Соображения размерности

АГ6⋄1. Покажите, что изолированные точки слоёв любого регулярного морфизма $\varphi : X \to Y$ заметают открытое (возможно, пустое) подмножество в X.

АГ6⋄2 (теорема Шевалле о конструктивности). Докажите, что образ регулярного морфизма алгебраических многообразий получается применением конечного числа операций пересечения, объединения и разности к конечному числу открытых и замкнутых подмножеств.

АГ6⋄3 (геометрическое определение размерности). Покажите, что размерность неприводимого многообразия $X \subset \mathbb{P}_n$ равна: **а)** наибольшему такому $d \in \mathbb{Z}$, что $X \cap L \neq \varnothing$ для любого $(n-d)$-мерного проективного подпространства $L \subset \mathbb{P}_n$ **б)** наименьшему $d \in \mathbb{Z}$, для которого имеется $(n-d-1)$-мерное проективное подпространство $L \subset \mathbb{P}_n$ с $X \cap L = \varnothing$ **в)** наименьшему такому $d \in \mathbb{Z}$, что $X \cap L = \varnothing$ для общего[1] $(n-d-1)$-мерного проективного подпространства $L \subset \mathbb{P}_n$.

АГ6⋄4. Покажите, что множество $(n-d)$-мерных проективных подпространств $H \subset \mathbb{P}(V)$, пересекающих произвольно заданное d-мерное проективное многообразие $X \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ по конечному множеству точек, является плотным открытым по Зарисскому подмножеством грассманиана[2] $\mathrm{Gr}(n+1-d, V)$, параметризующего все $(n-d)$-мерные проективные подпространства в $\mathbb{P}(V)$.

АГ6⋄5 (k-детерминанталь). Обозначим через $\mathcal{D}_k(m,n) \subset \mathbb{P}\big(\mathrm{Mat}_{m\times n}(\Bbbk)\big)$ проективное многообразие матриц M из m строк и n столбцов с $\operatorname{rk} M \leqslant k$. С помощью подходящего многообразия инцидентности $\Gamma = \{(L, M) \mid L \subset \ker M\}$ (где L — подпространство, а M — матрица) покажите, что $\mathcal{D}_k(m,n)$ неприводимое проективное многообразие и найдите $\dim \mathcal{D}_k(m,n)$.

АГ6⋄6. Покажите, что множество всех поверхностей 4-й степени $S \subset \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$, на которых имеется хоть одна прямая, образует неприводимую алгебраическую гиперповерхность в пространстве $\mathbb{P}(S^4V^*)$ всех поверхностей 4-й степени.

АГ6⋄7 (изотропные грассманианы). Покажите, что множество n-мерных проективных подпространств, лежащих на гладкой $(2n+1)$-мерной квадрике в $\mathbb{P}_{2n+2}$ (соотв. на гладкой $2n$-мерной квадрике в $\mathbb{P}_{2n+1}$) является неприводимым проективным многообразием (соотв. дизъюнктным объединением двух изоморфных друг другу проективных многообразий) и выясните размерности этих многообразий[3].

АГ6⋄8 (многообразие секущих). Для неприводимого $X \subset \mathbb{P}(V)$, не являющегося проективным подпространством, обозначим через $\mathcal{S}(X) \subset \mathrm{Gr}(2, V)$ замыкание множества всех прямых (p,q) с $p, q \in X$ и $p \neq q$, а через $S(X) \subset \mathbb{P}(V)$ — объединение в $\mathbb{P}(V)$ всех прямых ℓ из $\mathcal{S}(X)$. Покажите, что **а)** $\mathcal{S}(X)$ неприводимо и $\dim \mathcal{S}(X) = 2\dim X$ **б)** $S(X)$ неприводимо и $\dim S(X) \leqslant 2\dim X + 1$ **в)** если X — скрученная[4] кривая, то $\dim S(X) = 3$.

АГ6⋄9* (нормализация). Размерностью $\dim K$ нётерова коммутативного кольца K называется максимальное такое $d \in \mathbb{Z}$, что имеется цепочка простых идеалов $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_d \subsetneq K$. Пусть $\Bbbk$ — любое поле, K — конечно порождённая приведённая $\Bbbk$-алгебра, идеалы $I_1 \subset \subset I_2 \subset \ldots \subset I_m \subset K$ таковы, что факторы $K_j = K/I_j$ имеют размерности $d_1 > d_2 > \ldots > d_m$, а $\dim K = d$. Покажите, что существует такое подкольцо многочленов $S = \Bbbk[x_1, \ldots, x_d] \subset K$, что K конечно порждено как S-модуль и $I_j \cap S = (x_{d_j+1}, \ldots, x_d)$ для всех $1 \leqslant j \leqslant m$.

---

[1] Т. е. лежащего в некотором открытом по Зарисскому плотном подмножестве грассманиана $\mathrm{Gr}(n-d, V)$, параметризующего все $(n-d-1)$-мерные проективные подпространства в $\mathbb{P}(V)$.

[2] ПОДСКАЗКА: рассмотрите многообразие инцидентности $\Gamma = \{(x, H) \in X \times \mathrm{Gr}(n+1-d, V) \mid x \in H\}$, при помощи проекции $\Gamma \to X$ установите его проективность, неприводимость и найдите размерность, после чего примените проекцию $\Gamma \to \mathrm{Gr}(n+1-d, V)$.

[3] Они называются *изотропными грассманианами*.

[4] Т. е. не содержащаяся в плоскости.

Персональный табель ____.   **Листок № 6 (17.11.2025)**

(напишите свои имя, отчество и фамилию)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3а			
б			
в			
4			
5			
6			
7			
8а			
б			
в			
9			