Проективные квадрики

АГ2◇1. Обозначим через $S \subset \mathbb{P}_N = \mathbb{P}(S^2V^*)$ множество всех вырожденных квадрик на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$. Покажите, что

а) S является алгебраической гиперповерхностью, и точка $Q \in S$ является неособой точкой поверхности S тогда и только тогда, когда соответствующая квадрика $Q \subset \mathbb{P}_n$ имеет единственную особую точку $p \in Q$

б) касательная гиперплоскость $T_Q S \subset \mathbb{P}_N$ в такой неособой точке $Q \in S$ состоит из всех квадрик на $\mathbb{P}_n$, проходящих через особую точку p квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$.

АГ2◇2 (спинорное разложение). Пусть $V = \mathrm{End}(U)$, где $\dim U = 2$. Покажите, что $V = U^* \otimes U$ и разложение $V^{\otimes 2}$ на симметричную и знакопеременную компоненты иммеет вид

$$\underbrace{\Big(\big(S^2U^* \otimes S^2U\big) \oplus \big(\Lambda^2U^* \otimes \Lambda^2U\big) \Big)}_{S^2V} \bigoplus \underbrace{\Big(\big(S^2U^* \otimes \Lambda^2U\big) \oplus \big(\Lambda^2U^* \otimes S^2U\big) \Big)}_{\Lambda^2V} .$$

АГ2◇3. Пусть гладкая квадрика $G \subset \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ задаётся квадратичной формой g с поляризацией $\widetilde{g}$. Покажите, что билинейная форма $\Lambda^2\widetilde{g}$ на Λ^2V, заданная формулой

$$\Lambda^2\widetilde{g}(\,v_1 \wedge v_2\,,\, w_1 \wedge w_2\,) \overset{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} \widetilde{g}(v_1, w_1) & \widetilde{g}(v_1, w_2) \\ \widetilde{g}(v_2, w_1) & \widetilde{g}(v_2, w_2) \end{pmatrix} ,$$

симметрична и невырождена, запишите её матрицу Грама в базисе $e_i \wedge e_j$, где e_i составляют g-ортонормальный базис в V, и покажите, что пересечение квадрики, задаваемой в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 g)$ квадратичной формой $\Lambda^2 g$, с квадрикой Плюккера $\mathrm{Gr}(2, V) \subset \mathbb{P}_5$ состоит из плюккеровых образов всех касательных прямых к квадрике $G \subset \mathbb{P}_3$.

АГ2◇4. В обозначениях предыдущей задачи покажите, что вложение Плюккера $\mathrm{Gr}(2, V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2V)$ переводит два семейства прямых на квадрике Сегре $G \subset \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(U, U))$ в пару гладких коник, высекаемых из квадрики Плюккера $P \subset \mathbb{P}(\Lambda^2V)$ двумя дополнительными плоскостями

$$\Lambda = \mathbb{P}\left(S^2U^* \otimes \Lambda^2U\right) \quad \text{и} \quad \Lambda = \mathbb{P}\left(\Lambda^2U^* \otimes S^2U\right) ,$$

лежащими в $\mathbb{P}(\Lambda^2 \mathrm{Hom}(U, U))$ по зад. АГ2◇2. Более того, обе коники вложены в эти плоскости по Веронезе, т. е. мы имеем следующую коммутативную диаграмму[1]:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}(U) \arrow[rr, hook, "\text{Веронезе}"'] & & \mathbb{P}(S^2U) \simeq \Lambda \arrow[d, hook] \\
\mathbb{P}_1^+ \times \mathbb{P}_1^- \arrow[u, "\pi"'] \arrow[d, "\pi"] \arrow[r, "\text{Сегре}", "\sim"'] & G \subset \mathbb{P}\,\mathrm{Hom}(U, U) \arrow[r, dashed, "\text{Плюккер}"] & P \subset \mathbb{P}\begin{pmatrix} \Lambda^2U^* \otimes S^2U \\ \oplus \\ S^2U^* \otimes \Lambda^2U \end{pmatrix} \\
\mathbb{P}(U^*) \arrow[rr, hook, "\text{Веронезе}"] & & \mathbb{P}(S^2U^*) \simeq \Lambda \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

АГ2◇5 (звёздочка Ходжа). В условиях предыдущих трёх задач оператор $* \,:\, \Lambda^2V \xrightarrow{\omega \mapsto \omega^*} \Lambda^2V$ задаётся соотношением $\omega_1 \wedge \omega_2^* = \Lambda^2\widetilde{g}(\omega_1, \omega_2) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$, где $\omega_{1,2} \in \Lambda^2$ любые, а $e_i \in V$ составляют фиксированный ортонормальный базис формы g. Покажите что это определение корректно (не зависит от выбора базиса), найдите собственные значения и собственные подпространства оператора Ходжа и укажите место последних на предыдущей картинке.

[1] Плюккер пунктирный, поскольку отображает прямые в точки.

Персональный табель ______________________________________.
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 2 (14.09.2016)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
2			
3			
4			
5			