

Аффинные алгебраические многообразия.

АГ5♦1. Пусть $S = \{w \in \mathbb{C}^2 \mid \|w\| = 1\}$ — единичная сфера стандартной эрмитовой структуры на $\mathbb{C}^2$. Найдите замыкание $\bar{S}$ в топологии Зарисского на аффинной плоскости $\mathbb{C}^2$.

АГ5♦2. При каком условии на вектор $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 1)$ параллельная проекция гиперповерхности $V(f) \subset \mathbb{A}^n$, где $f \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ и $\deg f > 0$, на гиперплоскость $x_n = 0$ в направлении вектора v является: а) доминантной б) конечной в) сюръективной?

АГ5♦3. Докажите, что проекция аффинной гиперповерхности $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ из любой точки $p \notin V(f)$ на любую гиперплоскость $H \ni p$ доминантна.

АГ5♦4. Покажите, что образ доминантного морфизма содержит открытое плотное множество.

АГ5♦5 (лемма Нётер о нормализации). Покажите, что любая гиперповерхность $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ допускает конечную сюръекцию на некоторую гиперплоскость $\mathbb{A}^{n-1} \subset \mathbb{A}^n$.

АГ5♦6. Покажите, что открытое подмножество U аффинного многообразия X является его аффинным подмногообразием¹, если и только если для некоторых $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{k}[U]$, порождающих единичный идеал в кольце $\mathbb{k}[U]$, каждое из главных открытых подмножеств $U_i = D(f_i)$ является аффинным многообразием с координатным кольцом $\mathbb{k}[U_i]$.

АГ5♦7 (рациональные функции). Кольцо частных² $Q_{\mathbb{k}[X]}$ координатной алгебры $\mathbb{k}[X]$ аффинного многообразия X называется *алгеброй рациональных функций* на X и обозначается $\mathbb{k}(X)$. Множество $D_f = \{x \in X \mid \exists p, q \in \mathbb{k}[X]: q(x) \neq 0 \text{ и } f = p/q\}$ называется *областью определения* рациональной функции $f \in \mathbb{k}(X)$. Покажите, что: а) если $x \in D_f$, то значение $f(x) = p(x)/q(x) \in \mathbb{k}$ не зависит от способа записи $f = p/q$ с $p, q \in \mathbb{k}[X]$ и $q(x) \neq 0$ б) D_f открыто и плотно в X в) отображение $f: D_f \rightarrow \mathbb{k}, x \mapsto f(x)$, непрерывно в топологии Зарисского г) идеал $I_f = \{q \in \mathbb{k}[X] \mid qf \in \mathbb{k}[X]\}$ порождается содержащимися в нём делителями нуля д) $D_f = X \setminus V(I_f)$ е) если $\mathcal{D}(h) \subset D_f$, где $h \in \mathbb{k}[X]$, то $f = g/h^m$ для некоторых $g \in \mathbb{k}[X]$ и $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ж) если $X = X_1 \cup \dots \cup X_m$ — разложение на неприводимые компоненты, то имеется изоморфизм³: $\mathbb{k}(X) \simeq \mathbb{k}(X_1) \times \dots \times \mathbb{k}(X_m), f \mapsto (f|_{X_1}, \dots, f|_{X_m})$.

АГ5♦8. Найдите D_f для а) $f = (1-y)/x$ на $V(x^2 + y^2 - 1) \subset \mathbb{A}^2$ б) $f = y/x$ на $V(x^3 + x^2 - y^2) \subset \mathbb{A}^2$ в) $f = x_1/x_3$ на $X = V(x_1x_4 - x_2x_4) \subset \mathbb{A}^4$ и выясните, лежит ли f в $\mathbb{k}[X]$.

АГ5♦9 (фактор по конечной группе). Пусть конечная группа G действует регулярными автоморфизмами на аффинном алгебраическом многообразии X над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Обозначим через $R = \mathbb{k}[X]^G \subset \mathbb{k}[X]$ подалгебру инвариантов. Покажите, что а) $\mathbb{k}$ -линейный оператор $\natural: \mathbb{k}[X] \rightarrow R$, переводящий функцию $f \in \mathbb{k}[X]$ в центр тяжести $f^\natural \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma \in G} \sigma f / |G|$ её G -орбиты, обладает для всех $f \in \mathbb{k}[X]$ и $h \in R$ свойствами $f^\natural \in R, h^\natural = h$ и $(fh)^\natural = f^\natural h$, б) алгебра R конечно порождена и не имеет нильпотентов. в) Постройте такое аффинное алгебраическое многообразие X/G и конечную регулярную сюръекцию $\pi: X \rightarrow X/G$, что слои π — это в точности G -орбиты и для любого регулярного морфизма аффинных многообразий $\varphi: X \rightarrow Y$, такого что $\forall \sigma \in G$ и $\forall x \in X$ $\varphi(\sigma x) = \varphi(x)$, существует единственный такой регулярный морфизм $\psi: X/G \rightarrow Y$, что $\psi \circ \pi = \varphi$. г) Опишите явными уравнениями в подходящем аффинном пространстве фактор $\mathbb{C}^2/G$, где $G = \mathbb{Z}/(n)$ действует на $\mathbb{C}^2$ по правилу $[k]_n: (x, y) \mapsto (e^{2\pi i k/n} x, e^{2\pi i k/n} y)$.

¹Т. е. существуют аффинное многообразие Y и регулярный морфизм $Y \hookrightarrow X$, гомеоморфно отображающий Y на U .

²Т. е. локализация со знаменателями в мультипликативной системе всех неделителей нуля.

³Через $f|_{X_i}$ обозначен образ f при гомоморфизме $\mathbb{k}(X) \rightarrow \mathbb{k}(X_i)$, который канонически продолжает гомоморфизм подъёма $\varphi_i^*: \mathbb{k}[X] \rightarrow \mathbb{k}[X_i]$ замкнутого вложения $\varphi_i: X_i \hookrightarrow X$.

№	дата	кто принял	подпись
1			
2а			
б			
в			
3			
4			
5			
6			
7а			
б			
в			
г			
д			
е			
ж			
8а			
б			
в			
9а			
б			
в			
г			