

ПРОГРАММА ИТОГОВОГО ПИСЬМЕННОГО ЭКЗАМЕНА ПО КУРСУ
«ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ В АЛГЕБРАИЧЕСКУЮ ГЕОМЕТРИЮ»
(ОСЕННИЙ СЕМЕСТР 2025/26 УЧЕБНОГО ГОДА)

ТЕМА 1. Проективные пространства и пространства проективных гиперповерхностей. Прямые, коники, группа PGL_2 , рациональные кривые.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: пользоваться глобальными однородными и локальными аффинными координатами, использовать для решения геометрических задач (включая построения линейкой) гомографии и проекции, использовать свойства и различные определения рациональных нормальных кривых, пользоваться свойствами пучков гиперповерхностей, находить особые точки, касательные пространства и поляры проективных гиперповерхностей.

ТЕМА 2. Проективные квадрики. Пространство квадрик. Пучки квадрик.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: определять планарность квадрики и находить особые точки, выяснять проективную эквивалентность квадрик, строить пучки коник с заданными геометрическими свойствами и использовать их для решения задач, выяснять простоту и регулярность пучка квадрик, использовать геометрические свойства касательных к гиперповерхности особых квадрик.

ТЕМА 3. Многообразия Грассмана, Веронезе и Сегре. Проективные морфизмы, связанные с тензорной алгеброй.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: искать линейный носитель тензора, описывать тензоры с минимальным ненулевым носителем, использовать глобальные однородные и локальные аффинные координаты на грассманиане, описывать квадратичными соотношениями образы плюккерова вложения и вложения Веронезе, пользоваться клеточным разбиением комплексного грассманиана.

ТЕМА 4. Нётеровость, теорема Гильберта о базисе идеала. Свойства целые элементов в расширениях колец. Строение конечно порождённых коммутативных алгебр над полем, базисы трансцендентности. Теорема Гильберта о нулях.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: пользоваться нётеровостью, алгебраичностью и свойствами целых элементов, нормальностью, свойствами идеалов (в частности простых и максимальных), анализировать радикальность идеалов.

ТЕМА 5. Словарик «Коммутативная алгебра — Аффинная алгебраическая геометрия»: спектры, гомоморфизмы поднятия, топология Зарисского, неприводимые компоненты.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: свободно переходить с геометрического языка точек, многообразий и полиномиальных отображений между ними на язык идеалов в аффинных алгебрах и гомоморфизмов алгебр, использовать свойства топологии Зарисского и неприводимость.

ТЕМА 6. Геометрические свойства гомоморфизмов алгебр: доминантные морфизмы, замкнутые вложения, конечные морфизмы.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: пользоваться свойствами доминантных и конечных морфизмов, анализировать конечность и сюръективность.

ТЕМА 7. Алгебраические многообразия. Отделимость. Рациональные функции и рациональные морфизмы. Свойства проективных многообразий, собственность.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: находить области определения рациональных функций, строить конечные проекции и пользоваться их свойствами, использовать раздутия и замкнутость проективных морфизмов.

ТЕМА 8. Размерность. Размерности подмногообразий и слоёв морфизмов. Размерности проективных многообразий.

ПРЕДПОЛАГАЕТ УМЕНИЕ: эффективно пользоваться различными определениями размерности, вычислять и оценивать размерности подмногообразий, а также слоёв и (замыканий) образов регулярных морфизмов, использовать это для решения задач, вычислять размерности проективных многообразий и анализировать их неприводимость при помощи размерностного критерия.