

Проективные квадрики

АГ2♦1. Покажите, что поляры данной точки $a \in \mathbb{P}_2$ относительно всех гладких коник произвольного невырожденного пучка пересекаются в одной точке.

АГ2♦2 (инволюция Дезарга). Пусть невырожденный пучок коник $L \subset \mathbb{P}(S^2 V^*)$ на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ не содержит двойной прямой, а прямая $\ell \subset \mathbb{P}_2$ не проходит через его базисные точки. Покажите, что на ℓ имеется инволютивная гомография $\sigma_L : \ell \xrightarrow{\sim} \ell$, переставляющая точки $s, t \in \ell$ если и только если $\exists C \in L : C \cap \ell = \{s, t\}$, и выведите отсюда, что над алгебраически замкнутым полем в пучке L есть ровно две коники, касающиеся прямой ℓ .

АГ2♦3. Из скольких точек состоят над девятиэлементным полем¹

а) коника $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ на $\mathbb{P}_2$ б) квадрака $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ в $\mathbb{P}_3$.

АГ2♦4. Сколько прямых пересекают 4 данные попарно скрещивающиеся прямые в пространствах а) $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ б) $\mathbb{A}^3(\mathbb{C})$ в) $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ г) $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$? Найдите все возможные ответы и выясните, какие из них устойчивы к малым шевелениям четырёх данных прямых.

АГ2♦5. Пусть $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ — невырожденная симметричная билинейная форма. Покажите, что существует единственная билинейная форма $\Lambda^2 \beta : \Lambda^2 V \times \Lambda^2 V \rightarrow \mathbb{k}$, значение которой на разложимых тензорах равно $\Lambda^2 \beta(v_1 \wedge v_2, w_1 \wedge w_2) \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} \beta(v_1, w_1) & \beta(v_1, w_2) \\ \beta(v_2, w_1) & \beta(v_2, w_2) \end{pmatrix}$. Вырождена ли она? Симметрична ли?

АГ2♦6. Пусть в зад. АГ2♦5 $V = \text{End}(U)$, где $U = \mathbb{k}^2$ со стандартным базисом $e_1, e_2 \in U$, а форма β является поляризацией квадратичной формы $\det : \text{End}(U) \rightarrow \mathbb{k}$. Рассмотрим двойственный базис $x_1, x_2 \in U^*$ и базис $v_{ij} = e_i \otimes x_j$ в V . Покажите, что а) формула $\omega \wedge \eta = \alpha(\omega, \eta) v_{11} \wedge v_{12} \wedge v_{21} \wedge v_{22}$ задаёт невырожденную симметричную билинейную форму $\alpha : \Lambda^2 V \times \Lambda^2 V \rightarrow \mathbb{k}$ б) для каждого $\omega \in \Lambda^2 V$ существует единственное такое $\omega^* \in \Lambda^2 V$, что $\alpha(\eta, \omega^*) = \Lambda^2 \beta(\eta, \omega)$ для всех $\eta \in \Lambda^2 V$ в) правило $\omega \mapsto \omega^*$ задаёт линейную проективную инволюцию на пространстве $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ г) $\Lambda^2 V = (S^2 U \otimes \Lambda^2 U^*) \oplus (\Lambda^2 U \otimes S^2 U^*)$, и слагаемые этого разложения суть собственные подпространства оператора $*$. д) Напишите матрицу оператора $*$ и матрицы Грама форм α и $\Lambda^2 \beta$ в базисе $v_{ij} \wedge v_{k\ell}$. е) Насколько зависят форма α и оператор $*$ от выбора двойственных базисов в U и U^* ?

АГ2♦7. В условиях зад. АГ2♦6 положим $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$, $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$, обозначим через P и Q квадрики, задаваемые квадратичными формами α и $\Lambda^2 \beta$ в $\mathbb{P}_5$, а через $L_{\pm} \subset \mathbb{P}_5$ — двумерные плоскости, состоящие из неподвижных точек инволюции $*$. Покажите, что а) сопоставляя прямой $(ab) \subset \mathbb{P}_3$ точку $a \wedge b \in \mathbb{P}_5$, получим биекцию между прямыми в $\mathbb{P}_3$ и точками квадрики P б) два семейства прямых на квадрике Сегре $V(\det) \subset \mathbb{P}_3$ перейдут при этом в две гладкие коники $P \cap L_{\pm}$ в) множество всех касательных прямых к квадрике Сегре перейдёт в линейное соединение этих двух коник, совпадающее с $P \cap Q$. Иными словами, имеется коммутативная диаграмма²:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{P}(U) & \xrightarrow{\text{Веронезе}} & \mathbb{P}(S^2 U) \simeq L_+ \\
 \uparrow \pi & & \downarrow \\
 \mathbb{P}_1^+ \times \mathbb{P}_1^- & \xrightarrow[\sim]{\text{Сегре}} & V(\det) \subset \mathbb{P} \text{End}(U) \xrightarrow{\text{Плюккер}} P \subset \mathbb{P} \left(\begin{array}{c} S^2 U \otimes \Lambda^2 U^* \\ \oplus \\ \Lambda^2 U \otimes S^2 U^* \end{array} \right) \\
 \downarrow \pi & & \uparrow \\
 \mathbb{P}(U^*) & \xrightarrow{\text{Веронезе}} & \mathbb{P}(S^2 U^*) \simeq L_-
 \end{array}$$

¹Поле $\mathbb{F}_9 \simeq \mathbb{Z}[x]/(3, x^2 + 1) \simeq \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}/(3), i^2 = -1 \in \mathbb{Z}/(3)\}$.

²Плюккер пунктирный, поскольку отображает прямые в точки.

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3а			
б			
4а			
б			
в			
г			
5			
6а			
б			
в			
г			
д			
е			
7а			
б			
в			