каждую из них с надлежащей кратностью, то сумма этих кратностей будет равна n. Для этого кратность пересечения поверхности S с прямой ℓ в точке $a_i = (\alpha_i' : \alpha_i'')$ надо определить как показатель, с которым линейный множитель

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \alpha_i' & \alpha_i'' \end{pmatrix} = (\alpha_i'' \lambda - \alpha_i' \mu)$$

входит в разложение $f(\lambda, \mu) = \prod (\alpha_i'' \mu - \alpha_i' \lambda)^{s_i}$ однородного многочлена $f(\lambda, \mu)$ на линейные множители.

Показатель s_i называется *локальным индексом пересечения* поверхности S с прямой ℓ в точке a_i и обозначается $(S, \ell)_{a_i}$. Прямая ℓ называется *касательной* к S в точке $a \in \ell \cap S$, если $(S, \ell)_a \geqslant 2$ или $\ell \subset S$.

По формуле Тэйлора (3-43) коэффициент при $\lambda^{n-m}\mu^m$ в уравнении $f(\lambda,\mu)=0$ равен

$$\binom{n}{m}\tilde{f}(p^{n-m},q^m)=\frac{1}{m!}\,\frac{\partial^m F}{\partial q^i}(p)=\frac{1}{(n-m)!}\,\frac{\partial^{n-m}F}{\partial p^{n-m}}(q)\,. \tag{3-48}$$

и если $p\in S$, то разложение Тейлора в окрестности p начинается как

$$F(p+tq)=t\binom{d}{1}\widetilde{F}(p^{n-1},q)+t^2\binom{d}{2}\widetilde{F}(p^{n-2},q^2)+\ \cdots\ .$$

Таким образом, прямая pq, проходящая через точку $p\in S$, касается S в этой точке тогда и только тогда, когда $\widetilde{F}(p^{n-1},q)=0$.

Если $F(p^{n-1},x)\not\equiv 0$ как линейная форма от x, то точки q, для которых прямая (pq) касается S в точке p, заметут в $\mathbb{P}(V)$ гиперплоскость, задаваемую линейным уравнением $F(p^{n-1},x)=0$. Она называется *касательным пространством* к S в p и обозначается T_pS. Точка p называется в этом случае *гладкой* точкой поверхности S.

Если $F(p^{n-1},x)\equiv 0$, то поверхность S называется *особой* в точке p, а p называется *особой точкой* поверхности S. Согласно (3-48), коэффициентами линейной формы

$$F(p^{n-1},x)=\partial_x F(p)$$

являются частные производные от F, вычисленные в точке p, так что особость p равносильна занулению в p всех частных производных от уравнения гиперповерхности. В этом случае любая проходящая через p прямая имеет с S как минимум двукратное пересечение в p, и касательное пространство T_pS, понимаемое как объединение всех прямых, касающихся S в точке p, совпадает со всем пространством $\mathbb{P}(V)$.

Если q — гладкая точка на S или любая точка вне S, то замыкание множества точек касания с S всевозможных касательных, опущенных на S из точки q образует на поверхности S фигуру, называемую *контуром* поверхности S, видимым из точки q. Видимый контур высекается из S полярной к q относительно S гиперповерхностью $(n-1)$-й степени

$$\mathrm{pl}_q S=\{y\in\mathbb{P}(V)\mid \widetilde{F}(q,y^{n-1})=0\}\,, \tag{3-49}$$

автоматически отличной от всего пространства. Действительно, условие касания прямой (qy) поверхности S в точке y — это $\widetilde{F}(y^{n-1},q)=0$. Если многочлен $G(y)=\widetilde{F}(y^{n-1},q)$ тождественно нулевой (как многочлен от y), то, взяв $y=q$, мы получим $F(q)=0$, откуда $q\in S$. С другой стороны, т. к. все производные от G в этом случае тоже нулевые, мы получаем равенство

$$\widetilde{F}(q^{n-1},y)=\widetilde{G}(q^{n-2},y)=\frac{\partial^{n-2}}{\partial q^{n-2}}G(y)\equiv 0\,,$$

означающее, что q — особая точка поверхности S.

Гиперповерхность $\mathrm{pl}_q^{n-r}=\left\{y\in\mathbb{P}(V)\mid \widetilde{F}(q^{n-r},y^r)=0\right\}$ называется *полярой r-й степени* поверхности S относительно точки q. Если $q\in S$ — гладкая точка, то поляра первой степени — эта касательная гиперплоскость T_qS к S в точке q, а каждая поляра степени $r\geqslant 2$ — это поверхность степени r, которая проходит через q и имеет те же поляры степеней $<r$ относительно точки q, что и исходная поверхность S. Так, квадратичная поляра — это проходящая через q квадрика, имеющая в точке q ту же касательную гиперплоскость, что и S, кубическая поляра — это проходящая через q кубическая поверхность с той же касательной плоскостью и квадратичной полярой, что и S, и т. д.

3.5. Поляризация грассмановых многочленов. Хотя грассманов многочлен $\omega \in \Lambda V^*$ и не задаёт никакой функции на векторах двойственного пространства V, большая часть сказанного в предыдущем разделе имеет смысл и для грассмановых многочленов. А именно, по предл. 3.2 над полем характеристики нуль для любого однородного грассманова многочлена n-той степени $\omega \in \Lambda^n V^*$ существует единственная n-линейная кососимметричная форма $\widetilde{\omega} \in \operatorname{Skew}^n V^* \subset V^{*\otimes n}$, которая проектируется в этот многочлен при факторизации тензорной алгебры по соотношениям антикоммутирования. Эта форма (равно как и соответствующий ей кососимметрический тензор) называется *полной поляризацией* грассманова многочлена ω.

Согласно формуле (3-37) из предл. 3.2 полная поляризация базисного грассманова монома $\omega = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$ равна

$$\widetilde{\omega} = \frac{1}{n!}\, e_{\langle i_1, i_2, \dots, i_n\rangle} = \operatorname{alt}_n \left(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_n} \right) . \tag{3-50}$$

Как и в симметрическом случае, полная поляризация индуцирует двойственность между пространствами грассмановых многочленов на двойственных пространствах, при которой результатом спаривания между многочленами

$$\omega \in \Lambda^n V^* \quad \text{и} \quad \tau \in \Lambda^n V$$

по определению считается полная свёртка их полных поляризаций $\langle \widetilde{\omega} , \tilde{\tau} \rangle$.

Упражнение 3.24. Покажите, что результатом спаривания двух базисных грассмановых мономов $e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$ и $x_J = x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \dots \wedge x_{i_n}$ от двойственных базисных векторов пространств V и V^* (оба набора индексов I и J строго возрастают) является $1/n!$, если $i_\nu = j_\nu \ \forall \nu$, и нуль во всех остальных случаях.

3.5.1. Частные производные в грассмановой алгебре. Рассмотрим отображение

$$\operatorname{pl}_v : \Lambda^n V^* \to \Lambda^{n-1} V^* ,$$

сопоставляющее грассманову многочлену $\omega \in \Lambda^n V^*$ проекцию во внешнюю алгебру тензора, получающегося свёрткой по первому тензорному сомножителю полной поляризации $\widetilde{\omega} \in V^{*\otimes n}$ с вектором $v \in V$. Оно включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} V^{*\otimes n} \supset \operatorname{Skew}^n V^* \arrow[r, "c_v^1"] \arrow[d] & \operatorname{Skew}^{(n-1)} V^* \subset V^{*\otimes(n-1)} \arrow[d] \\ \Lambda^n V^* \arrow[r, "\operatorname{pl}_v"] & \Lambda^{n-1} V^* \end{tikzcd}$$

горизонтальные стрелки которой суть проекции во внешнюю алгебру (отображения факторизации по соотношениям антикоммутирования), а верхняя горизонтальная стрелка — свёртка первого тензорного сомножителя с вектором v. По аналогии с симметрическим случаем, определим *грассманову производную* кососимметричного многочлена $\omega \in \Lambda^n V^*$ в направлении вектора $v \in V$ формулой

$$\partial_v \omega \stackrel{\text{def}}{=} \deg \omega \cdot \operatorname{pl}_v \omega .$$

Из билинейности $\mathrm{pl}_v\omega$ по v и ω мы сразу же получаем, что производная в направлении вектора $v = \sum \alpha_i e_i$ является линейной комбинацией частных производных вдоль базисных векторов:

$$\partial_v = \sum \alpha_i\, \partial_{e_i}\,.$$

Если ω не зависит от x_j, из определений очевидно, что $\partial_{e_j}\omega = 0$. Поэтому ненулевой вклад в производную от базисного монома $\omega = x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_n}$ дадут только дифференцирования $\partial_{e_{i_1}}, \partial_{e_{i_2}}, \dots, \partial_{e_{i_n}}$. Из формулы (3-50) вытекает, что

$$\partial_{e_{i_1}} x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_n} = x_{i_2} \wedge x_{i_3} \wedge \dots \wedge x_{i_n}$$

вне зависимости от того, образуют ли неповторяющиеся индексы $I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ строго возрастающую последовательность или нет. Таким образом, частная производная грассманова монома по направлению первого слева сомножителя действует как $\partial/\partial x_{i_1}$ (т. е. просто уничтожает этот сомножитель). При дифференцировании по остальным направлениям будут появляться знаки:

$$\begin{aligned}\partial_{e_{i_k}} x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_n} &= \partial_{e_{i_k}} (-1)^{k-1} x_{i_k} \wedge x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_{i_{k+1}} \dots x_{i_n} = \\ &= (-1)^{k-1} \partial_{e_{i_k}} x_{i_k} \wedge x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_{i_{k+1}} \dots x_{i_n} = \\ &= (-1)^{k-1} x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_{i_{k+1}} \dots x_{i_n}\,.\end{aligned}$$

Иначе говоря, дифференцирование грассманова монома по направлению k-той слева входящей в него переменной ведёт себя как $(-1)^{k-1}\partial/\partial x_{i_k}$. Удобно воспринимать это явление как *грассманово правило Лейбница*:

Упражнение 3.25. Докажите, что грассмановы частные производные удовлетворяют грассманову правилу Лейбница: $\partial_v(\omega \wedge \tau) = \partial_v(\omega) \wedge \tau + (-1)^{\deg \omega}\omega \wedge \partial_v(\tau)$.

Поскольку $\widetilde{\omega}(u, w, *, \dots, *) = -\widetilde{\omega}(w, u, *, \dots, *)$ операции pl_u и pl_w антикоммутируют относительно композиции: $\mathrm{pl}_u\mathrm{pl}_w\omega = -\mathrm{pl}_w\mathrm{pl}_u\omega$. Поэтому грассмановы частные производные также *антикоммутируют*: $\partial_u\partial_w = -\partial_w\partial_u$. В частности, $\partial_v^2\omega \equiv 0$ для любых v и ω.

3.5.2. Линейный носитель грассманова многочлена $\omega \in \Lambda^n V$ определяется как минимальное подпространство $W \subset V$, такое что $\omega \in \Lambda^n W$, и обозначается $\mathrm{Supp}(\omega)$. Очевидно, что носитель ω совпадает с носителем поляризации $\widetilde{\omega}$, который по теор. 3.1 является образом отображения $V^{*\otimes(n-1)} \to V$, задаваемого полной свёрткой с тензором $\widetilde{\omega}$. В виду кососимметричности тензора $\widetilde{\omega}$ различные отображения свёртки из теор. 3.1 отличаются друг от друга лишь знаком, и поэтому неважно, какую из свёрток взять. Итак, линейный носитель грассманова многочлена степени n порождается векторами

$$\partial_J\omega = \partial_{j_1}\partial_{j_2}\dots\partial_{j_{n-1}}\omega\,,$$

где $\partial_j = \partial_{x_j}$ и $J = (j_1, j_2, \dots, j_{n-1})$ пробегает всевозможные наборы из $(n-1)$ попарно различных индексов[1]. Если разложить ω в сумму мономов

$$\omega = \sum_I a_I e_I = \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_n} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}$$

---

[1] в силу кососимметричности грассмановых частных производных достаточно ограничиться только строго возрастающими наборами

(коэффициенты $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_n}$ кососимметричны по индексам $i_1, i_2, \dots, i_n$), то вклад в $\partial_J \omega$ дадут только мономы $a_I e_I$ с $I \supset J$. В результате, с точностью до общего знака, мы получим

$$\partial_J \omega = \pm \sum_{i \notin J} \alpha_{j_1 j_2 \dots j_{n-1} i}\, e_i\,. \tag{3-51}$$

Отсюда получается, например, следующий критерий разложимости грассманова многочлена.

Предложение 3.4
Следующие условия на грассманов многочлен $\omega = \sum\limits_{i_1 i_2 \dots i_n} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_n} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$, где все коэффициенты $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_n}$ кососимметричны по индексам $i_1, i_2, \dots, i_n$, эквивалентны друг другу:

1) $\omega = u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_n$ для некоторых $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$
2) $u \wedge \omega = 0 \ \ \forall\, u \in \mathrm{Supp}(\omega)$
3) для любых двух наборов неповторяющихся индексов $i_1, i_2, \dots, i_{m+1}$ и $j_1, j_2, \dots, j_{m-1}$ выполнено *соотношение Плюккера*[1] $\sum\limits_{\nu=1}^{m+1} (-1)^{\nu-1} a_{j_1 \dots j_{m-1} i_\nu} a_{i_1 \dots \hat{i}_\nu \dots i_{m+1}} = 0\,.$

Доказательство. Первое условие означает, что многочлен ω лежит в самой старшей внешней степени $\Lambda^{\dim \mathrm{Supp}(\omega)}$ своей линейной оболочки $\mathrm{Supp}(\omega)$. Его равносильность второму условию вытекает из следующего общего факта:

Упражнение 3.26. Докажите, что $\omega \in \Lambda U$ тогда и только тогда однороден степени $\dim U$, когда $u \wedge \omega = 0$ для всех $u \in U$.

Соотношение Плюккера — это координатная запись второго условия для вектора u из формулы (3-51), констатирующая обнуление коэффициента при $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_{n+1}}$ в $u \wedge \omega$. Поскольку векторы (3-51) линейно порождают пространство $\mathrm{Supp}(\omega)$, соотношений Плюккера достаточно для выполнения второго, а с ним и первого условий предложения. □

Упражнение 3.27. Выпишите соотношения Плюккера для грассмановой квадратичной формы ω от четырёх переменных и выведите из них, что такая форма тогда и только тогда является произведением двух линейных, когда $\omega \wedge \omega = 0$.

3.6. Многообразия Грассмана. Грассманиан[2] $\mathrm{Gr}(m, d) = \mathrm{Gr}(m, V)$ определяется как множество всех m-мерных векторных подпространств в данном d-мерном векторном пространстве V. На проективном языке, $\mathrm{Gr}(m, d)$ есть множество всех $(m-1)$-мерных проективных подпространств в $\mathbb{P}_{d-1}$. Алгебраически, грассманианы являются суперкоммутативными аналогами многообразий Веронезе (см. зам. 3.1.). Простейшими примерами грассманианов являются проективные пространства:

$$\mathrm{Gr}(1, V) = \mathbb{P}(V) \quad \text{и} \quad \mathrm{Gr}(d-1, V) = \mathbb{P}(V^*) = \mathbb{P}_{d-1}^{\times}$$

[1] «крышка» в $a_{i_1 \dots \hat{i}_\nu \dots i_{m+1}}$ означает, что индекс i_ν следует пропустить

[2] обозначение $\mathrm{Gr}(m, V)$ используется, когда хотят подчеркнуть природу пространства V

(подпространство $U \subset V$ коразмерности 1 задаётся одним линейным уравнением с точностью до пропорциональности). Вообще, двойственность $U \leftrightarrow \operatorname{Ann} U$ задаёт каноническое отождествление $\operatorname{Gr}(m, V) \simeq \operatorname{Gr}(d-m, V^*)$.

Упражнение 3.28. Пусть $\dim V = 4$. Всякая невырожденная квадрика $q \subset \mathbb{P}(V)$ определяет поляритет $\hat{q} : V \xrightarrow{\sim} V^*$, который, в свою очередь, задаёт автоморфизм грассманиана $\operatorname{Gr}(2,4)$ действующий по описанному выше правилу $U \longmapsto \operatorname{Ann} \hat{q}(U)$. Покажите, что этот автоморфизм отображает α-плоскости в β-плоскости и наоборот.

3.6.1. Плюккерово вложение. Грассманиан $\operatorname{Gr}(m, V)$ вкладывается в $\mathbb{P}(\Lambda^m V)$ при помощи *отображения Плюккера*

$$\mathfrak{u} : \operatorname{Gr}(m, V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^m V)\,, \tag{3-52}$$

которое переводит m-мерное подпространство $U \subset V$ в одномерное подпространство $\Lambda^m U \subset \Lambda^m V$. Если U порождается векторами $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, то с точностью до пропорциональности $\mathfrak{u}(U) = u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_m$ — переход к другому базису в U, скажем к

$$w_i = \sum a_{ij} u_j\,,$$

заменяет $u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_m$ на $w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_m = \det\left(a_{ij}\right) \cdot u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_m$.

Предложение 3.5

Отображение Плюккера (3-52) вкладывает грассманиан в проективное пространство в качестве алгебраического многообразия, задаваемого квадратичными соотношениями (3) из предл. 3.4.

Доказательство. Если подпространство $U \subset V$ имеет базис $u_1, u_2, \dots, u_m$, то отображение Плюккера переведёт его в класс пропорциональности грассманова многочлена

$$u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_m\,.$$

Поэтому образ отображения Плюккера состоит из всех разложимых однородных грассмановых форм степени m, т. е. является пересечением квадрик из п. (3) предл. 3.4. С другой стороны, отображение Плюккера инъективно, поскольку при $U \neq W$ в V имеется базис

$$v_1, v_2, \dots, v_r,\ u_1, u_2, \dots, u_{m-r},\ w_1, w_2, \dots, w_{m-r},\ v_{2m-r},\ v_{2m-r+1},\ \dots\ ,\ v_n\,,$$

в котором $v_1, v_2, \dots, v_r$ образуют базис пересечения $U \cap W$, а

$$v_1, v_2, \dots, v_r,\ u_1, u_2, \dots, u_{m-r} \quad \text{и} \quad v_1, v_2, \dots, v_r,\ w_1, w_2, \dots, w_{m-r}$$

составляют базисы в U и W, так что отображение Плюккера сопоставляет им различные *базисные* мономы

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_r \wedge u_1 \wedge \dots \wedge u_{m-r} \neq v_1 \wedge \dots \wedge v_r \wedge w_1 \wedge \dots \wedge w_{m-r}$$

алгебры ΛV. □

3.6.2. Плюккеровы координаты. На координатном языке, если зафиксировать в V базис $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}$, точку $U \in \mathrm{Gr}(m,d)$ можно представлять $(d \times m)$-матрицей A_U, строки которой являются координатами какого-либо набора векторов $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, порождающих U. Разумеется, такое представление не единственно: выбору другой системы образующих $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ в U будет отвечать другая матрица $A'_U = M_{wu} A_U$, получающаяся из A_U умножением слева на невыродленную квадратную $m \times m$-матрицу перехода[1]. Таким образом, грассманиан $\mathrm{Gr}(m,d)$ представляет собой фактор пространство пространства $\mathrm{Mat}_{m\times d}(\Bbbk)$ по действию $\mathrm{GL}_m(\Bbbk)$ умножениями слева, точно также как $\mathbb{P}_{d-1}$ является фактор пространством пространства координатных строк по действию группы гомотетий $\mathrm{GL}_1(\Bbbk) = \Bbbk^*$. Матрица A_U является, таким образом, прямым аналогом однородных координат.

Упражнение 3.29. Убедитесь, что на координатном языке плюккерово вложение сопоставляет $(d \times m)$-матрице A_U набор всех её $(m \times m)$-миноров и эквивариантно в том смысле, что при умножении A_U справа на $M \in \mathrm{GL}_m$ все $(m \times m)$-миноры умножатся на одну и ту же константу $\det M$.

3.6.3. Стандартное аффинное покрытие и аффинные координаты. Аналогом i-той стандартной аффинной карты U_i проективного пространства[2] $\mathbb{P}_n = \mathrm{Gr}(1,n)$ на произвольном грассманиане $\mathrm{Gr}(m,d)$ является множество $\mathfrak{U}_I$ всех подпространств $U \subset V$, матрица A_U которых содержит невырожденную $(m \times m)$-подматрицу $A_{U,I} \subset A_U$ в столбцах с номерами $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$, так что умножая A_U слева на $M = A_{U,I}^{-1} \in \mathrm{GL}_m$, можно сделать эту подматрицу единичной. Множество $\mathfrak{U}_I$ является полным прообразом относительно плюккерова вложения (3-52) стандартной аффинной карты $U_I \subset \mathbb{P}(\Lambda^m V)$, в которой отлична от нуля I-тая координата (вдоль вектора $e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_m}$).

Иначе можно сказать, что $\mathfrak{U}_I$, состоит из всех $U \subset V$, которые изоморфно проектируются на I-тое координатное подпространство в V, натянутое на базисные векторы $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_m}$, вдоль всех остальных базисных векторов e_j с $j \notin I$. В качестве системы образующих такого подпространства можно взять прообразы базисных векторов e_i, $i \in I$, относительно упомянутой проекции. Соответствующая матрица A_U как раз и будет содержать единичную подматрицу в I-столбцах. Таким образом, такая матрица однозначно определяется по U. Мы будем обозначать её $A^I(U)$ и использовать $m(d-m)$ её матричных элементов $\left(a^I_{ij}(U)\right)$ с $j \notin I$ (стоящих вне столбцов $(i_1, i_2, \dots, i_m)$ в $A^I(U)$) в качестве аффинных координат в карте $\mathfrak{U}_I \subset \mathrm{Gr}(m,d)$. Карты $\mathfrak{U}_I$ называются *стандартными* и покрывают весь $\mathrm{Gr}(m,d)$, когда I пробегает все возрастающие подмножества длины m в $\{1, 2, \dots, d\}$.

Упражнение 3.30. Если вы знакомы с основными понятиями дифференциальной топологии, проверьте, что действительные и комплексные грассманианы являются гладкими (более того, аналитическими) многообразиями.

[1] она определяется соотношением $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = M_{wu} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$

[2] напомним, что она состоит из всех векторов, i-тая координата которых отлична от нуля, так что её можно сделать равной 1, умножая на подходящую константу

3.6.4. Клеточное разбиение. Метод Гаусса для решения систем линейных однородных уравнений показывает, что любое подпространство $U \subset V$ порождается *единственным* набором векторов $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, матрица координат которого имеет *строгий ступенчатый вид* (такой, что в столбцах, содержащих углы ступенек, стоит единичная $(m \times m)$-подматрица).

Упражнение 3.31. Докажите, что различные строго ступенчатые матрицы действительно задают разные подпространства в V.

Таким образом, мы имеем биекцию между $\mathrm{Gr}(m, d)$ и множеством всех строго ступенчатых $(m \times d)$ – матриц. Последнее является дизъюнктным объединением непересекающихся аффинных пространств, т. к. все ступенчатые матрицы с фиксированной *формой ступенек* образуют аффинное пространство, размерность которого равна числу «свободных» клеток, не занятых «обязательными» нулями и единицами, предписанными данной формой ступенек.

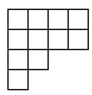
Форма ступенек однозначно определяется возрастающим набором $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ номеров столбцов, в которых располагаются углы ступенек. В частности, имеется ровно $\binom{d}{m}$ разных форм ступенек. Строго ступенчатая матрица с данной формой ступенек I имеет $m\,(d-m)$ клеток вне единичной подматрицы, стоящей в I-столбцах, и в левой части ν-той строки есть ещё $i_\nu - \nu$ «обязательных» нулей, стоящих вне этой единичной подматрицы, Таким образом, матрица с формой ступенек I имеет

$$m\,(d-m) - \sum_{\nu=1}^{m} (i_\nu - \nu) = \dim \mathrm{Gr}(m, d) - \left(|I| - \frac{m\,(m+1)}{2} \right)$$

«свободных клеток», т. е. соответсвующий страт грассманиана представляет собой аффинное пространство коразмерности $|I| - m(m+1)/2$.

Другим общепринятым способом описания формы ступенек являются *диаграммы Юнга*, или *разбиения*. Сопоставим ступенчатой матрице неубывающую последовательность неотрицательных целых чисел $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, в которой число λ_ν указывает на сколько клеток угол ступеньки, стоящей в ν-той *считая снизу* строке, сдвинут вправо от самого левого возможного своего положения. Таким образом, углы ступенек в матрице типа $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ находятся в столбцах с номерами $i_\nu = (m + 1 - \nu) + \lambda_{m+1-\nu}$.

Диаграммы Юнга обычно рисуют в виде выровненных по левому краю клетчатых полосочек, длины которых равны последовательным элементам соответствующего разбиения, например:

$(4, 4, 2, 1) \quad \leftrightsquigarrow$ 

На грассманиане $\mathrm{Gr}(4, 10)$ этой диаграмме отвечает 13-мерное аффинное пространство строго ступенчатых матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & * & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \end{pmatrix}$$

нулевому разбиению $(0,0,0,0)$ отвечает самое левое из всех возможных положений ступенек, которое описывает 24-мерное пространство матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

(стандартную аффинную карту $\mathfrak{U}_{(1,2,3,4)}$ грассманиана $\mathrm{Gr}(4,10)$), а разбиение $(6,6,6,6)$ описывает нульмерное аффинное пространство — ровно одну матрицу, ступеньки которой находятся в самом правом положении:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Упражнение 3.32. Убедитесь, что имеется биекция между m-элементными возрастающими подмножествами $I \subset \{1,2,\dots,d\}$ и диаграммами Юнга $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, содержащимися в прямоугольнике размером $m \times (d-m)$.

Итак, в терминах диаграмм Юнга, грассманиан $\mathrm{Gr}(m,d)$ разлагается в объединение непересекающихся аффинных клеток $\mathring{\sigma}_\lambda$, которые называются (открытыми) *клетками Шуберта* и занумерованы всевозможными диаграммами Юнга, умещающимися в прямоугольнике $m \times (d-m)$. Клетка $\mathring{\sigma}_\lambda$ состоит из всех матриц с формой ступенек λ, изоморфна $\mathbb{A}^{m(d-m)-|\lambda|}$ и имеет коразмерность[1] $|\lambda| = \sum \lambda_\nu$. Замыкание σ_λ клетки $\mathring{\sigma}_\lambda$ называется (замкнутым) *циклом Шуберта*.

Пример 3.9 (гомологии комплексных грассманианов)

Над полем $\mathbb{C}$ циклы Шуберта σ_λ образуют свободный базис группы целочисленных гомологий $\Lambda(m,d) \overset{\text{def}}{=} H_*(\mathrm{Gr}(m,\mathbb{C}^d),\mathbb{Z})$, поскольку построенное нами клеточное разбиение не содержит клеток нечётных (вещественных) размерностей, и все граничные операторы клеточного цепного комплекса будут нулевыми.

Упражнение 3.33*. Опишите из каких клеток σ_μ состоит замыкание данной клетки σ_l и попытайтесь точно вычислить граничный оператор клеточного цепного комплекса на вещественном грассманиане $\mathrm{Gr}(m,\mathbb{R}^d)$.

Топологическое пересечение циклов задаёт на $\mathbb{Z}$-модуле $\Lambda(m,d)$ структуру коммутативного кольца. В частности, гомологический класс пересечения циклов Шуберта можно явно представить в виде целочисленной линейной комбинации циклов Шуберта. В общем случае ответ даётся в виде набора довольно нетривиальных комбинаторных правил преобразования диаграмм, который известен как *исчисление Шуберта*[2]. Говоря формально,

[1]число $|\lambda| = \sum \lambda_\nu$ обычно называют *весом* диаграммы λ; множество всех диаграмм данного веса n описывает все способы разбить n в сумму неупорядоченных целых неотрицательных слагаемых, откуда и происходит термин «разбиение»

[2]см. книги: *W. Fulton Young Tableaux* (CUP, LMS Stud. Texts 35), *Ф. Гриффитс, Дж. Харрис Принципы алгебраической геометрии, I* (Мир, 1982), *У. Фултон Теория пересечений* (Мир, 1989), *И. Макдоналд Симметрические функции и многочлены Холла* (Мир, 1985)

кольцо $\Lambda(m,d)$ изоморфно усечённому кольцу симметрических многочленов — фактору

$$\Lambda(m,d) = \mathbb{Z}[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m]/(\eta_{d-m+1}, \ \dots \ , \eta_{d-1}, \eta_d)$$

где через ε_i обозначен i-тый элементарный симметрический многочлен[1], а через η_i — i-тый полный симметрический многочлен[2], который, согласно основной теореме об элементарных симметрических функциях, является многочленом от ε_i. Циклу Шуберта σ_λ при этом изоморфизме отвечает класс (по модулю $h_j(e)$) симметрического многочлена Шура[3] s_λ (выраженного в виде многочлена от ε_i). Однако доказательство этого, а главное, явное описание соответствующих правил разложения одних многочленов через другие, увело бы нас далеко за рамки этого курса (см. цитированные выше книги). Вместо этого мы, в качестве иллюстрации, явно вычислим кольцо пересечений грассманиана $\mathrm{Gr}(2,4)$.

Упражнение 3.34. Проверьте, что 6 циклов Шуберта на квадрике Плюккера $\mathrm{Gr}(2,4) \simeq P \subset \mathbb{P}_5$ суть: $\sigma_{00} = P$; $\sigma_{22} = p = (0:0:0:0:0:1) \in \mathbb{P}_5$; $\sigma_{10} = P \cap T_p P$; $\sigma_{11} = \pi_\alpha(O)$, где $O = (0:0:0:1) \in \mathbb{P}_3$; $\sigma_{20} = \pi_\beta(\Pi)$, где $\Pi \subset \mathbb{P}_3$ задано уравнением $x_0 = 0$; $\sigma_{21} = \pi_\alpha(O) \cap \pi_\beta(\Pi)$.

Очевидно, что циклы, суммарная коразмерность которых меньше четырёх, имеют нулевые пересечения. Пересечение циклов дополнительной размерности уже было вычислено нами в n° 2.6.1 и упр. 2.21: $\sigma_{10}\sigma_{21} = \sigma_{20}^2 = \sigma_{11}^2 = \sigma_{22}$, и $\sigma_{20}\sigma_{11} = 0$. Те же геометрические соображения показывают, что $\sigma_{10}\sigma_{20} = \sigma_{10}\sigma_{11} = \sigma_{21}$. Для вычисления σ_{10}^2 реализуем σ_{10} как

$$\sigma_{10}(\ell) = P \cap T_{\mathbf{u}(\ell)} P = \{\ell'' \subset \mathbb{P}_3 \mid \ell \cap \ell'' \neq \varnothing\} \ .$$

Тогда σ_{10}^2 гомологичен пересечению $\sigma_{10}(\ell) \cap \sigma_{10}(\ell')$, которое при общем положении пары прямых ℓ, ℓ' представляет собой неособую квадрику Сегре с рис. 2◇11. Однако если продеформировать прямую ℓ' так, чтобы она стала пересекаться с ℓ, эта квадрика продеформируется в своём классе гомологий в пару пересекающихся плоскостей — α-связку с центром $O = \ell \cap \ell'$ и α-связку в плоскости Π, натянутой на ℓ и ℓ': $\sigma_{10}(\ell) \cap \sigma_{10}(\ell') = \pi_\alpha(O) \cup \pi_\beta(\Pi)$, т. е. $\sigma_{10}^2 = \sigma_{20} + \sigma_{11}$.

Например, мы получаем ещё одно, «топологическое» решение задачи о том, сколько прямых пересекает заданные 4 попарно скрещивающиеся прямые в $\mathbb{P}_3$: если данные 4 прямые ℓ_i находятся в достаточно общем положении (таком, что пересечение циклов $\sigma_{10}(\ell_i)$ вычисляет четырёхкратным самопересечением σ_{10}^4), ответ находится формальным вычислением в $\Lambda(2,4)$:

$$\sigma_{10}^4 = (\sigma_{20} + \sigma_{11})^2 = \sigma_{20}^2 + \sigma_{11}^2 = 2\sigma_{22}$$

что означает, что есть ровно 2 таких прямых.

---

[1] т. е. сумма всех полилинеых мономов степени i от m формальных переменных $(x_1, x_2, \dots, x_m)$

[2] т. е. сумма вообще всех мономов степени i от m формальных переменных $(x_1, x_2, \dots, x_m)$

[3] т. е. сумма всех мономов степени $|\lambda|$, которые можно получить перемножением m формальных переменных $(x_1, x_2, \dots, x_m)$, расставленных (с повторениями) во все клетки диаграммы λ так, чтобы номера переменных неубывали слева направо вдоль строк и строго возрастали сверху вниз вдоль столбцов; в частности, $\sigma_{(i)} = \eta_i$, а $\sigma_{(11\dots1)} = \varepsilon_i$

Задачи для самостоятельного решения к §3

Задача 3.1. Пусть $A \in \mathrm{Hom}(U,V) \simeq U^* \otimes V$, $B \in \mathrm{Hom}(V,W) \simeq V^* \otimes W$ — два линейных отображения, разложенные как $A = \sum \alpha_\nu \otimes a_\nu$, $B = \sum \beta_\mu \otimes b_\mu$ с $\alpha_\nu \in U^*$, $a_\nu \in V$, $\beta_\mu \in V^*$, $b_\mu \in W$. Разложите аналогично их произведение $B \circ A \in \mathrm{Hom}(U,W) \simeq U^* \otimes W$.

Задача 3.2. Пусть $e_i \in V$ и $x_i \in V^*$ — двойственные базисы. В какой эндоморфизм пространства V переходит при изоморфизме $\mathrm{End}V \simeq V^* \otimes V$ *тензор Казимира*

$$\sum x_i \otimes e_i = x_1 \otimes e_1 + x_2 \otimes e_2 + \dots + x_n \otimes e_n \in V^* \otimes V$$

Задача 3.3. Рассмотрим корреляцию $\tau : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)^*$, которая переводит вектор $\xi \otimes v \in V^* \otimes V \simeq \mathrm{End}(V)$ в линейную форму $\mathrm{End}(V) \to \Bbbk$, значение которой на разложимом операторе $v' \otimes \xi' \in V^* \otimes V \simeq \mathrm{End}(V)$ равно $\xi(v') \cdot \xi'(v)$. Какой билинейной форме на $\mathrm{Hom}(V,V)$ отвечает эта корреляция? Вырождена ли эта форма? Симметрична ли она? Какая квадратичная форма ей соответствует? Напишите формулу, вычисляющую значение этой формы на операторах A и B, используя только буквы A и B и операции над матрицами (не прибегая к выбору базисов и рассмотрению матричных элементов).

Задача 3.4. Постройте для конечномерных пространств U, V, W канонические изоморфизмы а) $U^* \otimes V^* \simeq (U \otimes V)^*$ б) $\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(U,V),W) \simeq \mathrm{Hom}(V, U \otimes W)$

Задача 3.5. Покажите, что для любых конечномерных векторных пространств U, V над произвольным полем пространства

$$\mathrm{Hom}\big(\, U \otimes \mathrm{Hom}(U,W)\,,\, W\big)\,,\ \mathrm{End}\big(\mathrm{Hom}(U,W)\big)\,,\ \mathrm{Hom}\big(\, U\,,\, W \otimes \mathrm{Hom}(U,W)^*\big)$$

канонически изоморфны друг другу и выясните, какому эндоморфизму пространства $\mathrm{Hom}(U,W)$ отвечает при этом изоморфизме отображение $c : U \otimes \mathrm{Hom}(U,W) \to W$, действующее на разложимые тензоры по правилу $c(u \otimes \varphi) = \varphi(u)$. Верно ли, что оператор $\tilde{c} : U \to \mathrm{Hom}(U,W)^* \otimes W$, который соответствует оператору c, всегда инъективен?

Задача 3.6. Ддля любых конечномерных векторных пространств U, V, W постройте канонический изоморфизм пространства $\mathrm{End}(U \otimes V \otimes W)$ с пространством

$$\mathrm{Hom}\big(\mathrm{Hom}(U,V) \otimes \mathrm{Hom}(V,W)\,,\, \mathrm{Hom}(U,W)\big)$$

и выясните, какому линейному отображению $\mathrm{Hom}(U,V) \otimes \mathrm{Hom}(V,W) \to \mathrm{Hom}(U,W)$ отвечает тождественный эндоморфизм пространства $U \otimes V \otimes W$.

Задача 3.7. Явно предъявите тензор $t \in V^{\otimes 3}$, не являющийся суммой кососимметричного и симметричного.

Задача 3.8. Найдите размерность пространства 3-линейных форм $\varphi : V \times V \times V \to \Bbbk$, удовлетворяющих $\forall\, u,v,w \in V$ условиям: а) $\varphi(u,v,w) = \varphi(v,w,u) = \varphi(w,u,v)$
б) $\varphi(u,v,w) = \varphi(v,u,w)$ в) $\varphi(u,v,v) = \varphi(u,u,v) = 0$ г) $\varphi(u,u,u) = 0$
д) $\varphi(u,v,w) + \varphi(v,w,u) + \varphi(w,u,v) = 0$ е) $\varphi(u,v,w) = \varphi(v,w,u)$

Задача 3.9. Для любых $U, W \subset V$ проверьте, что а) $S^n U \cap S^n W = S^n(U \cap W)$ в $S^n V$

б) $\Lambda^n U \cap \Lambda^n W = \Lambda^n(U \cap W)$ в $\Lambda^n V$.

Задача 3.10. Покажите, что подпространство $\mathcal{I}_{\mathrm{sym}} \cap V \otimes V$ из (3-18), порождающее идеал соотношений коммутирования в TV, и подпространство $\mathcal{I}_{\mathrm{skew}} \cap V^* \otimes V^*$ из (3-21), порождающее идеал соотношений антикоммутирования в тензорной алгебре TV^* двойственного к V пространства V^*, являются аннуляторами друг друга при каноническом спаривании между $V \otimes V$ и $V^* \otimes V^*$, задаваемом полной свёрткой.

Задача 3.11. Выберем какой-нибудь базисный вектор η в одномерном пространстве $\Lambda^n V$ (где $n = \dim V$) и зададим между пространствами $\Lambda^k V$ и $\Lambda^m V$, такими что $k + m = n$, спаривание $\langle *, * \rangle : \Lambda^k V \times \Lambda^m V \to \Bbbk$ правилом

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \big\langle\, \omega_1 \,,\, \omega_2 \,\big\rangle \cdot \eta \,, \quad \text{где } \omega_1 \in \Lambda^k V,\ \omega_2 \in \Lambda^m V\,.$$

а) покажите, что это спаривание невырождено для всех m и k с $k + m = n$

б) выясните, как устроен оператор $v^* : \Lambda^k V \to \Lambda^{k-1} V$, двойственный относительно этого спаривания к оператору левого внешнего умножения на данный вектор $v \in V$:

$$\Lambda^m V \xrightarrow{\xi \mapsto v \wedge \xi} \Lambda^{m+1} V\,.$$

Задача 3.12. Над полем $\Bbbk$ с $\mathrm{char}(\Bbbk) = 0$ постройте канонические изоморфизмы между пространствами:

а) симметричных n-линейных форм $\varphi : V \times V \times \cdots \times V \to \Bbbk$

б) функций $f : V \to \Bbbk$, задаваемых однородным многочленом степени n от линейных координат в каком-нибудь (а значит, и в любом) базисе

в) $\mathrm{Sym}^n(V^*)$ г) $\mathrm{Sym}^n(V)^*$ д) $(S^n V)^*$ е) $(S^n V^*)$

Какие из построенных изоморфизмов останутся таковыми и над всеми полями конечной характеристики?

Задача 3.13. Над полем $\Bbbk$ с $\mathrm{char}(\Bbbk) = 0$ постройте канонические изоморфизмы между пространствами:

а) кососимметричных n-линейных форм $\varphi : V \times V \times \cdots \times V \to \Bbbk$

б) $\mathrm{Skew}^n(V^*)$ в) $\mathrm{Skew}^n(V)^*$ г) $(\Lambda^n V)^*$ д) $(\Lambda^n V^*)$

Какие из построенных изоморфизмов останутся таковыми и над всеми полями конечной характеристики?

Задача 3.14 (принцип Аронгольда). Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем характеристики нуль. Покажите, что пространство симметрических тензоров $\mathrm{Sym}^n(V) \subset V^{\otimes n}$ линейно порождается тензорами вида $v^{\otimes n} = v \otimes v \otimes \cdots \otimes v$ со всевозможными $v \in V$ и явно выразите через тензоры вида $v^{\otimes 3}$ симметрический кубический тензор $u \otimes w \otimes w + w \otimes u \otimes w + w \otimes w \otimes u$, где $u, w \in V$ — два произвольных линейно независимых вектора.

Задача 3.15. Можно ли обратимой линейной заменой переменных преобразовать многочлен $9\,x^3 - 15\,yx^2 - 6\,zx^2 + 9\,xy^2 + 18\,z^2x - 2\,y^3 + 3\,zy^2 - 15\,z^2y + 7\,z^3$ в многочлен от $\leqslant 2$ переменных?

Задача 3.16. Покажите, что многочлен $\det(A)$ на пространстве $n\times n$-матриц имеет следующее разложение Тейлора: $\det(\lambda A + \mu B) = \sum\limits_{p+q=n} \lambda^p \mu^q \cdot \mathrm{tr}\,\left(\Lambda^p A \cdot \Lambda^q B^t\right)$, где $\Lambda^p A$ и $\Lambda^q B$ суть внешние степени[1] матриц A и B.

Задача 3.17. Обозначим через $S \subset \mathbb{P}_N = \mathbb{P}(S^2V^*)$ множество всех вырожденных квадрик на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$. Покажите, что

а) S является алгебраической гиперповерхностью, и точка $Q \in S$ является неособой точкой поверхности S тогда и только тогда, когда соответствующая квадрика $Q \subset \mathbb{P}_n$ имеет единственную особую точку $p \in Q$

б) касательная гиперплоскость $T_QS \subset \mathbb{P}_N$ в такой неособой точке $Q \in S$ состоит из всех квадрик на $\mathbb{P}_n$, проходящих через особую точку p квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$.

Задача 3.18. Найдите все особые точки следующих трёх кривых на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$:

а) $(x_0 + x_1 + x_2)^3 = 27\,x_0x_1x_2$ б) $x^2y + x\,y^2 = x^4 + y^4$ в) $(x^2 - y + 1)^2 = y^2(x^2 + 1)$ (последние две кривые заданы аффинным уравнением в стандартной карте U_0 и речь в задаче идёт про их проективные замыкания).

Задача 3.19. Напишите явную рациональную параметризацию квартики

$$(x_0^2 + x_1^2)^2 + 3\,x_0^2x_1x_2 + x_1^3x_2 = 0\,,$$

в $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, воспользовавшись проекцией из особой точки на какую-нибудь прямую.

Задача 3.20 (комплексы Кошуля и Де Рама). Фиксируем в V базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ и обозначим через x_i и ξ_i классы вектора e_i в симметрической и внешней алгебре соответственно. Покажите, что а) операторы

$$\begin{gathered}\Lambda^{k+1}V \otimes S^{m-1}V \xleftarrow{d} \Lambda^kV \otimes S^mV \xrightarrow{\partial} \Lambda^{k-1}V \otimes S^{m+1}V\\ d = \sum_\nu \xi_\nu \otimes \frac{\partial}{\partial x_\nu} \;:\; \omega \otimes f \longmapsto \sum_\nu \frac{\partial \omega}{\partial \xi_\nu} \otimes x_\nu \cdot f\\ \partial = \sum_\nu \frac{\partial}{\partial \xi_\nu} \otimes x_\nu \;:\; \omega \otimes f \longmapsto \sum_\nu \xi_\nu \wedge \omega \otimes \frac{\partial f}{\partial x_\nu}\end{gathered} \tag{3-53}$$

не зависят от выбора базиса и имеют $d^2 = 0$ и $\partial^2 = 0$

б) оператор $d\partial + \partial d$ действует на $\Lambda^kV \otimes S^mV$ как $(k + m) \cdot \mathrm{Id}$.

в) Вычислите $\ker d/\mathrm{im}\, d$ и $\ker \partial/\mathrm{im}\, \partial$

Задача 3.21 (грассманова экспонента). Над полем *любой* характеристики для *разложимого* $\omega \in \Lambda^{2m}$ положим $e^\omega \overset{\text{def}}{=} 1 + \omega$ и продолжим это определение на разложимые грассмановы многочлены правилом $e^{\sum \omega_i} = \prod e^{\omega_i}$. Покажите, что

а) определение e^f корректно (не зависит ни от способа представления f в виде суммы разложимых мономов, ни от порядка расположения сомножителей в стоящем в правой части *грассмановом* произведении)

б) экспоненциальное отображение $\Lambda^{\mathrm{even}}V \hookrightarrow \Lambda^{\mathrm{even}}V$ является инъективным гомоморфизмом из аддитивной группы всех чётных грассмановых многочленов в мультипликативную группу чётных грассмановых многочленов со свободным членом 1.

Задача 3.22. Выполняется ли в условиях предыдущей задачи над полем характеристики

[1] т. е. матрицы операторов, индуцированных операторами A и B на пространствах однородных грассмановых многочленов от базисных векторов степеней p и q соответственно (см. зад. 3.29); матричные элементы этих матриц суть миноры порядков p и q матриц A и B, занумерованные так, чтобы дополнительные миноры имели одинаковые номера

нуль равенства: а) $\partial_v e^f = e^f \wedge \partial_v f$ б) $e^f = \sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!} f^{\wedge k}$

Задача 3.23. Выясните, разложима ли грассманова кубическая форма от четырёх переменных $-\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3 + 2\,\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_4 + 4\,\xi_1 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4 + 3\,\xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4$ (если да, то напишите какое-нибудь из разложений явно, если нет — объясните, почему).

Задача 3.24 (тензорное произведение операторов). Пусть между векторными пространствами $V_1, V_2, \dots, V_n$ и $W_1, W_2, \dots, W_n$ действуют линейные операторы $f_i : V_i \to W_i$

а) Покажите, что существует единственный линейный оператор

$$f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n : V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n \to W_1 \otimes W_2 \otimes \cdots \otimes W_n$$

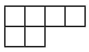
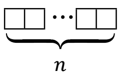
действующий на разложимые тензоры по правилу

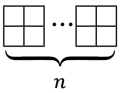
$$v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \longmapsto f_1(v_1) \otimes f_2(v_2) \otimes \cdots \otimes f_n(v_n)$$

б) Пусть $f : U \to U$ имеет матрицу F в базисе $u_1, u_2, \dots, u_n U$, а $g : W \to W$ имеет матрицу G в базисе $w_1, w_2, \dots, w_m$. Опишите матрицу оператора $F \otimes G : U \otimes W \to U \otimes W$ в базисе из векторов $u_\nu \otimes w_\mu$ в терминах матриц F и G.

в) Пусть $F : U \hookrightarrow W$ вложение, $U \neq 0$, и $E : V \xrightarrow{\sim} V$ тождественный оператор. Покажите, что $F \otimes E : U \otimes V \to W \otimes V$ тоже вложение.

Задача 3.25. Опишите цикловой тип[1] тензорного квадрата $N^{\otimes 2} = N \otimes N : V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}$ нильпотентного оператора $N : V \to V$ через цикловой тип N. Если общий случай вызывает затруднения, решите задачу для операторов циклового типа

а)  б) 

в) 

Задача 3.26. Вычислите собственные числа всех тензорных степеней $F^{\otimes n}$ диагонализуемого линейного оператора $F : V \to V$ с собственными числами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Задача 3.27. Дан конечный набор $F_1, F_2, \dots, F_m$ ненулевых линейных операторов на произвольном векторном пространстве V над любым полем $\Bbbk$. Можно ли подобрать ненулевые константы $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \Bbbk$ так, чтобы $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ \lambda_1 F_1^{\otimes n} + \lambda_2 F_2^{\otimes n} + \cdots + \lambda_m F_m^{\otimes n} = 0$.

Задача 3.28. В условиях зад. 3.26 выразите через коэффициенты характеристического многочлена оператора F величины а) $\operatorname{tr} F^{\otimes 2}$ б) $\operatorname{tr} F^{\otimes 3}$ в) $\det F^{\otimes 2}$ г) $\det F^{\otimes 3}$

д) след и определитель оператора $G \mapsto FGF^{-1}$ на $\mathrm{Hom}(V, V)$

е) след и определитель оператора $\varphi(x) \mapsto \varphi\left(F^{-1}x\right)$ на S^2V^*.

Задача 3.29. Убедитесь, что всякий линейный оператор $F : V \to V$ корректно индуцирует операторы $S^kF : S^kV \to S^kV$ и $\Lambda^kF : \Lambda^kV \to \Lambda^kV$, действующие на разложимые тензоры по правилам

$$F(v_1 \cdot v_2 \cdot \cdots \cdot v_k) = F(v_1) \cdot F(v_2) \cdot \cdots \cdot F(v_k)$$
$$F(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k) = F(v_1) \wedge F(v_2) \wedge \cdots \wedge F(v_k)$$

[1] т. е. набор длин жордановых цепочек

Для диагонализуемого оператора F выразите все собственные значения всех степеней S^nF и Λ^nF через собственные значения F и покажите, что над произвольным полем $\Bbbk$ характеристики нуль в кольце $\Bbbk[[t]]$ справедливы формулы

а) $\dfrac{1}{\det(E-tF)} = \sum\limits_{k\geqslant 0} \operatorname{tr}\left(S^kF\right)\cdot t^k$ б) $\det(E+tF) = \sum\limits_{k=0}^{\dim V} \operatorname{tr}\left(\Lambda^kF\right)\cdot t^k$.

Задача 3.30. Докажите для любой квадратной матрицы A равенство $e^{A\otimes E+E\otimes A} = e^A\otimes e^A$, где E — единичная матрица.

Задача 3.31. Докажите в кольце формальных степенных рядов с рациональными коэффициентами от матричных элементов $n\times n$ матрицы A равенство

$$\ln\det(E-A) = \operatorname{tr}\,\ln(E-A)$$

и убедитесь, что над полем $\mathbb{C}$ для всех достаточно малых комплексных A оно выполняется также и численно.

§4. Аффинная алгебраическая геометрия

4.1. Порция коммутативной алгебры. Всюду в этом параграфе слово «кольцо» означает по умолчанию *коммутативное кольцо с единицей*, а гомоморфизмы колец всегда предполагаются отображающими единицу в единицу.

4.1.1. Нётеровость. Любое множество элементов $M \subset A$ коммутативного кольца A порождает в A идеал (M), состоящий из всевозможных конечных сумм

$$g_1 f_1 + g_2 f_2 + \dots + g_m f_m \,,$$

в которых $g_\nu \in A$, а $f_\nu \in M$. Как A-модуль, идеал (M) представляет собою A-линейную оболочку элементов множества M.

Для произвольного идеала $I \subset A$ элементы $f_1, f_2, \dots, f_m \in I$ называются *образующими* этого идеала, если $I = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, т. е. $f_1, f_2, \dots, f_m$ линейно порождают I как A-модуль. Коммутативное кольцо A называется *нётеровым*, если каждый его идеал допускает конечное множество образующих. Условие нётеровости можно переформулировать несколькими равносильными способами:

Лемма 4.1
Следующие свойства коммутативного кольца A попарно эквивалентны:

(1) любое множество элементов $M \subset A$ содержит некоторое конечное подмножество, порождающее тот же идеал, что и M

(2) любой идеал в A допускает конечное множество образующих

(3) для любой бесконечной цепочки вложенных идеалов $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \cdots$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $I_\nu = I_n \quad \forall \, \nu \geqslant n$.

Доказательство. Ясно, что (1) ⇒ (2). Для доказательства импликации (2) ⇒ (3) заметим, что объединение $I = \bigcup_\nu I_\nu$ всех идеалов возрастающей цепочки также является идеалом, и стало быть линейно порождается над A конечным числом элементов $f_1, f_2, \dots, f_m \in I$. Все эти элементы содержатся в некотором идеале I_n из цепочки. Следовательно, $I_\nu = I_n = I$ $\forall \; \nu \geqslant n$. Чтобы вывести (1) из (3), рассмотрим цепочку идеалов $I_n = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, которая строится по индукции следующим образом: в качестве f_1 возьмём произвольный элемент множества M. При $i > 1$ и $(M) \neq (f_1, f_2, \dots, f_{i-1})$ в качестве f_i возьмём любой элемент из M, не лежащий в $(f_1, f_2, \dots, f_{i-1})$. Тогда идеалы $I_{i-1} \subsetneq I_i$ будут строго возрастать, что в силу (3) не может продолжаться бесконечно, т. е. на каком-то шагу мы столкнёмся с включением $M \subset (f_1, f_2, \dots, f_i)$ и равенством $(M) = (f_1, f_2, \dots, f_i)$. □

Теорема 4.1
Если A нётерово, то кольцо многочленов $A[x]$ также нётерово.

Доказательство. Рассмотрим произвольный идеал $I \subset A[x]$ и обозначим через $L_d \subset A$ множество старших коэффициентов всех многочленов степени $\leqslant d$ из I, объединённое с нулём, а через $L_\infty = \bigcup_d L_d$ — множество старших коэффициентов вообще всех многочленов из I, также объединённое с нулём.

Упражнение 4.1. Убедитесь, что все L_d (включая L_∞) являются идеалами в A.

Поскольку кольцо A нётерово, все идеалы L_d конечно порождены. Для каждого d (включая $d = \infty$) обозначим через $f_1^{(d)}, f_2^{(d)}, \dots, f_{m_d}^{(d)} \in A[x]$ многочлены, старшие коэффициенты которых порождают соответствующий идеал L_d в A. Пусть наибольшая из степеней многочленов $f_i^{(\infty)}$, старшие коэффициенты которых порождают идеал $L_\infty \subset A$, равна $D \in \mathbb{N}$. Покажем, что идеал I порождается многочленами f_i^∞ и многочленами $f_j^{(d)}$ с $0 \leqslant d < D$.

Произвольный многочлен $g \in I$ сравним по модулю многочленов $f_1^{(\infty)}, f_2^{(\infty)}, \dots, f_{m_\infty}^{(\infty)}$ с многочленом, степень которого строго меньше D. В самом деле, поскольку старший коэффициент многочлена g лежит в идеале L_∞, он имеет вид $\sum \lambda_i a_i$, где $\lambda_i \in A$, а a_i — старшие коэффициенты многочленов $f_i^{(\infty)}$. При $\deg g \geqslant D$ все разности

$$m_i = \deg g - \deg f_i^{(\infty)}$$

неотрицательны, и мы можем образовать многочлен $h = g - \sum \lambda_i \cdot f_i(x) \cdot x_i^{m_i}$, сравнимый с g по модулю I и имеющий строго меньшую, чем g степень. Заменим g на h и повторим эту процедуру, пока не получим многочлен $h \equiv g \pmod{(f_1^{(\infty)}, f_2^{(\infty)}, \dots, f_{m_\infty}^{(\infty)})}$ степени $\deg h < D$. Теперь старший коэффициент многочлена h находится в идеале L_d с $d < D$. Тем же способом вычитая из него подходящие комбинации многочленов $f_j^{(d)}$ с $0 \leqslant d < D$, мы сможем сокращать его старший член и строго уменьшать степень до тех пор, пока не получим нуль. □

Следствие 4.1
Если A нётерово, то $A[x_1, x_2, \dots, x_n]$ тоже нётерово.

Упражнение 4.2. Покажите, что фактор кольцо нётерова кольца нётерово.

Замечание 4.1. Подкольцо нётерова кольца не обязательно является нётеровым. Так, заменяя в доказательстве теор. 4.1 старшие члены на младшие, нетрудно убедиться, что кольцо формальных степенных рядов $A[[t]]$ с коэффициентами в нётеровом кольце A тоже нётерово. В частности, кольцо $\mathbb{C}[[t]]$ нётерово. Однако его подкольцо, образованное рядами, сходящимися всюду в $\mathbb{C}$, нётеровым не является (см. зад. 4.5 на стр. 114).

4.1.2. Целые элементы. Рассмотрим пару вложенных колец $A \subset B$. Элемент $b \in B$ называется *целым* над A, если он удовлетворяет условиям лем. 4.2.

Лемма 4.2
Следующие три свойства элемента $b \in B$ попарно эквивалентны:

(1) $b^m = a_1 b^{m-1} + \dots + a_{m-1} b + a_m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$ и некоторых $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$;

(2) A-линейная оболочка всех целых неотрицательных степеней b^m, $m \geqslant 0$, линейно порождается над A конечным числом элементов;

(3) существует конечно порождённый A-подмодуль $M \subset B$, такой что $bM \subset M$ и для каждого $b' \in B$ из $b'M = 0$ вытекает, что $b' = 0$ (это последнее условие иногда называют B-*точностью* подмодуля M)

Доказательство. Импликации (1) ⇒ (2) ⇒ (3) очевидны. Покажем, что (3) ⇒ (1). Пусть элементы $e_1, e_2, \dots, e_m$ порождают M над A и A-линейный оператор умножения на b:

$$M \xrightarrow{m \mapsto bm} M$$

действует на них матрицей $Y \in \mathrm{Mat}_{m\times m}(A)$:

$$(be_1, be_2, \dots, be_m) = (e_1, e_2, \dots, e_m) \cdot Y\,. \tag{4-1}$$

Матричное тождество $\det X \cdot E = X \cdot X^\vee$, где X — любая квадратная матрица, $X^\vee$ — присоединённая к ней матрица[1], а E — единичная матрица того же размера, показывает, что образ оператора умножения на $\det X$ содержится в линейной оболочке столбцов матрицы X. В частности, образ оператора умножения всех элементов модуля M на число $\det(bE-Y) \in B$ лежит в линейной оболочке векторов $(e_1, e_2, \dots, e_m) \cdot (bE - Y)$, которая равна нулю в силу (4-1). Поэтому $\det(bE - Y) \cdot M = 0$, а т. к. M B-точен, то и $\det(bE - Y) = 0$. Поскольку все элементы матрицы Y лежат в A, соотношение $\det(bE - Y) = 0$ имеет вид, требуемый в условии (1). □

Определение 4.1
Множество всех $b \in B$, целых над данным подкольцом $A \subset B$, называется *целым замыканием* A в B. Если оно не содержит ничего, кроме элементов самого A, то A называется *целозамкнутым* в B. Наоборот, если все $b \in B$ целы над A, то B называется *целым расширением* кольца A или *целой A-алгеброй*.

Предложение 4.1
Целое замыкание $\overline{A} \subset B$ любого подкольца $A \subset B$ является подкольцом в B. Для любого кольца $C \supset B$ всякий элемент $c \in C$, целый над $\overline{A}$, цел и над A.

Доказательство. Если $p^m = x_{m-1}\, p^{m-1} + \dots + x_1\, p + x_0$, $q^n = y_{n-1}\, q^{n-1} + \dots + y_1\, q + y_0$ для $p, q \in B$, $x_\nu, y_\mu \in A$, то A – модуль, натянутый на $p^i q^j$ с $0 \leqslant i < m$, $0 \leqslant j < n$, является B-точным (ибо содержит 1) и переходит в себя при умножении как на $p+q$, так и на pq. Аналогично, если

$$c^r = z_{r-1}\, c^{r-1} + \dots + z_1\, c + z_0\,, \quad z_k^{m_k} = a_{k,m_k-1}\, z^{m_k-1} + \dots + a_{k,1}\, z_k + a_{k,0}$$

где $0 \leqslant k \leqslant (r-1)$ и все $a_{k,\ell} \in A$, то умножение на c сохраняет B-точный A-подмодуль, порождённый произведениями $c^i z_1^{j_1} z_2^{j_2} \cdots z_r^{j_r}$ с $0 \leqslant i < r$ и $0 \leqslant j_k < m_k$. □

Следствие 4.2 (лемма Гаусса – Кронекера – Дедекинда)
Пусть $A \subset B$ — произвольное расширение коммутативных колец, и $f, g \in B[x]$ — приведённые[2] многочлены положительной степени. Тогда все коэффициенты произведения

$$h(x) = f(x)g(x)$$

целы над A, если и только если все коэффициенты и у $f(x)$, и у $g(x)$ целы над A.

[1] т. е. матрица из алгебраических дополнений к элементам транспонированной матрицы X^t
[2] т. е. со старшим коэффициентом единица

Доказательство. Если коэффициенты f и g целы над A, то коэффициенты fg тоже целы над A, так как целые элементы образуют кольцо. Чтобы показать обратное, рассмотрим какое-нибудь кольцо $C \supset B$, над которым f и g полностью разлагаются на линейные множители[1]: $f(x) = \prod(x - \alpha_\nu)$ и $g(x) = \prod(x - \beta_\mu)$ для некоторых $\alpha_\nu, \beta_\mu \in C$. Если все коэффициенты $h(x) = \prod(x - \alpha_\nu)\prod(x - \beta_\mu)$ целы над A, то α_ν, β_μ целы над целым замыканием A в C, а значит и целы и над самим A. Поскольку коэффициенты f и g являются многочленами от α_ν и β_μ, они тоже целы над A. □

Пример 4.1 ($\mathbb{Z}$ целозамкнуто в $\mathbb{Q}$)
Если дробь p/q с взаимно простыми $p, q \in \mathbb{Z}$ такова, что

$$\frac{p^m}{q^m} = a_1 \frac{p^{m-1}}{q^{m-1}} + \cdots + a_{m-1}\frac{p}{q} + a_m$$

с $a_i \in \mathbb{Z}$, то $p^m = a_1 q p^{m-1} + \cdots + a_{m-1} q^{m-1} p + a_m q^m$ делится на q, что при взаимно простых p и q возможно только если $q = \pm 1$. Таким образом, целое замыкание $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Q}$ есть $\mathbb{Z}$.

Пример 4.2 (целые алгебраические числа)
Пусть $K \supset \mathbb{Q}$ — поле, конечномерное как векторное пространство над $\mathbb{Q}$. Элементы $z \in K$ называются *алгебраическими числами*. Условие (3) из лем. 4.2 означает, что алгебраическое число z является целым над $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда существует инвариантное относительно умножения на z подпространство[2] $W \subset K$ и некоторый базис в нём, такие что оператор умножения на z

$$z : W \xrightarrow{x \mapsto zx} W$$

записывается в этом базисе целочисленной матрицей. Именно таким образом *целые алгебраические числа* и были впервые определены в XIX веке Дедекиндом. Введённое выше понятие *целого элемента* появилось позже как обобщение определения Дедекинда на произвольные коммутативные кольца.

Произвольное алгебраическое число $\xi \in K$ всегда можно сделать целым, умножив его на подходящее число из $\mathbb{Z}$: если ξ удовлетворяет уравнению

$$a_0\xi^n + a_1\xi^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\xi + a_n = 0$$

с целыми коэффициентами $a_i \in \mathbb{Z}$, то n-тая степень числа $\zeta = a_0\xi$ выражается через меньшие свои степени с целыми коэффициентами:

$$\zeta^n = a_0^n\xi^n = -a_0^n a_1\xi^{n-1} - a_0^n a_2\xi^{n-2} - \cdots - a_0^n a_n = -a_0 a_1 \cdot \zeta^{n-1} - a_0^2 a_2 \cdot \zeta^{n-2} - \cdots - a_0^n a_n \cdot \zeta^0 .$$

В частности, у любого конечномерного как векторное пространство над $\mathbb{Q}$ поля $K \supset \mathbb{Q}$ всегда можно выбрать базис над $\mathbb{Q}$, состоящий из целых алгебраических чисел.

[1] такое кольцо C можно построить индукцией по $\deg h$: если $h \neq 1$, то B вкладывается в фактор кольцо $F = B[x]/(h)$ как подкольцо классов констант, и поскольку класс $\varkappa = x \pmod h \in F$ является корнем h, то $h(x) = (x - \varkappa) \cdot h_1(x)$ в $F[x]$, и либо $h_1 = 1$, либо по индукции $h_1 = \prod(x - c_\nu)$ над некоторым кольцом $C \supset F \supset B$

[2] понимаемое как векторное пространство над полем $\mathbb{Q}$

Пример 4.3 (инварианты конечной группы)
Пусть конечная группа G действует на кольце B кольцевыми автоморфизмами

$$g : B \xrightarrow{\sim} B\,, \quad g \in G\,.$$

Подкольцо $B^G \overset{\text{def}}{=} \{a \in B \mid ga = a \;\; \forall\, g \in G\;\}$ называется *кольцом инвариантов* действия G на B. Если G-орбита элемента $b \in B$ состоит из элементов $b_1 = b,\ b_2,\ b_3,\ \dots\ ,\ b_n$, то элемент b является корнем приведённого многочлена

$$B(t) = \prod (t - b_i) \in B^G[t]\,.$$

Таким образом, B цело над подкольцом инвариантов $B^G \subset B$.

Предложение 4.2
Пусть кольцо B цело над подкольцом $A \subset B$. Если B — поле, то A также является полем. Наоборот, если A — поле, и в B нет делителей нуля, то B — поле.

Доказательство. Если B — поле, целое над A, то обратный элемент $a^{-1} \in B$ к произвольному ненулевому $a \in A$ удовлетворяет уравнению

$$a^{-m} = \alpha_1\, a^{1-m} + \cdots + \alpha_{m-1}\, a^{-1} + \alpha_0\,, \quad \alpha_\nu \in A\,.$$

Умножая обе части на a^{m-1}, получаем $a^{-1} = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{m-1}\, a^{m-2} + \alpha_0\, a^{m-1} \in A$.

Обратно, если A — поле, и B — целая A-алгебра, то все неотрицательные целые степени b^i любого $b \in B$ порождают конечномерное векторное пространство V над A. Если $b \neq 0$, и в B нет делителей нуля, то линейный оператор умножения на b: $V \xrightarrow{x \mapsto bx} V$ не имеет ядра, и тем самым биективен. Прообраз $1 \in V$ относительно этого оператора и есть b^{-1}. □

Следствие 4.3
Если поле $\mathbb{F}$ является конечномерным векторным пространством над своим подполем $\Bbbk \subset \mathbb{F}$, то все элементы $\mathbb{F}$ алгебраичны над $\Bbbk$, и $\Bbbk$-подалгебра в $\mathbb{F}$, порождённая любым набором элементов $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{F}$, является полем.

4.1.3. Конечно порождённные $\Bbbk$-алгебры. Когда кольцо $A = \Bbbk$ является полем, всякое содержащее его кольцо $B \supset \Bbbk$ называется *коммутативной* $\Bbbk$*-алгеброй*. Такая $\Bbbk$-алгебра называется *конечно порождённой*, если она является фактором алгебры многочленов $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$, т. е. когда имеется эпиморфизм $\Bbbk$-алгебр $\pi : \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_m] \twoheadrightarrow B$. В этом случае образы переменных $b_i = \pi(x_i) \in B$ называются *образующими* алгебры B, а ядро $\ker \pi \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_m]$ называется *идеалом соотношений* между ними. Отметим, что по сл. 4.1 и упр. 4.2 все конечно порождённые $\Bbbk$-алгебры нётеровы.

Элемент $b \in B$ цел над $\Bbbk \subset B$, если и только если он *алгебраичен* над $\Bbbk$, т. е. удовлетворяет какому-нибудь — необязательно приведённому — уравнению $f(b) = 0$ с ненулевым $f \in \Bbbk[x]$. Алгебраичность элемента $b \in B$ над $\Bbbk$ равносильна тому, что *гомоморфизм вычисления*

$$\mathrm{ev}_b : \Bbbk[x] \xrightarrow{f \mapsto f(b)} B \tag{4-2}$$

имеет ненулевое ядро. Так как $\Bbbk[x]$ — кольцо главных идеалов, это ядро имеет вид

$$\ker(\mathrm{ev}_b) = (\mu_b)\,,$$

где $\mu_b \in \Bbbk[x]$ — (единственный) приведённый многочлен наименьшей степени, аннулирующий b. Он называется *минимальным многочленом* элемента b над $\Bbbk$. Алгебра

$$\Bbbk[b] \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{im} \mathrm{ev}_b = \Bbbk[x]/(\mu_b)$$

это наименьшая по включению подалгебра в B, содержащая поле $\Bbbk$ и элемент b. Она состоит из всех элементов, которые можно получить из b и элементов поля $\Bbbk$ конечным числом сложений и умножений.

Если элемент b алгебраичен, подалгебра $\Bbbk[b] \subset B$ конечномерна как векторное пространство над $\Bbbk$ и $\dim_{\Bbbk} \Bbbk[b] = \deg \mu_b$. Если к тому же в $\Bbbk[b]$ нет делителей нуля, то по предл. 4.2 алгебра $\Bbbk[b]$ является в этом случае полем.

Если элемент b не алгебраичен, он называется *трансцендентным* над $\Bbbk$. В этом случае гомоморфизм вычисления (4-2) является изоморфизмом между $\Bbbk[b]$ и кольцом многочленов $\Bbbk[x]$. В частности, подалгебра $\Bbbk[b]$ при этом не является полем и бесконечномерна как векторное пространство над $\Bbbk$.

Теорема 4.2

Конечно порождённая $\Bbbk$-алгебра B может быть полем только при условии, что все её элементы алгебраичны над $\Bbbk$, и в этом случае она конечномерна как векторное пространство над $\Bbbk$.

Доказательство. Пусть B порождается элементами $b_1, b_2, \dots, b_m$ и является полем. Доказывать алгебраичность B будем индукцией по m. Случай $m = 1$, $B = \Bbbk[b_1]$ уже был разобран выше. Пусть $m > 1$. Если b_m алгебраичен над $\Bbbk$, то $\Bbbk[b_m]$ — поле и B алгебраично над $\Bbbk[b_m]$ по предположению индукции. Тогда по предл. 4.1 алгебра B алгебраична и над $\Bbbk$. Поскольку она получается последовательным присоединением к $\Bbbk$ конечного числа алгебраических элементов $b_1, b_2, \dots, b_m$, алгебра B конечномерна как векторное пространство над $\Bbbk$. Остаётся показать, что элемент b_m и в самом деле алгебраичен над $\Bbbk$.

Если b_m трансцендентен, то гомоморфизм (4-2) продолжается до изоморфизма поля рациональных функций $\Bbbk(x)$ с наименьшим подполем $\Bbbk(b_m) \subset B$, содержащим b_m. Тогда по предположению индукции алгебра B алгебраична над $\Bbbk(b_m)$, и каждая из образующих $b_1, b_2, \dots, b_{m-1}$ удовлетворяет некоторому полиномиальному уравнению с коэффициентами из $\Bbbk(b_m)$. Умножая эти уравнения на подходящие многочлены от b_m, сделаем так, чтобы все их коэффициенты лежали в $\Bbbk[b_m]$, а все их старшие коэффициенты стали равны между собою. Обозначим этот общий для всех уравнений старший коэффициент через $p(b_m) \in \Bbbk[b_m]$. Поле B цело над подалгеброй $F = \Bbbk[b_m\,,\, 1/p(b_m)] \subset B$, порождённой над $\Bbbk$ элементами b_m и $1/p(b_m)$. По предл. 4.2 эта подалгебра F является полем. В частности, элемент $1 + p(b_m)$ обратим в F, т. е. существует такой многочлен $g \in \Bbbk[x_1, x_2]$, что $g\left(\, b_m\,,\, 1/p(b_m)\,\right) \cdot (1 + p(b_m)) = 1$. Записывая рациональную функцию $g\left(\, x\,,\, 1/p(x)\,\right)$ в виде $h(x)/p^k(x)$, где $h \in \Bbbk[x]$ не делится на p, и умножая обе части предыдущего равенства на $p^k(b_m)$, мы получаем на b_m полиномиальное уравнение $h(b_m) \cdot (p(b_m) + 1) = p^{k+1}(b_m)$. Оно нетривиально, поскольку $h(x)(1 + p(x))$ не делится на $p(x)$ в $\Bbbk[x]$. Тем самым, b_m не трансцендентен. $\square$

4.1.4. Базисы трансцендентности. Пусть $\Bbbk$-алгебра A не имеет делителей нуля. Мы обозначаем через Q_A её поле частных. Для любого набора элементов $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$ мы обозначаем через $\Bbbk[a_1, a_2, \dots, a_m] \subset A$ наименьшую по включению $\Bbbk$-подалгебру в A, содержащую поле $\Bbbk$ и этот набор элементов. Она состоит из всех элементов, что можно получить из $a_1, a_2, \dots, a_m$ и элементов поля $\Bbbk$ при помощи конечного числа сложений и умножений, т. е. является образом гомоморфизма вычисления

$$\mathrm{ev}_{a_1,a_2,\dots,a_m} : \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_m] \xrightarrow{f \mapsto f(a_1,a_2,\dots,a_m)} A\,. \tag{4-3}$$

Через $\Bbbk(a_1, a_2, \dots, a_m) \subset Q_A$ мы обозначаем наименьшее подполе, содержащее поле $\Bbbk$ и заданные элементы $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$.

Упражнение 4.3. Покажите, что $\Bbbk(a_1, a_2, \dots, a_m) \simeq Q_{\Bbbk[a_1,a_2,\dots,a_m]}$.

Элементы $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$ называются *алгебраически независимыми* над $\Bbbk$, если между ними нет никаких полиномиальных соотношений вида $f(a_1, a_2, \dots, a_m) = 0$, где $f \in A[x_1, x_2, \dots, x_m]$. Это условие равносильно инъективности гомоморфизма вычисления (4-3), и при его выполнении он продолжается до изоморфизма полей

$$\Bbbk(x_1, x_2, \dots, x_m) \xrightarrow{\sim} \Bbbk(a_1, a_2, \dots, a_m) \subset Q_A\,,$$

переводящего рациональную функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ в её значение $f(a_1, a_2, \dots, a_m)$ на элементах a_i.

Элементы $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$ называются *алгебраически порождающими* Q_A, если поле Q_A алгебраично (или, что то же самое, цело) над подполем $\Bbbk(a_1, a_2, \dots, a_m) \subset Q_A$.

Упражнение 4.4. Убедитесь, что чтобы $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$ алгебраически порождали Q_A, достаточно, чтобы все $a \in A$ были алгебраичны над $\Bbbk(a_1, a_2, \dots, a_m)$.

Алгебраически независимый набор элементов $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$, алгебраически порождающий Q_A, называется *базисом трансцендентности* алгебры A над $\Bbbk$. Любое собственное подмножество базиса трансцендентности алгебраически независимо, однако, не является базисом трансцендентности. Поэтому базис трансцендентности можно иначе определить либо как минимальный по включению набор $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$, алгебраически порождающий Q_A, либо как максимальный по включению алгебраически независимый набор $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$.

Лемма 4.3 (лемма о замене)
Если $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$ алгебраически порождают Q_A, а $u_1, u_2, \dots, u_k \in A$ алгебраически независимы, то $m \geqslant k$ и a_i можно перенумеровать так, что набор элементов

$$u_1, u_2, \dots, u_k,\ a_{k+1},\ a_{k+2},\ \dots\ ,\ a_m$$

(полученный заменой первых k элементов a_i на элементы u_i) также будет алгебраически порождать Q_A.

Доказательство. Так как элемент u_1 алгебраичен над $\Bbbk(a_1, a_2, \dots, a_m)$ имеется полиномиальное соотношение $f(u_1,\ a_1, a_2, \dots, a_m) = 0$, в которое входит u_1. Поскольку u_1 трансцендентен над $\Bbbk$, в это соотношение входит и какой-нибудь из элементов a_i. Перенумеруем их так, чтобы это был a_1. Тогда a_1 алгебраичен над $\Bbbk(u_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots\ ,\ a_m)$, и значит, $u_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots\ ,\ a_m$ алгебраически порождают Q_A. Далее действуем по индукции. Пусть для очередного i в пределах $1 \leqslant i < k$ элементы $u_1, u_2, \dots, u_i,\ a_{i+1},\ a_{i+2},\ \dots\ ,\ a_m$ алгебраически порождают Q_A. Так как u_{i+1} алгебраичен над $\Bbbk(u_1,\ \dots\ ,\ u_i,\ a_{i+1},,\ \dots\ ,\ a_m)$, имеется полиномиальное соотношение $f(u_1, u_2, \dots, u_{i+1}, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_m) = 0$, содержащее u_{i+1}, а поскольку $u_1, u_2, \dots, u_k$ алгебраически независимы, в нём присутствует и какой-нибудь a_j. Поэтому $m > i$, и мы можем занумеровать оставшиеся a_j так, что a_{i+1} окажется алгебраичен над $\Bbbk(u_1, u_2, \dots, u_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3}, \dots, a_m)$, т. е. $u_1, u_2, \dots, u_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3}, \dots, a_m$ будут алгебраически порождать Q_A, что воспроизведёт индуктивное предположение. □

Следствие 4.4
В конечно порождённой $\Bbbk$-алгебре A без делителей нуля любой набор элементов, алгебраически порождающий Q_A, содержит в себе некоторый базис трансцендентности для A, а любой набор алгебраически независимых элементов можно дополнить до базиса трансцендентности, причём все базисы трансцендентности состоят из одинакового числа элементов (это число называется *степенью трансцендентности* алгебры A над $\Bbbk$ и обозначается $\operatorname{tr}\ \deg_{\Bbbk} A$). □

Упражнение 4.5. Покажите, что следующие условия на конечно порождённую $\Bbbk$-алгебру A без делителей нуля эквивалентны друг другу: а) $\operatorname{tr} \deg A = 0$ б) $A = Q_A$ в) A — поле г) $\dim_{\Bbbk} A < \infty$.

4.1.5. Нормальность. Коммутативное кольцо A без делителей нуля называется *нормальным*, если оно целозамкнуто в своём поле частных Q_A. Отметим, что любое поле нормально. Дословно как в прим. 4.1 устанавливается, что любое факториальное[1] кольцо A нормально — приведённый многочлен $t^m + a_1 t^{m-1} + \dots + a_{m-1} t + a_m \in A[t]$ не может аннулировать дробь $p/q \in Q_A$, у которой н.о.д.$(p, q) = 1$ и знаменатель q необратим.

Прямо из определений и сл. 4.2 вытекают следующие полезные свойства, отчасти проясняющие эпитет «нормальный».

Предложение 4.3 (лемма Гаусса – 2)
Пусть A — нормальное кольцо с полем частных Q_A. Если многочлен $f \in A[x]$ раскладывается в $Q_A[x]$ в произведение приведённых множителей, то эти множители лежат в $A[x]$. □

Лемма 4.4
Пусть $\Bbbk = Q_A$ является полем частных коммутативного кольца A без делителей нуля. Если элемент b какой-либо Q_A-алгебры B цел над A, то он алгебраичен над Q_A и все коэффициенты его минимального многочлена $\mu_b \in Q_A[x]$ целы над A.

Доказательство. Поскольку b цел над A, он удовлетворяет уравнению $f(b) = 0$, в котором $f \in A[x]$ приведён. Тем самым, $\ker \operatorname{ev}_b \neq 0$ и $f = \mu_b \cdot q$ в кольце $Q_A[x]$. По сл. 4.2 все коэффициенты μ_b целы над A. □

Следствие 4.5
Пусть A — нормальное кольцо с полем частных Q_A, и B — произвольная Q_A-алгебра. Если элемент $b \in B$ цел над A, то его минимальный многочлен над полем Q_A лежит в $A[x]$. □

[1]напомним, что кольцо A называется *факториальным*, если в нём нет делителей нуля, и каждый необратимый элемент $a \in A$ является произведением конечного числа неприводимых, причём для любых двух разложений $a = p_1 p_2 \cdots p_n = q_1 q_2 \cdots q_m$ в произведение неприводимых множителей выполняются равенства $m = n$ и (после надлежащей перенумерации) $p_i = s_i q_i$ для некоторых обратимых $s_i \in A$; например, факториальными являются все кольца главных идеалов и все кольца многочленов $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ над любым факториальным кольцом K

4.2. Системы полиномиальных уравнений. Любая система полиномиальных уравнений

$$f_\nu(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0\,, \quad f_\nu \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]\,, \tag{4-4}$$

эквивалентна системе, левые части которой образуют в $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ идеал $J = (f_\nu)$, порождённый многочленами f_ν. Эта большая система получается добавлением к уравнениям (4-4) всех уравнений, которые можно получить умножая уравнения (4-4) на произвольные полиномы и складывая их друг с другом. В силу нётеровости кольца многочленов такая большая система, в свою очередь, эквивалентна конечной системе уравнений, левые части которых порождают идеал J, причём этот конечный набор уравнений может быть выбран из уравнений первоначальной системы (4-4). Таким образом, любая (в том числе бесконечная) система полиномиальных уравнений равносильна, с одной стороны, некоторой своей конечной подсистеме, а с другой стороны, системе, левые части которой образуют в кольце многочленов идеал.

Множество $V(J) \overset{\text{def}}{=} \{a \in \mathbb{A}^n \mid f(a) = 0 \quad \forall f \in J\ \}$ всех решений системы (4-4), левые части f_ν которой пробегают идеал $J \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$, называется *аффинным алгебраическим многообразием*, задаваемым идеалом J. Отметим, что это множество может оказаться пустым: например, когда $J = (1) = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ содержит уравнение $1 = 0$.

Для произвольной фигуры $\Phi \subset \mathbb{A}^n$ множество всех многочленов, тождественно зануляющихся на Φ, образует в кольце многочленов идеал, который обозначается

$$I(\Phi) = \{\ f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] \mid f(p) = 0 \quad \forall\, p \in \Phi\ \}\,.$$

Множество нулей $V(I(\Phi))$ этого идеала это наименьшее аффинное алгебраическое многообразие, содержащее Φ.

Для любого идеала $J \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ имеется тавтологическое включение $J \subset I(V(J))$. Вообще говоря, это включение строгое. Например, при $n = 1$ для идеала $J = (x^2)$ многообразие $V(J) = \{0\}$, а идеал $I(V(J)) = (x) \supsetneq (x^2) = J$.

Теорема 4.3 (Nullstellensatz, или теорема Гильберта о нулях)
Для любого идеала $J \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ над произвольным алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ справедливы следующие утверждения

(1) *слабая теорема о нулях*: $V(J) = \varnothing \iff 1 \in J$;

(2) *сильная теорема о нулях*: $f \in I(V(J)) \iff f^m \in J$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Чтобы доказать первое утверждение, достаточно для каждого собственного[1] идеала $J \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ указать точку $p \in \mathbb{A}^n$, в которой зануляются все многочлены из J. Поскольку увеличение идеала J только усложняет эту задачу, мы без ограничения общности можем считать, что идеал J *максимален*, т. е. любой многочлен $g \notin J$ обратим по модулю J. Действительно, если найдётся необратимый по модулю J многочлен $g \notin J$, то уравнение $gh + f = 1$ будет неразрешимо относительно $h \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ и $f \in J$, а значит, идеал $J' = (J, g)$ не будет содержать 1, но будет строго больше, чем J, так что мы можем расширить J до $J' \supsetneq J$. В силу нётеровости кольца многочленов после конечного числа таких расширений мы получим собственный идеал J, такой что $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/J$ является полем, что мы и будем далее предполагать.

[1]т. е. отличного от всего кольца многочленов

Так как поле $\Bbbk[x_1, x_2, \dots , x_n]/J \supset \Bbbk$ конечно порождено как $\Bbbk$-алгебра, каждый элемент ϑ этого поля по теор. 4.2 алгебраичен над $\Bbbk$, т. е. удовлетворяет уравнению $\mu(\vartheta) = 0$, где $\mu(t) \in \Bbbk[t]$ — неприводимый приведённый многочлен. Поскольку поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, многочлен μ линеен, т. е. $\vartheta + c = 0$ для некоторого $c \in \Bbbk$, откуда $\vartheta = c \in \Bbbk$. Таким образом, $\Bbbk[x_1, x_2, \dots , x_n]/J = \Bbbk$, т. е. любой многочлен $f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots , x_n]$ сравним по модулю идеала J с некоторой константой.

Обозначим через $p = (p_1, p_2, \dots , p_n) \in \mathbb{A}^n$ точку, координаты которой суть константы $p_i \in \Bbbk$, с которыми сравнимы по модулю J линейные одночлены x_i. Так как редукция по модулю J $\Bbbk[x_1, x_2, \dots , x_n] \twoheadrightarrow \Bbbk[x_1, x_2, \dots , x_n]/J = \Bbbk$ является *гомоморфизмом*, константа, с которой сравним по модулю J многочлен f, равна значению этого многочлена в p:

$$f(x_1, x_2, \dots , x_n) \equiv f(p_1, p_2, \dots , p_n) \pmod J\,,$$

т. е. гомоморфизм редукции по модулю J представляет собою гомоморфизм вычисления значений многочленов в точке p. Поэтому $f(p) = 0 \ \ \forall f \in J$, что и требовалось.

Докажем теперь второе утверждение. Поскольку при $J = \Bbbk[x_1, x_2, \dots , x_n]$ и $V(J) = \varnothing$ оно тривиально, мы будем считать, что $V(J) \neq \varnothing$ и $J \neq (1)$. Вложим $\mathbb{A}^n$ в большее пространство $\mathbb{A}^{n+1}$ с координатами $(t,\ x_1, x_2, \dots , x_n)$ в качестве гиперплоскости $t = 0$. Если многочлен

$$f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots , x_n] \subset \Bbbk[t,\ x_1, x_2, \dots , x_n]$$

тождественно обращается в нуль на $V(J)$, то идеал $J' \subset \Bbbk[t,\ x_1, x_2, \dots , x_n]$, порождённый J и многочленом $g(t, x) = 1 - t\,f(x)$, имеет пустое множество нулей в $\mathbb{A}^{n+1}$, поскольку $g(x, t) \equiv 1$ вдоль цилиндра $V(J) \subset \mathbb{A}^{n+1}$. Тем самым, по слабой теореме о нулях, идеал J' содержит единицу, т. е. существуют $q_0, q_1, \dots , q_s \in \Bbbk[t,\ x_1, x_2, \dots , x_n]$ и $f_1, f_2, \dots , f_s \in J$, такие что $q_0(x, t) \cdot \big(1 - tf(x)\big) + q_1(t, x) \cdot f_1(x) + \dots + q_s(x, t) \cdot f_s(x) = 1$.

Применим к этому равенству гомоморфизм $\Bbbk[t,\ x_1, x_2, \dots , x_n] \to \Bbbk(x_1, x_2, \dots , x_n)$, заданный правилами $t \mapsto 1/f(x),\quad x_\nu \mapsto x_\nu$. Получим в поле рациональных функций $\Bbbk(x_1, x_2, \dots , x_n)$ равенство $q_1\big(1/f(x),\, x\big) \cdot f_1(x) + \dots + q_s\big(1/f(x),\, x\big) \cdot f_s(x) = 1$. Так как идеал J не содержит единицы, некоторые из $q_\nu\big(1/f(x), x\big)$ имеют нетривиальные знаменатели, причём в качестве общего знаменателя всех $q_\nu\big(1/f(x), x\big)$ можно взять некоторую степень f^m. Умножая обе части равенства на f^m получаем искомое выражение $f^m(x) = \tilde q_1(x) \cdot f_1(x) + \dots + \tilde q_s(x) \cdot f_s(x)$ с $\tilde q_\nu \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots , x_n]$. □

4.2.1. Системы результантов. Рассмотрим систему полиномиальных уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_0, x_1,\ \dots ,\ x_n) = 0 \\ f_2(x_0, x_1,\ \dots ,\ x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_m(x_0, x_1,\ \dots ,\ x_n) = 0 \end{cases} \tag{4-5}$$

в которой многочлены $f_1, f_2, \dots , f_m \in \Bbbk[x_0, x_1, \dots , x_n]$ однородны. Множество ненулевых решений системы (4-5) изображается в проективном пространстве $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : \ \dots\ : x_n)$ проективным алгебраическим многообразием $V(f_1, f_2, \dots , f_m)$ — пересечением m проективных гиперповерхностей $S_i = V(f_i) \subset \mathbb{P}(V)$. При фиксированных размерности n, числе уравнений m и степенях $d_i = \deg f_i$ наборы гиперповерхностей $(S_1, S_2, \dots, S_m) \in \mathbb{P}(S^{d_1}V^*) \times \mathbb{P}(S^{d_2}V^*) \times \cdots \times \mathbb{P}(S^{d_m}V^*)$ с непустым пересечением $\bigcap_i S_i \neq \varnothing$ образуют в произведении проективных пространств фигуру

$$\mathscr{R}(n;\, d_1, d_2, \dots, d_m) \subset \mathbb{P}(S^{d_1}V^*) \times \mathbb{P}(S^{d_2}V^*) \times \cdots \times \mathbb{P}(S^{d_m}V^*) \tag{4-6}$$

которая называется *результантным многообразием* системы (4-5).

Например, если число уравнений равно числу переменных и все уравнения линейны, система (4-5) превращается в систему однородных линейных уравнений с квадратной матрицей

$$\begin{cases} a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + \cdots + a_{0n}x_n = 0 \\ a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

которая имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $\det\left(a_{ij}\right) = 0$. Таким образом, при $m = (n+1)$ и $d_1 = d_2 = \cdots = d_{n+1} = 1$ результантное многообразие

$$\mathscr{R}(n;\, 1,\, 1,\, \dots\, ,\, 1) = V\left(\det(a_{ij})\right) \subset \mathbb{P}_n^* \times \mathbb{P}_n^* \times \cdots \times \mathbb{P}_n^*$$

представляет собою гиперповерхность, заданную одним неприводимым полиномиальным уравнением степени $(n+1)$ на коэффициенты $a_{i,j}$ многочленов $f_1, f_2, \dots, f_{n+1}$.

Покажем, что и в общем случае результантное многообразие (4-6) является *алгебраическим*, т. е. задаётся конечной системой полиномиальных уравнений на коэффициенты многочленов $(f_1, f_2, \dots, f_m)$, однородных по каждому многочлену и зависящих только от n, m и $d_1, d_2, \dots, d_m$. Для этого рассмотрим идеал $I \subset \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]$, порождённый многочленами f_ν. Отсутствие у системы (4-5) ненулевых решений означает, что аффинное алгебраическое многообразие $V(I) \subset \mathbb{A}(V)$ либо пусто, либо совпадает с началом координат. В обоих случаях каждая из координатных функций x_i тождественно зануляется на $V(I)$, и значит, существует m, такое что $x_i^m \in I$ для всех i. Наоборот, если I содержит некоторую степень каждой из переменных, то система уравнений с левыми частями из идеала I содержит уравнения $x_0^m = x_1^m = \cdots = x_n^m = 0$, имеющие только нулевое решение.

Таким образом, отсутствие ненулевых решений у системы (4-5) равносильно тому, что для некоторого m идеал I содержит все x_i^m. Последнее означает, что любой многочлен, степень которого больше $(n+1)(m-1)$, лежит в I, т. е. I содержит все S^dV^* с $d \gg 0$.

Пересечение $I \cap S^dV^*$ представляет собою образ линейного отображения

$$\mu_d \,:\, S^{d-d_1}V^* \oplus S^{d-d_2}V^* \oplus \cdots \oplus S^{d-d_m}V^* \xrightarrow{(g_0, g_1, \dots, g_n) \mapsto \sum g_\nu f_\nu} S^d\,. \tag{4-7}$$

В стандартных базисах из мономов это отображение задаётся матрицей, элементы которой линейно зависят от коэффициентов многочленов f_ν. При $d \gg 0$ размерность левой части (4-7) ведёт себя как $\sum\limits_{\nu=1}^{m} \binom{n+d-d_\nu}{n} \sim \frac{m}{n!}\, d^n$ и становится больше, чем размерность правой части, ведущая себя как $\binom{n+d}{n} \sim \frac{1}{n!}\, d^n$. Поэтому при $d \gg 0$ несюрьективность отображения (4-7), т. е. неравенство $I \cap S^dV^* \neq S^dV^*$, означает зануление всех максимальных миноров матрицы μ_d.

Итак, наличие ненулевых решений у системы (4-5) равносильно обращению в нуль всех максимальных миноров матриц μ_d для всех d, таких что размерность левой части (4-7) не меньше, чем размерность правой. В силу нётеровости кольца многочленов, эта бесконечная система полиномиальных уравнений эквивалентна некоторой конечной подсистеме, называемой *системой результантов*.

4.3. Аффинный алгебро-геометрический словарик. Всюду далее мы по умолчанию считаем, что основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто.

4.3.1. Регулярные отображения. Аффинные алгебраические многообразия, определённые над полем $\Bbbk$, образуют категорию $\mathcal{A}\!f\!f_{\Bbbk}$, морфизмами в которой являются *регулярные отображения*. По определению, отображение множеств $\varphi : X \to Y$ из аффинного алгебраического многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ в аффинное алгебраическое многообразие $Y \subset \mathbb{A}^m$ называется *регулярным* (или *полиномиальным*), если оно переводит точку

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X \subset \mathbb{A}^n$$

в точку $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in Y \subset \mathbb{A}^m$, координаты которой $y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ суть некоторые многочлены $\varphi_i \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$.

В частности, функция $f : X \to \Bbbk$ регулярна, если она является ограничением на X некоторого многочлена $f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Регулярные функции на X образуют конечно порождённую $\Bbbk$-алгебру без нильпотентов[1], которая обозначается

$$\Bbbk[X] \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}\!f\!f_{\Bbbk}}(X, \Bbbk) \simeq \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X)\,, \tag{4-8}$$

где $I(X) = \{f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] \mid f|_X \equiv 0\}$, как и выше, обозначает идеал всех многочленов, тождественно зануляющихся на X. Алгебры и кольца без нильпотентов называются *приведёнными*.

Лемма 4.5

Всякая конечно порождённая приведённая алгебра A над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ является координатной алгеброй $A = \Bbbk[X]$ некоторого аффинного алгебраического многообразия X.

Доказательство. Зададим алгебру A образующими и соотношениями, т. е. представим её в виде фактор алгебры $A = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I$. Приведённость алгебры A означает, что (для любого $f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$) $f^n \in I \Rightarrow f \in I$. Иными словами, идеал соотношений I радикален: $I = \sqrt{I}$ и, по сильной теореме о нулях, $I = I(V(I))$ является идеалом аффинного алгебраического многообразия $X = V(I) \subset \mathbb{A}^n$. $\square$

4.3.2. Гомоморфизм поднятия. Со всяким отображением множеств $\varphi : X \to Y$ связан *гомоморфизм поднятия*, который действует из алгебры $\Bbbk^Y$ *всех* функций на Y со значениями в $\Bbbk$ в алгебру $\Bbbk^X$ *всех* функций X со значениями в $\Bbbk$ и переводит функцию $f : Y \to \Bbbk$ в её композицию с отображением φ:

$$\varphi^* : \Bbbk^Y \xrightarrow{f \mapsto f \circ \varphi} \Bbbk^X\,. \tag{4-9}$$

[1]напомним, что ненулевой элемент a в кольце называется *нильпотентом*, если $a^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$; поскольку любая степень ненулевой функции со значениями в поле также является ненулевой функцией, в кольце таких функций нет нильпотентов

Если отображение алгебраических многообразий $\mathbb{A}^n \supset X \xrightarrow{\varphi} Y \subset \mathbb{A}^m$, заданно правилом $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n))$, то его гомоморфизм поднятия переводит образующую $y_i \pmod{I(Y)}$ координатной алгебры $\Bbbk[Y]$ в функцию

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)|_X .$$

Таким образом, регулярность теоретико множественного отображения $\varphi : X \to Y$ равносильна тому, что гомоморфизм поднятия $\varphi^* : \Bbbk^Y \to \Bbbk^X$ переводит подалгебру регулярных функций $\Bbbk[Y] \subset \Bbbk^Y$ в подалгебру регулярных функций $\Bbbk[X] \subset \Bbbk^X$, т. е. задаёт корректно определённый гомоморфизм $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$. Это наблюдение является общематематическим принципом, выходящим за рамки алгебраической геометрии.

Упражнение 4.6. Проверьте, что теоретико множественное отображение топологических пространств (соотв. гладких или аналитических многообразий) $X \to Y$ является непрерывным (соотв. гладким или аналитическим) тогда и только тогда, когда его гомоморфизм поднятия переводит подалгебру непрерывных функций $C^0(Y) \subset \mathbb{R}^Y$ (соотв. подалгебру гладких или аналитических функций на Y) в подалгебру непрерывных функций $C^0(X)$ (соотв. в подалгебру гладких или аналитических функций на X).

Мы собираемся показать, что категория $\mathcal{Aff}_\Bbbk$ аффинных алгебраических многообразий над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ антиэквивалентна категории $\mathcal{Alg}_\Bbbk$ конечно порождённых приведённых $\Bbbk$-алгебр с единицей. Квазиобратные друг другу антиэквивалентности между и $\mathcal{Alg}_\Bbbk$ задаются функторами

$$X \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{Aff}_\Bbbk}(X, \mathbb{A}^1) = \Bbbk[X] , \tag{4-10}$$

$$A \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{Alg}_\Bbbk}(A, \Bbbk) , \tag{4-11}$$

где объект $\mathbb{A}^1 = \Bbbk$ в первом случае рассматривается как многообразие (аффинная прямая), а во втором — как $\Bbbk$-алгебра. То, что этот объект несёт на себе сразу обе структуры — алгебраического многообразия над $\Bbbk$ и $\Bbbk$-алгебры без нильпотентов — позволяет наделить множество $\operatorname{Hom}_{\mathcal{Aff}_\Bbbk}(X, \mathbb{A}^1)$ из (4-10) (канонической) структурой $\Bbbk$-алгебры, а множество $\operatorname{Hom}_{\mathcal{Alg}_\Bbbk}(A, \Bbbk)$ из (4-11) — (неканонической) структурой алгебраического многообразия. Первое мы уже обсудили выше, вторым займёмся сейчас.

4.3.3. Максимальный спектр. С каждой точкой $p \in X$ аффинного алгебраического многообразия X связан *гомоморфизм вычисления*[1]

$$\mathrm{ev}_p : \Bbbk[X] \xrightarrow{f \mapsto f(p)} \Bbbk .$$

Он переводит единицу в единицу, а значит, эпиморфен и представляет собой факторизацию по модулю своего ядра $\mathfrak{m}_p \overset{\text{def}}{=} \ker \mathrm{ev}_p = I(\{p\}) = \{f \in \Bbbk[X] \mid f(p) = 0\}$

$$\mathrm{ev}_p : \Bbbk[X] \twoheadrightarrow \frac{\Bbbk[X]}{\mathfrak{m}_p} \simeq \Bbbk , \quad f \mapsto f \pmod{\mathfrak{m}_p} .$$

Так как фактор $\Bbbk[X]/\mathfrak{m}_p \simeq \Bbbk$ является полем, идеал $\mathfrak{m}_p \subset \Bbbk[X]$ максимален. Он называется *максимальным идеалом точки* $p \in X$. Множество всех максимальных идеалов данной $\Bbbk$-

[1]это специальный случай гомоморфизма поднятия, отвечающий вложению в X одноточечного множества $\{p\} \hookrightarrow X$

алгебры A называется её *максимальным спектром* и обозначается $\mathrm{Spec}_{\mathrm{m}}(A)$. Каждой точке спектра $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} A$ отвечает гомоморфизм факторизации

$$\pi_{\mathfrak{m}} : A \xrightarrow{a \mapsto a \pmod{\mathfrak{m}}} A/\mathfrak{m} ,$$

принимающий значения в поле $A/\mathfrak{m} \supset \Bbbk$, которое конечно порождено как $\Bbbk$-алгебра. Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ это влечёт за собой равенство $A/\mathfrak{m} = \Bbbk$, что позволяет интерпретировать элементы алгебры A как функции на $\mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} A$ со значениями вполе $\Bbbk$.

Лемма 4.6
Для любого аффинного алгебраического многообразия X над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ соответствия $p \longleftrightarrow \mathrm{ev}_p \longleftrightarrow \mathfrak{m}_p = \ker(\mathrm{ev}_p)$ устанавливают биекции между точками многообразия X, гомоморфизмами $\Bbbk[X] \to \Bbbk$, тождественными на $\Bbbk$, и максимальными идеалами алгебры $\Bbbk[X]$.

Доказательство. Биективность второго соответствия мы уже проверили выше[1]. Сопоставление точке $p \in X \subset \mathbb{A}^n$ её максимального идеала $\mathfrak{m}_p = \ker \mathrm{ev}_p = I(\{p\})$ вкладывает множество точек в множество максимальных идеалов, поскольку для $p \neq q$ всегда (в том числе, над не замкнутым полем) можно указать аффинно линейную функция $f : \mathbb{A}^n \to \Bbbk$ зануляющуюся в p и отличную от нуля в q. Чтобы показать, что над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ любой максимальный идеал $\mathfrak{m} \subset \Bbbk[X] = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X)$ имеет вид $\mathfrak{m}_p = \ker \mathrm{ev}_p$ для некоторой точки $p \in X$, рассмотрим полный прообраз $\widetilde{\mathfrak{m}} \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ идеала $\mathfrak{m}$. Поскольку $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/\widetilde{\mathfrak{m}} = \Bbbk[X]/\mathfrak{m} = \Bbbk$, идеал $\widetilde{\mathfrak{m}}$ является собственным, максимальным и содержит $I(X)$. По слабой теореме о нулях $V(\widetilde{\mathfrak{m}}) \neq \varnothing$, т. е. $\widetilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}_p$ для некоторой точки $p \in \mathbb{A}^n$, причём $p \in X$ (поскольку $I(X) \subset \widetilde{\mathfrak{m}}$), а значит $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_p$ (поскольку $\mathfrak{m}$ максимален). □

4.3.4. Антиэквивалентность категорий. Из лем. 4.5 и лем. 4.6 мы заключаем, что любая приведённая $\Bbbk$-алгебра A имеет вид $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\!f\!f_{\Bbbk}}(X, \Bbbk)$ для некоторого аффинного алгебраического многообразия X, причём при применении к такой алгебре A функтора

$$A \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\!l\!g_{\Bbbk}}(A, \Bbbk)$$

мы получаем в точности множество точек многообразия X. Одновременно с этим, всякому гомоморфизму алгебр $\psi : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$ также отвечает морфизм поднятия

$$X = \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} \Bbbk[X] \xrightarrow{\psi^*} \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}} \Bbbk[Y] = Y ,$$

[1]отметим, что сопоставление $\varphi \mapsto \ker \varphi$ и над *произвольным* (не обязательно алгебраически замкнутым) полем $\Bbbk$ вкладывает множество гомоморфизмов $A \xrightarrow{\varphi} \Bbbk$, тождественных на $\Bbbk$, в множество максимальных идеалов алгебры A; однако, над незамкнутым полем *не все* максимальные идеалы в A являются ядрами гомоморфизмов вычисления со значениями в поле $\Bbbk$; например, ядро гомоморфизма вычисления $\mathrm{ev}_{\sqrt{-1}} : \mathbb{R}[x] \xrightarrow{f \mapsto f\left(\sqrt{-1}\right)} \mathbb{C}$ является максимальным идеалом $\mathbb{R}$-алгебры $\mathbb{R}[x]$, но его нельзя реализовать как ядро вычисления $\mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$, поскольку $\mathrm{codim}_{\mathbb{R}} \ker \mathrm{ev}_{\sqrt{-1}} = 2$

который сопоставляет гомоморфизму вычисления $\mathrm{ev} : \Bbbk[X] \to \Bbbk$ с ядром $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec}_m \Bbbk[X]$ гомоморфизм вычисления $\psi^*(\mathrm{ev}) = \mathrm{ev} \circ \psi$ с ядром $\psi^*\mathfrak{m} = \psi^{-1}(\mathfrak{m}) \in \operatorname{Spec}_m \Bbbk[X]$.

Упражнение 4.7. Убедитесь, что соответствия

$$\operatorname{Hom}_{\mathscr{Aff}_\Bbbk}(X, Y) \xrightleftharpoons{\varphi \leftrightarrow \varphi^*} \operatorname{Hom}_{\mathscr{Alg}_\Bbbk}(\Bbbk[Y], \Bbbk[X])$$

являются взаимно обратными биекциями (т. е. что $\varphi^{**} = \varphi$).

Таким образом, функтор (4-11), сопоставляющий конечно порождённой приведённой коммутативной $\Bbbk$-алгебре A её спектр $\operatorname{Spec}_m A$, устанавливает биекцию между гомоморфизмами алгебр $A \to B$ и (идущими в противоположном направлении) морфизмами их спектров $\operatorname{Spec}_m B \to \operatorname{Spec}_m A$, регулярными в том смысле, что подалгебра $A \subset \Bbbk^{\operatorname{Spec}_m A}$ функций вида

$$a : p \mapsto a \,(\mathrm{mod}\ \mathfrak{m}_p) \in A/\mathfrak{m}_p = \Bbbk$$

переходит в аналогичную подалгебру $B \subset \Bbbk^{\operatorname{Spec}_m B}$. При этом поле $\Bbbk = \Bbbk[*]$, рассматриваемое как алгебра, отвечает одноточечному множеству $* = \operatorname{Spec}_m \Bbbk$, а различные гомоморфизмы $\Bbbk[X] \to \Bbbk$ — различным точкам $* \hookrightarrow X$, что согласуется с равенством

$$\operatorname{Spec}_m X = \operatorname{Hom}_{\mathscr{Aff}_\Bbbk}(*, X) = \operatorname{Hom}_{\mathscr{Alg}_\Bbbk}(\Bbbk[X], \Bbbk)\,.$$

На *множестве* $\operatorname{Spec}_m(A)$ имеется много *разных*, но изоморфных друг другу структур аффинного алгебраического многообразия, если понимать под таковой структурой вложение $\varphi : \operatorname{Spec}_m(A) \hookrightarrow \mathbb{A}^n$, образом которого является алгебраическое многообразие $X \subset \mathbb{A}^n$, а гомоморфизм поднятия $\varphi^* : \Bbbk[\mathbb{A}^n] \to A$ является композицией факторизации $\Bbbk[\mathbb{A}^n] \twoheadrightarrow \Bbbk[X]$ по модулю $I(X)$ и изоморфизма $\Bbbk[X] \xrightarrow{\sim} A$. Фиксация такой структуры равносильна выбору конкретного способа задания алгебры A образующими и соотношениями, т. е. фиксации изоморфизма $A \simeq \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I$. Для того чтобы превратить (4-11) в функтор, принимающий значения в категории аффинных алгебраических многообразий, а не в категории множеств, мы должны зафиксировать для каждой алгебры A одно из таких представлений и наделить $\operatorname{Spec}_m A$ структурой многообразия, индуцированной биекцией $\operatorname{Spec}_m A \simeq V(I) \subset \mathbb{A}^n$.

В результате мы получаем функтор $\operatorname{Spec}_m : \mathscr{Alg}_\Bbbk \to \mathscr{Aff}_\Bbbk$, который оборачивает стрелки и биективно отображает Hom между алгебрами на Hom между соответствующими им многообразиями, и таков, что *каждое* аффинное алгебраическое многообразие оказывается (неканонически) изоморфным какому-нибудь многообразию из образа этого функтора. В этой ситуации говорят, что категории аффинных алгебраических многообразий и приведённых $\Bbbk$-алгебр *антиэквивалентны* посредством *квазиобратных* друг другу функторов (4-11) и (4-10).

Пример 4.4 (прямая и гипербола)

Точки спектра $\operatorname{Spec}_m \Bbbk[t]$ биективно соответствуют точкам аффинной прямой $\mathbb{A}^1 = \Bbbk$, поскольку всякий гомоморфизм $\mathrm{ev} : \Bbbk[t] \to \Bbbk$ однозначно определяется заданием образа[1] $\mathrm{ev}(t) = \lambda \in \Bbbk$. Аналогично, спектр алгебры полиномов Лорана $\operatorname{Spec}_m \Bbbk[t, t^{-1}]$ отождествляется с дополнением до нуля $\mathbb{A}^1 \smallsetminus \{0\} = \Bbbk^*$, поскольку $\lambda = \mathrm{ev}(t) = 1/(\mathrm{ev}(t^{-1}))$ теперь должно быть обратимым элементом поля $\Bbbk$. С другой стороны, алгебру полиномов Лорана

[1]соответственно, максимальные идеалы $\mathfrak{m} \subset \Bbbk[t]$ — это главные идеалы вида $((t - \lambda))$

можно задать образующими и соотношениями: имеется изоморфизм $\varphi^* : \Bbbk[t, t^{-1}] \xrightarrow{\sim} \Bbbk[x, y]/(xy - 1)$, переводящий t в x, а t^{-1} — в y. Правая алгебра — это координатная алгебра гиперболы $xy = 1$ в $\mathbb{A}^2$. Отображение поднятия $\varphi : V(xy - 1) \to \mathbb{A}^1 \smallsetminus \{0\}$ проектирует гиперболу на координатную ось.

Упражнение 4.8. На какую — x или y?

4.3.5. Прямые произведения. В категории $\mathcal{A}\ell g_{\Bbbk}$ имеется *копроизведение*: для любых двух $\Bbbk$-алгебр A, B существует $\Bbbk$-алгебра $A \otimes B$ с парой гомоморфизмов

$$A \xrightarrow{\alpha} A \otimes B \xleftarrow{\beta} B\,, \tag{4-12}$$

которые универсальны[1] в том смысле, что для любой пары гомоморфизмов

$$A \xrightarrow{\varphi} C \xleftarrow{\psi} B$$

существует единственный гомоморфизм $\varphi \otimes \psi : A \otimes B \to C$ со свойствами

$$\varphi = (\varphi \otimes \psi) \circ \alpha\,, \quad \psi = (\varphi \otimes \psi) \circ \beta\,.$$

Как векторное пространство над $\Bbbk$, алгебра $A \otimes B$ является тензорным произведением векторных пространств[2] A и B (например, $\Bbbk[x] \otimes \Bbbk[y] \simeq \Bbbk[x, y]$), умножение задаётся формулой

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2)\,,$$

а универсальные гомоморфизмы (4-12) действуют по правилам

$$A \xrightarrow{\alpha\,:\,a \mapsto a \otimes 1} A \otimes B \xleftarrow{\beta\,:\,b \mapsto 1 \otimes b} B$$

Упражнение 4.9. Выведите из универсальности тензорного произведения векторных пространств выполнение в $A \otimes B$ всех аксиом коммутативной $\Bbbk$-алгебры и универсальное свойство копроизведения алгебр.

При антиэквивалентности (4-10) копроизведение алгебр переходит в прямое произведение аффинных алгебраических многообразий, согласованное с их теоретико-множественным прямым произведением.

Лемма 4.7

Тензорное произведение $A \otimes B$ любых двух конечно порождённых приведённых $\Bbbk$-алгебр является конечно порождённой приведённой $\Bbbk$-алгеброй, максимальный спектр которой является теоретико множественным прямым произведением максимальных спектров сомножителей: $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(A \otimes B) = \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(A) \times \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(B)$.

---

[1] и однозначно определяются этой универсальностью

[2] хотя конечно порождённые $\Bbbk$-алгебры могут быть *бесконечномерны* как векторные пространства, они всегда обладают не более чем счётным базисом (т. е. образованы всевозможными *конечными* линейными комбинациями $\sum \lambda_\nu e_\nu$ каких-то элементов из не более чем счётного набора базисных векторов e_i); большинство конструкций полилинейной алгебры из §3 дословно переносится на такие пространства; так, $A \otimes B$ состоит из всевозможных *конечных* сумм $\sum a_\nu \otimes b_\nu$ с $a_\nu \in A$, $b_\nu \in B$ и однозначно (с точностью до канонического изоморфизма) определяется стандартным универсальным свойством тензорного произведения векторных пространств

Доказательство. Биекция множеств $\mathrm{Spec}_{\mathrm{m}}(A)\times\mathrm{Spec}_{\mathrm{m}}(B)\simeq\mathrm{Spec}_{\mathrm{m}}(A\otimes B)$ переводит любую точку (p,q), представленную парой эпиморфизмов вычисления

$$\mathrm{ev}_p : A\to\Bbbk\,,\quad \mathrm{ev}_q : B\to\Bbbk\,,$$

в эпиморфизм вычисления $A\otimes B\to\Bbbk$, предписываемый универсальным свойством тензорного произведения. Алгебра $A\otimes B$ порождается над $\Bbbk$ всевозможными попарными тензорными произведениями образующих алгебр A и B, коих имеется конечное число. Чтобы показать, что $A\otimes B$ приведена, достаточно убедиться в том, что всякий элемент $h\in A\otimes B$, задающий нулевую функцию на $\mathrm{Spec}_{\mathrm{m}}(A\otimes B)$, равен нулю. Для этого запишем такой элемент h в виде $\sum f_\nu\otimes g_\nu$ с линейно независимыми над $\Bbbk$ элементами $g_\nu\in B$. Из равенства $(\mathrm{ev}_p\otimes\mathrm{ev}_q)h=0$, справедливого для всех $(p,q)\in\mathrm{Spec}_{\mathrm{m}}(A\otimes B)$, вытекает, что при произвольно зафиксированном $p\in\mathrm{Spec}_{\mathrm{m}}A$ линейная комбинация

$$\sum f_\nu(p)\cdot g_\nu\in B$$

является тождественно нулевой функцией на $\mathrm{Spec}_{\mathrm{m}}B$ и, стало быть, равна нулю, т. к. алгебра B приведена. Это означает, что все константы $f_\nu(p)$ нулевые для всех p, т. е. $f_\nu\in A$ задают нулевые функции на $\mathrm{Spec}_{\mathrm{m}}A$. Поскольку A приведена, $f_\nu=0$, а значит, и $h=0$. □

4.4. Топология Зарисского и структурный пучок. На множестве $X=\mathrm{Spec}_{\mathrm{m}}A$ имеется каноническая топология, внутренним образом отражающая алгебраические свойства алгебры A. Эта топология называется *топологией Зарисского* и имеет в качестве замкнутых подмножеств алгебраические подмногообразия в X, т. е. множества вида

$$V(I)=\{x\in X\mid f(x)=0\quad\forall f\in I\ \}=\{\mathfrak{m}\in\mathrm{Spec}_{\mathrm{m}}A\mid I\subset\mathfrak{m}\}\,,$$

для всевозможных идеалов $I\subset A$.

Упражнение 4.10. Проверьте, что $V(I)$ удовлетворяют аксиоматике замкнутых множеств топологии, а именно: $\varnothing=V(1)$; $X=V(0)$; $\bigcap V(I_\nu)=V\left(\sum I_\nu\right)$, где $\sum I_\nu$ состоит из всех конечных сумм $\sum f_\nu$ с $f_\nu\in I_\nu$; $V(I)\cup V(J)=V(IJ)$, где IJ есть идеал, натянутый на все произведения ab с $a\in I$, $b\in J$.

Лемма 4.8
Всякий регулярный морфизм алгебраических многообразий $\varphi : X\to Y$ непрерывен в топологии Зарисского.

Доказательство. Прообраз $\varphi^{-1}(Z)$ замкнутого $Z=V(I)\subset Y$ состоит из всех $x\in X$, для которых $0=f(\varphi(x))=\varphi^*f(x)\quad\forall f\in I$, т. е. является множеством нулей идеала, порождённого в $\Bbbk[X]$ образом $\varphi^*(I)$ идеала I при гомоморфизме поднятия $\varphi^* : \Bbbk[Y]\to\Bbbk[X]$. □

4.4.1. Компактность. Топология Зарисского имеет чисто алгебраическую природу: окрестности Зарисского отражают скорее отношения делимости, нежели «близости», и мы увидим ниже, что её свойства довольно далеки от интуитивно привычных свойств метрической топологии. Первое из отличий скорее приятное. А именно, поскольку всякий идеал $I\subset\Bbbk[X]$ конечно порождён, каждое замкнутое множество является пересечением конечного набора гиперповерхностей: $V(I)=V(f_1,f_2,\dots,f_m)=\bigcap\limits_\nu V(f_\nu)$. Тем самым, любое открытое множество $X \smallsetminus V(I) = \bigcup\limits_{\nu} \left(X \smallsetminus V(f_\nu) \right)$ является *конечным* объединением *главных* открытых множеств

$$\mathscr{D}(f) \stackrel{\text{def}}{=} X \smallsetminus V(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} \,.$$

В частности, любое аффинное многообразие X *компактно* в том смысле, что в каждом его открытом покрытии содержится конечное подпокрытие.

4.4.2. Неприводимые компоненты. Топологическое пространство X, представимое в виде объединения $X = X_1 \cup X_2$ своих собственных замкнутых подмножеств $X_1, X_2 \subsetneq X$, называется *приводимым*. В обычной метрической топологии практически все пространства приводимы. В топологии Зарисского приводимость многообразия X равносильна наличию делителей нуля в алгебре $\Bbbk[X]$. В самом деле, разложение $X = X_1 \cup X_2$, в котором оба $X_i \neq X, \varnothing$, означает существование ненулевых $f_1, f_2 \in \Bbbk[X]$ таких, что f_1 обращается в нуль на X_1, а f_2 обращается в нуль на X_2, и поскольку произведение $f_1 f_2$ тождественно зануляется на всём X, оно равно нулю $\Bbbk[X]$.

В частности, аффинная гиперповерхность $\{g(x) = 0\} \subset \mathbb{A}^n$ неприводима тогда и только тогда, когда g является степенью неприводимого многочлена. Следующая теорема показывает, что неприводимые алгебраические многообразия являются аналогами (степеней) простых чисел в арифметике.

Теорема 4.4
Каждое аффинное алгебраическое множество имеет единственное разложение $X = \bigcup X_i$ в конечное объединение таких собственных замкнутых неприводимых подмножеств[1] $X_i \subset X$, что $X_i \not\subset X_j$ ни при каких $i \neq j$.

Доказательство. Разложение строится индуктивно: если X приводимо, мы в качестве первого шага представим его в виде $X = Z_1 \cup Z_2$, где $Z_{1,2}$ — собственные замкнутые подмножества. Если после нескольких шагов мы получим разложение $X = \bigcup Z_\nu$ в котором все Z_ν неприводимы, процесс заканчивается, и, выкидывая неприводимые компоненты, содержащиеся в других неприводимых компонентах, мы получим требуемое разложение. В противном случае мы делаем следующий шаг, заменяя приводимые Z_ν объединениями их собственных замкнутых подмножеств. Если эта процедура не остановится через конечное число шагов, мы сможем построить бесконечную цепочку строго вложенных замкнутых подмножеств $X \supsetneq Y_1 \supsetneq Y_2 \supsetneq \dots$, идеалы которых составят бесконечную строго возрастающую цепочку $(0) \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots$, что противоречит нётеровости $\Bbbk[X]$.

Единственность следует из того, что включение $Y \subset Z_1 \cup Z_2$ означает разложение $Y = (Y \cap Z_1) \cup (Y \cap Z_2)$, и из неприводимости Y вытекает, что $Y \subset Z_1$ или $Y \subset Z_2$. Тем самым, равенство двух разложений в объединение неприводимых компонент $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n = Y_1 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_m$ означает, что $X_1 \subset Y_\alpha \subset X_\beta$ для некоторых α, β, откуда $X_1 = Y_\alpha = X_\beta$. Выкидываем X_1 и Y_α и применяем предположение индукции к замыканиям того, что осталось. □

Пример 4.5 («большие» открытые множества)
Топология Зарисского довольно груба, в частности, нехаусдорфова. Если X неприводимо, любые два открытых подмножества $U_1, U_2 \subset X$ имеют непустое пересечение, поскольку

[1] они называются *неприводимыми компонентами* многообразия X

в противном случае $X = (X \smallsetminus U_1) \cup (X \smallsetminus U_2)$. Таким образом, всякое непустое открытое подмножество неприводимого многообразия всюду плотно.

Упражнение 4.11. Пусть X неприводимо и $f, g \in \Bbbk[X]$. Докажите, что если $f|_U = g|_U$ для некоторого непустого открытого $U \subset X$, то $f = g$ в $\Bbbk[X]$.

Пример 4.6 (сравнение с топологией произведения)
Топология Зарисского на $X \times Y$ тоньше произведения топологий Зарисского на X и Y, поскольку замкнутые $Z \subset X \times Y$ не исчерпываются произведениями замкнутых подмножеств в X, Y. Например, если $X = Y = \mathbb{A}^1$, то любая кривая, скажем, гипербола $V(xy - 1)$, замкнута в топологии Зарисского на $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^2$, в то время как произведения замкнутых множеств на $\mathbb{A}^1$ исчерпываются конечными объединениями изолированных точек и координатных прямых.

4.4.3. Локальные регулярные функции. Рассмотрим непустое открытое подмножество U аффинного алгебраического многообразия X. Функция $f : U \to \Bbbk$ называется *регулярной* в точке $u \in U$, если существуют $p, q \in \Bbbk[X]$, такие что $q(u) \neq 0$ и $f(x) = p(x)/q(x)$ $\forall\, x \in \mathscr{D}(q) \cap U$. Функции $f : U \to \Bbbk$, регулярные в каждой точке $u \in U$, образуют коммутативное кольцо, обозначаемое $\mathscr{O}_X(U)$ или $\Gamma(U, \mathscr{O}_X)$. Оно называется *кольцом локальных регулярных функций* на $U \subset X$.

Лемма 4.9
Если X неприводимо, то $\mathscr{O}_X(\mathscr{D}(h)) = \Bbbk[X][h^{-1}]$ $\forall h \in \Bbbk[X]$. Иными словами, каждая регулярная функция $f \in \mathscr{O}_X(\mathscr{D}(h))$ записывается в виде $f(x) = r(x)/h^d(x)$ с подходящими $r \in \Bbbk[X]$, $d \in \mathbb{N}$ (в частности, для $h \equiv 1$, мы получим $\mathscr{O}_X(X) = \Bbbk[X]$).

Доказательство. Если $f \in \mathscr{O}_X(\mathscr{D}(h))$, то $\forall\, u \in \mathscr{D}(h)$ найдутся такие $p_u, q_u \in \Bbbk[X]$, что $q_u(u) \neq 0$ и $f(x) = p_u(x)/q_u(x)$ $\forall\, x \in \mathscr{D}(q_u) \cap \mathscr{D}(h)$. Поскольку $\bigcap\limits_{u \in U} V(q_u) \subset V(h)$, по теореме Гильберта о нулях найдутся $u_1, u_2, \dots, u_m \in \mathscr{D}(h)$, такие что $h^d = \sum q_{u_\nu} g_\nu$ для подходящих $g_1, g_2, \dots, g_m \in \Bbbk[X]$ и $d \in \mathbb{N}$. В то же время, для каждого ν мы имеем равенство

$$f(x)\, q_{u_\nu}(x) = p_{u_\nu}(x)\,,$$

которое выполняется для всех $x \in \mathscr{D}(h)$, включая те, для которых $q_{u_\nu}(x) = 0$. Действительно, пусть $q_{u_\nu}(w) = 0$ для некоторого $w \in \mathscr{D}(h)$. Тогда, переписывая $f = p_{u_\nu}/q_{u_\nu}$ как p_w/q_w с $q_w(w) \neq 0$, мы получим $p_{u_\nu}(x)\, q_w(x) = q_{u_\nu}(x)\, p_w(x)$ для всех $x \in \mathscr{D}(h \cdot q_{u_\nu} \cdot q_w)$, а значит (см. упр. 4.11), вообще для всех $x \in X$. В частности,

$$p_{u_\nu}(w) = q_{u_\nu}(w)\, p_w(w)/q_w(w) = 0 = f(w)\, q_{u_\nu}(w)\,.$$

Таким образом, $fh^d = \sum f\, q_{u_\nu}\, g_\nu = \sum p_{u_\nu}\, g_\nu \in \Bbbk[X]$. □

Следствие 4.6
Каждое главное открытое подмножество неприводимого аффинного многообразия X

$$\mathscr{D}(f) = \operatorname{Spec_m} \Bbbk[X][f^{-1}] = \operatorname{Spec_m} \Bbbk[X][t]/(1 - tf)$$

является аффинным алгебраическим многообразием и вкладывается в виде замкнутого подмногообразия в $X \times \mathbb{A}^1$. Включение $\mathscr{D}(f) \hookrightarrow X$ является регулярным морфизмом, отвечающим вложению алгебр $\Bbbk[X] \hookrightarrow \Bbbk[X][f^{-1}]$.

4.4.4. Структурный пучок. Соответствие[1] $\mathcal{O}_X : U \mapsto \mathcal{O}_X(U)$ называется *структурным пучком* аффинного алгебраического многообразия X. Отметим, что функция $f : U \to \Bbbk$ на объединении открытых множеств $U = \bigcup W_i$ регулярна тогда и только тогда, когда регулярно каждое ограничение $f\,\big|_{W_i}$, и наоборот, для любого набора локальных регулярных функций $f_i : W_i \to \Bbbk$, таких что $f_i \equiv f_j$ на $W_i \cap W_j$, существует единственная регулярная функция $f \in \mathcal{O}_X\left(\cup W_i\right)$, ограничение которой на каждое W_i совпадает с f_i — последнее условие, собственно, и означает, что предпучок[2] $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)$ является *пучком*.

Отметим, что хотя сл. 4.6 и утверждает, что открытые множества являются *локально* аффинными, произвольное открытое подмножество U аффинного алгебраического множества X обычно аффинным алгебраическим многообразием *не является*: во-первых, алгебра $\mathcal{O}_X(U)$ может оказаться не конечно порождённой, во-вторых, даже когда она конечно порождена, биекции между $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} \mathcal{O}_X(U)$ и точками U может и не быть.

Упражнение 4.12. Пусть $U = \mathbb{A}^n \smallsetminus O$ — дополнение к началу координат. Покажите, что $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}(U) = \Bbbk[\mathbb{A}^n]$ при $n \geqslant 2$.

Упражнение 4.13. Покажите, что открытое подмножество U аффинного многообразия является аффинным, если и только если найдутся $f_1, f_2, \dots, f_m \in \mathcal{O}_X(U)$, такие что идеал $(f_1, f_2, \dots, f_m) = \mathcal{O}_X(U)$ и каждое из подмножеств $U_i = \{p \in U \mid f_i(p) \neq 0\}$ является аффинным многообразием.

4.5. Геометрические свойства гомоморфизмов алгебр. Любой гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр

$$\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$$

канонически разлагается в композицию эпиморфизма и вложения:

$$\Bbbk[Y] \twoheadrightarrow \Bbbk[Y]/\ker(\varphi^*) = \operatorname{im}(\varphi^*) \hookrightarrow \Bbbk[X]\,. \tag{4-13}$$

Поскольку алгебра $\Bbbk[Y]$ конечно порождена, а алгебра $\Bbbk[X]$ приведена, алгебра

$$\Bbbk[Y]/\ker(\varphi^*) = \operatorname{im}(\varphi^*) \subset \Bbbk[X]$$

тоже является конечно порождённой приведённой $\Bbbk$-алгеброй, отвечающей аффинному многообразию

$$Z = \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}\left(\operatorname{im}(\varphi^*)\right) \simeq V\left(\ker(\varphi^*)\right) \subset Y\,.$$

Инъективность гомоморфизма $\varphi_1^* : \Bbbk[Z] \to \Bbbk[X]$ означает отсутствие ненулевых функций $f \in \Bbbk[Z]$, зануляющихся на $\varphi_1(X) \subset Z$, т. е.*плотность* $\varphi_1(X)$ в Z. Таким образом,

$$Z = \overline{\varphi(X)} \subset Y\,,$$

и алгебраическому разложению (4-13) на геометрическом языке отвечает разложение регулярного морфизма многообразий $\varphi : X \to Y$ в композицию

$$X \xrightarrow{\varphi_1} Z = \overline{\varphi(X)} \xhookrightarrow{\varphi_2} Y\ .$$

[1] понимаемое как контравариантный функтор из категории открытых подмножеств $U \subset X$ в категорию $\Bbbk$-алгебр

[2] напомним, что *предпучком* колец (групп, множеств и т. п.) на топологическом пространстве X называется любой контравариантный функтор из категории открытых подмножеств в X (морфизмами в которой служат вложения) в категорию колец (групп, множеств и т. п.)

4.5.1. Доминантные морфизмы. Если X неприводимо и гомоморфизм алгебр

$$\varphi^* : \Bbbk[Y] \to \Bbbk[X]$$

инъективен, то соответствующий морфизм $\varphi : X \to Y$ называется *доминантным.* Как мы видели выше, инъективность гомоморфизма поднятия означает, что $\overline{\varphi(X)} = Y$. Если X приводимо, то морфизм φ называется *доминантным*, если доминантно его ограничение на *каждую* неприводимую компоненту многообразия X.

4.5.2. Замкнутые вложения. Морфизм $\varphi : X \to Y$ называется *замкнутым вложением*, если его гомоморфизм поднятия $\varphi^* : \Bbbk[Y] \to k[X]$ сюрьективен. Геометрически это значит, что φ является изоморфизмом X с замкнутым подмногообразием $V(\ker \varphi^*) \subset Y$.

Упражнение 4.14. Покажите, что любой доминантный морфизм неприводимых аффинных многообразий $\varphi : X \to Y$ раскладывается в композицию

$$X \overset{\psi}{\hookrightarrow} Y \times \mathbb{A}^m \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} Y \,, \tag{4-14}$$

где ψ — замкнутое вложение, а π — естественная проекция вдоль $\mathbb{A}^m$.

4.5.3. Конечные морфизмы. Наличие регулярного морфизма $\varphi : X \to Y$ позволяет рассматривать $\Bbbk[X]$ как алгебру над $\varphi^*(\Bbbk[Y]) = \Bbbk[\overline{\varphi(X)}] \subset \Bbbk[X]$. Морфизм φ называется *конечным*, если алгебра $\Bbbk[X]$ является целой над своей подалгеброй $\varphi^*(k[Y])$ или, что то же самое, если $\Bbbk[X]$ является конечно порождённым $\varphi^*(k[Y])$-модулем[1].

Лемма 4.10
Любой конечный морфизм $\varphi : X \to Y$ аффинных алгебраических многообразий переводит всякое замкнутое подмножество $Z \subset X$ в замкнутое подмножество $\varphi(Z) \subset Y$, и индуцированный морфизм $\varphi|_Z : Z \to \varphi(Z)$ также будет конечен. Кроме того, если X неприводимо, то $\varphi(Z) \neq Y$ ни для какого замкнутого $Z \neq X$.

Доказательство. Пусть $I = I(Z) \subset \Bbbk[X]$ — идеал замкнутого подмножества $Z \subset X$. Ограничение $\varphi|_Z : Z \to Y$ отвечает сквозному гомоморфизму алгебр

$$\varphi_Z^* : k[Y] \xrightarrow{\varphi^*} k[X] \to \Bbbk[X]/I\,.$$

Поскольку алгебра $\Bbbk[X]$ конечно порождена как $\varphi^*(k[Y])$-модуль, алгебра $\Bbbk[Z] = \Bbbk[X]/I$ также конечно порождена как модуль над $\Bbbk[\,\overline{\varphi(Z)}\,] = \varphi|_Z^*(k[Y]) = \varphi^*(k[Y])/(I \cap \varphi^*(k[Y]))$. Тем самым, $Z \to \overline{\varphi(Z)}$ — конечный морфизм.

Равенство $\varphi(Z) = \overline{\varphi(Z)}$ достаточно доказывать отдельно для каждой неприводимой компоненты Z, причём ввиду предыдущего можно заменить X на Z, а Y на $\overline{Z}$. Итак, достаточно показать, что всякий конечный доминантный морфизм $\varphi : Z \to Y$ неприводимого аффинного многообразия Z сюрьективен. На алгебраическом языке это означает, что для любого расширения алгебр $\Bbbk[Y] \subset \Bbbk[Z]$, такого что $\Bbbk[Z]$ не имеет делителей нуля и является конечно порождённым $\Bbbk[Y]$ модулем, всякий максимальный идеал $\mathfrak{m} \subset \Bbbk[Y]$ имеет вид $\widetilde{\mathfrak{m}} \cap \Bbbk[Y]$ для некоторого собственного максимального идеала $\widetilde{\mathfrak{m}} \subset \Bbbk[Z]$. Если

[1] т. е. существуют $f_1, f_2, \dots, f_m \in \Bbbk[X]$, такие что любой $h \in \Bbbk[X]$ может быть записан как $h = \sum \varphi^*(g_i) f_i$ с подходящими $g_i \in \Bbbk[Y]$

идеал $\mathfrak{m}\cdot\Bbbk[Z]$, порождённый $\mathfrak{m}$ в $\Bbbk[Z]$, является собственным в $\Bbbk[Z]$, то в качестве $\widetilde{\mathfrak{m}}$ можно взять любой максимальный идеал, содержащий $\mathfrak{m}\cdot\Bbbk[Z]$. Таким образом, мы должны показать, что $\mathfrak{m}\cdot\Bbbk[Z]\neq\Bbbk[Z]$ ни для какого максимального идеала $\mathfrak{m}\subset\Bbbk[Y]$.

Пусть это не так, и $\mathfrak{m}\cdot\Bbbk[Z]=\Bbbk[Z]$ для некоторого собственного идеала $\mathfrak{m}\subset\Bbbk[Y]$. Выберем какую-нибудь систему функций $f_1,f_2,\dots,f_m$, порождающих $\Bbbk[Z]$ как $\Bbbk[Y]$-модуль. Согласно нашему предположению, каждую из них можно записать в виде

$$f_i=\sum\beta_{i\nu}f_\nu \quad \text{с} \quad \beta_{i\nu}\in\mathfrak{m}\,.$$

Это означает, что $(f_1,f_2,\dots,f_m)\cdot(E-B)=0$, где $B=\left(\beta_{\nu i}\right)$, а E — единичная $m\times m$ матрица. Иначе говоря, *нулевой* $\Bbbk[Y]$-линейный эндоморфизм модуля $\Bbbk[Z]$ представляется в образующих $\{f_\nu\}$ умножением на матрицу $E-B$. Но тогда умножение на $\det(E-B)$ также аннулирует[1] $\Bbbk[Z]$. Поскольку в $\Bbbk[Z]$ нет делителей нуля, мы заключаем, что $\det(E-B)=0$. Раскладывая определитель, получаем, что $1\in\mathfrak{m}$, т. е. $\mathfrak{m}=\Bbbk[Y]$ не является собственным.

Для доказательства неравенства $\varphi(Z)\neq Y$ при $Z\subsetneq X$ рассмотрим какую-нибудь ненулевую функцию $f\in\Bbbk[X]$, тождественно зануляющуюся вдоль Z, и запишем для неё целое уравнение над $\varphi^*(k[Y])$ минимальной возможной степени:

$$f^m+\varphi^*(g_1)\,f^{m-1}+\,\cdots\,+\varphi^*(g_{m-1})\,f+\varphi^*(g_m)=0\,.$$

Вычисляя его левую часть в точках $z\in Z$, получим $\varphi^*(g_m)|_z=g_m|_{\varphi(Z)}\equiv 0$, но при этом $g_m\neq 0$ в $\Bbbk[Y]$, т. к. иначе мы могли бы сократить уравнение на f (ибо в $\Bbbk[X]$ нет делителей нуля). Таким образом, $\varphi(Z)\subset V(g_m)\subsetneq Y$. $\square$

4.5.4. Нормальные многообразия. Если аффинное многообразие Y неприводимо, алгебра $\Bbbk[Y]$ не имеет делителей нуля. Её поле частных обозначается в этом случае $\Bbbk(Y)$ и называется *полем рациональных функций* на Y. Неприводимое аффинное алгебраическое многообразие Y называется *нормальным*, если алгебра $\Bbbk[Y]$ нормальна, т. е. все рациональные функции $f\in\Bbbk(Y)$, целые над $\Bbbk[Y]$, лежат в $\Bbbk[Y]$. Например, аффинное пространство $\mathbb{A}^n$ нормально (как и любое другое многообразие с факториальной координатной алгеброй).

Лемма 4.11
Всякий сюрьективный конечный морфизм $\varphi\,:\,X\to Y$ в нормальное многообразие Y открыт (т. е. $\varphi(U)$ открыто в Y для любого открытого $U\subset X$) и сюрьективно отображает на Y каждую неприводимую компоненту многообразия X.

Доказательство. Отождествим $\Bbbk[Y]$ с подалгеброй в $\Bbbk[X]$ при помощи φ^*. Для проверки первого утверждения достаточно доказать, что образ каждого главного открытого множества $\mathscr{D}(f)\subset X$ целиком содержит некоторую главную открытую окрестность каждой своей точки. Иначе говоря, для любой функции $f\in\Bbbk[X]$ и любой точки $p\in X$, где $f(p)\neq 0$, мы должны подобрать функцию $a\in\Bbbk[Y]$, такую что $\varphi(p)\in\mathscr{D}(a)\subset\varphi(\mathscr{D}(f))$ на Y. Для этого рассмотрим отображение

$$\psi=\varphi\times f\,:\,X\xrightarrow{p\mapsto(\varphi(p),f(p))}Y\times\mathbb{A}^1\,.$$

[1]в силу равенства $\det(E-B)\cdot E=(E-B)\cdot(E-B)^\vee$, где $(E-B)^\vee$ — присоединённая к $(E-B)$ матрица (транспонированная к матрице алгебраических дополнений)

Оно регулярно и конечно, поскольку гомоморфизм поднятия

$$\psi^* : \Bbbk[Y \times \mathbb{A}^1] = \Bbbk[Y][t] \xrightarrow{t \mapsto f} k[X]$$

есть ни что иное, как вычисление полиномов от t с коэффициентами в $\Bbbk[Y]$ на элементе $f \in \Bbbk[X]$, и конечно порождённый $\Bbbk[Y]$-модуль $\Bbbk[X]$ будет тем более конечно порождён как модуль над $\Bbbk[Y][t]$. Согласно сл. 4.5, минимальный многочлен μ_f элемента f над полем частных $\Bbbk(Y)$ алгебры $\Bbbk[Y]$ лежит в координатной алгебре $\Bbbk[Y]$. Поэтому $\ker \psi^* = (\mu_f)$ является главным идеалом в $\Bbbk[Y][t]$. Иными словами, образ морфизма ψ является в $Y \times \mathbb{A}^1$ гиперповерхностью, заданной уравнением $\mu_f = 0$. Пусть

$$\mu_f = \mu_f(y;t) = t^m + a_1(y)\, t^{m-1} + \cdots + a_m(y)\,.$$

Принадлежность точки $q \in Y$ образу множества $\mathscr{D}(f)$ означает наличие у многочлена $\mu_f(q;t)$ ненулевого корня t, что равносильно не обращению в нуль в этой точке хотя бы одного из коэффициентов a_i. В частности, $a_i(\varphi(p)) \neq 0$ для для какого-то i. Но тогда

$$\varphi(p) \in \mathscr{D}(a_i) \subset \varphi(\mathscr{D}(f))\,,$$

что и требовалось. Что касается ограничения φ на компоненты неприводимого разложения $X = \cup X_\nu$, то для каждого i множество

$$U_i = X \smallsetminus \bigcup_{\nu \neq i} X_\nu = X_i \smallsetminus \bigcup_{\nu \neq i} (X_i \cap X_\nu)$$

открыто в X и плотно в X_i. Поскольку $\varphi(U_i)$ открыто, а Y неприводимо, $\varphi(U_i)$ плотно в Y, т. е. $\varphi(X_i) = \overline{\varphi(U_i)} = Y$. □

Задачи для самостоятельного решения к §4

Задача 4.1. Пусть элементы $m_1, m_2, \dots, m_r$ порождают модуль M над кольцом A, и эндоморфизм $\varphi : M \to M$ действует на них по правилу

$$\varphi : m_i \mapsto \sum_j m_j \cdot \varphi_{ji}\,,$$

где $\left(\varphi_{ji}\right) \mathrm{Mat}_{r\times r}(A)$. Докажите, что а) $\varphi(M) \supset \det\left(\varphi_{ji}\right) \cdot M$ б) $\mathfrak{a} \cdot M \neq M$ ни для какого собственного идеала $\mathfrak{a} \subset A$ при условии, что M точен[1].

Задача 4.2. Пусть $d \in \mathbb{Z}$ не делится на квадраты. Опишите целое замыкание $\mathbb{Z}$ в

$$\mathbb{Q}[\sqrt{d}] \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathbb{Q}[x]}{(x^2 - d)}\,.$$

[1]т. е. $aM = 0 \Rightarrow a = 0$ для $a \in A$

Если общий случай вызывает затруднения, рассмотрите сначала по-отдельности случаи $d = -1$, $d = 2$, $d = 3$ и $d = 5$.

Задача 4.3. Покажите, что факториальное кольцо целозамкнуто в своём поле частных.

Задача 4.4. Цело ли кольцо A над своим подкольцом $B \subset A$, если

а) $A = \Bbbk[x, y]$ (где $\Bbbk$ — поле), $B = \{f \in A \,:\, \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{(0,0)} f = 0\}$

б) $A = \mathscr{C}^0\left(\mathbb{R}^2\right)$ (кольцо непрерывных функций), $B = \{f \in A \mid f(1, 0) = f(0, 1)\}$

Задача 4.5. Какие из перечисленных колец нётеровы: а) $A[[t]]$, где A нётерово

б) $f(z) \in \mathbb{C}[[z]]$, сходящиеся всюду в $\mathbb{C}$ в) $\{p(z)/q(z) \in \mathbb{C}(z) \mid q(z) \neq 0$ при $|z| \leqslant 1\}$

г) $\{f \in \mathbb{C}[x, y] \mid \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} f = 0$ при $0 \leqslant i + j \leqslant n\}$ ($n \in \mathbb{N}$ фиксировано).

д*) произвольная подалгебра $A \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$, имеющая конечную коразмерность как векторное пространство над полем $\Bbbk$.

Задача 4.6. Пусть A — нормальное кольцо[1] с полем частных $\mathbb{F}$. Покажите, что

а) произведение двух приведённых многочленов из $\mathbb{F}[x]$ лежит в $A[x]$ тогда и только тогда, когда оба множителя лежат в $A[x]$

б) если элемент b какой-либо $\mathbb{F}$-алгебры B цел над A, то его минимальный многочлен над $\mathbb{F}$ лежит в $A[x]$ (т. е. является заодно и уравнением целой зависимости).

Задача 4.7. Покажите, что кольцо многочленов над нормальным кольцом тоже нормально.

Задача 4.8. Покажите, что любое поле, конечно порождённое как $\mathbb{Z}$-алгебра[2], является конечным множеством.

Задача 4.9. Пусть $B \supset A$ — целое расширение колец. Покажите, что любой гомоморфизм $A \to \Bbbk$ в алгебраически замкнутое поле $\Bbbk$ продолжается до гомоморфизма $B \to \Bbbk$.

Задача 4.10. Для двух идеалов $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ кольца A обозначим через $\mathfrak{ab}$ идеал, порождённый произведениями ab с $a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}$. Верно ли что а) всевозможные произведения ab уже и сами по себе образуют идеал б) $\mathfrak{ab} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ в) $\mathfrak{ab} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, когда $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = A$.

Задача 4.11. Покажите, что *радикал* $\sqrt{I} \overset{\text{def}}{=} \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} \,:\, a^n \in I\}$ любого идеала $I \subset A$ также является идеалом.

Задача 4.12. Для пары идеалов I, J кольца $A = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ положим

$$K = \{ab \mid a \in I,\ b \in J\}$$

и обозначим через IJ идеал, порождённый множеством K. Верно ли, что

а) $K = IJ$ итак уже является идеалом б) $K = I \cap J$ (кстати, является ли идеалом $I \cap J$?)

в) $IJ = I \cap J$ г) $1 \in I + J \Rightarrow IJ = I \cap J$ д) $V(I) \cup V(J) = V(IJ) = V(I \cap J)$

е) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J}$ ж) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I}\sqrt{J}$ з) $(I = \sqrt{I}\ \&\ J = \sqrt{J}) \Rightarrow IJ = \sqrt{IJ}$.

Задача 4.13. Пусть $J = (xy, yz, zx) \subset \Bbbk[x, y, z]$. Опишите $V(J) \subset \mathbb{A}^3$ и $I(V(J)) \subset \Bbbk[x, y, z]$. Можно ли задать многообразие $V(J)$ двумя полиномиальными уравнениями?

Задача 4.14. Найдите какой-нибудь многочлен $f \in I(V(J)) \smallsetminus J$ для идеала

$$J = (x^2 + y^2 - 1, y - 1) \subset \Bbbk[x, y]\,.$$

[1] напомню (см. n° 4.1.5 на стр. 98), что кольцо называется *нормальным*, если в нём нет делителей нуля и оно целозамкнуто в своём поле частных

[2] с тавтологическим действием $m \cdot a \overset{\text{def}}{=} a + a + \cdots + a$ (сумма m одинаковых слагаемых)

Задача 4.15. Опишите $V(J) \subset \mathbb{A}^3$ и $I(V(J)) \subset \Bbbk[x, y, z]$ для идеала
а) $J = (xy, (x-y)z)$ б) $J = (xy + yz + zx, x^2 + y^2 + z^2)$

Задача 4.16. Пусть $A = \mathscr{C}^0(X)$ — кольцо непрерывных (вещественных или комплексных) функций на компактном хаусдорфовом топологическом пространстве X. Покажите, что отображение

$$X \xrightarrow{x \mapsto \ker \mathrm{ev}_x} \mathrm{Spec}_m A$$

биективно и топология Зарисского на $\mathrm{Spec}_m A$ индуцирует исходную топологию на X.

Задача 4.17. Всякий ли простой идеал кольца $\mathscr{C}^0([0, 1])$ вещественных непрерывных функций на отрезке максимален?

Задача 4.18. Пусть $X = \mathrm{Spec}_m A$ — аффинное алгебраическое многообразие. Покажите, что разложимость A в прямое произведение[1] $A = A_1 \times A_2$ равносильна разложимости X в дизъюнктное объединение $X = X_1 \sqcup X_2$ двух собственных замкнутых подмножеств.

Задача 4.19. Пусть над алгебраически замкнутым полем многочлен f обращается в нуль в каждой точке гиперповерхности $V(g) \subset \mathbb{A}^n$. Покажите, что каждый неприводимый сомножитель многочлена g делит многочлен f.

Задача 4.20. Докажите, что максимальный спектр любой конечномерной как векторное пространство над $\Bbbk$ $\Bbbk$-алгебры является конечным множеством и выведите отсюда, что любой конечный морфизм имеет не более, чем конечные слои.

Задача 4.21. Докажите, что проекция аффинной гиперповерхности $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ из любой точки $p \notin V(f)$ на любую гиперплоскость $H \not\ni p$ доминантна.

Задача 4.22. Покажите, что образ регулярного доминантного морфизма содержит открытое плотное множество.

Задача 4.23 (лемма Нётер о нормализации). Покажите, что любая гиперповерхность $V(f)$ в $\mathbb{A}^n$ допускает конечную сюрьекцию на некоторую гиперплоскость $\mathbb{A}^{n-1} \subset \mathbb{A}^n$.

Задача 4.24. Для аффинных алгебраических многообразий $X \subset \mathbb{A}^n$, $Y \subset \mathbb{A}^m$, уравнения которых известны, опишите систему уравнений, реализующих $X \times Y$ в качестве подмногообразия в $\mathbb{A}^{n+m}$ и покажите, что $X \times Y$ неприводимо, если X и Y неприводимы.

Задача 4.25. Может ли алгебра регулярных функций $\mathscr{O}_x(U)$ на открытом подмножестве U аффинного алгебраического многообразия X над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$
а) не быть конечно порождённой $\Bbbk$-алгеброй?
б) быть конечно-порождённой $\Bbbk$-алгеброй, но иметь $\mathrm{Spec}_m \mathscr{O}_x(U) \neq U$?

Задача 4.26. Пусть конечная группа $\mathfrak{G}$ действует регулярными автоморфизмами на аффинном алгебраическом многообразии X над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Обозначим через $R = \Bbbk[X]^{\mathfrak{G}} \subset \Bbbk[X]$ подалгебру инвариантов.
а) Убедитесь, что $\Bbbk$-линейный оператор усреднения $\natural : \Bbbk[X] \twoheadrightarrow R$, переводящий функцию $f \in \Bbbk[X]$ в центр тяжести её $\mathfrak{G}$-орбиты $f^{\natural} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{|\mathfrak{G}|} \sum\limits_{\sigma \in \mathfrak{G}} \sigma f$, обладает для всех $f \in \Bbbk[X]$

[1] напомним, что для разложимости алгебры (даже не обязательно коммутативной) в прямое произведение двух подалгебр необходимо и достаточно разложения единицы в сумму двух независимых идемпотентов: $1 = e_1 + e_2$, где $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$, $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$

и всех $h \in R$ свойствами: (1) $f^\natural \in R$ (2) $h^\natural = h$ (3) $(fh)^\natural = f^\natural h$.

б) Покажите, что алгебра R конечно порождена[1] и не имеет нильпотентов.

в) Постройте аффинное алгебраическое многообразие $X/\mathfrak{G}$ и конечную регулярную сюрьекцию $\pi : X \twoheadrightarrow X/\mathfrak{G}$, слоями которой являются в точности $\mathfrak{G}$-орбиты и которая универсальна в следующем смысле: для любого регулярного морфизма аффинных алгебраических многообразий $\varphi : X \to Y$, такого что $\varphi(\sigma x) = \varphi(x)$ для всех $\sigma \in \mathfrak{G}$ и $x \in X$, существует единственный регулярный морфизм $\psi : X/\mathfrak{G} \to Y$, такой что $\psi \circ \pi = \varphi$.

г) Опишите явными уравнениями в подходящем аффинном пространстве построенный выше фактор $X/\mathfrak{G}$ для $X = \mathbb{C}^2$ и $\mathfrak{G} = \mathbb{Z}/(n)$, действующей на $\mathbb{C}^2$ по правилу

$$k\,(\mathrm{mod}\ n) : (x, y) \mapsto (e^{2\pi i k/n}x, e^{2\pi i k/n}y)\,.$$

[1]подсказка: рассмотрите идеал $I \subset \Bbbk[X]$, порождённый всеми непостоянными функциями из R, выберете в этом идеале конечный набор образующих из R и при помощи предыдущего свойства (3) покажите, что они порождают R как $\Bbbk$-алгебру

§5. Алгебраические многообразия

Всюду в этом параграфе мы продолжаем по умолчанию считать, что основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто.

5.1. Определение и примеры многообразий и их морфизмов. Алгебраические многообразия определяются по той же схеме, что и топологические, гладкие или аналитические многообразия, т. е. как топологические пространства, каждая точка которых обладает окрестностью, гомеоморфной некоторой «стандартной локальной модели», и любые две таких окрестности должны регулярным образом согласовываться на их пересечении. Нюансов два: в отличие от топологии и дифференциальной геометрии, где обычно ограничиваются какой-нибудь одной локальной моделью (пространством $\mathbb{R}^n$ или шаром в $\mathbb{R}^n$), в алгебраической геометрии в качестве локальных моделей допускаются *любые*[1] аффинные алгебраические многообразия, а «регулярность» согласования двух таких локальных моделей на их пересечении понимается в смысле n° 4.3.1 и n° 4.4.3. Точные определения таковы.

Открытое подмножество $U \subset X$ топологического пространства X называется *алгебраической аффинной картой*, если существует аффинное алгебраическое многообразие X_U и *гомеоморфизм*[2] $\varphi_U : X_U \xrightarrow{\sim} U$.

Две алгебраических карты $\varphi_U : X_U \xrightarrow{\sim} U$ и $\varphi_W : X_W \xrightarrow{\sim} W$ на X называются *совместимыми*, если *гомеоморфизм склейки* $\varphi_{WU} = \varphi_W^{-1} \circ \varphi_U$, отождествляющий между собою прообразы пересечения $U \cap W$ в многообразиях X_U и X_W

$$\varphi_{WU} : \varphi_U^{-1}(U \cap W) \xrightarrow{\sim} \varphi_W^{-1}(U \cap W)$$

является *регулярным изоморфизмом* в том смысле, что его гомоморфизм поднятия переводит локальные регулярные функции на X_W, определёные на $\varphi_W^{-1}(U \cap W)$, в локальные регулярные функции на X_U, определёные на $\varphi_U^{-1}(U \cap W)$:

$$\varphi_{WU}^* : \mathcal{O}_{X_W}\left(\varphi_W^{-1}(U \cap W)\right) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X_U}\left(\varphi_U^{-1}(U \cap W)\right).$$

Открытое покрытие $X = \bigcup U_\nu$ попарно совместимыми алгебраическими картами называется *алгебраическим атласом* на X. Два алгебраических атласа называются *эквивалентными*, если их объединение также представляет собой алгебраический атлас. Топологическое пространство X, с зафиксированным на нём классом эквивалентных алгебраических атласов называется *алгебраическим многообразием.* Алгебраические многообразия, обладающие конечным атласом, называются многообразиями *конечного типа.*

Упражнение 5.1. Убедитесь, что грассманианы (в частности, проективные пространства) являются алгебраическими многообразиями конечного типа в смысле данного выше определения.

5.1.1. Прямое произведение $X\times Y$ алгебраических многообразий X, Y является алгебраическим многообразием. Его атлас состоит из всех попарных произведений $U\times W$, где $U \subset X$, $W \subset X$ суть аффинные алгебраические карты на X, Y.

Упражнение 5.2. Проверьте, что прямое произведение $\mathbb{P}_{n_1}\times\mathbb{P}_{n_2}\times\cdots\times\mathbb{P}_{n_m}$, а также любое его подмножество, задаваемое набором однородных по каждой группе переменных

[1] в том числе «особые», такие как крест $\operatorname{Spec}_m\left(\Bbbk[x,y]/(xy)\right)$

[2] X_U рассматривается как топологическое пространство с топологией Зарисского

полиномиальных уравнений на m групп по $n_1, n_2, \dots, n_m$ переменных, является алгебраическими многообразиями.

5.1.2. Регулярные функции и морфизмы. Функция $f : X \to \Bbbk$ называется *регулярной* в точке x, если её подъём на какую-нибудь[1] аффинную карту X_U, порывающую x, является локальной регулярной функцией X_U, определённой в какой-нибудь открытой окрестности точки x. Функции $U \to \Bbbk$ на открытом подмножестве $U \subset X$, регулярные в каждой точке этого подмножества, образуют коммутативное кольцо $\mathcal{O}_X(U)$. Соответствие $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)$ называется *структурным пучком* многообразия X.

Отображение алгебраических многообразий $\varphi : X \to Y$ называется *регулярным*, если $\forall\, x \in X$ и любой локальной регулярной функции $f \in \mathcal{O}_Y(W)$, определённой в какой-либо окрестности W точки $\varphi(x)$, существует окрестность $U \subset \varphi^{-1}(W)$ точки x, такая что $\varphi^*(f) \in \mathcal{O}_X(U)$. Иными словами, над каждым открытом $U \subset Y$ гомоморфизм поднятия должен быть корректно определённым гомоморфизмом колец локальных регулярных функций. Например, множество регулярных морфизмов $X \to \mathbb{A}^1$ совпадает с $\mathcal{O}_X(X)$.

5.1.3. Замкнутые подмногообразия. Каждое замкнутое подмножество $Z \subset X$ алгебраического многообразия X имеет естественную структуру алгебраического многообразия. А именно, для каждой аффинной карты U пересечение $Z \cap U$ есть замкнутое подмножество U, т. е. аффинное алгебраическое множество $\mathrm{Spec_m}\,\big(\mathcal{O}_X(U)/\mathcal{I}_Z(U)\big)$, где

$$\mathcal{I}_Z(U) = \{f \in \mathcal{O}_X(U) \mid f|_{Z\cap U} \equiv 0\}$$

есть идеал аффинного подмногообразия $Z \cap U \subset U$. Соответствие $U \mapsto \mathcal{I}_Z(U)$ называется *пучком идеалов* замкнутого подмногообразия $Z \subset X$. Он является подпучком структурного пучка и состоит из всех локальных регулярных функций, тождественно обращающихся в нуль на Z.

Регулярный морфизм $\varphi : X \to Y$ называется *замкнутым вложением*, если $\varphi(X) \subset Y$ является замкнутым подмногообразием и φ устанавливает изоморфизм между X и $\varphi(X)$. Будем называть многообразие X *аффинным* (соотв. *проективным*), если оно допускает замкнутое вложение $X \hookrightarrow \mathbb{A}^m$ (соотв. $X \hookrightarrow \mathbb{P}_m$) для некоторого m.

Упражнение 5.3. Убедитесь, что аффинные (соотв. проективные) алгебраические многообразия, понимаемые как подмножества в аффинном (соотв. проективном) пространстве, заданные системой полиномиальных (соотв. однородных полиномиальных) уравнений, являются аффинными (соотв. проективными) многообразиями в смысле предыдущего определения.

Пример 5.1 (семейства подмногообразий)

Каждый регулярный морфизм $\pi : X \to Y$ может восприниматься как семейство замкнутых подмногообразий $X_y = \pi^{-1}(y) \subset X$, параметризованное точками $y \in Y$. Если $\pi : X \to Y$, $\pi' : X' \to Y$ — два семейства с одной и той же базой, то регулярный морфизм $\varphi : X \to X'$ называется *морфизмом семейств* (или морфизмом *над* Y), если он переводит X_y в X'_y для каждого $y \in Y$, т. е. если $\pi = \pi' \circ \varphi$. Семейство $\pi : X \to Y$ называется *постоянным* или *тривиальным*, если оно изоморфно над Y прямому произведению $\pi_Y : X_0 \times Y \to Y$ для некоторого многообразия X_0.

[1] а в силу согласованности какрт — и на любую

Пример 5.2 (раздутие точки в $\mathbb{P}_n$)
Прямые, проходящие через заданную точку $p \in \mathbb{P}_n$, образуют проективное пространство $E \simeq \mathbb{P}_{n-1}$, которое можно отождествить с любой не содержащей p гиперплоскостью $H \subset \subset \mathbb{P}_n$. График инцидентности $\mathscr{B}_p = \{(\ell, q) \in E \times \mathbb{P}_n \mid q \in \ell\}$ называется *раздутием* точки $p \in \mathbb{P}_n$. Проекция $\sigma_p : \mathscr{B}_p \twoheadrightarrow \mathbb{P}_n$ биективна всюду над $\mathbb{P}_n \smallsetminus \{p\}$, однако прообраз самой точки p совпадает с E, и тем самым, имеет коразмерность 1 в $\mathscr{B}_p$. Он называется *исключительным дивизором*. Вторая проекция $\varrho_E : \mathscr{B}_p \twoheadrightarrow E$ реализует $\mathscr{B}_p$ как *линейное расслоение* над E, слой которого над точкой $q \in E$ — это прямая $(pq) \subset \mathbb{P}_n$. Это расслоение называется *тавтологическим* линейным расслоением над E.

Наглядно раздутие точки p можно представлять себе как результат выкалывания этой точки с последующей вклейкой в образовавшееся точечное отверстие целого проективного пространства E, параметризующего все проходящие через p прямые, так чтобы при подходе к точке p вдоль любой прямой мы попадали в отвечающую этой прямой точку пространства E.

Если фиксировать однородные координаты $(t_0 : t_1 : \ldots : t_n)$ на $\mathbb{P}_n$ так, чтобы $p = = (1 : 0 : \ldots : 0)$, и отождествить E с гиперплоскостью $H = \{(0 : q_1 : \ldots : q_n)\} \subset \mathbb{P}_n$, то условие $(q, t) \in \mathscr{B}_p$ будет равносильно системе квадратичных уравнений

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_1 & \cdots & q_n \\ t_0 & t_1 & \cdots & t_n \end{pmatrix} = 2\,, \quad \text{или} \quad q_i t_j = q_j t_i \quad \forall\, 1 \leqslant i < j \leqslant n\,.$$

Таким образом, $\mathscr{B}_p$ есть замкнутое подмногообразие $H \times \mathbb{P}_n$.

5.1.4. Отделимость. Стандартный атлас на $\mathbb{P}_1$ состоит из двух карт

$$\varphi_i : \mathbb{A}^1 \xrightarrow{\sim} U_i \subset \mathbb{P}_1\,, \quad i = 0, 1\,.$$

Их пересечение видно внутри каждой из них как дополнение к началу координат:

$$\varphi_0^{-1}(U_0 \cap U_1) = \varphi_1^{-1}(U_0 \cap U_1) = \mathbb{A}^1 \smallsetminus \{O\} = \{t \in \mathbb{A}^1 \mid t \neq 0\}\,.$$

Карты склеены по этому пересечению посредством отображения склейки

$$\varphi_{01} : t \mapsto 1/t\,. \tag{5-1}$$

Если вместо этого отображения воспользоваться тождественным отображением

$$\widetilde{\varphi}_{01} : t \mapsto t\,, \tag{5-2}$$

получится другое многообразие — «прямая с раздвоенной точкой»:

 .

Такая патология называется *неотделимостью*. Причина её возникновения в том, что правило склейки (5-2) «не замкнуто»: его можно «продолжить по непрерывности» с $\mathbb{A}^1 \smallsetminus \{O\}$ на всё $\mathbb{A}^1 = \overline{\mathbb{A}^1 \smallsetminus \{O\}}$.

В общем случае явление (не) отделимости формализуется так. Включения

$$U_0 \hookleftarrow U_0 \cap U_1 \hookrightarrow U_1$$

задают вложение $U_0 \cap U_1 \hookrightarrow U_0 \times U_1$. Так, правило (5-1) задаёт вложение $(\mathbb{A}^1 \smallsetminus O) \hookrightarrow \mathbb{A}^2$ по формуле $t \mapsto (t\,,\,t^{-1})$, которое отождествляет пересечение $U_0 \cap U_1$ с *замкнутым* подмножеством $V(xy-1) \subset \mathbb{A}^2 = U_0 \times U_1$. А правило (5-2) задаёт вложение $(\mathbb{A}^1 \smallsetminus O) \hookrightarrow \mathbb{A}^2$ по формуле $t \mapsto (t\,,\,t)$, и его образ не замкнут — это открытое подмножество $\Delta \smallsetminus \{(0,0)\}$ диагонали $\Delta = V(x-y) \subset \mathbb{A}^2$.

Алгебраическое многообразие X называется *отделимым*, если для любой пары аффинных карт U, W на X образ канонического вложения $U \cap W \hookrightarrow U \times W$ замкнут. Поскольку этот образ есть не что иное, как пересечение диагонали $\Delta \subset X \times X$ с аффинной картой $U \times W$ на $X \times X$, многообразие X отделимо , если и только если диагональ $\Delta \subset X \times X$ замкнута в $X \times X$.

Например, $\mathbb{A}^n$ и $\mathbb{P}_n$ отделимы, поскольку диагонали в $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$ и в $\mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n$ задаются, соответственно, уравнениями $x_i = y_i$ и $x_i y_j = x_j y_i$. Замкнутое подмногообразие $X \subset Y$ отделимого многообразия Y тоже отделимо, ибо диагональ в $X \times X$ является прообразом диагонали в $Y \times Y$ при вложении $X \times X \hookrightarrow Y \times Y$. В частности, всякое аффинное или проективное многообразие отделимо и имеет конечный тип.

Пример 5.3 (график морфизма)
Пусть $\varphi : X \to Y$ — регулярный морфизм. Прообраз диагонали $\Delta \subset Y \times Y$ при индуцированном морфизме $\varphi \times \mathrm{Id}_Y : X \times Y \to Y \times Y$ называется *графиком* φ и обозначается через Γ_φ. Геометрически, $\Gamma_\varphi = \{(x, f(x))\} \subset X \times Y$. Если Y отделимо, то график замкнут. Например, график регулярного морфизма аффинных многообразий $\varphi : \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(A) \to \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}}(B)$ задаётся в $A \otimes B$ системой уравнений $1 \otimes f = \varphi^*(f) \otimes 1$, где f пробегает B.

5.1.5. Рациональные отображения. Регулярный морфизм $\varphi : U \to Y$, определённый на некотором открытом плотном подмножестве U алгебраического многообразия X, называется *рациональным отображением* из X в Y.

Формально говоря, рациональное отображение не является отображением «из X» в теоретико-множественном смысле, т. к. определено не везде. В частности, композиция рациональных отображений не определена, когда образ первого отображения оказывается целиком вне области определения второго. Тем не менее, рациональные отображения часто возникают в алгебраической геометрии.

Пример 5.4 (проекция $\mathbb{A}(V) \dashrightarrow \mathbb{P}(V)$)
Имеется естественная проекция $\mathbb{A}(V) \dashrightarrow \mathbb{P}(V)$ переводящая точку $A \in \mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(V)$ в прямую $(OA) \subset \mathbb{A}(V)$, рассматриваемую как точка в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$. Это сюрьективный рациональный морфизмом, определенный на $U = \mathbb{A}^n \smallsetminus O$. В стандартной аффинной карте

$$\varphi_i : \mathbb{A}^n \to U_i = \{(t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{P}_n \mid t_i = 1\},$$

соответствующий гомоморфизм поднятия

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(U_i) = \Bbbk[t_1, t_2, \dots, t_n] \xrightarrow{\pi^*} \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]\left[t_i^{-1}\right] = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1}}(\mathcal{D}(t_i)) = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1}}(\pi^{-1}(U_i))$$

переводит $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в $\tilde{f}(t_0, t_1, \dots, t_n) = f(t_0/t_i\,, \dots\,, t_{i-1}/t_i\,, t_{i+1}/t_i\,, \dots\,, t_n/t_i)$.

5.2. Геометрические схемы. Максимальный спектр $\mathrm{Spec}_{\mathrm{m}}\, A$ можно образовать для любой, в том числе не обязательно приведённой $\Bbbk$-алгебры A. Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ каждый элемент $a \in A$ при этом по-прежнему можно интерпретировать как функцию на $\mathrm{Spec}_{\mathrm{m}}\, A$, значение которой в точке $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}}\, A$ равно $a \pmod{\mathfrak{m}} \in A/\mathfrak{m} = \Bbbk$. Это даёт гомоморфизм из алгебры A в алгебру функций на спектре со значениями в $\Bbbk$. Но так как в $\Bbbk$ нет нильпотентов, все нильпотентны алгебры A при этом гомоморфизме переходят в тождественно нулевые функции на спектре. Нильпотентные элементы алгебры A образует идеал[1]

$$\mathfrak{n}(A) \overset{\text{def}}{=} \{a \in A \mid \exists\, n \in \mathbb{N} : a^n = 0\}\,, \tag{5-3}$$

который называется *нильрадикалом* алгебры A. Из предыдущего следует, что нильрадикал $\mathfrak{n}(A)$ содержится в пересечении всех максимальных идеалов алгебры A и

$$\mathrm{Spec}\,_m A = \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}}\, A_{\mathrm{red}}\,, \quad \text{где} \quad A_{\mathrm{red}} \overset{\text{def}}{=} A/\mathfrak{n}(A)$$

(отметим, что алгебра A_{red} редуцирована). Если поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, то пересечение всех максимальных идеалов в A_{red} нулевое, ибо оно состоит из функций, тождественно обращающихся в нуль на аффинном алгебраическом многообразии

$$X = \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}}\, A_{\mathrm{red}}\,,$$

и пересечение всех максимальных идеалов в A совпадает в этом случае с $\mathfrak{n}(A)$.

Упражнение 5.4. Покажите, что нильрадикал произвольного коммутативного кольца совпадает с пересечением всех простых идеалов этого кольца.

Определение 5.1
Пара $(A, \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}}\, A)$, где A — произвольная (не обязательно приведённая) конечно порождённая алгебра над алгебраически замкнутым полем, называется *аффинной геометрической схемой*. Регулярный морфизм геометрических схем $F : (A, \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}}\, A) \to (B, \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}}\, B)$ определяется как пара $F = (\varphi, \varphi^*)$, где $\varphi^* : B \to A$ — гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр, а

$$\varphi = \varphi^{**} : \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}}\, A \to \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}}\, B$$

индуцированный им регулярный морфизм спектров[2], переводящий точку $\mathrm{ev} : A \to \Bbbk$ в точку $\mathrm{ev} \circ \varphi^* : B \to \Bbbk$.

Интуитивно, аффинная геометрическая схема — это аффинное алгебраическое многообразие $X = \mathrm{Spec}_{\mathrm{m}}\, A_{\mathrm{red}}$, кольцо регулярных функций которого расширено при помощи идеала нильпотентов, кодирующих те или иные «инфинитезимальные» геометрические характеристики X.

Пример 5.5 (пересечения)
Определим пересечение аффинных многообразий $X, Y \subset \mathbb{A}^n$ как геометрическую схему, заданную объединением всех уравнений, задающих X и Y : $X \cap Y \overset{\text{def}}{=} V(I(X) + J(X))$. Если

[1] т. к. $a^n = b^m = 0 \Rightarrow (a-b)^{m+n-1} = 0$

[2] подчеркнём, что морфизм геометрических схем полностью определяется гомоморфизмом алгебр, но, вообще говоря, не определяется регулярным морфизмом подлежащих спектров

пересечение не трансверсально, фактор алгебра $A = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/(I(X) + J(X))$ не является приведённой. Например, если $X, Y \subset \mathbb{A}^2$ заданы уравнениями $y - x^2 = 0$ и $y = 0$, то $A = \Bbbk[x, y]/(y - x^2, y) \simeq \Bbbk[x]/(x^2)$ не приведена, а само пересечение в этом случае естественно считать *двойной* точкой $x = y = 0$ (теоретико множественно совпадающей со $\operatorname{Spec_m} A_{\text{red}}$). В общем случае, пересечение $X \cap Y$ как множество тоже исчерпывается точками аффинного алгебраического многообразия $\operatorname{Spec_m} A_{\text{red}}$, но заменяя пару $(A, \operatorname{Spec_m} A)$ на $\operatorname{Spec_m} A$ мы можем потерять важную информацию о характере пересечения. В частности, если мы хотим развить, скажем, теорию *кратностей пересечений*, мы должны рассматривать пересечения именно как *схемы*, а не только как алгебраические многообразия. Это формализуется при помощи следующей конструкции.

5.2.1. Послойные произведения. Пусть даны два семейства $Y_1 \xrightarrow{\pi_1} X$, $Y_2 \xrightarrow{\pi_2} X$ алгебраических многообразий над X (см. прим. 5.1). Их *послойное* (или *расслоенное*) *произведение* над X представляет собой семейство над X, каждый слой которого является произведением соответствующих слоёв семейств Y_1 и Y_2.

С алгебраической точки зрения, конструкция послойного произведение в категории геометрических схем двойственна тензорному произведению алгебр, но не над основным полем $\Bbbk$, а над некоторой $\Bbbk$-алгеброй. Точнее, пусть $X = \operatorname{Spec_m} K$, $Y_i = \operatorname{Spec_m} A_i$, где K, A_1, A_2 суть конечно порождённые $\Bbbk$-алгебры. Наличие на Y_i структуры семейства $\pi_i : Y_i \to X$ над X двойственна наличию на A_i структуры K-алгебры, задаваемой гомоморфизмом поднятия $\pi_i^* : K \to A_i$. Тензорное произведение над алгеброй K

$$A_1 \underset{K}{\otimes} A_2$$

определяется как фактор алгебра $\Bbbk$-алгебры $A_1 \underset{\Bbbk}{\otimes} A_2$ по идеалу, порождённому всеми разностями $(\varkappa a_1) \otimes a_2 - a_1 \otimes (\varkappa a_2)$ с $\varkappa \in K$ и $a_i \in A_i$.

Упражнение 5.5. Проверьте, что $A_1 \underset{K}{\otimes} A_2$ является *копроизведением* в категории K-алгебр, т. е. удовлетворяет в этой категории универсальными свойствами, перечисленными перед упр. 4.9 на стр. 106.

На геометрическом языке универсальные свойства копроизведения над K означают, что геометрическая схема

$$Y_1 \underset{X}{\times} Y_2 = \left(A_1 \underset{K}{\otimes} A_2\,,\ \operatorname{Spec_m} (A_1 \underset{K}{\otimes} A_2)_{\text{red}} \right) \tag{5-4}$$

обладает следующим универсальным свойством: для любого семейства $f : Z \to X$ над X и любых двух морфизмов семейств $g_1 : Z \to Y_1$ и $g_2 : Z \to Y_2$ над X существует единственный морфизм семейств $g_1 \times g_2 : Z \to Y_1 \underset{X}{\times} Y_2$ над X, такой что $g_i = \alpha_i \circ (g_1 \times g_2)$ для $i = 1,\ 2$.

Подчеркнём, что в отличие от «абсолютных» произведений над основным полем $\Bbbk$ произведения над $\Bbbk$-алгеброй K могут содержать нильпотенты даже тогда, когда оба сомножителя редуцированы. В таких ситуациях послойное произведение многообразий $Y_1 \underset{X}{\times} Y_2$ по умолчанию всегда рассматривается как *геометрическая схема* (5-4) со структурной алгеброй $\Bbbk[Y_1] \underset{k[X]}{\otimes} k[Y_2]$.

5.2.2. Замена базы, схемное пересечение и схемный прообраз. Любое семейство $\pi : Y \to X$ можно поднять вдоль произвольного морфизма[1] $f : X' \to X$ до семейства

$$f^*(\pi) : Y \underset{X}{\times} X' \to X' ,$$

что изображается коммутативной диаграммой *замены базы*

$$\begin{tikzcd} Y \underset{X}{\times} X' \arrow[r] \arrow[d, "f^*(\pi)"'] & Y \arrow[d, "\pi"] \\ X' \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

В геометрии и топологии эта процедура называется *заменой базы*. В алгебре и теории представлений она больше известна как *расширение скаляров*[2] или *индуцирование*.

Подъём произвольного семейства $f : Y \to X$ вдоль замкнутого вложения $\varphi : Z \hookrightarrow X$, т. е. замена базы

$$f^*(\varphi) : Y \underset{X}{\times} Z \to Z ,$$

обычно называется *схемным ограничением* семейства Y на замкнутое подмногообразие $Z \subset X$. То же самое послойное произведение, но со структурой семейства, задаваемой другой[3] проекцией

$$f^*(\varphi) : Z \underset{X}{\times} Y \hookrightarrow Y ,$$

обычно называется *схемным прообразом* замкнутого подмногообразия $Z \subset X$ относительно морфизма $f : Y \to X$.

Если X аффинно, а Z задано идеалом $I \subset k[X]$, то геометрически $f^*(\varphi) : Z \underset{X}{\times} Y \hookrightarrow Y$ представляет собою замкнутое вложение $\operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} \left((k[X]/I) \underset{k[X]}{\otimes} k[Y] \right)_{\mathrm{red}}$ в Y, отождествляющее $f^{-1}(Z)$ с множеством нулей идеала, порождённого $f^*(I)$. При этом структурная алгебра $(k[X]/I) \underset{k[X]}{\otimes} k[Y]$, вообще говоря, не приведена.

Например, схемный прообраз полукубической параболы $Z \subset \mathbb{A}_2$, заданной уравнением $y^2 = x^3$ вдоль отображения

$$\mathbb{A}_1 \xrightarrow{t \mapsto (t, t^2)} \mathbb{A}_2 ,$$

образ которого — парабола $y = x^2$, состоит из двух точек $t = 0$ и $t = 1$, но снабжается неприведённой структурной алгеброй $\Bbbk[t] \underset{\Bbbk[x,y]}{\otimes} \big(\Bbbk[x,y]/(y^2 - x^3)\big) = \Bbbk[t]/(t^4 - t^3)$, т. к. x и y действуют на $\Bbbk[t]$ как t и t^2.

---

[1] хотя термины «семейство» и «морфизм» математически означают одно и то же, мы умышленно используем тут разные слова, чтобы подчеркнуть различие в *геометрическом смысле* этих отображений; важно однако понимать, что с *алгебраической* точки зрения они совершенно симметричны

[2] таков, например, переход от $\mathbb{R}$-алгебры V к её комплексификации $\mathbb{C} \underset{\mathbb{R}}{\times} V$

[3] т. е. рассматриваемое как подъём замкнутого вложения f вдоль произвольного морфизма φ

5.3. Замкнутые морфизмы. Регулярный морфизм $\varphi : X \to Y$ называется *замкнутым*, если $\varphi(Z) \subset Y$ замкнуто для любого замкнутого $Z \subset X$. Любое замкнутое вложение замкнуто. Из лем. 4.10 вытекает, что всякий конечный морфизм аффинных многообразий замкнут.

Лемма 5.1
Проекция $\pi : \mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n \twoheadrightarrow \mathbb{A}^n$ замкнута.

Доказательство. Зафиксируем однородные координаты t на $\mathbb{P}_n$ и аффинные координаты x на $\mathbb{A}^n$. Замкнутое подмножество $X \subset \mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n$ задаётся некоторой системой полиномиальных уравнений $f_\nu(t, x) = 0$ (однородных по t). Его образ $\pi(X) \subset \mathbb{A}^n$ состоит из всех точек p, при подстановке которых вместо x будет получаться система однородных уравнений $f_\nu(t, p) = 0$ на t, задающая непустое подмногообразие в $\mathbb{P}_n$. Как мы видели в n° 4.2.1, последнее условие равносильно тому, что коэффициенты форм $f_\nu(t, p)$, являющиеся полиномами от p, удовлетворяют системе результантных полиномиальных уравнений. □

Следствие 5.1
Если многообразие X проективно, то проекция $X \times Y \twoheadrightarrow Y$ замкнута для любого многообразия Y.

Доказательство. Ограничиваясь на аффинные карты в Y, мы можем считать Y аффинным. Тогда $X \times Y$ является замкнутым подмногообразием в $\mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n$, и наша проекция получается ограничением замкнутой проекции $\mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n \twoheadrightarrow \mathbb{A}^n$ на замкнутое подмножество $X \times Y \subset \mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n$. □

Следствие 5.2
Если X проективно, а Y отделимо, то любой морфизм $\varphi : X \to Y$ замкнут.

Доказательство. Для каждого замкнутого $Z \subset X$ произведение $Z \times Y$ замкнуто в $X \times Y$. Поскольку Y отделимо, график $\Gamma_\varphi \subset X \times Y$ тоже замкнут. Но $\varphi(Z)$ есть образ $\Gamma_\varphi \cap (Z \times Y)$ при проекции $X \times Y \twoheadrightarrow Y$, которая замкнута. □

Следствие 5.3
Любое регулярное отображение из связного проективного многообразия X в любое аффинное многообразие постоянно (стягивает X в одну точку). В частности, $\mathcal{O}_X(X) = \Bbbk$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть отображения $\varphi : X \to \mathbb{A}^n$. Беря композицию такого отображения с координатными формами $x_i : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^1$, мы сводим утверждение к случаю $n = 1$. Отождествляя $\mathbb{A}^1$ с аффинной картой на $\mathbb{P}_1$, получаем регулярное несюрьективное отображение $X \to \mathbb{P}_1$, образ которого замкнут и связен, т. е. является одной точкой. □

5.3.1. Конечные морфизмы. Регулярный морфизм алгебраических многообразий $\varphi : X \to Y$ называется *конечным*, если прообраз $W = \varphi^{-1}(U)$ любой аффинной карты $U \subset Y$ является аффинной картой на X, и ограничение $\varphi_W : W \to U$ является конечным морфизмом аффинных многообразий в смысле n° 4.5.3 на стр. 111. Из лем. 4.10 на стр. 111 следует, что каждый конечный морфизм замкнут и ограничение конечного морфизма на замкнутое подмногообразие $Z \subset X$ также является конечным морфизмом. Более того, если X неприводимо, то собственное замкнутое подмножество $Z \subset X$ переходит в *собственное* замкнутое подмножество Y.

Пример 5.6 (проекция из точки на гиперплоскость)
Проекция любого проективного многообразия $X \subsetneq \mathbb{P}_n$ из любой точки $p \notin X$ на любую гиперплоскость $H \not\ni p$ является конечным морфизмом. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим аффинную карту $U \subset H$ и зафиксируем на $\mathbb{P}_n$ однородные координаты $(t_0 : t_1 : \dots : t_n)$, в которых

$$\begin{aligned} p &= (1 : 0 : \dots : 0) \\ H &= \{(0 : q_1 : \dots : q_n)\} \\ U &= \{u = (0 : u_1 : \dots : u_{n-1} : 1)\} \end{aligned}$$

(как в прим. 5.2 на стр. 119). Поскольку $p \notin X$, прообраз $Y = \pi_p^{-1}(U) \subset X$ лежит внутри проколотого конуса над U с выколотой вершиной p, который изоморфен как алгебраическое многообразие аффинному пространству $\mathbb{A}^n = U \times \mathbb{A}^1$. Изоморфизм задаётся ограничением на проколотый конус морфизма раздутия $\mathscr{B}_p \xrightarrow{\sigma_p} \mathbb{P}_n$ и в терминах координат представляет собою подстановку $t = \vartheta p + u$, где $\vartheta \in \mathbb{A}^1$, $u \in U$. Если X задаётся системой однородных уравнений $f_\nu(t) = 0$, то в аффинных координатах (u, ϑ) на $U \times \mathbb{A}^1$ прообраз $Y = \pi_p^{-1}(U)$ будет описываться уравнениями

$$f_\nu(\vartheta p + u) = \alpha_0^{(\nu)}(u)\,\vartheta^m + \alpha_1^{(\nu)}(u)\,\vartheta^{m-1} + \dots + \alpha_m^{(\nu)}(u) = 0\,. \tag{5-5}$$

Тем самым, Y является аффинным алгебраическим многообразием. Чтобы убедиться в том, что алгебра $\Bbbk[Y] = \Bbbk[u][\vartheta]\,/\,(f_\nu(\vartheta p + u))$ конечно порождена как $\Bbbk[u]$-модуль, достаточно найти в идеале, порождённом уравнениями (5-5), хотя бы одно уравнение со старшим коэффициентом $\alpha_0(u) \equiv 1$ (ибо тогда после факторизации по одному только этому уравнению мы уже получим конечно порождённый $\Bbbk[u]$-модуль).

Существование такого уравнения означает, что идеал, порождённый в $\Bbbk[u]$ старшими коэффициентами $\alpha_0^{(\nu)}(u)$ всех уравнений (5-5), содержит единицу, что по теореме Гильберта равносильно отсутствию у многочленов $\alpha_0^{(\nu)}(u)$ общих нулей в U. Но если бы такой общий нуль u_0 существовал, то однородные версии уравнений[1] (5-5):

$$f_\nu(\vartheta_0\, p + \vartheta_1\, u) = \alpha_0^{(\nu)}(u_0)\,\vartheta_0^m + \alpha_1^{(\nu)}(u_0)\,\vartheta_0^{m-1}\vartheta_1 + \dots + \alpha_m^{(\nu)}(u_0)\vartheta_1^m = 0$$

имели бы общий корень $(\vartheta_0 : \vartheta_1) = (1 : 0)$ над точкой $u_0 \in U$. Но эти однородные уравнения описывают $X \cap \big(pu_0\big)$ в терминах однородных координат $(\vartheta_0 : \vartheta_1)$ на прямой $\big(pu_0\big) = \{\vartheta_0\, p + \vartheta_1\, u_0\}$, и корень $(\vartheta_0 : \vartheta_1) = (1 : 0)$ отвечает самой точке p, которая не лежит в X.

Упражнение 5.6. Проверьте, что композиция конечных морфизмов конечна и докажите, что каждое проективное многообразие допускает конечный сюрьективный морфизм на проективное пространство.

[1]они получаются подстановкой $t = \vartheta_0\, p + \vartheta_1\, u$ в уравнения, описывающие X в $\mathbb{P}_n$, и связаны с уравнениями (5-5) подстановкой $(\vartheta_0 : \vartheta_1) = (\vartheta : 1)$

Следствие 5.4
Каждое аффинное многообразие X допускает конечный сюрьективный морфизм на аффинное пространство.

Доказательство. Пусть $X \subsetneq \mathbb{A}^n$, где $\mathbb{A}^n$ вложено в $\mathbb{P}_n$ как стандартная карта U_0. Положим $H_\infty \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}_n \smallsetminus U_0$ и обозначим через $\overline{X} \subset \mathbb{P}_n$ проективное замыкание аффинного многообразия X. Проекция $\overline{X}$ из любой точки $p \in H_\infty \smallsetminus \overline{X}$ на любую гиперплоскость $L \not\ni p$, видимую в аффинной карте U как $\mathbb{A}^{n-1} = L \smallsetminus H_\infty$, индуцирует конечный морфизм из $X = \overline{X} \smallsetminus H_\infty$ в это $\mathbb{A}^{n-1}$ (видимый в аффинной карте U как параллельная проекция в направлении вектора p). Если он окажется не сюрьективным, повторим процедуру. □

5.4. Размерность. Максимальное $n \in \mathbb{N}$, для которого существует цепочка неприводимых замкнутых подмножеств

$$\{x\} = X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_{n-1} \subsetneq X_n \subset X\,, \tag{5-6}$$

называется *размерностью* алгебраического многообразия X в данной точке $x \in X$ и обозначается через $\dim_x X$. Разумеется, когда X неприводимо, во всякой такой максимальной цепочке мы будем иметь $X_n = X$. Если же X приводимо, то $\dim_x X$ равна максимуму из размерностей всех проходящих через x неприводимых компонент.

Упражнение 5.7. Покажите, что $\dim_p X = \dim_p U$ для каждой аффинной карты $U \ni p$.

Упражнение 5.8. Для любого сюрьективного морфизма неприводимых многообразий $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ и любой точки $x \in X$ докажите неравенство $\dim_x X \geqslant \dim_{\varphi(x)} Y$.

Предложение 5.1
Пусть $\varphi : X \to Y$ — конечный морфизм неприводимых многообразий, и $x \in X$. Тогда $\dim_x X \leqslant \dim_{\varphi(x)} Y$ и равенство равносильно тому, что $\varphi(X) = Y$.

Доказательство. Согласно упр. 5.7 достаточно считать X и Y аффинными. Утверждение из лем. 4.10 показывает, что каждая цепочка (5-6) в X порождает цепочку

$$\cdots \subsetneq \varphi(X_i) \subsetneq \varphi(X_{i+1}) \subsetneq \cdots$$

строго вложенных замкнутых неприводимых подмногообразий в Y, что даёт нужное нам неравенство. В случае $\varphi(X) = Y$ упр. 5.8 даёт противоположное неравенство. □

Следствие 5.5
$\dim_p \mathbb{A}^n = n$ в любой точке $p \in \mathbb{A}^n$.

Доказательство. Ясно, что $\dim \mathbb{A}^0 = 0$ и $\forall\, p \in \mathbb{A}^n\;\; \dim_p \mathbb{A}^n \geqslant n$, поскольку имеется цепочка вида (5-6), образованная проходящими через p аффинными подпространствами. Неравенство $\dim_p \mathbb{A}^n \leqslant n$ получается по индукции: последний отличный от $\mathbb{A}_n$ элемент цепочки (5-6) допускает конечный сюрьективный морфизм на собственное аффинное подпространство в $\mathbb{A}_n$, и поэтому по индукции его размерность (а значит, и его номер в цепочке) строго меньше n. □

Следствие 5.6
Пусть X — неприводимое аффинное многообразие и $\varphi : X \to \mathbb{A}^m$ — сюрьективный конечный морфизм. Тогда $\dim_p X = m$ в каждой точке $p \in X$. В частности, m не зависит от выбора φ, а $\dim_p X$ одна и та же для всех $p \in X$.

5.4.1. Размерность как степень трансцендентности. Пусть X — неприводимое аффинное многообразие. Конечная сюрьекция $\pi : X \twoheadrightarrow \mathbb{A}^m$ из следствия сл. 5.4 соответствует целому расширению $\Bbbk[X] \supset \Bbbk[u_1, u_2, \dots, u_m] = \Bbbk[\mathbb{A}^m]$. Таким образом, аффинные координатные функции $u_1, u_2, \dots, u_n$ образуют базис трансцендентности $\Bbbk[X]$ над $\Bbbk$ и $\dim X$ равна степени трансцендентности $\Bbbk[X]$ над $\Bbbk$.

Упражнение 5.9. Докажите, что $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$ для любых неприводимых многообразий X, Y.

Упражнение 5.10. Пусть $f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ неприводим и не константа. Покажите, что $\dim V(f) = (n-1)$ в $\mathbb{A}^n$.

5.4.2. Размерности подмногообразий. Если многообразие X приводимо, скажем, является объединением двух неприводимых компонент $X = X_1 \cup X_2$ одинаковой размерности, то непостоянная функция f, зануляющаяся сразу на целой компоненте, допустим, на X_1, задаёт в X гиперповерхность той же размерности, что и само X.

Обращение функции f в нуль на неприводимой компоненте аффинного многообразия X равносильно тому, что f является делителем нуля в $\Bbbk[X]$. Последовательность необратимых функций $f_1, f_2, \dots, f_m \in \Bbbk[X]$ называется *регулярной*, если ни при каком i функция $f_i \pmod{(f_1, f_2, \dots, f_{i-1})} \in \Bbbk[X]/(f_1, f_2, \dots, f_{i-1}) = \Bbbk[V(f_1, f_2, \dots, f_{i-1})]$ не делит нуль в этой фактор алгебре. В регулярной последовательности уравнений на аффинном многообразии X никакое из уравнений f_i не зануляется тождественно ни на одной из неприводимых компонент подмногообразия $V(f_1, f_2, \dots, f_{i-1}) \subset X$. В этом случае добавление каждого нового уравнения уменьшает размерность такого подмногообразия в точности на единицу, как показывает

Предложение 5.2
Если X неприводимо, то $\dim_p V(f) = \dim_p(X) - 1$ для любой непостоянной регулярной функции $f \in \mathscr{O}_X(X)$ и любой точки $p \in V(f)$.

Доказательство. Мы можем предполагать X аффинным. Фиксируем некоторую конечную сюрьекцию $\pi : X \twoheadrightarrow \mathbb{A}^m$ и рассмотрим (как при доказательстве лем. 4.11) отображение

$$\varphi = \pi \times f : X \xrightarrow{x \mapsto (\pi(x), f(x))} \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^1 .$$

Оно конечно и сюрьективно отображает X на аффинную гиперповерхность

$$V(\mu_f) \subset \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^1 ,$$

уравнением которой является минимальный многочлен функции f над полем $\Bbbk(\mathbb{A}^m)$:

$$\mu_f(u, t) = t^n + \alpha_1(u)\, t^{n-1} + \dots + \alpha_n(u) \in \Bbbk[u_1, u_2, \dots, u_m][t] .$$

Теперь $V(f) = \varphi^{-1}\left(H \cap V(\mu_f)\right)$, где $H \subset \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^1$ — гиперплоскость, заданная уравнением $t = 0$. Пересечение $H \cap V(\mu_f)$ является в аффинном пространстве $H = \mathbb{A}^m$ гиперповерхностью, заданной уравнением $\alpha_n(u) = 0$, и согласно упр. 5.10, имеет размерность $m - 1$. Остаётся применить предл. 5.1 к конечной сюрьекции $\varphi|_{V(f)} : V(f) \twoheadrightarrow V(a_n)$. □

Следствие 5.7
На произвольном многообразии X для любого $f \in \Bbbk[X]$ в каждой точке $p \in V(f)$ выполнено неравенство $\dim_p V(f) \geqslant \dim_p(X) - 1$.

Следствие 5.8
Для любых замкнутых аффинных многообразий $X_1, X_2 \subset \mathbb{A}^n$ в каждой точке $x \in X_1 \cap X_2$ выполняется неравенство $\dim_x(X_1 \cap X_2) \geqslant \dim_x(X_1) + \dim_x(X_2) - n$.

Доказательство. Пусть $\varphi_1 : X_1 \to \mathbb{A}^n$ и $\varphi_2 : X_2 \to \mathbb{A}^n$ — замкнутые вложения. Тогда $X_1 \cap X_2$ является прообразом диагонали $\Delta \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$ при отображении $\varphi_1 \times \varphi_2 : X_1 \times X_2 \hookrightarrow \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$. Внутри $X_1 \times X_2$ он задаётся n уравнениями $(\varphi_1 \times \varphi_2)^*(x_i) = (\varphi_1 \times \varphi_2)^*(y_i)$, которые являются поднятиями линейных уравнений $x_i = y_i$, задающих диагональ Δ в $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$. Осталось применить сл. 5.7. □

Следствие 5.9
Если замкнутые проективные многообразия $X_1, X_2 \subset \mathbb{P}_n$ удовлетворяют неравенству $\dim(X_1) + \dim(X_2) \geqslant n$, то $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$.

Доказательство. Пусть $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$. Рассмотрим в $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(V)$ аффинные конусы X_1', X_2'' образованные одномерными векторными подпространствами в V, составляющими точки проективных многообразий X_1 и X_2 (эти конусы имеют те же самые уравнения, что и X_1, X_2, но только теперь эти уравнения рассматриваются как аффинные). По предыдущему утверждению $\dim_O(X_1' \cap X_2'') \geqslant \dim_O(X_1) + 1 + \dim_O(X_2) + 1 - n - 1 \geqslant 1$. Таким образом, $X_1' \cap X_2''$ не исчерпывается точкой O. □

5.4.3. Размерности слоёв регулярных морфизмов. В алгебраической геометрии, в отличие от дифференциальной геометрии и топологии, размерность прообраза при регулярном отображении контролируется почти столь же жёстко, как в линейной алгебре.

Теорема 5.1
Для любого доминантного морфизма $\varphi : X \to Y$ неприводимых алгебраических многообразий в каждой точке $x \in X$ выполняется неравенство $\dim_x \varphi^{-1}(\varphi(x)) \geqslant \dim X - \dim Y$ и существует плотное открытое подмножество $U \subset Y$, над которым

$$\dim_x \varphi^{-1}(y) = \dim_x X - \dim_y Y$$

в каждой точке $x \in \varphi^{-1}(y)$ для всех $y \in U$.

Доказательство. Беря композицию φ с конечным сюрьективным морфизмом какой-нибудь аффинной окрестности точки $\varphi(x)$ на пространство $\mathbb{A}^m$, мы сводим первое утверждение теоремы к случаю $Y = \mathbb{A}^m = \operatorname{Spec_m} \Bbbk[u_1, u_2, \dots, u_m]$, $\varphi(x) = 0$. Но тогда $\varphi^{-1}(0)$ является пересечением m гиперповерхностей $V(\varphi^*(u_i)) \subset X$, и требуемое неравенство получается индуктивным применением сл. 5.7.

В доказательстве второго утверждения мы, не ограничивая общности, можем считать оба многообразия аффинными: $X = \operatorname{Spec_m} A$, $Y = \operatorname{Spec_m} B$, а морфизм φ — ограничением проекции $\pi : Y \times \mathbb{A}^m \twoheadrightarrow Y$ на замкнутое подмногообразие $X \subset Y \times \mathbb{A}^m$ (см. разложение (4-14) из упр. 4.14 на стр. 111). Мы собираемся применить к слоям этой проекции следствие сл. 5.4.

Для этого рассмотрим проективное замыкание $\overline{X} \subset Y \times \mathbb{P}_m$, выберем гиперплоскость $H \subset \mathbb{P}_m$ и точку $p \in \mathbb{P}_m \smallsetminus H$ так, чтобы сечение $Y \times \{p\} \subset Y \times \mathbb{P}_m$ не содержалось в $\overline{X}$. Тогда послойная проекция из p на H будет удовлетворять условиям прим. 5.6 во всех слоях, располагающихся над открытым подмножеством $U \subset Y$, дополнительным к $\overline{\pi}\Big(\big(Y \times \{p\}\big) \cap \overline{X}\Big)$, где $\overline{\pi} : Y \times \mathbb{P}_m \twoheadrightarrow Y$ — проекция вдоль $\mathbb{P}_m$. Таким образом, заменяя Y его открытым подмножеством U (которое можно выбрать главным, т. е. тоже аффинным), мы можем повторить рассуждения из сл. 5.4 послойно (одновременно во всех слоях проекции π) и построить конечную сюрьекцию $\psi : X \twoheadrightarrow Y \times \mathbb{A}^n$, ограничение которой на каждый слой $\varphi^{-1}(y)$ конечно и эпиморфно отображает $\varphi^{-1}(y)$ на $\{y\} \times \mathbb{A}^n$. Конечность ψ влечёт равенство $n = \dim X - \dim Y$, а конечность его ограничений на слои — равенство $\dim_x \varphi^{-1}(y) = n$. □

Следствие 5.10 (теорема Шевалле о полунепрерывности)
Для любого морфизма алгебраических многообразий $\varphi : X \to Y$ множества

$$X_k \overset{\text{def}}{=} \{\, x \in X \mid \dim_x \varphi^{-1}(\varphi(x)) \geqslant k \,\}$$

замкнуты в X при всех $k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Мы можем предполагать X и Y неприводимыми. Если $\dim Y = 0$ (т. е. Y — точка) теорема тривиально верна для всех k. Пусть теперь $\dim Y = m$ и для всех Y меньшей размерности теорема верна при всех k. Покажем, что она верна для Y. Если $k \leqslant \dim(X) - \dim(Y)$, то $X_k = X$ по предыдущей теореме. Для $k > \dim(X) - \dim(Y)$ заменим Y на $Y' = Y \smallsetminus U$, где U взято из теор. 5.1, а X — на $X' = \varphi^{-1}(Y')$. Тогда $X_k \subset X'$, $\dim Y' < \dim Y$, и применимо индуктивное предположение. □

Следствие 5.11
Для любого замкнутого морфизма $\varphi : X \to Y$ множество $Y_k \overset{\text{def}}{=} \{\, y \in Y \mid \dim \varphi^{-1}(y) \geqslant k \,\}$ замкнуто в Y при всех $k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 5.2 (размерностный критерий неприводимости)
Пусть $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ — замкнутый эпиморфизм с неприводимыми слоями одной и той же размерности. Если Y неприводимо, то X также неприводимо.

Доказательство. Пусть $X = X_1 \cup X_2$ приводимо. Каждый слой φ, будучи неприводимым, должен целиком содержаться либо в X_1, либо в X_2, т. е. $Y = Y_1 \cup Y_2$, где

$$Y_1 = \{y \in Y \mid \varphi^{-1}(y) \subset X_1\}, \quad Y_2 = \{y \in Y \mid \varphi^{-1}(y) \subset X_2\}.$$

Поскольку и X_1, и X_2 отличны от X, оба подмножества $Y_1, Y_2 \subset Y$ являются собственными. По предыдущему следствию, оба они замкнуты: Y_i можно описать как множество точек в Y, над которыми слои ограничения $X_i \to Y$ имеют максимально возможную размерность. Значит, Y тоже приводимо. □

5.5. Рабочий пример: прямые на поверхностях. Мы хотим изучить множество прямых, лежащих на данной поверхности $S \subset \mathbb{P}_3$ заданной степени d.

Упражнение 5.11. Опишите это множество для $d = 2$, т. е. когда S — квадрика (рассмотрите все возможные значения $\operatorname{rk} S$).

Для произвольно заданного d множество всех поверхностей степени d в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ представляет собою проективное пространство $\mathbb{P}_N = \mathbb{P}(S^d V^*)$. Множество всех прямых в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ представляет собою грассманиан $\mathrm{Gr}(2,4) = \mathrm{Gr}(2,V)$, который можно отождествить с квадрикой Плюккера $Q_P \subset \mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$. Обозначим через

$$\Gamma \overset{\text{def}}{=} \left\{\, (S,\ell) \in \mathbb{P}_N \times Q_P \;\middle|\; \ell \subset S \,\right\} \subset \mathbb{P}_N \times Q_P$$

множество инцидентности между прямыми и поверхностями.

Предложение 5.3
Γ является замкнутым подмногообразием в $\mathbb{P}_N \times Q_P$.

Доказательство. Линейная оболочка векторов $u, w \in V$ является образом (удвоенного) отображения свёртки $V^* \to V$, переводящего $\xi \in V^*$ в $\partial_\xi(u \wedge w) = \langle\, \xi\,,\, u \otimes w - w \otimes u\,\rangle$. Поэтому прямая $\ell = (uw)$ лежит на поверхности S, заданной уравнением $F = 0$, тогда и только тогда, когда $F\left(\partial_\xi(u \wedge w)\right) = 0$ тождественно по $\xi \in V^*$. Пусть векторы e_ν образуют базис в V. Обозначим через ξ_ν координаты ковектора ξ в двойственном базисе пространства V^*, и пусть $u = \sum u_i e_i$, $v = \sum v_i e_i$. Тогда $u \wedge w = \sum\limits_{\mu \neq \nu} p_{\mu\nu}\, e_\mu \wedge e_\nu$, где $p_{\mu\nu} = -p_{\nu\mu} = (u_\mu v_\nu - u_\nu v_\mu)$ суть плюккеровы координаты на $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$, и

$$\partial_\xi(u \wedge w) = \sum_\eta \sum_{\mu \neq \nu} \xi_\eta p_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial e_\eta}(e_\mu \wedge e_\nu) = \sum_\nu \Big(\sum_{\mu \neq \nu} p_{\mu\nu}\xi_\mu\Big) \cdot e_\nu\,.$$

Подставим $x_\nu = \sum\limits_{\mu \neq \nu} p_{\mu\nu}\xi_\mu$ в $F(x)$ и разложим результат по степеням ξ. Условие

$$F\left(\partial_\xi(u \wedge w)\right) \equiv 0$$

означает, что все коэффициенты этого разложения равны нулю, что и даёт явную систему полиномиальных уравнений на коэффициенты F и плюккеровы координаты p_{ij}, описывающую $\Gamma \subset Q_P$ как замкнутое алгебраическое подмногообразие в $\mathbb{P}_N \times \mathbb{P}_5$. □

Предложение 5.4
Проекция $\pi_2 : \Gamma \twoheadrightarrow Q_P$ сюрьективна, все её слои являются проективными пространствами размерности $\frac{1}{6}\, d(d+1)(d+5) - 1$, и, тем самым, Γ является неприводимым проективным многообразием размерности $\frac{1}{6}\, d(d+1)(d+5) + 3$.

Доказательство. Пусть прямая $\ell \subset \mathbb{P}(V)$ задана уравнениями $x_0 = x_1 = 0$. Тогда $S \supset \ell$, если и только если S задаётся уравнением вида $x_2 \cdot F_2(x) + x_3 \cdot F_3(x) = 0$, в котором $F_2, F_3 \in S^{d-1}V^*$. Такие уравнения образуют векторное пространство W, являющееся образом линейного оператора

$$S^{d-1}V^* \oplus S^{d-1}V^* \xrightarrow{(f,g)\mapsto x_2 f + x_3 g} S^d V^*\,,$$

ядро которого состоит из всех (f, g) таких, что $x_2 f = -x_3 g$, т. е. $f = x_3 h$, $g = -x_2 h$ для некоторого $h \in S^{d-2}V^*$. Таким образом, ядро изоморфно $S^{d-2}V^*$, и

$$\begin{aligned} \dim W &= 2\,\dim(S^{d-1}V^*) - \dim(S^{d-1}V^*) = \\ &= \frac{1}{6}\Big(\,2\,d(d+1)(d+2) - (d-1)d(d+1)\,\Big) = \frac{1}{6}\,d(d+1)(d+5)\,. \end{aligned}$$

Неприводимость Γ вытекает из теор. 5.2, а $\dim \Gamma$ вычисляется по теор. 5.1. □

Предложение 5.5
Общая[1] поверхность $S_d \subset \mathbb{P}_3$ степени $d \geqslant 4$ не содержит прямых.

Доказательство. Множество всех поверхностей, содержащих хотя бы одну прямую, совпадает с образом проекции $\pi_1 : \Gamma \to \mathbb{P}_N$. По следствию сл. 5.2 этот образ является замкнутым неприводимым подмногообразием в $\mathbb{P}_N = \mathbb{P}(S^d V^*)$. По теореме теор. 5.1, его размерность получается вычитанием из $\dim \Gamma$ минимума размерностей непустых слоев проекции π_1. В частности, когда $\dim \Gamma < N$, образ заведомо является собственным подмногообразием. В развёрнутом виде последнее неравенство выглядит как

$$\frac{1}{6}\, d(d+1)(d+5) + 3 < \frac{1}{6}\,(d+1)(d+2)(d+3)\,, \tag{5-7}$$

и выполняется для всех $d \geqslant 4$. □

Предложение 5.6
Каждая кубическая поверхность $S_3 \subset \mathbb{P}_3$ содержит хотя бы одну прямую, причём для общей кубики множество лежащих на ней прямых конечно.

Доказательство. При $d = 3$ неравенство (5-7) превращается в равенство: в этом случае $\dim \Gamma = N = 19$. Чтобы доказать сюрьективность проекции π_1, достаточно указать хоть один её непустой нульмерный слой — тогда неприводимое замкнутое подмногообразие $\pi_1(\Gamma) \subset \mathbb{P}_{19}$ будет 19-мерным, а стало быть, совпадёт со всем $\mathbb{P}_{19}$.

Выясним, например, какие прямые лежат на проективном замыкании кубики C с аффинным уравнением $xyz = 1$. В рассматриваемой аффинной части прямых вообще нет, поскольку прямая с параметрическим уравнением $x = x_0 + \alpha\, t\,,\ y = y_0 + \beta\, t\,,\ z = z_0 + \gamma\, t$ лежит на C , если и только если

$$\begin{cases} \alpha\beta\gamma = 0 \\ \alpha\beta z_0 + \beta\gamma x_0 + \gamma\alpha y_0 = 0 \\ \alpha y_0 z_0 + \beta x_0 z_0 + \gamma x_0 y_0 = 0 \\ x_0 y_0 z_0 = 1 \end{cases}$$

что невозможно[2]. На бесконечности C задаётся уравнением[3] $x_1 x_2 x_3 = 0$, т. е. является объединением трёх прямых $x_i = x_0 = 0$ ($i = 1,\ 2,\ 3$). □

Упражнение 5.12. Найдите все прямые на кубике Ферма C_F, заданной однородным уравнением $\sum x_i^3 = 0$.

5.5.1. Прямые на гладкой кубике. Рассмотрим гладкую[4] кубическую поверхность $S \subset \mathbb{P}_3$, заданную уравнением $F(x) = 0$.

[1] т. е. любая из некоторого плотного по Зарисскому открытого подмножества в пространстве всех гиперповерхностей

[2] скажем, $\alpha = 0 \Rightarrow (\beta = 0$ или $\gamma = 0) \Rightarrow \beta = \gamma = 0$

[3] мы подставили $x = x_1/x_0$, $y = x_2/x_0$, $z = x_3/x_0$, домножили на x_0^3 и положили $x_0 = 0$

[4] о гладкости проективных гиперповерхностей, а также кастельных и полярах к ним см. в n° 3.4.4 на стр. 76 выше

Предложение 5.7
Всякое приводимое плоское сечение S распадается либо в объединение прямой и гладкой коники, либо в объединение трёх различных прямых.

Доказательство. Покажем, что плоское сечение $\pi \cap S$ не может содержать двойную прямую. Если такая двойная прямая $\ell \subset \pi \cap S$ имеется, возьмем координаты, в которых плоскость π задаётся уравнением $x_2 = 0$, а ℓ — уравнениями $x_2 = x_3 = 0$. Тогда $F(x) = x_2 Q(x) + x_3^2 L(x) = 0$ с линейным L и квадратичным Q. Прямая ℓ пересекается с квадрикой $Q(x) = 0$ в некоторой точке a. Тогда $x_2(a) = x_3(a) = Q(a) = 0$ и все частные производные $\partial F / \partial x_i$ равны нулю в точке a, т. е. S особа в a. □

Следствие 5.12
В одной точке поверхности S может пересекаться не более трёх лежащих на S прямых, причём все они должны находиться в одной плоскости.

Доказательство. Все проходящие через $p \in S$ прямые, лежащие на S, принадлежат $S \cap T_p S$. □

Предложение 5.8
Для данной прямой $\ell \subset S$ существуют ровно 5 различных плоскостей $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_5$, содержащих ℓ и пересекающих S по тройке прямых. Более того, если $\pi_i \cap S = \ell \cup \ell_i \cup \ell_i'$, то $\ell_i \cap \ell_j = \ell_i \cap \ell_j' = \ell_i' \cap \ell_j' = \varnothing \;\forall\; i \neq j$ (в частности, на S есть скрещивающиеся прямые) и любая лежащая на S прямая, скрещивающаяся с ℓ, при каждом i пересекает ровно одну из двух прямых ℓ_i, ℓ_i'.

Доказательство. Фиксируем базис $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ в V так, что прямая $\ell = (e_0 e_1)$, заданная уравнениями $x_2 = x_3 = 0$, лежит на S. Тогда уравнение $F(x) = 0$, задающее S, имеет в этом базисе вид

$$\begin{aligned} L_{00}(x_2, x_3) \cdot x_0^2 + 2\, L_{01}(x_2, x_3) \cdot x_0 x_1 + L_{11}(x_2, x_3) \cdot x_1^2 + \\ + 2\, Q_0(x_2, x_3) \cdot x_0 + 2\, Q_1(x_2, x_3) \cdot x_1 + R(x_2, x_3) = 0\,, \end{aligned} \tag{5-8}$$

где $L_{ij}, Q_\nu, R \in k[x_2, x_3]$ являются однородными многочленами степени $1, 2, 3$ соответственно. Запараметризуем пучок плоскостей, проходящих через ℓ, точками

$$e_\vartheta = \vartheta_2 e_2 + \vartheta_3 e_3 \in (e_2 e_3)$$

и рассмотрим в плоскости $\pi_\vartheta = (e_0 e_1 e_\vartheta)$ однородные координаты $(t_0 : t_1 : t_2)$ относительно этих трёх точек. Уравнение плоской коники $\left(\pi_\vartheta \cap S\right) \smallsetminus \ell$ получается подстановкой $x = (t_0 : t_1 : \vartheta_2 t_2 : \vartheta_3 t_2)$ в уравнение (5-8) с последующим сокращением на общий множитель t_2. Матрица Грама этой коники в координатах $(t_0 : t_1 : t_2)$ имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} L_{00}(\vartheta) & L_{01}(\vartheta) & Q_0(\vartheta) \\ L_{01}(\vartheta) & L_{11}(\vartheta) & Q_1(\vartheta) \\ Q_0(\vartheta) & Q_1(\vartheta) & R(\vartheta) \end{pmatrix}$$

а её определитель

$$\begin{aligned} D(\vartheta_2, \vartheta_3) = L_{00}(\vartheta) L_{11}(\vartheta) R(\vartheta) + 2\, L_{01}(\vartheta) Q_0(\vartheta) Q_1(\vartheta) - \\ - L_{11}(\vartheta) Q_0^2(\vartheta) - L_{00}(\vartheta) Q_1^2(\vartheta) - L_{01}(\vartheta)^2 R(\vartheta) \in k[\vartheta_2, \vartheta_3] \end{aligned} \tag{5-9}$$

является однородным многочленом от $\vartheta = (\vartheta_2 : \vartheta_3)$ степени 5, и стало быть, обращается в нуль в пяти точках, учтённых с кратностями. Мы должны показать, что все эти кратности равны единице.

Каждый нуль детерминанта (5-9) соответствует вырождению коники в пару прямых, точка пересечения которых лежит либо на ℓ, либо вне ℓ.

В первом случае мы выберем базис так, чтобы эти две прямые были $\ell' = (e_0e_2)$ и $\ell'' = \big(e_0\,(e_1+e_2)\big)$ с уравнениями $x_3 = x_1 = 0$ и $x_3 = (x_1 - x_2) = 0$. Такое вырождение отвечает корню $\vartheta = (1 : 0)$ уравнения $D(\vartheta_2, \vartheta_3) = 0$, и кратность этого корня равна наибольшей степени ϑ_3, на которую делится $D(\vartheta_2, \vartheta_3)$. Поскольку $\ell, \ell', \ell'' \subset S$, уравнение (5-8) принимает вид

$$x_1x_2(x_1 - x_2) + x_3 \cdot q(x) = 0$$

с квадратичным $q(x)$, и единственными элементами G, не делящимися на ϑ_3, могут быть лишь $L_{11} \equiv x_2 \pmod{\vartheta_3}$ и $Q_1 \equiv -x_2^2/2 \pmod{\vartheta_3}$. Таким образом, $D(\vartheta_2, \vartheta_3) \equiv -L_{00}Q_1^2 \pmod{\vartheta_3^2}$, и этот член имеет порядок 1 по ϑ_3 , если и только если мономы $x_1x_2^2$ и $x_0^2x_2$ входят в (5-8) с ненулевыми коэффициентами. Но это действительно так, поскольку первый из них — это единственный моном, который вносит ненулевой вклад в $\partial F / \partial x_1$ в точке $e_2 \in S$, а второй — это единственный моном, который вносит ненулевой вклад в $\partial F / \partial x_2$ в точке $e_0 \in S$.

Во втором случае мы выберем базис так, чтобы $\ell' = (e_0e_2)$, $\ell'' = (e_1e_2)$ задавались уравнениями $x_3 = x_1 = 0$ и $x_3 = x_0 = 0$. Этому вырождению отвечает тот же самый корень $\vartheta = (1 : 0)$. Теперь (5-8) имеет вид $x_0x_1x_2 + x_3 \cdot q(x) = 0$ и ненулевым по модулю ϑ_3 элементом G является только $L_{01} \equiv x_2/2 \pmod{\vartheta_3}$. Таким образом, $D(\vartheta_2, \vartheta_3) \equiv -L_{01}^2R \pmod{\vartheta_3^2}$ имеет порядок 1 по ϑ_3 , если и только если мономы $x_2^2x_3$ и $x_0x_1x_2$ действительно присутствуют в (5-8). Но если бы второй моном не входил в F, то F делится бы на x_3 и кубика была бы приводима (а значит, особа). А первый мономϑэто единственный моном, дающий ненулевой вклад в $\partial F / \partial x_3$, вычисленную в точке $e_2 \in S$.

Оставшиеся утверждения о пересечениях прямых вытекают из сл. 5.12, предл. 5.7 и замечания, что каждая прямая в $\mathbb{P}_3$ пересекает любую плоскость. □

Предложение 5.9
Ни через какие четыре попарно скрещивающиеся прямые, лежащие на S, нельзя провести квадрику, и для любой такой четвёрки прямых всегда найдётся одна или две (но не более!) прямые, лежащие на S и пересекающие каждую прямую из четвёрки.

Доказательство. Если четыре попарно скрещивающиеся прямые на S лежат на квадрике, то это — гладкая квадрика Сегре[1], заметаемая двумя семействами прямых, и наша четвёрка прямых находится в одном из этих семейств. Но тогда все прямые другого семейства (а стало быть, и сама квадрика) лежат на S, ибо всякая прямая, проходящая через 4 различных точки S, лежит на S целиком. Тем самым, поверхность S приводима, и значит, особа. □

5.5.2. Конфигурация 27 прямых. Зафиксируем на S пару скрещивающихся прямых a, $b \subset S$ и построим 5 пар прямых ℓ_i, ℓ_i' причём в каждой паре обозначим через ℓ_i ту прямую, которая пересекает b, а через ℓ_i' — ту, которая скрещивается с b. Далее, обозначим

[1]см. n° 2.4.1 на стр. 42

через ℓ_i'' ещё 5 прямых, образующих вместе с прямыми ℓ_i пять пар прямых, ассоциированных согласно утверждению из предл. 5.8 с $\ell = b$. Таким образом, каждая из прямых ℓ_i'' пересекается с b, но скрещивается с a и со всеми ℓ_j с $j \neq i$, и стало быть, пересекает все ℓ_j' с $j \neq i$.

Любая прямая $c \subset S$, отличная от 17 только что названных, скрещивается и с a, и с b, но при каждом i пересекает ровно одну из двух прямых ℓ_i, ℓ_i'. Из утверждения предл. 5.9 вытекает, что все лежащие на S прямые, пересекающие $\geqslant 4$ прямых ℓ_i, исчерпываются парой прямых a, b. С другой стороны, если лежащая на S прямая c пересекает $\leqslant 2$ прямых ℓ_i, то с точностью до перестановки индексов, мы можем считать, что она пересекает три прямые ℓ_1', ℓ_2', ℓ_3' и ещё либо прямую ℓ_4', либо ℓ_5. В обоих случаях из утверждения предл. 5.9 вытекает, что c — это одна из двух прямых a, ℓ_5''.

Итак, всякая лежащая на S прямая c, отличная от 17 прямых a, b, ℓ_i, ℓ_i', ℓ_i'', пересекает в точности 3 прямые ℓ_i. Покажем, что на S имеется ровно 10 таких прямых, взаимно однозначно соответствующих $\binom{5}{3} = 10$ тройкам $\{i < j < k\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Действительно, для каждой тройки прямых ℓ_i имеется самое большее одна прямая c, отличная от a, и пересекающая заданные три прямые ℓ_i и оставшиеся прямые ℓ_j' (поскольку все 5 попарно скрещиваются). С другой стороны, по утверждению предл. 5.8, для каждого i на S лежит ровно 10 прямых, пересекающих ℓ_i — это 4 прямых a, b, ℓ_i' и ℓ_i'', а оставшиеся 6 должны, как мы знаем, пересекать ещё ровно две из оставшихся четырёх прямых ℓ_j. Но таких пар и имеется ровно $\binom{4}{2} = 6$, что и приводит к требуемому взаимно однозначному соответствию между прямыми c и тройками (i, j, k).

Теорема 5.3
Каждая гладкая кубическая поверхность $S \subset \mathbb{P}_3$ содержит ровно 27 прямых, причём комбинаторика их попарных пересечений на всех S одинакова. $\square$

Упражнение 5.13. Найдите порядок подгруппы $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{S}_{27}$, состоящей из всех перестановок 27 прямых, сохраняющих все их попарные пересечения.

Упражнение 5.14. Рассмотрим поле из 4 элементов: $\mathbb{F}_4 \overset{\text{def}}{=} \mathbb{F}_2[\omega]/(\omega^2+\omega+1)$, где $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Подобно расширению $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, расширение $\mathbb{F}_2 \subset \mathbb{F}_4$ обладает автоморфизмом сопряжения: $z \longmapsto \overline{z} \overset{\text{def}}{=} z^2$, который оставляет на месте подполе $\mathbb{F}_2$ и переставляет друг с другом пару корней многочлена $\omega^2 + \omega + 1$. Покажите, что проективная унитарная группа[1] $\mathbb{P}\mathrm{U}_4(\mathbb{F}_4)$ канонически вкладывается в группу $\mathfrak{G}$ из упр. 5.13 как (нормальная) подгруппа индекса 2.

Задачи для самостоятельного решения к §5

Задача 5.1. Покажите, что правило $(t_0 : t_1 : t_2) \mapsto (t_0^{-1} : t_1^{-1} : t_2^{-1})$ продолжается до рационального отображения $\varkappa : \mathbb{P}_2 \dashrightarrow \mathbb{P}_2$, определённого всюду кроме 3 точек. Найдите

[1] т. е. фактор группы матриц $M \in \mathrm{Mat}_{4\times4}(\mathbb{F}_4)$, таких что $\overline{M}M^t = E$, по подгруппе скалярных матриц

эти точки, объясните, как действует $\varkappa$ на тройке прямых, соединяющих эти точки, и опишите $\operatorname{im}\varkappa$.

Задача 5.2 (график рационального отображения). Графиком $\Gamma_\psi \subset X \times Y$ рационального отображения $\psi : X \dashrightarrow Y$, определённого на некотором открытом плотном $U \subset X$, называется замыкание множества точек $\{(x, \psi(x)) \in X \times Y \mid x \in U\}$.

а) Убедитесь, что график проекции аффинного пространства на его проективизацию из прим. 5.4 представляет собою раздутие $\mathbb{A}^{n+1}$ в начале координат.

б) Опишите график квадратичного преобразования из зад. 5.1 (в частности, опишите слои его проекций на оба сомножителя).

Задача 5.3 (результант). Зафиксируем $(n+1)$ натуральных степеней $d_0, d_1, \dots, d_n$, обозначим через $\mathbb{P}_{N_i} = \mathbb{P}\left(S^{d_i}V^*\right)$ пространство гиперповерхностей степени d_i в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$, и пусть $\Gamma = \{(S_0, S_1, \dots, S_n,\ p) \in \mathbb{P}_{N_0} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n} \times \mathbb{P}_n \mid p \in S_0 \cap S_1 \cap \ \dots\ \cap S_n\}$. Покажите что

а) Γ — неприводимое проективное многообразие и найдите $\dim G$

б) существует единственный с точностью до пропорциональности неприводимый полином R от коэффициентов однородных форм $F_0, F_1, \dots, F_n$ заданных степеней от $(n+1)$ переменных, который обращается в нуль тогда и только тогда, когда система $(n+1)$ уравнений $F_\nu = 0$ имеет ненулевое решение[1].

Задача 5.4 (геометрическое определение размерности). Убедитесь в том, что размерность неприводимого проективного многообразия $X \subset \mathbb{P}_n$ можно определить любым из следующих эквивалентных способов:

а) наибольшее $d \in \mathbb{Z}$, такое что $X \cap L \neq \varnothing$ для любого $(n-d)$-мерного проективного подпространства $L \subset \mathbb{P}_n$

б) наименьшее $d \in \mathbb{Z}$, для которого найдётся $(n-d-1)$-мерное проективное подпространство $L \subset \mathbb{P}_n$, не пересекающее X

в) наименьшее $d \in \mathbb{Z}$, такое что $X \cap L = \varnothing$ для общего[2] $(n-d-1)$-мерного проективного подпространства $L \subset \mathbb{P}_n$.

Задача 5.5. Дано d-мерное проективное многообразие $X \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$. Покажите, что множество $(n-d)$-мерных проективных подпространств $H \subset \mathbb{P}(V)$, пересекающих X по конечному множеству точек, составляют плотное открытое (по Зарисскому) подмножество грассманиана $\operatorname{Gr}(n+1-d, V)$, параметризующего все $(n-d)$-мерные проективные подпространства в $\mathbb{P}(V)$. (Подсказка: рассмотрите многообразие инцидентности $\Gamma = \{(x, H) \in X \times \operatorname{Gr}(n+1-d, V) \mid x \in H\}$; с помощью проекции $\Gamma \to X$ покажите, что оно проективно и неприводимо, и вычислите его размерность; затем рассмотрите проекцию $\Gamma \to \operatorname{Gr}(n+1-d, V)$.)

Задача 5.6 (k-детерминанталь). Обозначим $\mathscr{D}_k(m,n) \subset \mathbb{P}(\mathrm{Mat}_{m\times n})$ проективное многообразие матриц M из m строк и n столбцов, имеющих $\operatorname{rk} M \leqslant k$. С помощью подходящего многообразия инцидентности $\Gamma = \{(L, M) \mid L \subset \ker M\}$ (где L — подпространство, а M — матрица) покажите, что $\mathscr{D}_k(m,n)$ является неприводимым проективным многообразием и найдите $\dim \mathscr{D}_k(m,n)$.

Задача 5.7. Покажите, что множество всех поверхностей 4-й степени $S \subset \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$, на

[1] кстати, как выглядит этот многочлен, когда все степени равны единице?

[2] т. е. лежащего в открытом плотном подмножестве грассманиана $\operatorname{Gr}(n-d, V)$, параметризующего все $(n-d-1)$-мерные проективные подпространства в $\mathbb{P}(V)$

которых имеется хоть одна прямая, образует неприводимую алгебраическую гиперповерхность в пространстве $\mathbb{P}(S^4V^*)$ всех поверхностей 4-й степени.

Задача 5.8 (многообразие Фано гладкой квадрики). Покажите, что множество n-мерных проективных подпространств, лежащих на гладкой $(2n+1)$-мерной квадрике в $\mathbb{P}_{2n+2}$ (соотв. на гладкой $2n$-мерной квадрике в $\mathbb{P}_{2n+1}$) является неприводимым проективным многообразием (соотв. дизъюнктным объединением двух изоморфных друг другу проективных многообразий) и выясните размерности этих многообразий (они называются *многообразиями Фано* гладких квадрик или *изотропными грасманианами*).

Задача 5.9. Покажите, что изолированные точки слоёв морфизма $\varphi : X \to Y$ образуют открытое (но, возможно, пустое) подмножество в X.

Задача 5.10 (теорема Шевалле о конструктивности). Докажите, что образ регулярного морфизма алгебраических многообразий *конструктивен* в том смысле, что его можно получить конечным числом операций пересечения, объединения и разности из конечного числа открытых и замкнутых подмножеств.

Задача 5.11. Может ли гладкая кубическая поверхность $S \subset \mathbb{P}_3$ иметь плоское сечение, распадающееся в объединение гладкой коники и ее касательной?

Задача 5.12. Покажите, что любая гладкая кубическая поверхность $S \subset \mathbb{P}_3$ может быть задана в подходящей координатной системе уравнением $\varphi_1\varphi_2\varphi_3 + \psi_1\psi_2\psi_3 = 0$, где φ_i и ψ_j суть линейные однородные формы. (Подсказка: используйте прямую $\ell \subset S$ и 5 плоскостей, проходящих через неё и пересекающих S в тройке различных прямых.)

Задача 5.13. Зафиксируем на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ шестёрку точек $\{p_1, p_2, \dots, p_6\}$, так чтобы никакие три из них не были коллинеарны и ни одна не лежала бы на квадрике, проходящей через 5 других. Обозначим через $W = \{F \in S^3V^* \mid F(p_i) = 0 \ \forall\, i = 1, 2, \dots, 6\}$ пространство кубических форм на V, задающих кривые, проходящие через наши 6 точек. Рассмотрим отображение

$$\psi : \mathbb{P}_2 \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_6\} \to \mathbb{P}(W^*)\,, \tag{5-10}$$

которое отправляет точку $p \notin \{p_1, p_2, \dots, p_6\}$ в подпространство коразмерности 1 в W, образованное всеми кубическими формами из W, зануляющимися в точке p. Покажите, что а) $\dim W = 4$

б) $S = \overline{\psi\left(\mathbb{P}_2 \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_6\}\right)}$ есть кубическая поверхность в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(W^*)$

в) отображение (5-10) продолжается до регулярного изоморфизма $\sigma^{-1}_{p_1,p_2,\dots,p_6}\mathbb{P}_2 \xrightarrow{\sim} S$ между S и раздутием $\mathbb{P}_2$ в заданных 6 точках.

г) Явно опишите 27 пучков плоских кубических кривых, которые проходят через точки $p_1, p_2, \dots, p_6$ и переводятся изоморфизмом (5-10) в 27 прямых на S.

Задача 5.14 (двойная шестёрка Шлефли). Рассмотрим в $\mathbb{P}_3$ шесть прямых [0], [1], … , [5], таких что прямые [1], … , [5] попарно скрещиваются между собой и ни одна из них не касается квадрики[1], проведённой через любые 3 другие, а прямая [0] пересекается со всеми пятью прямыми [1], … , [5]. Верно ли, что:

а) $\forall\, i = 1, \dots, 5$ существует единственная прямая $[i'] \neq [0]$ такая, что $[i'] \cap [j] \neq \varnothing \ \forall\, j \neq i$

б) $[i'] \cap [i] = [i'] \cap [j'] = \varnothing$ для всех $i = 1, \dots, 5$ и для всех $j \neq i$

в) ни одна из прямых $[1'], \dots, [5']$ не касается и не лежит на квадрике, проходящей

[1]в частности, не лежит на ней

через какие-нибудь 3 другие из этих прямых

г) существует единственная прямая $[0']$, которая пересекает каждую из $[1'], \dots, [5']$ (Подсказка: пусть прямые $[0'_1] \neq [1]$ и $[0'_2] \neq [2]$ пересекают все $[1'], \dots, [5']$, кроме, соответственно, $[1']$ и $[2']$; покажите, что они пересекают прямые $[3']$, $[4']$, $[5']$ в одних и тех же трёх точках, однозначно описываемых в терминах одних только прямых [3], [4], [5], $[3']$, $[4']$, $[5']$ и [0].)

Задача 5.15. Покажите, что двойная шестёрка прямых из предыдущей задачи лежит на некоторой гладкой кубической поверхности и объясните, как получить ещё 15 прямых, лежащих на этой же кубике.

§6. Векторные раслоения и линейные системы

Всюду в этом параграфе мы продолжаем по умолчанию считать, что основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто.

6.1. Векторные расслоения. Алгебраическое векторное расслоение над алгебраическим многообразием X это алгебраическое семейство векторных пространств над X, т. е. регулярное отображение алгебраических многообразий $\pi : E \to X$, слой которого $\pi^{-1}(x)$ над любым $x \in X$ имеет структуру векторного пространства над $\Bbbk$, причём эта структура алгебраически зависит от x в том смысле, что все три имеющиеся в E послойные операции: нулевое сечение[1] $X \to E$, сложение векторов в слоях $E \underset{X}{\times} E \to E$ и умножение векторов в слоях на константы[2] $I \underset{X}{\times} E \to E$ должны быть регулярными морфизмами семейств над X.

Два векторных расслоения $\pi_1 : E_1 \to X$ и $\pi_2 : E_2 \to X$ называются *изоморфными*, если существует изоморфизм алгебраических многообразий $\varphi : E_1 \to E_2$ такой, что[3] $\pi_2 \circ \varphi = \pi_1$ и $\forall\, x \in X$ ограничение $\varphi|_{\pi_1^{-1}(x)} : \pi_1^{-1}(x) \to \pi_2^{-1}(x)$ является линейным изоморфизм векторных пространств.

6.1.1. Пучок сечений. Всякий локальный регулярный морфизм $s : U \to E$, заданный на открытом $U \subset X$ и обратный справа к прекции[4]: $\pi \circ s = \mathrm{Id}_X$, называется *локальным сечением* расслоения E. Послойное сложение и умножение на числа наделяют множество локальных сечений, определённых над U, структурой модуля над алгеброй $\mathcal{O}_X(U)$ локальных регулярных функций на U. Этот модуль обозначается через $\Gamma(U, E)$ или $E(U)$.

Соответствие $U \longmapsto \Gamma(U, E)$ задаёт на X пучок модулей над структурным пучком $\mathcal{O}_X$. Он называется *пучком сечений* расслоения E и обычно обозначается одноимённой прописной буквой[5] $\mathscr{E}$.

Отметим, что каждое векторное расслоение имеет каноническое глобальное *нулевое сечение*, сопоставляющее каждой точке $x \in X$ нулевой вектор из слоя над x.

6.1.2. Локально тривиальные расслоения. Векторное расслоение называется *тривиальным* ранга d, если оно изоморфно прямому произведению $X \times \mathbb{A}^d$ со стандартной (не зависящей от $x \in X$) структурой векторного пространства на $\mathbb{A}^d = \Bbbk^{\oplus d}$.

Это условие равносильно существованию d регулярных сечений $s_i : X \to E$ таких, что векторы $s_1(x), \dots , s_d(x)$ образуют базис в слое $\pi^{-1}(x)$ для всех $x \in X$. Действительно, послойные координатные функции на E, соответствующие этим базисным векторам, дают требуемый изоморфизм $E \xrightarrow{\sim} X \times \mathbb{A}^d$ над X. Пучок сечений тривиального расслоения ранга d представляет собою свободный $\mathcal{O}_X$-модуль $\mathscr{E} = \mathcal{O}_X^d = \bigoplus\limits_{i=1}^{d} \mathcal{O}_X \cdot s_i$ ранга d.

Векторное расслоение $\pi : E \to X$ называется *локально тривиальным* ранга d, если каждая точка $x \in X$ обладает такой открытой окрестностью $U \ni x$, что ограничение расслоения E на эту окрестность тривиально ранга d, т. е. имеет d локальных базисных сечений $s_1^{(U)}, s_2^{(U)}, \dots , s_d^{(U)} : U \to \pi^{-1}(U)$.

---

[1] сопоставляющее каждой точке $x \in X$ нулевой вектор $\vec{0}(x) \in \pi^{-1}(x)$

[2] $I = X \times \mathbb{A}^1 \to X$ обозначает *тривиальное* расслоение со слоем $\Bbbk = \mathbb{A}^1$

[3] т. е. E_1 и E_2 изоморфны как семейства над X, см. прим. 5.1 на стр. 118

[4] т. е. отображающий каждую точку $x \in X$ в слой $\pi^{-1}(x)$ над нею

[5] другое употребительное обозначение: $\mathcal{O}_X(E)$

Иначе можно сказать, что расслоение E локально тривиально ранга d тогда и только тогда, когда его пучок сечений $\mathcal{E}$ *локально свободен* ранга d, т. е. модуль его локальных сечений $E(U)$ над достаточно малыми открытыми $\subset X$, покрывающими X, является свободным $\mathcal{O}_X(U)$-модулем ранга d: $E(U) = \mathcal{O}_X(U)^d = \bigoplus_{i=1}^{d} \mathcal{O}_X(U) \cdot s_i^{(U)}$.

С каждой парой таких локальных тривиализаций $(s_1^{(U)}, s_2^{(U)}, \dots, s_d^{(U)})$ и $(s_1^{(V)}, s_2^{(V)}, \dots, s_d^{(V)})$, заданных над открытыми множествами U и V соответственно, связана обратимая $d \times d$ – матрица $\varphi_{VU} = \varphi_{VU}(x)$, зависящая от точки $x \in U \cap V$ и выражающая один базис в слое над x через другой[1]: $(s_1^{(U)}, s_2^{(U)}, \dots, s_d^{(U)}) = (s_1^{(V)}, s_2^{(V)}, \dots, s_d^{(V)}) \cdot \varphi_{VU}$. Матричные элементы как самой этой матрицы, так и обратной к ней матрицы являются регулярными функциями на $U \cap V$. Возникающие таким образом регулярные отображения

$$\varphi_{VU} : U \cap V \to \mathrm{GL}_d(k)$$

называются *функциями перехода* между двумя тривиализациями. Они удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} \varphi_{VU}\varphi_{VU} &= 1 \quad \forall\, U, V \;:\; U \cap V \neq \varnothing \\ \varphi_{VU}\varphi_{UW}\varphi_{WV} &= 1 \quad \forall\, U, V, W \;:\; U \cap V \cap W \neq \varnothing \end{aligned} \tag{6-1}$$

При выборе других локальных базисов $(\tilde{s}_1^{(U)}, \tilde{s}_2^{(U)}, \dots, \tilde{s}_d^{(U)}) = (s_1^{(U)}, s_2^{(U)}, \dots, s_d^{(U)}) \cdot \psi_U$, где $\psi_U = \psi_U(x)$ — обратимые матрицы размера $d \times d$, задающие регулярные отображения

$$\psi_U : U \to \mathrm{GL}_d(k),$$

функции перехода меняются на $\widetilde{\varphi}_{VU} = \psi_V^{-1}\varphi_{VU}\psi_U$.

6.1.3. Коциклы Чеха. Набор локальных регулярных матричных функций

$$\varphi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}_d(k),$$

привязанный к некоторому фиксированному покрытию $X = \cup U_\nu$, называется *1-коциклом Чеха* этого покрытия *со значениями* в $\mathrm{GL}_d(k)$, если $\forall\, \alpha, \beta, \gamma$

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha\beta}\varphi_{\beta\alpha} &= 1 \quad \text{всюду над } U_\alpha \cap U_\beta \\ \varphi_{\alpha\beta}\varphi_{\beta\gamma}\varphi_{\gamma\alpha} &= 1 \quad \text{всюду над } U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \end{aligned} \tag{6-2}$$

Ограничивая функции $\varphi_{\alpha\beta}$ на меньшие открытые множества, мы получаем коциклы, ассоциированные с любыми более мелкими[2] покрытиями, вписанными в исходное покрытие. Два чеховских 1-коцикла называются *эквивалентными* (или *когомологичными*), если существует некоторое общее измельчение $X = \cup U_\nu$ тех двух покрытий, на которых они первоначально были заданы, и такой набор локальных регулярных отображений[3] $\psi_\nu : U_\nu \to \mathrm{GL}_d(k)$, что функции $\varphi_{\alpha\beta}$ и $\widetilde{\varphi}_{\alpha\beta}$, индуцированные двумя рассматриваемыми 1-коциклами на этом измельчении, связаны соотношением[4]

$$\widetilde{\varphi}_{\alpha\beta} = \psi_\alpha^{-1}\varphi_{\alpha\beta}\psi_\beta \quad \text{всюду над каждым пересечением } U_\alpha \cap U_\beta\,.$$

[1] i-й столбец φ_{VU} содержит координаты сечения $s_i^{(U)}(x)$ в базисе $\{s_1^{(V)}(x), \dots, s_d^{(V)}(x)\}$

[2] покрытие $X = \cup W_\nu$ называется *более мелким*, чем покрытие $X = \cup U_\nu$, если $\forall \nu\ \exists \mu \;:\; W_\nu \subset U_\mu$

[3] всякий такой набор отображений называется *чеховской 0-коцепью со значениями в* $\mathrm{GL}_d(k)$

[4] т. е. отличаются на чеховскую *кограницу* коцепи $\{\psi_\nu\}$

Множество классов эквивалентности 1-коциклов Чеха обозначается $H^1\big(X, \mathrm{GL}_d(k)\big)$, а его элементы называются *первыми когомологиями Чеха*[1] со значениями в $\mathrm{GL}_d(k)$.

Предложение 6.1
Классы изоморфизмов локально тривиальных векторных расслоений ранга d находятся во взаимно однозначном соответствии с первыми когомологиями Чеха

$$\varphi_{\alpha\beta} \in H^1(X, \mathrm{GL}_d(k)) .$$

Доказательство. Локально тривиальное векторное расслоение E, отвечающее данному коциклу $\varphi_{\alpha\beta}$, как многообразие, склеивается из карт $U_\alpha \times \mathbb{A}^d$ вдоль их попарных пересечений $\big(U_\alpha \cap U_\beta\big) \times \mathbb{A}^d$ по правилу $U_\alpha \times \mathbb{A}^d \ni (x, v) \longmapsto (x, \varphi(\alpha\beta)(x) \cdot v) \in U_\beta \times \mathbb{A}^d$, где $v \in \mathbb{A}^d$ есть вектор-столбец. Условия коцикличности (6-2) гарантируют, что таким образом получается алгебраический атлас, а из линейности $\varphi(\alpha\beta)(x)$ по слою следует, что структуры векторных пространств на локальных $\mathbb{A}^d$ согласуются друг с другом при склейке. Наоборот, функции перехода (6-1) локально тривиального расслоения составляют, как мы видели, чеховский коцикл, причём при смене тривиализации или послойно линейном автоморфизме расслоения (что, в сущности, то же самое) этот коцикл заменяется на когомологичный. □

Пример 6.1 (тавтологическое расслоение)
Тавтологическое векторное расслоение S на проективном пространстве $\mathbb{P}(V)$ определяется геометрически как векторное подрасслоение $S \subset \mathbb{P}(V) \times V$ ранга 1, слой которого над $v \in \mathbb{P}(V)$ является тем самым 1-мерным подпространством в V, которое порождается вектором v. Над каждой аффинной картой $U_\alpha = \{v \in \mathbb{P}(V) \mid \alpha(v) \neq 0\}$, где $\alpha \in V^*$, это расслоение тривиализуется сечением $s^{(\alpha)}(v) = (v, v/\alpha(v)) \in \mathbb{P}(V) \times V$, которое представляет собой корректно определённую регулярную функцию $s^{(\alpha)} : U_\alpha \to S \subset \mathbb{P}(V) \times V$. Поскольку $\forall\ v \in U_\alpha \cap U_\beta\ s^{(\alpha)}(v) = s^{(\beta)}(v) \cdot (\beta(v)/\alpha(v))$, функции перехода между этими тривиализациями имеют вид $\varphi_{\beta\alpha}(v) = \beta(v)/\alpha(v)$ и являются корректно определ`нными регулярными отображениями $U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}_1(k) = \Bbbk^*$.

Более общим образом, тавтологическое векторное расслоение $S \twoheadrightarrow \mathrm{Gr}(m, V)$ над грассманианом m-мерных подпространств $W \subset V$ представляет собою векторное подрасслоение $S \subset \mathrm{Gr}(m, V) \times V$ ранга m, слой которого над $W \in \mathrm{Gr}(m, V)$ есть само m-мерное подпространство $W \subset V$. Если мы фиксируем базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ в V и для каждого $I = (i_1 < i_2 < \cdots < i_m) \subset (1, 2, \dots, n)$ рассмотрим стандартную аффинную карту $U_I \subset \mathrm{Gr}(m, V)$, состоящую из всех W, изоморфно проектирующихся на линейную оболочку $\{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_m}\}$, то S можно тривиализовать над U_I при помощи m сечений $s_\nu^{(I)}(W) \subset W$, образующих тот единственный базис W, матрица которого $M_I(W)$ (состоящая из координат m базисных векторов, записанных в m столбцов высоты n) содержит единичную $m \times m$ – подматрицу в строках I.

Поскольку для любого $W \in U_I \cap U_J$ мы имеем $M_I(W) = M_J(W) \cdot \varphi_{JI}(W)$, где $\varphi_{JI}(W)$ это обратная матрица к $m \times m$ подматрице матрицы M_J, расположенной в строках I, функции

[1]тех, кто знаком с топологическими теориями когомологий, уместно предупредить, что группа коэффициентов в нашем случае *некоммутативна*, что влечёт за собой ряд трудностей: например, на $H^1\big(X, \mathrm{GL}_d(k)\big)$ нет групповой структуры (это просто множество), а следующая группа $H^2\big(X, \mathrm{GL}_d(k)\big)$ вообще не может быть определена традиционным «чеховским» способом

перехода между двумя тривиализациями $s_\nu^{(I)}(W)$ и $s_\nu^{(J)}(W)$ задаются отображениями

$$W \mapsto \varphi_{JI}(W) \in \mathrm{GL}_m(k)\,.$$

Очевидно, эти отображения регулярны и корректно определены везде в $U_I \cap U_J$.

6.1.4. Линейные конструкции с векторными расслоениями. Пусть даны два локально тривиальных векторных расслоения E, F рангов r, s, представленные коциклами Чеха $\varphi_{\alpha\beta}$, $\psi_{\alpha\beta}$ над одним и тем же открытым покрытием $X = \cup U_\nu$. Тогда можно образовать их послойную прямую сумму $E \oplus F$ и тензорное произведение $E \otimes F$, которые имеет ранги $r+s$, rs соответственно, и представлены коциклами $\varphi_{\alpha\beta} \oplus \psi_{\alpha\beta}$ и $\varphi_{\alpha\beta} \otimes \psi_{\alpha\beta}$ (прямая сумма и тензорное произведение линейных операторов).

Подобным же образом к локально тривиальным расслоениям можно применять и другие тензорные конструкции: скажем, брать послойные внешние степени $\Lambda^m E$ или симметрические степени $S^m E$ степени расслоения E.

Если локально тривиальное векторное расслоение $E \twoheadrightarrow X$ имеет слой $V \simeq \Bbbk^r$ и матрицы перехода $\varphi_{\alpha\beta}$, то *двойственное* расслоение $E^* \twoheadrightarrow X$ имеет в качестве слоя двойственное пространство $V^* \simeq \Bbbk^r$ (отождествление с $\Bbbk^r$ производится выбором двойственного базиса к базису в V) и функции перехода ${}^t\varphi_{\alpha\beta}^{-1}$ (транспонированные к обратным) — при таком выборе склейки послойное спаривание $V \times V^* \to \Bbbk$ принимает значения в тривиальном одномерном расслоении $I = X \times \mathbb{A}^1$.

6.1.5. Поднятие. Как и всякое семейство, любое расслоение $E \twoheadrightarrow Y$ можно поднять вдоль любого регулярного отображения $f : X \to Y$ до векторного расслоения

$$f^*(E) \overset{\text{def}}{=} X \underset{Y}{\times} E \twoheadrightarrow X$$

над X, которое называется *обратным образом* E относительно f. Если E локально тривиально и представлено коциклом Чеха $\varphi_{\alpha\beta}$ над некоторым открытым покрытием $Y = \cup U_\nu$, то f^*E представляется коциклом $f^*(\varphi_{\alpha\beta}) = \varphi_{\alpha\beta} \circ f$ над индуцированным открытым покрытием $X = \cup f^{-1}(U_\nu)$.

Упражнение 6.1. Пусть $p : \mathrm{Gr}(m, V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^m V)$ вложение Плюккера. Проверьте, что поднятие $p^* S_{\mathbb{P}}$ тавтологического линейного расслоения на $\mathbb{P}(\Lambda^m V)$ изоморфно старшей внешней степени $\Lambda^m S_{\mathrm{Gr}}$ тавтологического линейного расслоения на $\mathrm{Gr}(m, V)$.

6.2. Группа Пикара. Классы изоморфных локально тривиальных алгебраических векторных расслоений ранга один[1] на алгебраическом многообразии X образуют абелеву группу относительно тензорного произведения. Эта группа называется *группой Пикара* и обозначается $\mathrm{Pic}(X)$. Если линейные расслоениия L, N задаются чеховскими коциклами $\varphi_{\alpha\beta}$, $\psi_{\alpha\beta}$, которые в данном случае являются обычными «числовыми» функциями $U_\alpha \cap U_\beta \to \Bbbk^*$, то их произведение $L \otimes N$ задаётся коциклом $\varphi_{\alpha\beta} \cdot \psi_{\alpha\beta}$, равным обычному произведению этих функций. Нулевым элементом группы $\mathrm{Pic}(X)$ является тривиальное линейное расслоение $I = X \times \mathbb{A}^1$ с коциклом $\psi_{\alpha\beta} \equiv 1$. Противоположным элементом к линейному расслоению L с коциклом $f_{\alpha\beta}$ является двойственное расслоение $L^* = \mathrm{Hom}(L, I)$ с коциклом $\varphi_{\alpha\beta}^{-1}$.

[1]расслоения ранга 1 часто называют *линейными расслоениями*, имея в виду, что слоями такого расслоения являются прямые линии

Предложение 6.2
Если X аффинно и $\Bbbk[X]$ факториально, то $\operatorname{Pic}(X) = 0$ (т. е. всякое линейное расслоение над X тривиально).

Доказательство. Без ограничения общности мы можем считать, что тривиализующее покрытие $X = \cup U_\alpha$ конечно и состоит из главных открытых множеств $U_\alpha = \mathscr{D}(f_\alpha)$ для некоторого набора $f_1, f_2, \dots, f_n \in \Bbbk[X]$. Пусть линейное расслоение L тривиализуется над U_α сечением $s_\alpha : U_\alpha \to L$ и имеет функции перехода

$$\varphi_{\beta\alpha} = s_\beta / s_\alpha \ : \ U_\alpha \cap U_\beta \to \Bbbk^* ,$$

представляющие собою обратимые[1] элементы кольца

$$\mathscr{O}_X(U_\alpha \cap U_\beta) = \Bbbk[X][1/(f_\alpha f_\beta)] .$$

Тем самым, в разложении $\varphi_{\beta\alpha}$ на простые множители могут участвовать только простые делители функций f_α, f_β.

Попарно неассоциированные простые делители функций $f_1, f_2, \dots, f_n$ образуют конечное множество. Для каждого элемента q из этого множества мы собираемся модифицировать тривиализующие сечения s_ν так, чтобы q полностью исчез из разложений *всех* функций перехода $\varphi_{\beta\alpha}$. После конечного числа таких модификаций все функции перехода станут обратимыми элементами кольца $\Bbbk[X]$.

Упражнение 6.2. Покажите, что линейное расслоение на неприводимом многообразии X, функции перехода которого являются глобальными обратимыми обратимыми функциями на X, тривиально.

Чтобы изгнать данный неприводимый элемент $q \in \Bbbk[X]$ из разложения всех функций перехода, обозначим через $m_{\beta\alpha} \in \mathbb{Z}$ степень, с которой q входит в разложение рациональной функции $\varphi_{\beta\alpha}$. Если хоть одна из этих степеней ненулевая, разобьём наши открытые множества на две непустых группы: множества U_β, у которых f_β делится на q, и множества U_γ, у которых f_γ не делятся на q.

Тогда для каждого фиксированного индекса β показатель $m_{\gamma\beta}$ не зависит от γ, поскольку q должно сократиться в дроби $\varphi_{\gamma_1\gamma_2} = \varphi_{\gamma_1\beta}/\varphi_{\gamma_2\beta}$. Обозначим этот показатель через m_β и заменим все тривиализующие сечения s_β на сечения $s'_\beta = q^{m_\beta} \cdot s_\beta$, которые также тривиализуют L над U_β, ибо $V(q) \subset V(f_\beta)$. После такой замены множитель q исчезнет не только из всех функций перехода $\varphi_{\gamma\beta}$ (что очевидно), но и из всех $\varphi_{\beta_1\beta_2} = \varphi_{\gamma\beta_2}/\varphi_{\gamma\beta_1}$. В функции $f_{\gamma_1\gamma_2}$ множитель q не входил с самого начала. Мы достигли цели. □

Следствие 6.1
$\operatorname{Pic}(\mathbb{A}^n) = 0$. □

Предложение 6.3
$\operatorname{Pic}(\mathbb{P}_n) = \mathbb{Z}$ и порождается тавтологическим расслоением S.

Доказательство. По предыдущему следствию, любое линейное расслоение L на $\mathbb{P}_n$ тривиально над каждой из стандартных аффинных карт. Зафиксируем однородные координаты $(x_0 : x_1 : \ \dots \ : x_n)$ на $\mathbb{P}_n$, обозначим через $t_\nu^{(i)}$, $\nu \neq i$, ограничения линейных форм

[1] в частности, нигде на $U_\alpha \cap U_\beta$ не обращающиеся в нуль

x_ν на аффиную гиперплоскость $x_i = 1$ в $\mathbb{A}^{n+1}$ и используем их как аффинные координаты в карте U_{x_i}. Функции перехода $\varphi_{ij} = s_i/s_j \in k(U_{x_i})$ между базисными сечениями s_i расслоения L над U_{x_i} представляются тогда рациональными функциями от $t_\nu^{(i)}$ без нулей и полюсов на $U_{x_i} \smallsetminus V(t_j^{(i)})$. Тогда, по теореме Гильберта о нулях, $\varphi_{ij} = c_{ij}(t_j^{(i)})^{d_{ij}}$ для некоторой ненулевой константы c_{ij} и целого d_{ij}. Умножая все s_i на подходящие ненулевые константы, мы можем добиться того, чтобы все эти сечения совпали над точкой $(1 : 1 : \dots : 1)$. Но тогда все c_{ij} станут равны 1, а поскольку $t_k^{(j)} = x_k/x_j = (x_k/x_i) : (x_j/x_i) = t_k^{(i)}/t_j^{(i)}$, из условий коцикличности $\varphi_{ij} = 1/\varphi_{ji}$, $\varphi_{jk} = \varphi_{ik}/\varphi_{ij}$ мы заключаем, что все $d_{ij} = d_{ji}$ равны одному и тому же числу d для всех i, j.

С другой стороны, для любого $d \in \mathbb{Z}$ функции $\varphi_{ij} = (t_j^{(i)})^d = (x_j/x_i)^d$ образуют 1-коцикл Чеха, т. е. определяют линейное расслоение, которое мы обозначим через $\mathcal{O}(-d)$.

Упражнение 6.3. Убедитесь, что $\mathcal{O}(-d) = S^{\otimes d}$.

Нам осталось показать, что все расслоения $\mathcal{O}(d)$ попарно не изоморфны. Для этого мы вычислим размерность пространства глобальных регулярных сечений расслоения $\mathcal{O}(d)$.

Локальное сечение, определённое всюду на U_{x_0}, имеет вид $s = f(t_1^{(0)}, t_2^{(0)}, \dots, t_n^{(0)}) \cdot s_0$, где f произвольный многочлен от n переменных. В карте U_{x_i} это сечение задаётся над точками пересечения $U_{x_i} \cap U_{x_0}$ формулой $s = f\left(\left(t_1^{(i)}/t_0^{(i)}\right), \dots, \left(t_n^{(i)}/t_0^{(i)}\right) \right) \cdot \left(t_0^{(i)}\right)^d \cdot s_i$. и продолжается на всю карту U_{x_i} тогда и только тогда, когда $\deg f \leqslant d$. Следовательно, расслоение $\mathcal{O}(d)$ вообще не имеет ненулевых глобальных сечений, если $d < 0$, а если $d \geqslant 0$, пространство глобальных сечений имеет размерность $\binom{n+d}{d}$ (неоднородные многочлены степени $\leqslant d$ от n переменных). Таким образом, все положительные расслоения $\mathcal{O}(d)$ попарно различны и не изоморфны отрицательным. А поскольку $\mathcal{O}(-d) = \mathcal{O}(d)^*$, все отрицательные расслоения $\mathcal{O}(d)$ также попарно различны. □

Упражнение 6.4. Докажите, что всякий регулярный алгебраический автоморфизм проективного пространства индуцируется *линейным* автоморфизмом подлежащего векторного пространства.

Предложение 6.4
$\mathrm{Pic}\,(\mathrm{Gr}(m, n)) = \mathbb{Z}$ и порождается старшей внешней степенью $\Lambda^m S$ тавтологического расслоения.

Доказательство. Рассуждение параллельно предыдущему. Пусть — в обозначениях из прим. 6.1 — локальное сечение s_I тривиализует данное линейное расслоение L над картой U_I, в которой в качестве аффинных координат мы используем матричные элементы матрицы $M_I(W)$, стоящие вне единичной $k \times k$-подматрицы, образованной I-строками.

Функции перехода $\varphi_{IJ} = s_I/s_J \in k(U_I)$ расслоения L являются рациональными функциями от этих матричных элементов, определёнными всюду на пересечении I-той и J-той карт и нигде не обращающимися на этом пересечении в нуль. Это пересечение является главным открытым подмножеством аффинного пространства U_I, дополнительным к гиперповерхности $V\left(D_{IJ}\right)$, где $D_{IJ} \overset{\text{def}}{=} \det M_{IJ}$ — детерминант $m \times m$ – подматрицы M_{IJ}, образованной J-строками «координатной» матрицы в M_I (как и в прим. 6.1).

Поскольку полином D_{IJ} неприводим, числитель и знаменатель рациональной функции φ_{IJ} являются его степенями: $\varphi_{IJ} = D_{IJ}^{m_{IJ}}$ для некоторого $m_{IJ} \in \mathbb{Z}$. Как и выше, из условия коцикличности вытекает, что степень m_{IJ} одна и та же для всех I, J. Действительно, так как $M_J = M_I \cdot M_{IJ}^{-1}$, то для любого K мы должны иметь $\varphi_{JK} = D_{JK}^{m_{JK}} = \left(D_{IK} \cdot D_{IJ}^{-1}\right)^{m_{JK}}$. С другой стороны, из $\varphi_{JK} = \varphi_{IK}/\varphi_{IJ}$ вытекает, что $D_{JK}^{m_{JK}} = D_{IK}^{m_{IK}} D_{IJ}^{-m_{IJ}}$, и сравнение степеней неприводимых множителей показывает, что $m_{IK} = m_{JK} = m_{IJ}$.

Это же самое рассуждение показывает, что для любого $d \in \mathbb{Z}$ функции $\varphi_{IJ} = D_{IJ}^d$ образуют 1-коцикл Чеха, и определяют линейное расслоение, которое, как и выше, обозначается $\mathcal{O}(-d)$. Итак, всякое линейное расслоение на грассманиане имеет вид $\mathcal{O}(d)$. Для завершения доказательства необходимо сделать те же две проверки, что и раньше. □

Упражнение 6.5. Проверьте, что $\mathcal{O}(-d) = \left(\Lambda^m S\right)^{\otimes d}$ и что все расслоения $\mathcal{O}(d)$ попарно неизоморфны.

6.3. Модули и пучки сечений. Рассмотрим локально тривиальное векторное расслоение $\pi : E \twoheadrightarrow X$ над неприводимым аффинным многообразием $X = \operatorname{Spec}_{\mathrm{m}} A$ и обозначим через $P_E = \Gamma(E, X)$ пространство его глобальных сечений. Оно является модулем над кольцом A глобальных регулярных функций на X. Следующая лемма показывает, что E однозначно восстанавливается по A-модулю P_E.

Лемма 6.1
Для любого $g \in \Bbbk[X]$ модуль локальных сечений $\Gamma(\mathcal{D}(g), E)$ изоморфен локализации[1]

$$\Bbbk[[X][g^{-1}] \underset{\Bbbk[X]}{\otimes} P_E$$

модуля глобальных сечений. Модуль глобальных сечений P_E конечно порождён и не имеет кручения[2]. Расслоение E тривиально , если и только если P_E свободен.

Доказательство. Первое утверждение означает, что всякое локальное сечение

$$s \in \Gamma(\mathcal{D}(g), E)$$

имеет вид $s = \tilde{s}/g^m$, где $\tilde{s} \in P_E$ является *глобальным* сечением расслоения E.

Чтобы построить такое $\tilde{s}$, тривиализуем E над каким-нибудь главным открытым покрытием $X = \cup \mathcal{D}(f_\nu)$ и выберем локальный базис $s_1^{(\nu)}, s_2^{(\nu)}, \dots, s_r^{(\nu)}$ модуля $\Gamma(\mathcal{D}(f_\nu), E)$ над кольцом $\mathcal{O}_X\left(\mathcal{D}(f_\nu)\right) = \Bbbk[X][f_\nu^{-1}]$. Ограничение сечения s на $\mathcal{D}(g) \cap \mathcal{D}(f_\nu) = \mathcal{D}(gf_\nu)$ записывается в виде

$$s|_{\mathcal{D}(gf_\nu)} = \sum_{i=1}^{r} \frac{h_i}{(gf_\nu)^{m_\nu}} \cdot s_i^{(\nu)}|_{\mathcal{D}(gf_\nu)}$$

Это означает, что $\tilde{s} = g^{\max m_\nu} \cdot s$ регулярно продолжается на всё множество $\mathcal{D}(f_\nu)$ для каждого ν, т. е. является глобальным сечением E, и $s = \tilde{s}/g^m$, как и требуется.

Чтобы построить конечную систему образующих модуля глобальных сечений над $\Bbbk[X]$, представим каждое из задействованных выше локальных базисных сечений в виде

$$s_i^{(\nu)} = \tilde{s}_i^{(\nu)}/f_\nu^{m_{i\nu}} ,$$

[1]относительно мультипликативного множества $\{f^k\}$

[2]A-модуль M называется модулем *без кручения*, если $am = 0 \Rightarrow a = 0$ или $m = 0$ для $a \in A$, $m \in M$

где $\tilde{s}_i^{(\nu)} \in P_E$ являются глобальными сечениями. Покажем, что набор глобальных сечений $\tilde{s}_i^{(\nu)}$ порождает P_E над $\Bbbk[X]$.

Для любого $s \in P_E$ и любого ν мы можем записать ограничение $s|_{\mathscr{D}(f_\nu)}$ как

$$s|_{\mathscr{D}(f_\nu)} = \frac{1}{f_\nu^m} \sum_i g_i^{(\nu)} \cdot \tilde{s}_i^{(\nu)}$$

с $g_i^{(\nu)} \in \Bbbk[X]$ и $m \in \mathbb{N}$. Таким образом, $f_\nu^m \cdot s = \sum\limits_i g_i^{(\nu)} \cdot \tilde{s}_i^{(\nu)}$ является $\Bbbk[X]$-линейной комбинацией сечений $\tilde{s}_i^{(\nu)}$. С другой стороны, поскольку у функций f_ν нет общих нулей, имеется разложение единицы $1 = \sum\limits_\nu h_\nu f_\nu^m$ с $h_\nu \in \Bbbk[X]$. Поэтому

$$s = \sum_\nu h_\nu f_\nu^m \cdot s = \sum_{\nu i} h_\nu g_i^{(\nu)} \cdot \tilde{s}_i^{(\nu)} .$$

Отсутствие кручения в P_E очевидно: так как X неприводимо, любое ненулевое сечение расслоения и любая ненулевая функция на X одновременно отличны от нуля на некотором плотном в X открытом подмножестве, и их произведение на этом подмножестве тоже ненулевое.

Если же P_E свободен с базисом $s_1, s_2, \dots, s_r$, то ограничения этих базисных сечений на любое главное открытое множество $\mathscr{D}(f)$ образуют, согласно предыдущему, базис модуля $\Gamma(\mathscr{D}(f), E)$ над кольцом $\mathscr{O}_X(\mathscr{D}(f))$. Таким образом, r совпадает с рангом E, а $s_1, s_2, \dots, s_r$ образуют базис векторного пространства $\pi^{-1}(x)$ в каждом слое[1]. □

Следствие 6.2
Каждое локально тривиальное алгебраическое векторное расслоение над $\mathbb{A}^1$ тривиально.

Доказательство. Это следует из того, что всякий конечно порждённый $\Bbbk[t]$-модуль является прямой суммой свободного модуля и модуля кручения[2]. □

Упражнение 6.6. Покажите, что любое нигде не обращающееся в 0 регулярное сечение векторного расслоения над $\mathbb{A}^1$ может быть вложено в некоторую систему регулярных сечений, образующую базис в каждом слое.

Теорема 6.1 (теорема Биркгофа – Гротендика)
Каждое локально тривиальное алгебраическое векторное расслоение E над $\mathbb{P}_1$ является прямой суммой линейных расслоений: $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{\operatorname{rk} E} \mathscr{O}_{\mathbb{P}_1}(d_i)$.

---

[1]локальное сечение, проходящее через не лежащий в линейной оболочке векторов $s_i(x)$ вектор слоя над x не может быть является $\mathscr{O}_X$-линейной комбинацией сечений s_i-х

[2]это верно не только для $\Bbbk[t]$, но для любой области главных идеалов A, и следует из теоремы о взаимном базисе: представим модуль M в виде $F\,/\,K$, где $F = A^{\oplus n}$ свободный модуль, натянутый на образующие M, а $K \subset F$ модуль линейных соотношений между ними (ядро канонической сюрьекции $F \twoheadrightarrow M$); методом Гаусса в F можно построить такой базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, что некоторые кратности $u_i = f_i \cdot e_i$ его первых $m \leqslant n$ базисных векторов составят *базис* для K; отсюда $M = A^{n-m} \oplus \left(\bigoplus\limits_i A/(f_i)\right)$ (детали см. в §12 моих лекций по алгебре на http://vyshka.math.ru/pspdf/textbooks/gorodentsev/algebra-1.pdf)

Доказательство. Обозначим через t и $w = 1/t$ аффинные координаты в стандартных картах $\mathbb{A}^1_{(0)} = \mathbb{P}_1 \smallsetminus \{\infty\}$ и $\mathbb{A}^1_{(\infty)} = \mathbb{P}_1 \smallsetminus \{0\}$. По предыдущему следствию над этими картами расслоение E тривиально. Зафиксируем локальные базисы для E над $\mathbb{A}^1_{(0)}$ и $\mathbb{A}^1_{(\infty)}$:

$$e_1^0, e_2^0, \dots, e_r^0 \quad \text{и} \quad e_1^\infty, e_2^\infty, \dots, e_r^\infty. \tag{6-3}$$

Над $\mathbb{A}^1_{(0)} \smallsetminus \{0\}$ они связаны друг с другом по формуле

$$(e_1^\infty, e_2^\infty, \dots, e_r^\infty) = (e_1^0, e_2^0, \dots, e_r^0) \cdot \varphi. \tag{6-4}$$

Матричные элементы матрицы перехода φ являются рациональными функциями от t без нулей и полюсов в $\mathbb{A}^1_{(0)} \smallsetminus \{0\}$ и, стало быть, представляют собой полиномы от t и t^{-1}. При замене расслоения E «подкрученным» расслоением $E(m) \stackrel{\text{def}}{=} E \otimes \mathcal{O}(m)$ каждый матричный элемент матрицы φ умножается на t^m. С помощью такой подкрутки мы можем добиться того, чтобы первый столбец матрицы φ (состоящий из коэффициентов разложения вектора e_1^∞ через базис e^0), не содержал отрицательных степеней t, но и не обращается при $t = 0$ в нулевой столбец. Тогда e_1^∞ станет *глобальным* сечением $E(m)$, не обращающимся в нуль ни в одной точке $\mathbb{P}_1$.

Упражнение 6.7. Покажите, что при $m \ll 0$ у расслоения $E(m)$ вообще нет ненулевых глобальных сечений.

Таким образом, существует минимальное m, такое что у расслоения $E(m)$ существует глобальное сечение e, нигде не обращающееся в нуль. Поскольку утверждение теоремы инвариантно относительно подкруток, мы можем заменить E на это $E(m)$, что и сделаем.

Далее, индукция по рангу расслоения позволяет нам считать, что фактор расслоение $Q = E/e\cdot\mathcal{O}$ является прямой суммой линейных: $Q = \mathcal{O}(d_2) \oplus \mathcal{O}(d_3) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(d_r)$. В терминах самого E это означает наличие таких тривиализаций (6-3), что $e_1^0 = e_1^\infty = e$, а переход (6-4) имеет вид:

$$\left(e_1^\infty, e_2^\infty, \dots, e_r^\infty\right) = \left(e_1^0, e_2^0, \dots, e_r^0\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & f_2 & f_3 & \dots & f_r \\ 0 & t^{d_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & t^{d_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t^{d_r} \end{pmatrix}$$

где $f_\nu = f_\nu(t, t^{-1})$ — какие-то полиномы Лорана от t, t^{-1}. Прибавление к столбцам этой матрицы первого столбца, умноженного на произвольный многочлен от t^{-1}, соответствует регулярной обратимой замене тривиализации над $\mathbb{A}^1_{(\infty)}$. При помощи таких замен мы можем сократить в полиномах f_i все мономы t^d с $d \leqslant 0$. После этого все диагональные элементы t^{d_i} матрицы перехода обязаны будут иметь $d_\nu \leqslant 0$, так как иначе возник бы столбец, являющийся полиномом от t и делящийся на t, который давал бы нигде не обращающееся в нуль глобальное сечение расслоения $E(-\ell)$ с $\ell > 0$, что противоречит предыдущим договорённостям.

Теперь мы можем обнулить все f_i, прибавляя к первой строке остальные строки, умноженные на подходящие полиномы от t (этому соответствуют регулярные обратимые замены тривиализации над картой $\mathbb{A}^1_{(0)}$). В результате матрица перехода станет диагональной, как и требовалось. □

6.4. Линейные системы сечений. Зафиксируем на многообразии X какое-нибудь линейное расслоение L с ненулевым модулем глобальных сечений. Проективизация $\mathbb{P}(W)$ любого ненулевого подпространства $W \subset \Gamma(X, L)$ в пространстве глобальных сечений расслоения L называется *линейной системой* (или *линейным рядом*) на X и по-традиции обозначается $|W|$. Линейная система всех сечений $\mathbb{P}\big(\Gamma(X, L)\big)$ называется *полной*. Размерность проективного пространства $\mathbb{P}(W)$ называется *размерностью* линейной системы. Если эта размерность больше нуля (т. е. при $\dim W \geqslant 2$), система называется *подвижной*; 1--мерные и 2-мерные и 3-мерные линейные системы по-старинке называют (линейными) *пучками*, *связками* и *сетями* соответственно. Точка $x \in X$ называется *базисной* ()или *особой*) точкой данной линейной системы, если все сечения последней обращаются в этой точке в нуль.

Геометрически, каждое сечение $s \in \Gamma(X, L)$ определяет в X подсхему

$$V(s) = \{x \in X \mid s(x) = 0\} \; ,$$

которая называется *дивизором нулей* сечения s. На учёном языке, $V(s)$ является *схемным прообразом*[1] относительно морфизма $s : X \to L$ замкнутой подсхемы $X \subset L$, вложенной в L как нулевое сечение. Иначе говоря, мы имеем диаграмму замены базы

$$\begin{tikzcd} V(s) = X \times_L X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "\text{нулевое сечение}"] \\ X \arrow[r, "s"] & L \end{tikzcd}$$

Локально, в каждой аффинной карте $U \subset X$, где L тривиализуется посредством базисного сечения e_U, сечение s представляется в виде $s = f_U \cdot e_U$, где $f_U \in \mathcal{O}_X(U)$ является регулярной функцией на U. Поэтому $V(s) \cap U = V(f_U)$ локально является гиперповерхностью нулей функции f_U. Функция f_U называется *локальным уравнением* дивизора $V(s)$.

При выборе другой тривиализации e'_U локальное уравнение умножается на регулярную и нигде на U не обращающуюся функцию на U. Это не меняет идеала $(f_U) \subset \mathcal{O}_X(U)$. Идеалы (f_U) составляют *пучок идеалов* $\mathcal{J}(s) \subset \mathcal{O}_X$ в пучке регулярных функций, и подсхема $V(s) \subset X$ иначе может описана как множество нулей этого пучка идеалов.

Пучок идеалов $\mathcal{J}(s)$ локально свободен ранга 1: он тривиализуется локальными сечениями f_U над теми же открытыми множествами, над которыми тривиализуется L, причём равенство $s = f_U e_U = f_V e_V$ над $U \cap V$) показывает, что функции перехода пучка $\mathcal{J}(s)$ обратны к функциям перехода пучка сечений $\mathscr{L}$ расслоения L. Таким образом, $\mathcal{J}(s) = \mathscr{L}^*$ является пучком сечений линейного расслоения L^*, двойственного к L.

Поскольку пропорциональные сечения имеют одинаковые схемы нулей, дивизоры нулей сечений $s \in W$, как геометрические фигуры внутри X, определяются точками проективного пространства $|W|$. Таким образом, линейные системы дивизоров обобщают те игры с пучками кривых, которыми мы занимались на первых лекциях.

Пример 6.2 (полная линейная система $|\mathcal{O}(d)|$ на $\mathbb{P}(V)$)
Пространство проективных гиперповерхностей степени d на $\mathbb{P}(V)$ это не что иное как полная линейная система $|\mathcal{O}(d)| \simeq \mathbb{P}(S^d V^*)$. В самом деле, будучи тривализовано какими-

[1]см. n° 5.2.2 на стр. 123

либо сечениями e_α над аффинными картами[1] U_α (с $\alpha \in V^*$), расслоение $\mathcal{O}(d)$ задаётся коциклом

$$f_{\alpha\beta} = \frac{e_\beta}{e_\alpha} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^d \tag{6-5}$$

и пучок его сечений можно отождествить с пучком однородных степени d рациональных функций от однородных координат на $\mathbb{P}(V)$, сечения которого над U представляют собой стандартные классы эквивалентности дробей $f(x)/g(x)$ с однородными f, g, такими что $\deg f - \deg g = d$ и $g(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in U$. В самом деле, в терминах однородных координат, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(U_\alpha)$ отождествляется с кольцом однородных рациональных функций степени нуль от однородных координат без полюсов на U_α, а функции степени d без полюсов на U_α представляют собой свободный модуль ранга 1 над этой алгеброй, порождённый образующей α^d, и функции перехода между этими образующими совпадают с коциклом (6-5). В частности, глобальные сечения пучка $\mathcal{O}(d)$ это в точности глобально определённые однородные рациональные функции, т. е. однородные многочлены степени d.

На этом языке особенно хорошо видно, чем сечения линейных расслоений отличаются от функций: мы не можем вычислить «значение» сечения, поскольку это лишь вектор в одномерном пространстве над $\Bbbk$, но не число из поля $\Bbbk$. Числом же является координата этого вектора в каком-то базисе, т. е. «отношение двух сечений». Именно поэтому «однородная функция» степени d на $\mathbb{P}_n$ это вовсе не функция, так как она не сопоставляет числа точке $\mathbb{P}_n$. Однако отношение двух таких сечений уже будет функцией, т. е. сечением пучка $\mathcal{O}$, и может вычисляться в $\Bbbk$.

6.4.1. Проективные морфизмы $X \to \mathbb{P}(W^*)$. Каждая подвижная линейная система $|W|$ на X канонически задаёт рациональное отображение

$$X \smallsetminus \{\text{базисные точки } W\} \xrightarrow{x \mapsto \operatorname{Ann}_W(x)} \mathbb{P}(W^*)\,, \tag{6-6}$$

переводящее точку $x \in X$ в линейное подпространство $\operatorname{Ann}_W(x) = \{s \in W \mid s(x) = 0\}$ коразмерности 1 в W,т. е. в точку двойственного проективного пространства $|W|^\times$.

Убедиться в том, что $\operatorname{Ann}_W(x)$ является подпространством коразмерности 1, можно зафиксировав какое-нибудь локальное сечение e, тривиализующее расслоение L в некоторой окрестности U точки x, и записав каждое $s \in W$ в виде $s = f_s \cdot e$ с $f_s \in \mathcal{O}_X(U)$. Отображение вычисления координаты сечения в точке x

$$\mathrm{ev}_{x,e} \ : \ W \xrightarrow{s \mapsto f_s(x)} \Bbbk$$

является линейной формой на пространстве сечений. Если точка x не базисная, эта линейная форма эпиморфна, и если к тому же $\dim W \geqslant 2$, ядро этой формы является ненулевым подпространством коразмерности 1 в W.

6.4.2. Ещё раз про 27 прямых на кубической поверхности. Рассмотрим шесть не лежащих на одной конике точек $p_1, p_2, \dots, p_6 \in \mathbb{P}_2$, никакие три из которых не коллинеарны, и обозначим через $|W| \subset |\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(3)|$ линейную систему всех плоских кубических кривых проходящих через эти 6 точек.

Упражнение 6.8. Убедитесь, что $\dim |W| = 3$ (а $\dim W = 4$).

[1]напомним, что $U_\alpha = \mathbb{P}(V) \smallsetminus V(\alpha)$ это дополнение до гиперплоскости, заданной линейной формой $\alpha \in V^*$

Конструкция (6-6) задаёт регулярный морфизм $w : \mathbb{P}_2 \smallsetminus \{p_1, p_2, \dots, p_6\} \to \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(W^*)$, который можно продолжить до регулярного морфизма проективных многообразий, раздув 6 точек $p_1, p_2, \dots, p_6$. Мы получим диаграмму:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, "\widetilde{w}"] & \\ \mathbb{P}_2 \arrow[rr, dashed, "w"] & & \mathbb{P}(W^*) \end{tikzcd} \tag{6-7}$$

в которой σ — проекция раздутия X на исходное $\mathbb{P}_2$, а w — проективный морфизм, задаваемый линейной системой W и понимаемый как рациональное отображение, определённое вне базисных точек $p_1, p_2, \dots, p_6$, а $\widetilde{w}$ — проективный морфизм, ассоциированный с линейной системой $\widetilde{W}$ на X, натянутой на собственные прообразы[1] всех кривых из W. Последняя линейная система уже не имеет базисных точек, так как для любого $\tau \in \sigma^{-1}(p_i)$ можно указать кубику из W, собственный прообраз которой через τ не проходит[2]. Итак, мы имеем замкнутое проективное подмногообразие

$$S \overset{\text{def}}{=} \overline{w\left(\mathbb{P}_2 \smallsetminus \{p_0, p_1, \dots, p_6\}\right)} = \widetilde{w}(X) \subset \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(W^*)\,.$$

Упражнение 6.9. Убедитесь, что отображение $\widetilde{w}$ инъективно, а S это поверхность.

Заметим теперь, что прямые в $\mathbb{P}(W^*)$, понимаемые как пересечения пучков плоскостей, взаимно однозначно соответствуют прямым в $|W|$ (ибо точка в $|W|$ это плоскость в $\mathbb{P}(W^*)$), причём точка $w(x) \in S$ тогда и только тогда лежит на прямой $\ell^\times \subset \mathbb{P}(W^*)$, являющейся пересечением пучка плоскостей $\ell \subset |W|$, когда все кубические кривые из пучка ℓ проходят через точку $x \in \mathbb{P}_2$.

Упражнение 6.10. Убедитесь, что $\deg S = 3$, т. е. S является кубической поверхностью в $\mathbb{P}_3$.

Итак, мы получаем совершенно ручную модель кубической поверхности, на которой, среди прочего, *видны* те 27 прямых, что мы не без труда построили в n° 5.5.1. Так, 15 прямых отвечают пучкам распавшихся кубик, образованных прямой $(p_i p_j)$ и пучком коник, проходящих через остальные 4 точки p_ν с $\nu \neq i, j$ (это в точности образы прямых $(p_i p_j) \subset \mathbb{P}_2$ при отображении w или, что то же самое, образы их собственных σ-прообразов $\widetilde{(p_i p_j)} \subset X$ при отображении $\widetilde{w}$). Ещё 6 прямых отвечают пучкам распавшихся кубик, образованных пучком прямых через p_i и коникой Q_i через остальные пять точек p_ν с $\nu \neq i$ (это в точности образы коник $Q_i \subset \mathbb{P}_2$ при отображении w или, что то же самое, образы их собственных σ-прообразов $\widetilde{Q}_i \subset X$ при отображении $\widetilde{w}$).

Упражнение 6.11. Найдите остальные 6 прямых на S и (не опираясь на вычисления изn° 5.5.1) опишите попарные пересечения всех 27 прямых. Можете ли Вы что-нибудь сказать об их тройных пересечениях?

[1] *собственным прообразом* подмногообразия $Z \subset \mathbb{P}_n$ при раздутии $X \xrightarrow{\sigma} \mathbb{P}_n$ какого-то множества точек $M \subset \mathbb{P}_n$ называется замыкание $\widetilde{Z} \overset{\text{def}}{=} \overline{\sigma^{-1}(Z \smallsetminus M)}$; иначе говоря, для каждой точки $p \in M \cap Z$ мы включаем в $\widetilde{Z}$ не весь исключительный дивизор $\sigma^{-1}(p)$, а только те его точки, которые отвечают *геометрическим* касательным к Z в точке p

[2] например, объединение коники, проходящей через остальные пять точек p_ν, с любой прямой, проходящей через p_i и отличной от τ

Задачи для самостоятельного решения к §6

Задача 6.1. Покажите, что в подвижной линейной системе всегда можно отыскать дивизор, проходящий через любую наперёд заданную небазисную точку.

Задача 6.2. Пусть $\dim |W| = m$ и $s_0, s_1, \dots, s_m$ составляют базис в W. Покажите, что в однородных координатах относительно двойственного базиса пространства W^* отображение (6-6) корректно задаётся формулой

$$x \mapsto \left(f_{s_0}(x) \,:\, f_{s_1}(x) \,:\, \dots \,:\, f_{s_m}(x) \right),$$

где $f_{s_i} = s_i / e \in \mathcal{O}_X(U)$ суть координаты сечений s_i в какой-нибудь локальной тривиализации $e \,:\, U \hookrightarrow L$ расслоения L над окрестностью $U \ni x$.

Задача 6.3. Сравните отображение (6-6) задаваемое полной линейной системой $|\mathcal{O}(d)|$ на $X = \mathbb{P}(V)$ с отображением Веронезе $\mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(S^n V)$.

Задача 6.4. Сравните отображение (6-6) задаваемое на $X = \mathrm{Gr}(m, V)$ полной линейной системой $|\Lambda^m S^*|$ (двойственной к старшей внешней степени тавтологического расслоения) с отображением Плюккера $\mathrm{Gr}(m, V) \to \mathbb{P}(\Lambda^m V)$.

Задача 6.5. Пусть $w \,:\, X \to \mathbb{P}(W^*)$ проективный морфизм (6-6) ассоциированный с подвижной линейной системой $W \subset \Gamma(X, L)$ без базисных точек, $\mathcal{L}$ пучок сечений расслоения L, и $\mathcal{O}(1)$ пучок сечений линейного расслоения на $\mathbb{P}(W^*)$, двойственного к тавтологическому. Покажите, что обратный образ $w^*\mathcal{O}(1)$ совпадает с подпучком в $\mathcal{L}$, линейно порождённым над $\mathcal{O}_X$ глобалными сечениями из W (в частности, для полной линейной системы $W = \Gamma(X, L)$ получаем равенство $w^*\mathcal{O}(1) = L$, как в упр. 6.1).

Задача 6.6. Убедитесь, что наклонная стрелка $\widetilde{w}$ на диаграмме из форм. (6-7) на стр. 149 является регулярным изоморфизмом между X и S.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 1.2. В правой части стоит геометрическая прогрессия $q^n + q^{n-1} + \dots + q + 1$, а слева — количество ненулевых векторов в $(n+1)$-мерном пространстве, делённое на количество ненулевых векторов в одномерном пространстве, т. е. $(q^{n+1} - 1)/(q - 1)$.

Упр. 1.3. Это очевидно из подобия прямоугольных треугольников на рис. 1◇2 на стр. 6, а также из соотношения $(s : 1) = (x_0 : x_1) = (1 : t)$.

Упр. 1.5. Ср. с n° 3.4 на стр. 71.

Упр. 1.6. Если поле $\Bbbk$ конечно и состоит из q элементов, пространство функций $\mathbb{A}(V) \to \Bbbk$ тоже конечно и состоит из $q^{q^{\dim V}}$ элементов. Так как алгебра многочленов бесконечна, гомоморфизм из алгебры многочленов в алгебру функций имеет ненулевое ядро. Его сюрьективность следует из того, что для любого конечного набора точек существует многочлен, принимающий в этих точках любые наперёд заданные значения. Над бесконечным полем $\Bbbk$ инъективность гомоморфизма алгебры многочленов $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ в алгебру функций $\mathbb{A}(V) \to \Bbbk$ доказывается индукцией по $n = \dim V$. Так как ненулевой многочлен $f(x)$ от одной переменной не может иметь $\geqslant \deg f$ корней, тождественно нулевая на бесконечном множестве $\mathbb{A}^1 = \mathbb{A}(\Bbbk)$ функция может получиться только из нулевого многочлена. Многочлен от n переменных является многочленом от x_n с коэффициентами из $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\nu=0}^{d} \varphi_\nu(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \cdot x_n^{d-\nu}$. Вычисляя коэффициенты φ_ν в произвольной точке $(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}) \in \Bbbk^{n-1}$, мы получаем многочлен от x_n с постоянными коэффициентами, задающий тождественно нулевую функцию на прямой $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = (p_1, p_2, \dots, p_{n-1})$, и потому нулевой. Тем самым, все многочлены φ_ν являются тождественно нулевыми функциями на $\mathbb{A}^{n-1}$. По предположению индукции, они являются нулевыми многочленами.

Упр. 1.9. В качестве точек q и r, задающих такую прямую, можно взять компоненты u, w разложения любого вектора $v \in V$, отвечающего точке $p \in \mathbb{P}(V)$. Наоборот, если v лежит в двумерном векторном подпространстве с базисом u, v, где $u \in U$ и $w \in W$, то компоненты разложения вектора v по U и W пропорциональны u и w в силу единственности такого разложения.

Упр. 1.11. Пусть $L_1 = \mathbb{P}(U)$, $L_2 = \mathbb{P}(W)$, $p = \mathbb{P}(\Bbbk \cdot e)$. Поскольку $p \notin L_2$, $V = W \oplus \Bbbk \cdot e$. Центральная проекция из p индуцирована линейной проекцией V на W вдоль $\Bbbk \cdot e$. Так как $p \notin L_1$, ограничение этой проекции на подпространство U имеет нулевое ядро и, стало быть, является линейным изоморфизмом.

Упр. 1.12. Это частный случай упр. 1.11.

Упр. 1.13. Строим перекрёстную ось ℓ (соединяющую точки $(a_1 b_2) \cap (b_1, a_2)$ и $(c_1 b_2) \cap (b_1, c_2)$) и берём в качестве $\varphi(x)$ точку пересечения прямой ℓ_2 с прямой, соединяющей точки b_1 и $\ell \cap (x, b_2)$.

Упр. 1.14. Пусть $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [q_1, q_2, q_3, q_4]$ и дробно линейные автоморфизмы

$$\varphi_p : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1 \quad \text{и} \quad \varphi_q : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$$

таковы, что прообразами точек ∞, 0, 1 являются, соответственно, p_1, p_2, p_3 и q_1, q_2, q_3. Тогда $\varphi_p(p_4) = \varphi_q(q_4)$ и $\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p$ переводит p_1, p_2, p_3, p_4 в q_1, q_2, q_3, q_4. Наоборот, если

$\varphi_p : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$ переводит p_1, p_2, p_3 в ∞, 0, 1, а φ_{qp} переводит переводит p_1, p_2, p_3, p_4 в q_1, q_2, q_3, q_4, то $\varphi_p \circ \varphi_{qp}^{-1}$ переводит q_1, q_2, q_3, q_4, соответственно, в ∞, 0, 1, $[p_1, p_2, p_3, p_4]$, откуда $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [q_1, q_2, q_3, q_4]$.

Упр. 2.12. см. n° 1.3.2 на стр. 10.

Упр. 2.13. При выборе другой прямой ℓ' проекция $P : C_{\text{ver}} \to \ell'$ будет композицией исходной проекции $P : C_{\text{ver}} \to \ell$ и перспективы $P : \ell \to \ell'$, которая сохраняет двойные отношения. Аналогично, при выборе другой точки $P' \in C_{\text{ver}}$ проекция $P' : C_{\text{ver}} \to \ell$ будет композицией исходной проекции $P : C_{\text{ver}} \to \ell$ и отображения $\ell \to \ell$, являющегося композицией проекции $P : \ell \to C_{\text{ver}}$ прямой ℓ на конику Веронезе из точки P, а затем проекции $P' : C_{\text{ver}} \to \ell$ коники Веронезе обратно на прямую ℓ из точки P'. Это отображение биективно и рационально, и стало быть, является дробно линейным автоморфизмом прямой ℓ, а значит, сохраняет двойные отношения.

Упр. 2.15. Правило $x' \leftrightarrow x'' \iff (x'x'') \ni s$ задаёт на C инволюцию, действие которой совпадает с действием σ на четырёх точках a', a'', b', b'' .

Упр. 2.17. Вложим прямую в $\mathbb{P}_2$ в качестве коники Веронезе C_{ver}. Всякие две различных инволюции $\sigma_1, \sigma_2 : C_{\text{ver}} \xrightarrow{\sim} C_{\text{ver}}$ высекаются пучками прямых с центрами в двух различных точках $s_1, s_2 \notin C_{\text{ver}}$ и одинаково действуют на единственную пару точек $(s_1s_2) \cap C_{\text{ver}}$.

Упр. 2.21. (Ср. с общей теорией из прим. 2.6.) Рассмотрим конус $C = P \cap T_pP$. Он имеет вершину в p и состоит из всех прямых, проходящих через p и лежащих на P. Фиксируем 3-мерную гиперплоскость $H \subset T_pP$, которая не содержит p. Тогда $G = C \cap H$ есть невырожденная квадрика на H. Таким образом, любая прямая, проходящая через p, имеет вид $(pp') = \pi_\alpha \cap \pi_\beta$, где $p' \in G$ и плоскости π_α, π_β натянутые на p и две прямые, проходящие через p' в G (см. рис. 2◇11).

Упр. 3.3. Дословно годится рассуждение, использованное в n° 2.4.1 перед формулой (2-11) на стр. 42

Упр. 3.4. Зафиксируем в пространствах U и W базисы $u_1, u_2, \dots, u_n$ и $w_1, w_2, \dots, w_m$. Тогда mn разложимых тензоров $u_i^* \otimes w_j$, где $u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^* \in U^*$ — двойственный к $u_1, u_2, \dots, u_n$ базис пространства U^*, составляют тензорного произведения $U^* \otimes V$, а соответствующие им операторы действуют на базисные векторы пространства U по правилу

$$u_i^* \otimes w_j : u_k \longmapsto \begin{cases} w_j & \text{при } k = i \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

т. е. матрица оператора $u_i^* \otimes w_j$ в выбранных нами базисах — это стандартная базисная матрица с единицей в пересечении j-той строки и i-того столбца и с нулями в остальных местах. Таким образом, стандартный базис тензорного произведения $U^* \otimes V$ переводится в стандартный базис пространства операторов.

Упр. 3.5. Для любого линейного отображения $f : V \to A$ отображение

$$V \times V \times \cdots \times V \to A\,,$$

переводящее $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ в произведение $\varphi(v_1) \cdot \varphi(v_2) \cdot \cdots \cdot \varphi(v_n) \in A$ полилинейно, и значит, корректно определяет для каждого $n \in \mathbb{N}$ линейное отображение $V^{\otimes n} \to A$, которые все вместе задают гомоморфизм алгебр $TV \to A$, продолжающий f, причём всякий гомоморфизм $TV \to A$, продолжающий f, должен переводить разложимый тензор

$v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$ в $\varphi(v_1)\cdot\varphi(v_2)\cdot\ \cdots\ \cdot\varphi(v_n) \in A$, и стало быть, должен совпадать с построенным продолжением. Это доказывает выполнение универсального свойства. Тот факт, что SV и ι однозначно определяются этим универсальным свойством, доказывается дословно также, как в лем. 3.1 на стр. 56.

Упр. 3.6. Поскольку разложимые тензоры линейно порождают $V^{*\otimes n}$ и формула

$$i_v\varphi(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) = \varphi(v, w_1, w_2, \dots, w_{n-1})$$

линейна по v и по φ, достаточно проверять её для форм φ, переводимых изоморфизмом (3-11) в разложимые тензоры вида $\xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_n$, а для таких форм она очевидна из построения.

Упр. 3.7. Для любых v, w имеем

$$0 = \varphi(\dots, (v+w), \dots, (v+w), \dots) = \varphi(\dots, v, \dots, w, \dots) + \varphi(\dots, w, \dots, v, \dots)$$

Наоборот, равенство $\varphi(\dots, v, \dots, v, \dots) = -\varphi(\dots, v, \dots, v, \dots)$ влечёт при $1 \ne -1$ равенство $\varphi(\dots, v, \dots, v, \dots) = 0$.

Упр. 3.8. Годятся дословно те же формальные соображения, что и в доказательстве лем. 3.1 на стр. 56

Упр. 3.9. Ответ: $\binom{n+d-1}{d-1}$, или число решений уравнения $m_1 + m_2 + \cdots + m_d = n$ в неотрицательных целых числах $m_1, m_2, \dots, m_d$.

Упр. 3.10. Для любого линейного отображения $f : V \to A$ отображение

$$V \times V \times \cdots \times V \to A\,,$$

переводящее $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ в произведение $\prod \varphi(v_i)$ в A полилинейно и симметрично, и значит, корректно определяет для каждого $n \in \mathbb{N}$ линейное отображение $S^nV \to A$, которые все вместе задают гомоморфизм алгебр $SV \to A$, продолжающий f. Наоборот, любой гомоморфизм $SV \to A$, продолжающий f, должен переводить разложимый тензор $\prod v_i \in S^nV$ в $\prod \varphi(v_i) \in A$, и стало быть, будет совпадать с построенным продолжением. Это доказывает выполнение универсального свойства. Тот факт, что SV и ι однозначно определяются этим универсальным свойством, доказывается дословно также, как в лем. 3.1 на стр. 56.

Упр. 3.11. Первое вытекает из равенства $0 = (v+w)\otimes(v+w) = v\otimes w + w \otimes v$, второе — из того, что равенство $v\otimes v + v \otimes v = 0$ при $1+1 \ne 0$ влечёт равенство $v \otimes v = 0$.

Упр. 3.12. Модифицируйте доказательство предл. 3.1 на стр. 64.

Упр. 3.17. Стабилизатор каждого слагаемого в симметрической группе S_n состоит из

$$m_1!\ m_2!\ \cdots\ m_d!$$

независимых перестановок одинаковых сомножителей между собою. Остаётся применить формулу для длины орбиты.

Упр. 3.18. Для $t \in V^{\otimes n}$ и $g \in S_n$ обозначим через $g(t)$ результат действия g на t перестановкой тензорных сомножителей, как в (3-29). Утверждения (а) и (б) вытекают из того, что для каждого $h \in S_n$ выполняются равенства

$$h\Big(\sum_{g\in S_n} g(t)\Big) = \sum_{g\in S_n} hg(t) = \sum_{g'\in S_n} g'(t)$$

$$h\Big(\sum_{g\in S_n} \mathrm{sgn}(g)\cdot g(t)\Big) = \mathrm{sgn}(h)\cdot \sum_{g\in S_n} \mathrm{sgn}(hg)\cdot hg(t) = \mathrm{sgn}(h)\cdot \sum_{g'\in S_n} \mathrm{sgn}(g)\cdot g'(t)$$

(ибо отображение $g \mapsto g' = hg$ взаимно однозначно), мы заключаем, что

$$h(\mathrm{sym}_n(t)) = \mathrm{sym}_n(t) \quad \text{и} \quad h(\mathrm{alt}_n(t)) = \mathrm{sgn}(h)\cdot \mathrm{alt}_n(t)\,.$$

Утверждения (в) и (г) очевидны (обе суммы состоят из $n!$ одинаковых слагаемых). В (д) суммы по чётным и по нечётным перестановкам будут состоять из одних и тех же (и одинаковых внутри каждой из сумм) слагаемых, отличающихся знаком.

Упр. 3.19. Первое проверяется прямым вычислением. Что касается второго, то из равенства $\mathrm{sym}_3 + \mathrm{alt}_3 + p = E$ вытекает, что образы $\mathrm{im}\,(\mathrm{sym}_3) = \mathrm{Sym}^3(V)$, $\mathrm{im}\,(\mathrm{alt}_3) = \mathrm{Skew}^3(V)$ и $\mathrm{im}\,(p)$ линейно порождают $V^{\otimes 3}$, поскольку любой $t \in V^{\otimes 3}$ представляется как $t = E(t) = \mathrm{sym}_3(t)+\mathrm{alt}_3(t)+p(t)$. Эта сумма прямая в силу того, что, с одной стороны, каждый из трёх операторов являются проектором и действует на своём образе тождественно, а с другой стороны, аннулирует образы двух оставшихся операторов в следствие равенств $p\circ\mathrm{alt}_3 = \mathrm{alt}_3\circ p = p\circ\mathrm{sym}_3 = \mathrm{sym}_3\circ p = 0$ и равенств $\mathrm{sym}_3\circ\mathrm{alt}_3 = \mathrm{alt}_3\circ\mathrm{sym}_3 = 0$, вытекающих из упр. 3.18. Например, если $t \in \mathrm{im}\,(p) \cap \big(\mathrm{im}\,(\mathrm{sym}_3) + \mathrm{im}\,(\mathrm{alt}_3)\big)$, то $t = p(t)$, а записывая t как $\mathrm{sym}_3(t_1) + \mathrm{alt}_3(t_2)$, получим $p(t) = 0$, откуда $t = 0$.

Упр. 3.20. Утверждение задачи равносильно тому, что $\mathrm{im}\,(p) \subset V^{\otimes 3}$ является аннулятором образа оператора $\mathrm{Id} + T + T^2 : V^{*\otimes 3} \to V^{*\otimes 3}$:

$$\mathrm{im}\,(p) = \{t \in V^{\otimes 3} \mid \big\langle (\mathrm{Id} + T + T^2)\xi\,,\, t\big\rangle = 0\ \forall\, \xi \in V^{*\otimes 3}\}\,,$$

где $\langle\, *\,,\, *\,\rangle$ означает полную свёртку между $V^{*\otimes 3}$ и $V^{\otimes 3}$. Легко видеть, что для любых $g \in S_n$, $\xi \in V^{*\otimes n}$, $t \in V^{\otimes n}$ выполняется равенство $\langle\, g\xi\,,\, t\,\rangle = \big\langle\, \xi\,,\, g^{-1}t\,\big\rangle$. Поэтому утверждение задачи равносильно тому, что образ p совпадает с ядром оператора

$$\mathrm{Id}^{-1} + T^{-1} + T^{-2} = \mathrm{Id} + T^2 + T = 3(\mathrm{alt}_3 + \mathrm{sym}_3)\,,$$

действующего на $V^{\otimes 3}$. Но из решения упр. 3.19 видно, что $\mathrm{alt}_3 + \mathrm{sym}_3$ — это проектор $V^{\otimes 3}$ на подпространство $\mathrm{Sym}^3 V \oplus \mathrm{Skew}^3 V$ вдоль подпространства $\mathrm{im}\,(p)$.

Упр. 3.22. Поскольку утверждение линейно по v, f и g достаточно проверить его для $v = e_i$, $f = x_1^{m_1}\dots x_d^{m_d}$, $g = x_1^{k_1}\dots x_d^{k_d}$, что делается прямо по определению.

Упр. 3.23. Это следует из равенства $\tilde f(v, x, \dots, x) = \frac{1}{n}\cdot\partial_v f(x)$, где $n = \deg f$.

Упр. 3.25. Это аналогично упр. 3.22.

Упр. 3.26. Фиксируем в U базис $e_1, e_2, \dots, e_m$. Если $\omega \notin \Lambda^m U$, то в ω есть моном e_I, не содержащий какого-нибудь базисного вектора — скажем, e_i. Тогда $e_i \wedge \omega \neq 0$, поскольку будет содержать ненулевой моном $e_{i\sqcup I}$, возникающий только из произведения e_i на e_I и, стало быть, не способный ни с чем сократиться. Наоборот, если $\omega \in \Lambda^m U$, то $\omega = \lambda\cdot e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_m$ и $e_i \wedge \omega = 0\ \forall\, i$, а значит, $u \wedge \omega = 0\ \ \forall\, u\in U$.

Упр. 4.1. Если a и b являются старшими коэффициентами многочленов $f(x)$ и $g(x)$ из идеала I, причём $\deg f = m$ и $\deg g = n$, где $m \geqslant n$, то $a + b$ либо равно нулю, либо является старшим коэффициентом многочлена $f(x) + x^{m-n} \cdot g(x) \in I$ степени m. Аналогично, для любого $\alpha \in A$ произведение αa является старшим коэффициентом многочлена $\alpha f(x) \in I$ степени m.

Упр. 4.2. Пусть $\pi : A \twoheadrightarrow B$ — гомоморфизм факторизации. Полный прообраз $\pi^{-1}(I)$ любого идеала $I \subset B$ является конечно порождённым идеалом в A. Образы его образующих в B продят идеал I.

Упр. 4.3. В силу универсального свойства поля частных, любой ненулевой гомоморфизм алгебры A без делителей нуля в любое поле однозначно продолжается до вложения в это поле поля частных алгебры A.

Упр. 4.4. По предл. 4.2 целое замыкание $\Bbbk(a_1, a_2, \dots, a_m)$ в Q_A является полем. Если оно содержит A, то содержит и Q_A.

Упр. 4.8. Ответ: на ось x с координатой t.

Упр. 4.11. Иначе $X = (X \smallsetminus U) \cup V(f - g)$.

Упр. 4.12. Используйте покрытие $U = \bigcup \mathscr{D}(x_i)$ и лем. 4.9.

Упр. 4.14. Пусть $A = \Bbbk[X]$, $B = \Bbbk[Y]$. Вложение $B \overset{\varphi^*}{\hookrightarrow} A$ задаёт на A структуру конечно порождённой B-алгебры, т. е. $A \simeq B[x_1, x_2, \dots, x_m]/J$.

Упр. 5.7. Пусть $X_1, X_2 \subset X$ — два замкнутых неприводимых подмножества и $U \subset X$ — открытое множество, такое что оба пересечения $X_1 \cap U$, $X_2 \cap U$ непусты. Тогда $X_1 = X_2 \iff X_1 \cap U = X_1 \cap U$, поскольку $X_i = \overline{X_i \cap U}$.

Упр. 5.8. Для любой цепочки (5-6) в Y для каждого i найдётся неприводимая компонента $\varphi^{-1}(X_i)$, сюрьективно отображающаяся на X_i. Это дает цепочку (5-6) в X.

Упр. 5.9. Докажите, что произведение конечных сюрьекций $X \to \mathbb{A}^n$, $Y \to \mathbb{A}^m$ является конечной сюрьекцией $X \times Y \to \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$.

Упр. 5.10. Постройте конечную сюрьективную проекцию $V(f) \to \mathbb{A}^{n-1}$ (ср. с упр. 5.6 и следствием из сл. 5.4).

Упр. 5.12. C_F инвариантна относительно перестановок координат. С точностью до такой перестановки, пара линейных уравнений, задающих прямую $\ell \subset C_F$, приводится методом Гаусса к $x_0 = \alpha x_2 + \beta x_3$, $x_1 = \gamma x_2 + \delta x_3$. Подставьте эти значения в уравнение кубики, покажите, что $\alpha\beta\gamma\delta = 0$, а затем найдите их.

Упр. 5.13. Ответ: $|\mathfrak{G}| = 51\,840 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$

Упр. 5.14. Кубическая форма Ферма над $\mathbb{F}_4$ совпадает с эрмитовой формой $\sum x_i \overline{x}_i$. Поэтому кубика Ферма C_F из упр. 5.12 переводится в себя проективизированной унитарной группой $\mathbb{P}\mathrm{U}_4(\mathbb{F}_4)$, отображающей прямые в прямые.

Упр. 6.4. Подъём линейных расслоений относительно автоморфизма $\varphi : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ задаёт автоморфизм группы Пикара: $\varphi^* : \operatorname{Pic}(\mathbb{P}_n) \to \operatorname{Pic}(\mathbb{P}_n)$. Выведите отсюда, что $\varphi^*(\mathscr{O}(1)) = \mathscr{O}(1)$ и φ является проективным морфизмом (6-6), ассоциированным с полной линейной системой гиперплоскостей $|\mathscr{O}(1)|$.

Упр. 6.8. Условие прохождения через точку задаёт гиперплоскость в 10-мерном векторном пространстве $\Gamma(\mathbb{P}_2, \mathscr{O}_{\mathbb{P}_2}(3)) = S^3V^*$; линейная зависимость между нашими шестью плоскостями означала бы, что всякая кубика, проходящая через некоторые пять из наших точек, автоматически проходит и через оставшуюся шестую; покажите, что это возможно только тогда, когда все 6 точек лежат на одной конике.

Упр. 6.10. Число точек пересечения S с общей прямой это число отличных от $p_1, p_2, \ldots, p_6$ точек на $\mathbb{P}_2$, через которые проходят все кубики из общего пучка $\lambda C_1 + \mu C_2$, такого что $p_1, p_2, \ldots, p_6 \subset C_1 \cap C_2$; по теореме Безу $\#(C_1 \cap C_2) = 9$.

Упр. 6.11. Недостающие 6 прямых являются образами $\widetilde{w}\left(\sigma^{-1}(p_i)\right)$ шести исключительных прямых на X.