Касательные и кокасательные расслоения

АГ8◇1. Обозначим через $\mathcal{O}(-1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(-1)$ линейное расслоение на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$, слой которого над точкой v равен одномерному подпространству в V, натянутому на v. Положим $\mathcal{O}(1) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}(-1)^*$ и $\mathcal{O}(d) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}(1)^{\otimes d}$, $\mathcal{O}(-d) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}(-1)^{\otimes d}$ при $d \in \mathbb{N}$. Покажите, что пространство регулярных сечений расслоения $\mathcal{O}(d)$ над открытым множеством $U \subset \mathbb{P}_n$ изоморфно подпространству поля частных $\Bbbk(x_0, x_1, \dots, x_n)$, состоящему из дробей, допускающих для каждой точки $v \in U$ запись p/q, где $p, q \in \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]$ однородны с $\deg p - \deg q = d$ и $q(v) \neq 0$, и является локально свободным модулем ранга 1 над алгеброй локальных регулярных функций на U, которая в свою очередь изоморфна подалгебре поля частных $\Bbbk(x_0, x_1, \dots, x_n)$, возникающей при $d = 0$.

АГ8◇2. Пусть $X = \mathrm{Gr}(k, V)$ — грассманиан k-мерных подпространств в V, $E = V \times X$ — тривиальное расслоение со слоем V, $S \subset E$ — тавтологическое подрасслоение, и $Q = E/S$. Всякое $\Bbbk$-линейное дифференцирование $\xi : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$ локальных регулярных функций на X продолжается до дифференцирования $1 \otimes \xi : V \otimes \mathcal{O}_X \to V \otimes \mathcal{O}_X$ локальных регулярных сечений расслоения E правилом $1 \otimes \xi(v \otimes f) \stackrel{\text{def}}{=} v \otimes \xi(f)$, и *вторая фундаментальная форма* сопоставляет (локальному) векторному полю ξ на X (локальное) отображение $\tilde{\xi} : \mathcal{S} \to \mathcal{Q}$ из пучка $\mathcal{S}$ (локальных) сечений расслоения S в пучок $\mathcal{Q}$ (локальных) сечений расслоения Q, переводящее сечение $s \in \mathcal{S} \subset V \otimes \mathcal{O}_X$ в $1 \otimes \xi(s) \bmod S \in \mathcal{Q}$. Покажите, что отображение $\tilde{\xi}$ является $\mathcal{O}_X$-линейным и правило $\xi \mapsto \tilde{\xi}$ задаёт $\mathcal{O}_X$-линейный изоморфизм $\mathcal{T}_X \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{S}, \mathcal{Q})$ касательного расслоения T_X с расслоением $S^* \otimes Q$.

АГ8◇3 (точная последовательность Эйлера). Покажите, что пучки сечений касательного и кокасательного расслоений на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ включаются в точные последовательности $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}$-модулей:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n} \to V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1) \to \mathcal{T}_{\mathbb{P}_n} \to 0 \quad \text{и} \quad 0 \to \Omega^1_{\mathbb{P}_n} \to V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(-1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n} \to 0,$$

в которых стрелки $\mathcal{O} \to V \otimes \mathcal{O}(1)$ и $V^* \otimes \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O}$ задаются тем же тензором из пространства

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\big(\mathcal{O}, V \otimes \mathcal{O}(1)\big) \simeq V \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\big(\mathcal{O}, \mathcal{O}(1)\big) \simeq V \otimes V^* \simeq V \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\big(\mathcal{O}(-1), \mathcal{O}\big) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\big(V^* \otimes \mathcal{O}(-1), \mathcal{O}\big)$$

что и тождественное отображение $\mathrm{Id}_V \in V \otimes V^* \simeq \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, V)$.

АГ8◇4. Покажите, что пучки поливекторных полей[1] на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ включаются в точные последовательности $\mathcal{O}$-модулей $0 \to \Lambda^{k-1}\mathcal{T} \to \Lambda^k V \otimes \mathcal{O}(k) \to \Lambda^k \mathcal{T} \to 0$, где $\Lambda^k V \simeq \mathrm{Hom}\big(\mathcal{O}(k), \Lambda^k \mathcal{T}\big) \simeq$ $\simeq \mathrm{Hom}^*\big(\Lambda^{k-1}\mathcal{T}, \mathcal{O}(k+1)\big)$, которые организуются в одну длинную точную последовательность $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}$-модулей $0 \to \mathcal{O} \to V \otimes \mathcal{O}(1) \to \Lambda^2 V \otimes \mathcal{O}(2) \to \dots \to \Lambda^n V \otimes \mathcal{O}(n) \to \mathcal{O}(n+1) \to 0$, где стрелки суть однородные компоненты оператора умножения на сечение $s : \mathcal{O} \to V \otimes \mathcal{O}(1)$ из зад. АГ8◇3 во внешней алгебре $\Lambda^*\big(V \otimes \mathcal{O}(1)\big) = \bigoplus_{k=0}^{n+1} \Lambda^k V \otimes \mathcal{O}(k)$ пучка сечений расслоения $V \otimes \mathcal{O}(1)$.

АГ8◇5. Пусть $k + m < n$. Покажите, что многообразие пересекающихся k- и m-мерных плоскостей в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$: $\Omega(k, m, n) \stackrel{\text{def}}{=} \{(K, M) \mid K \cap M \neq \varnothing\} \subset \mathrm{Gr}(k+1, V) \times \mathrm{Gr}(m+1, V)$ гладко в точке $(K, M) = \big(\mathbb{P}(U), \mathbb{P}(W)\big)$ тогда и только тогда, когда $\dim U \cap W = 1$ и в этом случае

$$T_{(K,M)}\Omega(k, m, n) = \{(\varphi, \psi) \in \mathrm{Hom}(U, V/U) \times \mathrm{Hom}(W, V/W) \mid \varphi|_{U \cap W} \equiv \psi|_{U \cap W} \,(\mathrm{mod}\, U + W)\}.$$

АГ8◇6. Для замкнутого m-мерного подмногообразия $X \subset \mathrm{Gr}(k+1, V)$ покажите, что: а) объединение $\Pi_X = \bigcup_{\Pi \in X} \Pi \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ является замкнутым многообразием б) если точка $p \in \Pi_X$ лежит на единственной плоскости $\Pi = \mathbb{P}(U) \in X$, причём X гладко в Π и для любого ненулевого касательного к X вектора $\varphi \in T_\Pi \mathrm{Gr}(k+1, V) = \mathrm{Hom}(U, V/U)$ значение $\varphi(p) \neq 0$, то Π_X гладко в p, $\dim_p \Pi_X = k + m$ и $T_p \Pi_X$ как подпространство в $\mathbb{P}_n$ представляет собой проективизацию полного прообраза при факторизации $V \twoheadrightarrow V/U$ векторного подпространства в V/U, порождённого векторами $\varphi(p)$ со всевозможными $\varphi \in T_\Pi X \subset \mathrm{Hom}(U, V/U)$.

[1] т. е. сечений внешних степеней $\Lambda^k \mathcal{T}_{\mathbb{P}_n}$ касательного расслоения

Персональный табель ________________________________.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 8 (7.12.2016)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2			
3			
4			
5			
6а			
б			