Доза коммутативной алгебры

АГ4◇1. Покажите, что *радикал* $\sqrt{I} \overset{\text{def}}{=} \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} : a^n \in I\}$ любого идеала $I \subset A$ тоже идеал.

АГ4◇2. Для двух идеалов I, J кольца A обозначим через IJ идеал, порождённый произведениями ab с $a \in I$, $b \in J$. Верно ли что **а)** произведения ab уже и сами по себе образуют идеал **б)** $IJ = I \cap J$ **в)** $IJ = I \cap J$, когда $I + J = A$ **г)** $V(I) \cup V(J) = V(IJ) = V(I \cap J)$ **д)** $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J}$ **е)** $\sqrt{IJ} = \sqrt{I}\sqrt{J}$ **ж)** $IJ = \sqrt{IJ}$, когда $I = \sqrt{I}$ и $J = \sqrt{J}$

АГ4◇3. Пусть $J = (xy, yz, zx) \subset \mathbb{k}[x, y, z]$. Опишите $V(J) \subset \mathbb{A}^3$ и $I(V(J)) \subset \mathbb{k}[x, y, z]$. Можно ли задать многообразие $V(J)$ двумя полиномиальными уравнениями?

АГ4◇4. Укажите многочлен $f \in I(V(J)) \smallsetminus J$ для $J = (x^2 + y^2 - 1, y - 1) \subset \mathbb{k}[x, y]$.

АГ4◇5. Опишите $V(J) \subset \mathbb{A}^3$ и $I(V(J))$ для **а)** $J = (xy, (x - y)z)$ **б)** $J = (xy + yz + zx, x^2 + y^2 + z^2)$.

АГ4◇6. Нётерово ли кольцо **а)** степенных рядов над нётеровым кольцом **б)** рядов $f \in \mathbb{C}[\![z]\!]$, сходящихся всюду в $\mathbb{C}$ **в)** рядов $f \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ с ненулевым радиусом сходимости **г)** кольцо рациональных функций $p(z)/q(z) \in \mathbb{C}(z)$ с $q(z) \neq 0$ при $|z| \leqslant 1$ **д*)** произвольная подалгебра $A \subset \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, имеющая конечную коразмерность как векторное пространство над $\mathbb{k}$.

АГ4◇7. Пусть элементы $m_1, m_2, \dots, m_r \in M$ порождают A-модуль M и A-линейный эндоморфизм $\varphi : M \to M$ действует на них по правилу $(m_1, m_2, \dots, m_r) \mapsto (m_1, m_2, \dots, m_r) \cdot F$, где F — квадратная $r \times r$ матрица с элементами из A. Докажите, что **а)** $\det(F) \cdot M \subset \varphi(M)$ **б)** если M точен[1], то $I \cdot M \neq M$ для любого идеала $I \subsetneq A$.

АГ4◇8. Покажите, что факториальное кольцо целозамкнуто в своём поле частных.

АГ4◇9. Цело ли кольцо непрерывных функций на $\mathbb{R}^2$ над подкольцом $\{f \mid f(1, 0) = f(0, 1)\}$?

АГ4◇10. Существует ли бесконечное поле, конечно порождённое как $\mathbb{Z}$-алгебра[2]?

АГ4◇11*. Покажите, что кольцо многочленов над нормальным кольцом тоже нормально.

АГ4◇12. Покажите, что кривая $V(x^2 - y^3) \subset \mathbb{A}^2$ неприводима, но не нормальна.

АГ4◇13. Нормален ли конус $V(x^2 - y^2 - z^2) \subset \mathbb{A}^3$?

АГ4◇14. Пусть над алгебраически замкнутым полем многочлен f обращается в нуль в каждой точке гиперповерхности $V(g) \subset \mathbb{A}^n$. Покажите, что каждый неприводимый сомножитель многочлена g делит многочлен f.

АГ4◇15. Пусть A — кольцо непрерывных вещественных функций на компактном хаусдорфовом топологическом пространстве X. Покажите, что отображение $X \to \operatorname{Spec}_m A$, $x \mapsto \ker \mathrm{ev}_x$, биективно и топология Зарисского на $\operatorname{Spec}_m A$ совпадает с исходной топологией на X.

АГ4◇16*. Всякий ли простой идеал кольца непрерывных функций $[0, 1] \to \mathbb{R}$ максимален?

АГ4◇17. Опишите замыкание единичной сферы $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ в топологии Зарисского на комплексной аффинной плоскости $\mathbb{A}(\mathbb{C}^2)$.

АГ4◇18. Приведите пример непрерывного в топологии Зарисского, но не регулярного морфизма аффинных алгебраических многообразий.

АГ4◇19. Пусть $X = \operatorname{Spec}_m A$ — аффинное алгебраическое многообразие. Покажите, что разложимость A в прямое произведение[3] $A = A_1 \times A_2$ равносильна разложимости X в дизъюнктное объединение $X = X_1 \sqcup X_2$ двух собственных замкнутых подмножеств.

АГ4◇20. Для аффинных алгебраических многообразий $X \subset \mathbb{A}^n$, $Y \subset \mathbb{A}^m$, уравнения которых известны, опишите систему уравнений, реализующих $X \times Y$ в качестве подмногообразия в $\mathbb{A}^{n+m}$ и покажите, что $X \times Y$ неприводимо, если X и Y неприводимы.

---

[1] Т. е. $\forall\, a \in A$ $aM = 0 \Rightarrow a = 0$.

[2] С тавтологическим действием $n \cdot a \overset{\text{def}}{=} a + a + \dots + a$ (n одинаковых слагаемых).

[3] Напомним, что для разложимости алгебры (даже не обязательно коммутативной) в прямое произведение двух подалгебр необходимо и достаточно разложения единицы в сумму двух независимых идемпотентов: $1 = e_1 + e_2$, где $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$, $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$ (докажите это!).

Персональный табель ______________________________ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 4 (28.09.2016)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2а			
б			
в			
г			
д			
е			
ж			
3			
4			
5а			
б			
6а			
б			
в			
г			
д			
7а			
б			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			