§2. Многообразия Веронезе, Грассмана и Сегре

2.1. Напоминания из полилинейной алгебры. Напомню[1], что *тензорным произведением* модулей $V_1, V_2, \dots, V_n$ над коммутативным кольцом K называется фактор

$$V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{V}/\mathcal{R}$$

свободного модуля $\mathcal{V}$ с базисом из всех n-буквенных слов $[v_1 v_2 \dots v_n]$, где i-той буквой может быть любой вектор $v_i \in V_i$, по подмодулю $\mathcal{R} \subset \mathcal{V}$, линейно порождённому над K всевозможными трёхчленными линейными комбинациями вида

$$[\cdots (\lambda u + \mu w) \cdots] - \lambda [\cdots u \cdots] - \mu [\cdots w \cdots], \tag{2-1}$$

где $\lambda, \mu \in K$, $u, w \in V_i$, обозначенные многоточиями соответственные фрагменты всех трёх слов неизменны, а номер i того места, в котором происходят изменения, может быть любым. Класс $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \stackrel{\text{def}}{=} [v_1 v_2 \dots v_n] \pmod{\mathcal{R}}$ называется тензорным произведением векторов $v_1, v_2, \dots, v_n$. По построению, тензорное умножение

$$\begin{gathered} \tau : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n \\ (v_1, v_2, \dots, v_n) \mapsto v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \end{gathered} \tag{2-2}$$

линейно по каждому аргументу при фиксированных остальных, т. е. дистрибутивно по отношению к K-линейным комбинациям векторов:

$$\cdots \otimes (\lambda u + \mu w) \otimes \cdots = \lambda \cdot (\cdots \otimes u \otimes \cdots) - \mu \cdot (\cdots \otimes w \otimes \cdots), \tag{2-3}$$

и универсально в том смысле, что для любого модуля W и любого полилинейного отображения

$$\varphi : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to W$$

существует единственный линейный оператор $F : V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n \to W$, такой что $\varphi = F \circ \tau$.

Упражнение 2.1. Покажите, что модуль $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ и полилинейное отображение (2-2) действительно обладают этим универсальным свойством, причём определяются им однозначно с точностью до единственного K-линейного изоморфизма, перестановочного с τ.

Если каждый из модулей V_i свободен с базисом $e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \dots, e_{d_i}^{(i)}$, то их тензорное произведение $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ тоже свободно с базисом

$$e_{\alpha_1}^{(1)} \otimes e_{\alpha_2}^{(2)} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_n}^{(n)}, \quad 1 \leqslant \alpha_i \leqslant d_i. \tag{2-4}$$

В частности, $\operatorname{rk} V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n = \prod \operatorname{rk} V_i$. Если модули $V_i = F_i / R_i$ заданы как факторы свободных модулей F_i по неким подмодулям соотношений $R_i \subset F_i$, то при каждом i модуль

$$F_1 \otimes \cdots \otimes F_{i-1} \otimes R_i \otimes F_{i+1} \otimes \cdots \otimes F_n$$

естественно вложен в $F_1 \otimes F_2 \otimes \cdots \otimes F_n$ в качестве подмодуля, и тензорное произведение $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ изоморфно фактору свободного модуля $F_1 \otimes F_2 \otimes \cdots \otimes F_n$ по K-линейной оболочке всех n этих подмодулей $F_1 \otimes \cdots \otimes F_{i-1} \otimes R_i \otimes F_{i+1} \otimes \cdots \otimes F_n \subset V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$.

Например, тензорное произведение абелевых групп $\mathbb{Z}/(m_1) \otimes \mathbb{Z}/(m_2) \otimes \cdots \otimes \mathbb{Z}/(m_n)$, рассматриваемых как модули над $\mathbb{Z}$, изоморфно $\mathbb{Z}/(\text{н.о.д.}(m_1, m_2, \dots, m_n))$, т. е. фактору свободного модуля $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \otimes \cdots \otimes \mathbb{Z}$ ранга $1^n = 1$, по подмодулю порождённому $m_1, m_2, \dots, m_n$.

Упражнение 2.2. Убедитесь, что $K \otimes V \simeq V \simeq V \otimes K$ для любого модуля V над произвольным коммутативным кольцом K.

[1] См. http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/1415/lec-01.pdf.

2.1.1. Тензорная, симметрическая и внешняя алгебры. Положим $V^{\otimes 0} \overset{\text{def}}{=} K$, а для $n \in \mathbb{N}$

$$V^{\otimes n} \overset{\text{def}}{=} \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{n} .$$

Тензорное произведение векторов задаёт структуру ассоциативной градуированной K-алгебры на прямой сумме модулей

$$\boldsymbol{T}V \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{n\geqslant 0} V^{\otimes n} .$$

Если модуль V свободен с базисом $e_1, e_2, \dots, e_n$, алгебра $\boldsymbol{T}V$ изоморфна алгебре многочленов от некоммутирующих переменных $e_1, e_2, \dots, e_n$ с коэффициентами из K, т. е. её базис над K составляют (некоммутативные) мономы вида

$$e_{\nu_1} \otimes e_{\nu_2} \otimes \cdots \otimes e_{\nu_m} , \tag{2-5}$$

которые перемножаются приписыванием друг к другу через значок $\otimes$. Алгебра $\boldsymbol{T}V$ называется *тензорной алгеброй* K-модуля V. Вложение

$$\iota : V \hookrightarrow \boldsymbol{T}V , \tag{2-6}$$

отождествляющее V с подпространством $V^{\otimes 1} \subset \boldsymbol{T}V$ обладает следующим универсальным свойством: для любой ассоциативной K-алгебры A и K-линейного отображения $f : V \to A$ существует единственный такой гомоморфизм K-алгебр $\alpha : \boldsymbol{T}V \to A$, что $f = \alpha \circ \iota$.

Упражнение 2.3. Убедитесь, что алгебра $\boldsymbol{T}V$ и вложение (2-6) определяются этим свойством однозначно с точностью до единственного изоморфизма алгебр, перестановочного с (2-6).

Фактор алгебра $SV \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{T}V \,/\, \mathcal{I}_{\text{sym}}$ тензорной алгебры $\boldsymbol{T}V$ по двустороннему идеалу $\mathcal{I}_{\text{sym}} \subset \boldsymbol{T}V$, порождённому всевозможными разностями

$$u \otimes w - w \otimes u \in V \otimes V , \tag{2-7}$$

называется *симметрической алгеброй* K-модуля V. Это та самая алгебра, о которой шла речь в n° 1.1. Для свободного модуля V с базисом $e_1, e_2, \dots, e_d$ симметрическая алгебра SV изоморфна алгебре многочленов $K[e_1, e_2, \dots, e_d]$.

Упражнение 2.4. Для d-мерного векторного пространства V над полем $\Bbbk$ найдите $\dim_{\Bbbk} S^n V$.

Фактор алгебра $\boldsymbol{T}V \,/\, \mathcal{I}_{\text{skew}}$ тензорной алгебры $\boldsymbol{T}V$ по двустороннему идеалу $\mathcal{I}_{\text{skew}} \subset \boldsymbol{T}V$, порожденному тензорными квадратами всех векторов

$$v \otimes v \in V \otimes V , \tag{2-8}$$

называется *внешней* или *грассмановой* алгеброй K-модуля V. Умножение в алгебре ΛV называется *внешним* или *суперкоммутативным* и обозначается $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n$. Из равенств

$$0 = (u + w) \wedge (u + w) = u \wedge w + w \wedge u$$

вытекает, что внешнее произведение меняет знак при перестановке любых двух последовательных сомножителей. Поэтому при произвольной перестановке сомножителей внешнее произведение умножается на знак перестановки. Для свободного модуля V с базисом $e_1, e_2, \dots, e_d \subset V$ внешняя алгебра ΛV изоморфна алгебре *грассмановых многочленов* $K \langle e_1, e_2, \dots, e_d \rangle$ с коэффициентами в K от антикоммутирующих переменных e_i с нулевыми квадратами. В этом случае базис в грассмановой алгебре составляют мономы

$$e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} , \quad \text{где} \quad I = (i_1, i_2, \dots, i_n) \quad \text{и} \quad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leqslant d . \tag{2-9}$$

В частности, $\operatorname{rk} \Lambda^n V = \binom{d}{n}$ и $\operatorname{rk} \Lambda V = 2^d$.

2.1.2. Свёртки. Для конечномерного векторного пространства V над произвольным полем $\Bbbk$ тензорные степени $V^{\otimes n}$ и $(V^*)^{\otimes n}$ канонически двойственны друг другу посредством *полной свёртки*, которая сопоставляет каждой паре разложимых тензоров $v = v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$ и $\xi = \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \dots \otimes \xi_n \in V^{*\otimes n}$ произведение

$$\langle\, v\,,\, \xi\,\rangle \overset{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^{n} \xi_i(v_i)\,. \tag{2-10}$$

Если базисы $e_1, e_2, \dots, e_n \in V$ и $x_1, x_2, \dots, x_n \in V^*$ двойственны друг другу, то составленные из тензорных мономов $e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_r}$ и $x_{j_1} \otimes x_{j_2} \otimes \dots \otimes x_{j_s}$ базисы в $V^{\otimes n}$ и $(V^*)^{\otimes n}$ также двойственны друг другу.

Из универсального свойства тензорного произведения $V^{\otimes n}$ вытекает, что пространство линейных отображений $V^{\otimes n} \to \Bbbk$ канонически изоморфно пространству n-линейных форм

$$V \times V \times \dots \times V \to \Bbbk\,. \tag{2-11}$$

Комбинация этого изоморфизма с задаваемым полной свёрткой изоморфизмом между $\left(V^{\otimes n}\right)^*$ и $(V^*)^{\otimes n}$, устанавливает канонический изоморфизм между $(V^*)^{\otimes n}$ и пространством n-линейных форм (2-11). Разложимому тензору $\xi = \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \dots \otimes \xi_n \in V^{*\otimes n}$ при этом отвечает n-линейная форма

$$V \times V \times \dots \times V \to \Bbbk\,, \quad (v_1, v_2, \dots, v_n) \mapsto \prod_{i=1}^{n} \xi_i(v_i)\,.$$

С любыми двумя последовательностями из одинакового числа неповторяющихся[1] индексов

$$I = (i_1, i_2, \dots, i_m)\,, \quad J = (j_1, j_2, \dots, j_m)$$

связано линейное отображение *частичной свёртки* по m сомножителям I, J

$$\begin{gathered} c^I_J \,:\, V^{*\otimes p} \otimes V^{\otimes q} \to V^{*\otimes (p-m)} \otimes V^{\otimes (q-m)} \\ \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \dots \otimes \xi_p \otimes v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_q \mapsto \prod_{\nu=1}^{m} \xi_{i_\nu}(v_{j_\nu}) \cdot \Big(\bigotimes_{i \notin I} \xi_i\Big) \otimes \Big(\bigotimes_{j \notin J} v_j\Big) \end{gathered} \tag{2-12}$$

которое для каждого $\nu = 1,\, 2,\, \dots\,,\, m$ спаривает i_ν-тый сомножитель в $V^{*\otimes p}$ с j_ν-тым сомножителем в $V^{\otimes q}$, а все остальные сомножители оставляет в том же порядке, как они стояли.

Упражнение 2.5. Интерпретируем n-линейную форму $\varphi :\, V \times V \times \dots \times V \to \Bbbk$ как тензор из $V^{*\otimes n}$, обозначим через $v \llcorner \varphi$ его свёртку по первому тензорному сомножителю с заданным вектором $v \in V$ и интерпретируем тензор $v \llcorner \varphi \in V^{*\otimes (n-1)}$ как $(n-1)$-линейную форму на V. Убедитесь, что $v \llcorner \varphi(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) = \varphi(v, w_1, w_2, \dots, w_{n-1})$.

2.1.3. Линейный носитель тензора. Для заданного тензора $t \in V^{\otimes n}$ на конечномерном векторном пространстве V над произвольным полем $\Bbbk$ обозначим через $\mathrm{Supp}(t) \subset V$ пересечение всех таких подпространств $U \subset V$, что $t \in U^{\otimes n}$. Иначе $\mathrm{Supp}(t)$ можно охарактеризовать как такое наименьшее по включению[2] подпространство $U \subset V$, что $t \in U^{\otimes n}$.

Упражнение 2.6. Убедитесь, что для любой пары векторных подпространств $U, W \subset V$ включения $t \in U^{\otimes n}$ и $t \in W^{\otimes n}$ влекут включение $t \in (U \cap W)^{\otimes n}$.

[1] Но не обязательно возрастающих или убывающих.

[2] Или, что то же самое, имеющее наименьшую размерность.

Подпространство $\mathrm{Supp}(t)$ называется *линейным носителем*, а его размерность — *рангом* тензора t. Тензоры, ранг которых меньше размерности пространства V, называются *вырожденными*. Условие $\mathrm{Supp}(t) \neq V$ означает, что часть переменных в некоммутативном многочлене t можно уничтожить подходящей линейной заменой базиса. Например, если $\dim \mathrm{Supp}(t) = 1$, то $t = c \cdot v^{\otimes n}$ для некоторого $c \in \Bbbk$ и $v \in V$, порождающего $\mathrm{Supp}(t)$.

Чтобы указать конкретный набор векторов, линейно порождающих носитель данного тензора $t \in V^{\otimes n}$, для каждой последовательности $J = (j_1, j_2, \dots, j_{n-1})$ различных элементов множества $\{1, 2, \dots, n\}$ обозначим через

$$c_t^J : V^{*\otimes(n-1)} \to V, \quad \xi \mapsto c^{(1,2,\dots,(n-1))}_{(j_1,j_2,\dots,j_{n-1})}(\xi \otimes t) \tag{2-13}$$

отображение свёртки, которое сворачивает ν-й сомножитель тензора $\xi \in V^{*\otimes(n-1)}$ с j_ν-тым сомножителем тензора t для каждого $\nu = 1, 2, \dots, n-1$. Если записать t в виде суммы разложимых тензоров $u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_n$, то результатом свёртки (2-13) будет линейная комбинация векторов u_k с $k \notin J$, т. е. тех единственных множителей в разложимых тензорах $u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_n$, номер которых не представлен в J. Очевидно, что эта линейная комбинация лежит в $\mathrm{Supp}(t)$.

Теорема 2.1

Пространство $\mathrm{Supp}(t)$ линейно порождается образами всех свёрток (2-13), отвечающих всевозможным последовательностям J.

Доказательство. Пусть $\mathrm{Supp}(t) = W$. Чтобы убедиться в том, что образы свёрток (2-13) линейно порождают W, достаточно доказать, что каждая линейная форма $\xi \in V^*$, которая аннулирует все подпространства $\mathrm{im}\left(c_t^I\right)$, аннулирует и подпространство W. Предположим противное: пусть $\xi \in V^*$ имеет ненулевое ограничение на W, но аннулирует все $c_t^I\left(V^{*\otimes(n-1)}\right)$. Выберем в V^* такой базис $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d$, чтобы $\xi_1 = \xi$, а ограничения $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ на W составляли базис в W^*. Обозначим через $w_1, w_2, \dots, w_k$ двойственный к нему базис в W и разложим t по этому базису. Значение $\xi\left(c_t^I\left(\xi_{i_1} \otimes \xi_{i_2} \otimes \dots \otimes \xi_{i_{n-1}}\right)\right)$ равно такой свёртке t с $\xi_1 \otimes \xi_{i_1} \otimes \xi_{i_2} \otimes \dots \otimes \xi_{i_{n-1}}$, которая сворачивает ковектор ξ_1 с сомножителем, номер которого не входит в J, а каждый ковектор ξ_{i_ν}, $1 \leqslant \nu \leqslant n-1$, с j_ν-тым сомножителем базисных мономов $w_{k_1} \otimes w_{k_2} \otimes \dots \otimes w_{k_n}$ из разложения t. Результат такой свёртки равен коэффициенту при том мономе из разложения t, у которого на месте с не представленном в J номером стоит w_1, а на j_ν-том месте стоит w_{i_ν} при всех $1 \leqslant \nu \leqslant n-1$. Выбирая подходящие $j_1, j_2, \dots, j_{n-1}$ и $i_1, i_2, \dots, i_{n-1}$, мы можем таким образом получить коэффициент при любом содержащем w_1 мономе из разложения t. Следовательно, все эти коэффициенты нулевые, т. е. w_1 не входит в $\mathrm{Supp}(t)$ вопреки нашему предположению. Противоречие. □

2.1.4. Симметрические и кососимметрические тензоры. Симметрическая группа S_n действует на $V^{\otimes n}$ перестановками сомножителей в разложимых тензорах:

$$g : v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \mapsto v_{g(1)} \otimes v_{g(2)} \otimes \dots \otimes v_{g(n)} . \tag{2-14}$$

Тензор $t \in V^{\otimes n}$ называется *симметрическим*, если $g(t) = t$ для всех $g \in S^n$, и *кососимметрическим*, если $g(t) = \mathrm{sgn}(g) \cdot t$ для всех $g \in S^n$. Мы будем обозначать подпространства симметрических и кососимметрических тензоров в $V^{\otimes n}$ через

$$\mathrm{Sym}^n V = \{\, t \in V^{\otimes n} \mid \sigma(t) = t \ \ \forall g \in S_n \,\}$$
$$\mathrm{Skew}^n V = \{\, t \in V^{\otimes n} \mid g(t) = \mathrm{sgn}(g) \cdot t \ \ \forall g \in S_n \,\}$$

Пусть векторы $e_1, e_2, \dots, e_d$ составляют базис в V. Поскольку любой симметрический тензор вместе с каждым тензорным мономом m содержит с точно таким же коэффициентом и все мономы из S_n-орбиты монома m, *полные симметрические тензоры*

$$e_{[m_1,m_2,\dots,m_d]} = \left(\begin{array}{c} \text{сумма всех различных тензорных мономов, состоящих из} \\ m_1 \text{ множителей } e_1,\, m_2 \text{ множителей } e_2,\, \dots,\, m_d \text{ множителей } e_d\,, \end{array} \right) \tag{2-15}$$

занумерованные всевозможными наборами $(m_1, m_2, \dots, m_d)$ целых неотрицательных чисел с $\sum\limits_{\nu} m_\nu = n$, образуют базис в $\mathrm{Sym}^n V$.

Упражнение 2.7. Убедитесь, что сумма в правой части (2-15) состоит из $n!/(m_1!\, m_2! \cdots m_d!)$ слагаемых.

По той же причине, базис в $\mathrm{Skew}^n V$ составляют *полные кососимметрические тензоры*

$$e_{\langle i_1,i_2,\dots,i_n\rangle} = \sum_{g \in S_n} \mathrm{sgn}(g) \cdot e_{i_{g(1)}} \otimes e_{i_{g(2)}} \otimes \dots \otimes e_{i_{g(n)}} \tag{2-16}$$

занумерованные всевозможными последовательностями строго возрастающих индексов $1 \leqslant \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_n \leqslant d$. Обратите внимание, что сумма в правой части (2-16) состоит из $n!$ слагаемых.

Предложение 2.1

Для векторного пространства V над полем характеристики 0 ограничение на подпространство $\mathrm{Sym}^n \subset V^{\otimes n}$ отображения $V^{\otimes n} \twoheadrightarrow S^n V$ факторизации по идеалу $\mathcal{I}_{\mathrm{sym}}$ и ограничение на подпространство $\mathrm{Skew}^n \subset V^{\otimes n}$ отображения $V^{\otimes n} \twoheadrightarrow \Lambda^n V$ факторизации по идеалу $\mathcal{I}_{\mathrm{skew}}$ являются изоморфизмами векторных пространств. Действие этих изоморфизмов на стандартные базисные тензоры (2-15) и (2-16) задаётся формулами

$$e_{[m_1,m_2,\dots,m_d]} \mapsto \frac{(m_1 + m_2 + \dots + m_d)!}{m_1! \cdot m_2! \cdots m_d!} \cdot e_1^{m_1} e_2^{m_2} \dots e_d^{m_d} \in S^n V \tag{2-17}$$

$$e_{\langle i_1,i_2,\dots,i_d\rangle} \mapsto n! \cdot e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_d} \in \Lambda^n V \tag{2-18}$$

Доказательство. Проекция каждого из $n!/(m_1!\, m_2! \cdots m_d!)$ слагаемых суммы (2-15) в симметрическую алгебру равна коммутативному моному $e_1^{m_1} e_2^{m_2} \dots e_d^{m_d}$, а проекция каждого из $n!$ слагаемых суммы (2-16) во внешнюю алгебру равна грассманову моному $n!\; e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$. □

2.2. Поляризация многочленов. Согласно предл. 2.1 каждый многочлен $f \in S^n V^*$ на векторном пространстве V над полем $\Bbbk$ характеристики 0 является образом единственной симметричной n-линейной формы $\widetilde{f} \in \mathrm{Sym}^n(V^*) \subset (V^*)$ при факторизации $V^{\otimes n} \twoheadrightarrow S^n V$ по идеалу $\mathcal{I}_{\mathrm{sym}}$. Форма $\widetilde{f} : V \times V \times \dots \times V \to \Bbbk$ называется *полной поляризацией* многочлена f и однозначно определяется тем, что

$$\forall\, v \in V \quad f(v) = \tilde{f}(v, v, \dots, v)\,. \tag{2-19}$$

Упражнение 2.8. Проверьте соотношение (2-19) для всех базисных мономов

$$f = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_d^{m_d}\,.$$

Упражнение 2.9. Убедитесь, что сопоставление многочленам $f \in S^nV$ и $g \in S^nV^*$ полной свёртки их полных поляризаций $\widetilde{f} \in V^{\otimes m}$ и $\widetilde{g} \in V^{*\otimes m}$ задаёт двойственность между S^nV и S^nV^*, и мономы, составленные из элементов двойственных базисов пространств V и V^*, спариваются при этом по правилу

$$\left\langle e_1^{m_1}e_2^{m_2}\,\cdots\,e_d^{m_d}\,,\,x_1^{k_1}x_2^{k_2}\,\cdots\,x_d^{k_d}\right\rangle = \\ = \begin{cases} (m_1!\cdot m_2!\cdot\,\cdots\,\cdot m_d!)/n! & \text{, если } k_i = m_i \text{ при всех } i, \\ 0 & \text{в остальных случаях}. \end{cases} \tag{2-20}$$

При $n = 2$ мы получаем полную поляризацию квадратичной формы, описываемую форм. (1-12) на стр. 14. Аналогичные формулы для поляризации имеются для любой степени n.

Предложение 2.2

Если $\operatorname{char}\Bbbk = 0$, полная поляризация $\widetilde{f}$ многочлена $f \in S^nV^*$ удовлетворяет соотношению

$$n!\cdot\widetilde{f}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \sum_{I\subsetneq\{1,\dots,n\}} (-1)^{|I|} f\Big(\sum_{i\notin I} v_i\Big), \tag{2-21}$$

где последнее суммирование ведётся по всем собственным подмножествам $I \subsetneq \{1,\,2,\,\dots\,,\,n\}$, включая $I = \varnothing$, для которого $|\varnothing| = 0$. Например, при $n = 3$

$$6\,\widetilde{f}(u,v,w) = f(u+v+w) - f(u+v) - f(u+w) - f(v+w) + f(u) + f(v) + f(w)\,.$$

Доказательство. Условимся обозначать через $\widetilde{f}(v_1^{m_1},\,v_2^{m_2},\,\dots\,,\,v_k^{m_k})$ значение формы $\widetilde{f}$ на m_1 векторах v_1, m_2 векторах v_2 и т. д., где общее число аргументов $m_1{+}m_2{+}\,\cdots\,{+}m_k = n$ (т. к. форма $\widetilde{f}$ симметрична, порядок аргументов не важен). В силу линейности $\widetilde{f}$ по каждому аргументу для любых векторов $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ имеет место следующий аналог мультиномиальной формулы:

$$f(v_1+v_2+\,\cdots\,+v_n) = \widetilde{f}(v_1+\,\cdots\,+v_n,\,v_1+\,\cdots\,+v_n,\,\dots\,,\,v_1+\,\cdots\,+v_n) = \\ = \sum_{m_1m_2\dots m_n} \frac{n!}{m_1!\,m_2!\cdots m_n!}\,\widetilde{f}(v_1^{m_1},\,v_2^{m_2},\,\dots\,,\,v_n^{m_n}), \tag{2-22}$$

где суммирование ведётся по всем наборам из n неотрицательных целых чисел $m_1, m_2, \dots, m_n$ с суммой n. Ровно одно слагаемое в (2-22) завит от всех n векторов $v_1, v_2, \dots, v_n$, и оно равно $n!\,\widetilde{f}(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Все остальные слагаемые зависят от меньшего числа векторов, причём сумма всех слагаемых, не содержащие векторов v_i, где i пробегает некоторое непустое собственное подмножество индексов $I \nsubseteq \{1,\,2,\,\dots\,,\,n\}$, получится если положить в (2-22) все $v_i = 0$ для $i \in I$. Таким образом, по формуле включения-исключения

$$n!\cdot\widetilde{f}(v_1, v_2, \dots, v_n) = f\big(\sum_\nu v_\nu\big) - \sum_{\{i\}} f\big(\sum_{\nu\neq i} v_\nu\big) + \sum_{\{i,j\}} f\big(\sum_{\nu\neq i,j} v_\nu\big) - \sum_{\{i,j,k\}} f\big(\sum_{\nu\neq i,j,k} v_\nu\big) + \cdots\,.$$

$\square$

2.2.1. Производные и поляры. Фиксируем вектор $v \in V$ и рассмотрим отображение свёртки первого тензорного сомножителя в произведении $V^{*\otimes n}$ с вектором v

$$c_v^1 : V^{*\otimes n} \to V^{*\otimes(n-1)}.$$

На языке n-линейных форм на пространстве V это отображение фиксирует вектор $v \in V$ в качестве первого аргумента n-линейной формы. Применяя его к полной поляризации $\widetilde{f}$ многочлена $f \in S^n(V^*)$ и затем проектируя результат из $V^{*\otimes(n-1)}$ в $S^{n-1}(V^*)$, мы получаем линейное отображение $\mathrm{pl}_v : S^nV^* \to S^{n-1}V^*$, которое включается в качестве нижней горизонтальной стрелки в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} V^{*\otimes n} \supset \mathrm{Sym}^n V^* \arrow[r, "c_v^1"] \arrow[d] & \mathrm{Sym}^{n-1} V^* \subset V^{*\otimes(n-1)} \arrow[d] \\ S^nV^* \arrow[r, "\mathrm{pl}_v"] & S^{n-1}V^* \end{tikzcd}$$

и переводит многочлен $f(x) = \widetilde{f}(x, x, \dots x) \in S^n(V^*)$ в многочлен

$$\mathrm{pl}_v f(x) = \widetilde{f}(v, x, \dots x) \in S^{n-1}(V^*), \tag{2-23}$$

который называется *полярой* вектора v относительно f и линейно зависит как от многочлена f, так и от вектора $v \in V$. При $n = 2$ эта конструкция задаёт полярное преобразование относительно квадрики $f = 0$ в $\mathbb{P}(V)$ и сопоставляет вектору v уравнение его полярной гиперплоскости.

В двойственных базисах $e_1, e_2, \dots, e_d \in V$ и $x_1, x_2, \dots, x_d \in V^*$ отображение свёртки по первому индексу с базисным вектором $e_i \in V$ переводит базисный симметрический моном (2-15) в точно такой же базисный моном, но содержащий $(m_i - 1)$ множителей e_i, или в нуль, если $m_i = 0$. Поэтому, по формуле (2-17) из предл. 2.1

$$\mathrm{pl}_{e_i} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_d^{m_d} = \frac{m_i}{n}\, x_1^{m_1} \cdots x_{i-1}^{m_{i-1}} x_i^{m_i-1} x_{i+1}^{m_{i+1}} \cdots x_d^{m_d} = = \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial x_i} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_d^{m_d}.$$

Из линейности $\mathrm{pl}_v f$ по v и f мы получаем, что поляра вектора $v = \sum \alpha_i e_i$ относительно многочлена f есть делённая на $\deg f$ *производная* от f в направлении вектора v:

$$\mathrm{pl}_v f = \frac{1}{\deg(f)}\, \partial_v f = \frac{1}{\deg(f)} \sum \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Отметим, что из сказанного немедленно вытекает независимость правой части этой формулы от выбора двойственных координат в V и V^*, а также коммутирование частных производных между собой: $\partial_u \partial_w = \partial_w \partial_u$ и замечательное равенство между кратными производными

$$m!\ \frac{\partial^m f}{\partial u^m}(w) = n!\ \widetilde{f}(\underbrace{u, u, \dots, u}_{m}, \underbrace{w, w, \dots, w}_{n}) = (n-m)!\ \frac{\partial^{n-m} f}{\partial w^{n-m}}(u), \tag{2-24}$$

для любых $u, w \in V$, любого $f \in S^nV^*$ и любого m в пределах $0 \leqslant m \leqslant n$.

Упражнение 2.10. Докажите правило Лейбница: $\partial_v(f \cdot g) = \partial_v(f) \cdot g + f \cdot \partial_v(g)$.

Поскольку форма $\widetilde{f}$ симметрична, аргументы в среднем члене формулы (2-24) можно писать в любом порядке. Условимся для упрощения обозначений писать

$$\widetilde{f}(u^m, w^{n-m}),$$

когда какие-то m аргументов формы $\widetilde{f}$ равны u, а остальные $(n-m)$ равны w (не важно в каком порядке). Тогда из полилинейности и симметричности $\widetilde{f}$ дословно тем же рассуждением, что и формула Ньютона для раскрытия скобок в биноме $(u+w)^n$, выводится равенство

$$\widetilde{f}(u+w,\, u+w,\, \dots,\, u+w) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \widetilde{f}(u^m, w^{n-m}),$$

где $n = \deg f$. С учётом (2-24) его можно переписать как *разложение Тейлора*: для любого многочлена f и векторов u, w имеется *точное* равенство

$$f(u+w) = \sum_{m=0}^{\deg f} \frac{1}{m!}\, \partial_w^m f(u), \tag{2-25}$$

правая часть которого симметрична по u и w в силу соотношения (2-24).

Упражнение 2.11. Покажите, что значение полной поляризации многочлена $f \in S^n V^*$ на заданном наборе векторов описывается в терминах частных производных формулой

$$\forall v_1, v_2, \dots, v_n \in V \quad \widetilde{f}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \frac{1}{n!} \partial_{v_1} \partial_{v_2} \dots \partial_{v_n} f\,.$$

2.2.2. Поляры и касательные к проективной гиперповерхности. Рассмотрим проективную гиперповерхность $S \subset \mathbb{P}(V)$, заданную однородным уравнением $F(x) = 0$ степени n. Пересечение S с произвольной прямой $\ell = (pq)$ состоит из таких точек $\lambda p + \mu q \in \ell$, что отношение $(\lambda : \mu)$ удовлетворяет уравнению $f(\lambda, \mu) = 0$, которое получается подстановкой $x = \lambda p + \mu q$ в уравнение гиперповерхности $F(x) = 0$. Если основное поле алгебраически замкнуто, и прямая ℓ не лежит на S целиком (что означало бы тождественное обращение $f(\lambda, \mu)$ в нуль), то ℓ пересекает S в конечном наборе точек $a_1, a_2, \dots, a_k$, причём если учитывать каждую из них с надлежащей кратностью, то сумма этих кратностей будет равна n. Для этого кратность пересечения поверхности S с прямой ℓ в точке $a_i = (\alpha_i' : \alpha_i'')$ надо определить как показатель, с которым линейный множитель

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \alpha_i' & \alpha_i'' \end{pmatrix} = (\alpha_i'' \lambda - \alpha_i' \mu)$$

входит в разложение $f(\lambda, \mu) = \prod (\alpha_i'' \mu - \alpha_i' \lambda)^{s_i}$ однородного многочлена $f(\lambda, \mu)$ на линейные множители. Показатель s_i называется *локальным индексом пересечения* поверхности S с прямой ℓ в точке a_i и обозначается $(S, \ell)_{a_i}$. Прямая ℓ называется *касательной* к S в точке $a \in \ell \cap S$, если $(S, \ell)_a \geqslant 2$ или $\ell \subset S$.

По формуле Тэйлора (2-25) коэффициент при $\lambda^{n-m} \mu^m$ в уравнении $f(\lambda, \mu) = 0$ равен

$$\binom{n}{m} \widetilde{f}(p^{n-m}, q^m) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m F}{\partial q^i}(p) = \frac{1}{(n-m)!} \frac{\partial^{n-m} F}{\partial p^{n-m}}(q)\,. \tag{2-26}$$

и если $p \in S$, то разложение Тейлора в окрестности p начинается как

$$F(p+tq) = t \binom{d}{1} \widetilde{F}(p^{n-1}, q) + t^2 \binom{d}{2} \widetilde{F}(p^{n-2}, q^2) + \cdots\,.$$

Таким образом, прямая pq, проходящая через точку $p \in S$, касается S в этой точке тогда и только тогда, когда $\widetilde{F}(p^{n-1}, q) = 0$.

Если $F(p^{n-1}, x) \not\equiv 0$ как линейная форма от x, то точки q, для которых прямая (pq) касается S в точке p, заметут в $\mathbb{P}(V)$ гиперплоскость, задаваемую линейным уравнением $F(p^{n-1}, x) = 0$. Она называется *касательным пространством* к S в p и обозначается T_pS. Точка p называется в этом случае *гладкой* точкой поверхности S.

Если $F(p^{n-1}, x) \equiv 0$, то поверхность S называется *особой* в точке p, а p называется *особой точкой* поверхности S. Согласно (2-26), коэффициентами линейной формы

$$F(p^{n-1}, x) = \partial_x F(p)$$

являются частные производные от F, вычисленные в точке p, так что особость p равносильна занулению в p всех частных производных от уравнения гиперповерхности. В этом случае любая проходящая через p прямая имеет с S как минимум двукратное пересечение в p, и касательное пространство T_pS, понимаемое как объединение всех прямых, касающихся S в точке p, совпадает со всем пространством $\mathbb{P}(V)$.

Если q — гладкая точка на S или любая точка вне S, то замыкание множества точек касания с S всевозможных касательных, опущенных на S из точки q образует на поверхности S фигуру, называемую *контуром* поверхности S, видимым из точки q. Видимый контур высекается из S полярной к q относительно S гиперповерхностью $(n-1)$-й степени

$$\mathrm{pl}_q S = \{y \in \mathbb{P}(V) \mid \widetilde{F}(q, y^{n-1}) = 0\}, \tag{2-27}$$

автоматически отличной от всего пространства. Действительно, условие касания прямой (qy) и поверхности S в точке y записывается уравнением $\widetilde{F}(y^{n-1}, q) = 0$. Если $G(y) = \widetilde{F}(y^{n-1}, q)$ является нулевым многочленои от y, то, полагая $y = q$, получаем $F(q) = 0$, откуда $q \in S$. С другой стороны, т. к. все производные от G в этом случае тоже нулевые, мы получаем равенство

$$\widetilde{F}(q^{n-1}, y) = \widetilde{G}(q^{n-2}, y) = \frac{\partial^{n-2}}{\partial q^{n-2}} G(y) \equiv 0,$$

означающее, что q — особая точка поверхности S.

Гиперповерхность $\mathrm{pl}_q^{n-r} = \left\{y \in \mathbb{P}(V) \mid \widetilde{F}(q^{n-r}, y^r) = 0\right\}$ называется *полярой r-й степени* поверхности S относительно точки q. Если точка $q \in S$ гладкая, то поляра первой степени это касательная гиперплоскость T_qS к S в точке q, а каждая поляра степени $r \geqslant 2$ это поверхность степени r, которая проходит через q и имеет те же поляры степеней $< r$ относительно точки q, что и исходная поверхность S. Так, квадратичная поляра это проходящая через q квадрика, имеющая в точке q ту же касательную гиперплоскость, что и S, кубическая поляра это проходящая через q кубическая поверхность с той же касательной плоскостью и квадратичной полярой, что и S, и т. д.

2.3. Многообразие Веронезе $V(n, k)$ является образом проективного пространства $\mathbb{P}_k = \mathbb{P}(V^*)$ при *отображении Веронезе* n-той степени

$$\nu_n : \mathbb{P}(V^*) \to \mathbb{P}(S^n V^*), \quad \varphi \mapsto \varphi^n, \tag{2-28}$$

т. е. как множество классов пропорциональности таких однородных многочленов степени n от k переменных, которые являются чистыми n-тыми степенями линейных форм. Иначе многообразие Веронезе можно описать как множество классов пропорциональности многочленов с одномерным линейным носителем, где под *линейным носителем* $\mathrm{Supp}(f)$ многочлена $f \in S^n V^*$

понимается минимальное подпространство $W \subset V^*$ такое, что $f \in S^nW^*$. Очевидно, что это подпространство совпадает с линейным носителем полной поляризации $\widetilde{f} \in \mathrm{Sym}^n V^*$ многочлена f. По теор. 2.1 последний является образом отображения $V^{\otimes(n-1)} \to V^*$ задаваемого полной свёрткой[1] с $\widetilde{f}$. Этот образ порождается всеми линейными формами, которые можно получить из f всевозможными $(n-1)$-кратными дифференцированиями вида

$$\frac{\partial^{m_1}}{\partial x_1^{m_1}}\frac{\partial^{m_2}}{\partial x_2^{m_2}}\cdots\frac{\partial^{m_d}}{\partial x_d^{m_d}}f(x)\,, \tag{2-29}$$

с $\sum m_\nu = n-1$. Вклад в коэффициент при x_i у линейной формы (2-29) даёт ровно один коэффициент многочлена f — тот, что стоит при мономе $x_1^{m_1}\dots x_{i-1}^{m_{i-1}}x_i^{m_i+1}x_{i+1}^{m_{i+1}}\dots x_d^{m_d}$. Поэтому, если записать многочлен f в виде

$$f=\sum_{\nu_1+\dots+\nu_d=n}\frac{n!}{\nu_1!\,\nu_2!\,\cdots\,\nu_d!}\,a_{\nu_1\nu_2\dots\nu_d}\,x_1^{\nu_1}x_2^{\nu_2}\,\cdots\,x_d^{\nu_d}\,, \tag{2-30}$$

то линейная форма (2-29) будет иметь вид

$$n!\cdot\sum_{i=1}^{d}a_{m_1\dots m_{i-1}(m_i+1)m_{i+1}\dots m_d}x_i \tag{2-31}$$

и всего таких форм будет $\binom{n+d-2}{d-1}$ (количество способов разложить $n-1$ в сумму d занумерованных целых неотрицательных слагаемых $m_1, m_2, \dots, m_d$).

Предложение 2.3
Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ с $\mathrm{char}(\Bbbk) = 0$ однородный многочлен (2-30) тогда и только тогда является n-той степенью линейной формы, когда ранг $d\times\binom{n+d-2}{d-1}$-матрицы, составленной из коэффициентов линейных форм (2-31), равен единице. В этом случае форма φ, такая что $\varphi^n = f$, также пропорциональна формам (2-31).

Доказательство. В самом деле, из равенства $f=\varphi^n$ вытекает, что $\mathrm{Supp}(f)$ — одномерное пространство, порождённое формой φ , и тогда все формы (2-31) пропорциональны форме φ. Наоборот, если все формы (2-31) пропорциональны друг другу, то $\mathrm{Supp}(f)$ — одномерное пространство $U = \Bbbk\cdot\psi$, порождённое какой-то формой $\psi \in V^*$. Поскольку $S^nU = \Bbbk\cdot\psi^n$ тоже одномерно, условие $f\in S^nU$ означает, что $f = \lambda\psi^n$ для некоторого $\lambda\in\Bbbk$. Если $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, последнее равенство переписывается как $f=\varphi^n$ с $\varphi = \sqrt[n]{\lambda}\cdot\psi$. □

Следствие 2.1
Образ вложения Веронезе (2-28) является проективным алгебраическим многообразием, задаваемым системой квадратных уравнений — равенством нулю всех 2×2 миноров $d\times\binom{n+d-2}{d-1}$ матрицы, составленной из коэффициентов линейных форм (2-31). □

Пример 2.1 (опять кривая Веронезе)
Однородный многочлен от двух переменных

$$f(x_0,x_1)=\sum_{k=0}^{n}a_k\cdot\binom{n}{k}\cdot x_0^{n-k}x_1^k$$

[1]В силу симметричности тензора $\widetilde{f}$ отображения свёртки из теор. 2.1 не зависят от выбора последовательности индексов J, по которым производится свёртка.

тогда и только тогда имеет вид $(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1)^n$, когда

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n_1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} = 1\,,$$

что выражается системой квадратных уравнений

$$\det\begin{pmatrix} a_i & a_j \\ a_{i+1} & a_{j+1} \end{pmatrix} = 0$$

на коэффициенты a_i многочлена f.

2.4. Поляризация грассмановых многочленов. Хотя грассманов многочлен $\omega \in \Lambda V^*$ и не задаёт никакой функции на векторах двойственного пространства V, большая часть сказанного в предыдущем разделе имеет смысл и для грассмановых многочленов. А именно, по предл. 2.1 над полем характеристики нуль для любого однородного грассманова многочлена n-той степени $\omega \in \Lambda^n V^*$ существует единственная n-линейная кососимметричная форма $\widetilde{\omega} \in \operatorname{Skew}^n V^*$, которая проектируется в ω при факторизации $V^{\otimes n} \twoheadrightarrow \Lambda^n V$ по соотношениям антикоммутирования. Форма $\widetilde{\omega}$ называется *полной поляризацией* грассманова многочлена ω. По формуле (2-18) из предл. 2.1 полная поляризация базисного грассманова монома $\omega = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$ равна

$$\widetilde{\omega} = \frac{1}{n!}\, e_{\langle i_1, i_2, \dots, i_n \rangle} = \operatorname{alt}_n \left(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_n}\right)\ . \tag{2-32}$$

Как и в симметрическом случае, полная поляризация индуцирует двойственность между пространствами грассмановых многочленов на двойственных пространствах, при которой результатом спаривания между многочленами

$$\omega \in \Lambda^n V^* \quad \text{и} \quad \tau \in \Lambda^n V$$

по определению считается полная свёртка их полных поляризаций $\langle\, \widetilde{\omega}\,,\ \widetilde{\tau}\,\rangle$.

Упражнение 2.12. Покажите, что результатом спаривания двух базисных грассмановых мономов $e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$ и $x_J = x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \dots \wedge x_{i_n}$ от двойственных базисных векторов пространств V и V^* (оба набора индексов I и J строго возрастают) является $1/n!$, когда $i_\nu = j_\nu$ для всех ν, и нуль в остальных случаях.

2.4.1. Частные производные в грассмановой алгебре. Рассмотрим отображение

$$\operatorname{pl}_v \,:\, \Lambda^n V^* \to \Lambda^{n-1} V^*\,,$$

сопоставляющее грассманову многочлену $\omega \in \Lambda^n V^*$ проекцию во внешнюю алгебру тензора, получающегося свёрткой по первому тензорному сомножителю полной поляризации $\widetilde{\omega} \in V^{*\otimes n}$ с вектором $v \in V$. Оно включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} V^{*\otimes n} \supset \operatorname{Skew}^n V^* \arrow[r, "c_v^1"] \arrow[d] & \operatorname{Skew}^{(n-1)} V^* \subset V^{*\otimes(n-1)} \arrow[d] \\ \Lambda^n V^* \arrow[r, "\operatorname{pl}_v"] & \Lambda^{n-1} V^* \end{tikzcd}$$

горизонтальные стрелки которой суть проекции во внешнюю алгебру (отображения факторизации по соотношениям антикоммутирования), а верхняя горизонтальная стрелка — свёртка первого тензорного сомножителя с вектором v. По аналогии с симметрическим случаем, определим *грассманову производную* кососимметричного многочлена $\omega \in \Lambda^n V^*$ в направлении вектора $v \in V$ формулой

$$\partial_v \omega \stackrel{\text{def}}{=} \deg \omega \cdot \mathrm{pl}_v \omega .$$

Из билинейности $\mathrm{pl}_v \omega$ по v и ω мы сразу же получаем, что производная в направлении вектора $v = \sum \alpha_i e_i$ является линейной комбинацией частных производных вдоль базисных векторов:

$$\partial_v = \sum \alpha_i \partial_{e_i} .$$

Если ω не зависит от x_j, то из определений очевидно, что $\partial_{e_j} \omega = 0$. Поэтому ненулевой вклад в производную от базисного монома $\omega = x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_n}$ дадут только дифференцирования $\partial_{e_{i_1}}, \partial_{e_{i_2}}, \ldots, \partial_{e_{i_n}}$. Из формулы (2-32) вытекает, что

$$\partial_{e_{i_1}} x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_n} = x_{i_2} \wedge x_{i_3} \wedge \ldots \wedge x_{i_n}$$

вне зависимости от того, образуют ли неповторяющиеся индексы $I = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ строго возрастающую последовательность или нет. Таким образом, частная производная грассманова монома по направлению первого слева сомножителя действует как $\partial/\partial x_{i_1}$, т. е. просто уничтожает этот сомножитель. При дифференцировании по направлениям прочих сомножителей возникают знаки:

$$\begin{aligned} \partial_{e_{i_k}} x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_n} &= \partial_{e_{i_k}} (-1)^{k-1} x_{i_k} \wedge x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_{i_{k+1}} \ldots x_{i_n} = \\ &= (-1)^{k-1} \partial_{e_{i_k}} x_{i_k} \wedge x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_{i_{k+1}} \ldots x_{i_n} = \\ &= (-1)^{k-1} x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_{i_{k+1}} \ldots x_{i_n} , \end{aligned}$$

т. е. производная грассманова монома по его k-той слева переменной рана $(-1)^{k-1} \partial/\partial x_{i_k}$. Удобно воспринимать это явление как *грассманово правило Лейбница*:

Упражнение 2.13. Докажите, что грассмановы частные производные удовлетворяют грассманову правилу Лейбница: $\partial_v(\omega \wedge \tau) = \partial_v(\omega) \wedge \tau + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge \partial_v(\tau)$.

Поскольку $\widetilde{\omega}(u, w, *, \ldots, *) = -\widetilde{\omega}(w, u, *, \ldots, *)$ операции pl_u и pl_w антикоммутируют относительно композиции: $\mathrm{pl}_u \mathrm{pl}_w \omega = -\mathrm{pl}_w \mathrm{pl}_u \omega$. Поэтому грассмановы частные производные также *антикоммутируют*: $\partial_u \partial_w = -\partial_w \partial_u$. В частности, $\partial_v^2 \omega \equiv 0$ для любых v и ω.

2.4.2. Линейный носитель грассманова многочлена $\omega \in \Lambda^n V$ определяется как минимальное подпространство $W \subset V$, такое что $\omega \in \Lambda^n W$, и обозначается $\mathrm{Supp}(\omega)$. Очевидно, что носитель ω совпадает с носителем поляризации $\widetilde{\omega}$, который по теор. 2.1 является образом отображения $V^{*\otimes(n-1)} \to V$, задаваемого полной свёрткой с тензором $\widetilde{\omega}$. В виду кососимметричности тензора $\widetilde{\omega}$ различные отображения свёртки из теор. 2.1 отличаются друг от друга лишь знаком, и поэтому неважно, какую из свёрток взять. Итак, линейный носитель грассманова многочлена степени n порождается векторами

$$\partial_J \omega = \partial_{j_1} \partial_{j_2} \ldots \partial_{j_{n-1}} \omega ,$$

где $\partial_j = \partial_{x_j}$ и $J = (j_1, j_2, \ldots, j_{n-1})$ пробегает всевозможные наборы из $(n-1)$ попарно различных индексов[1]. Если разложить ω в сумму мономов

$$\omega = \sum_I a_I e_I = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_n} \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_n} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} ,$$

[1] В силу кососимметричности грассмановых частных производных достаточно ограничиться только строго возрастающими наборами.

где коэффициенты $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_n}$ кососимметричны по $i_1, i_2, \dots, i_n$, то ненулевой вклад в $\partial_J \omega$ дадут только мономы $a_I e_I$ с $I \supset J$. В результате, с точностью до общего знака, мы получим

$$\partial_J \omega = \pm \sum_{i \notin J} \alpha_{j_1 j_2 \dots j_{n-1} i} \, e_i \, . \tag{2-33}$$

Отсюда получается, например, следующий критерий разложимости грассманова многочлена.

Предложение 2.4

Следующие условия на грассманов многочлен $\omega = \sum\limits_{i_1 i_2 \dots i_n} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_n} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$, где все коэффициенты $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_n}$ кососимметричны по индексам $i_1, i_2, \dots, i_n$, эквивалентны друг другу:

1) $\omega = u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_n$ для некоторых $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$

2) $u \wedge \omega = 0 \;\; \forall\, u \in \mathrm{Supp}(\omega)$

3) для любых двух наборов неповторяющихся индексов $i_1, i_2, \dots, i_{m+1}$ и $j_1, j_2, \dots, j_{m-1}$ выполнено *соотношение Плюккера*[1] $\sum\limits_{\nu=1}^{m+1} (-1)^{\nu-1} a_{j_1 \dots j_{m-1} i_\nu} a_{i_1 \dots \hat{i}_\nu \dots i_{m+1}} = 0$.

Доказательство. Первое условие означает, что многочлен ω лежит в самой старшей внешней степени $\Lambda^{\dim \mathrm{Supp}(\omega)}$ своей линейной оболочки $\mathrm{Supp}(\omega)$. Его равносильность второму условию вытекает из следующего общего факта:

Упражнение 2.14. Докажите, что $\omega \in \Lambda U$ тогда и только тогда однороден степени $\dim U$, когда $u \wedge \omega = 0$ для всех $u \in U$.

Соотношение Плюккера — это координатная запись второго условия для вектора u из формулы (2-33), констатирующая обнуление коэффициента при $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_{m+1}}$ в произведении $\partial_{j_1 \dots j_{m-1}} \omega \wedge \omega$. Поскольку векторы (2-33) линейно порождают пространство $\mathrm{Supp}(\omega)$, этих соотношений достаточно для выполнения второго, а с ним и первого условий предложения. □

Упражнение 2.15. Выпишите соотношения Плюккера для грассмановой квадратичной формы ω от четырёх переменных и выведите из них, что такая форма тогда и только тогда является произведением двух линейных, когда $\omega \wedge \omega = 0$.

2.5. Многообразие Грассмана $\mathbf{Gr}(m, V)$ определяется как множество всех m-мерных векторных подпространств в заданном векторном пространстве V. Для d-мерного координатного пространства $V = \Bbbk^d$ обозначение $\mathrm{Gr}(m, \Bbbk^d)$ сокращается до $\mathrm{Gr}(m, d)$. Например, $\mathrm{Gr}(1, n+1) = \mathbb{P}_n$ и $\mathrm{Gr}(n, n+1) = \mathbb{P}_n^\times$ суть двойственные проективные пространства. Вообще, для d-мерного пространства V двойственность $U \leftrightarrow \mathrm{Ann}\, U$ из n° 1.5 на стр. 19 задаёт каноническое отождествление $\mathrm{Gr}(m, V) \simeq \mathrm{Gr}(d - m, V^*)$.

2.5.1. Плюккерово вложение. Грассманиан $\mathrm{Gr}(m, V)$ вкладывается в проективное пространство $\mathbb{P}(\Lambda^m V)$ при помощи *отображения Плюккера*

$$\mathfrak{u} : \mathrm{Gr}(m, V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^m V), \quad U \mapsto \Lambda^m U, \tag{2-34}$$

[1] «крышка» в $a_{i_1 \dots \hat{i}_\nu \dots i_{m+1}}$ означает, что индекс i_ν следует пропустить

переводящего m-мерное подпространство $U \subset V$ в одномерное подпространство $\Lambda^m U \subset \Lambda^m V$. Если U порождается векторами $u_1, u_2, \dots, u_m$, то с точностью до пропорциональности

$$\mathfrak{u}(U) = u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_m .$$

Переход к другому базису в U, скажем, состоящему из векторов

$$w_i = \sum a_{ij} u_j ,$$

заменяет $u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_m$ на $w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_m = \det\left(a_{ij}\right) \cdot u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_m$.

Предложение 2.5

Отображение Плюккера (2-34) вкладывает грассманиан в проективное пространство в качестве алгебраического многообразия, задаваемого квадратичными соотношениями Плюккера из формулы (3) в предл. 2.4 на стр. 34.

Доказательство. Образом плюккерова отображения являются однородные разложимые грассмановы многочлены степени m. Согласно п. (3) из предл. 2.4 этот образ является пересечением квадрик. Отображение Плюккера инъективно, поскольку при $U \neq W$ в V имеется базис

$$v_1, v_2, \dots, v_r,\ u_1, u_2, \dots, u_{m-r},\ w_1, w_2, \dots, w_{m-r},\ v_{2m-r},\ v_{2m-r+1},\ \dots,\ v_n ,$$

в котором $v_1, v_2, \dots, v_r$ образуют базис пересечения $U \cap W$, а

$$v_1, v_2, \dots, v_r,\ u_1, u_2, \dots, u_{m-r} \quad \text{и} \quad v_1, v_2, \dots, v_r,\ w_1, w_2, \dots, w_{m-r}$$

составляют базисы в U и W, так что отображение Плюккера сопоставляет им различные *базисные* мономы $v_1 \wedge \dots \wedge v_r \wedge u_1 \wedge \dots \wedge u_{m-r} \neq v_1 \wedge \dots \wedge v_r \wedge w_1 \wedge \dots \wedge w_{m-r}$ алгебры ΛV. □

Замечание 2.1. С алгебраической точки зрения как многообразие Веронезе $V(n, k)$, так и грассманиан $\mathrm{Gr}(n, k)$ состоят из классов пропорциональности *максимально вырожденных* ненулевых однородных многочленов степени n от k переменных, если поимать под максимальной вырожденностью минимальность ранга. Минимально возможный ранг обычного коммутативного полинома равен единице, и всякий многочлен степени m и ранга 1 есть чистая m-тая степень линейной формы. Минимально возможный ранг Грассманова однородного полинома степени m равен m, и всякий такой полином является произведением m различных линейных форм.

2.5.2. Плюккеровы координаты. На координатном языке точку $U \in \mathrm{Gr}(m, d)$ можно задавать $m \times d$ матрицей X_U, по строкам которой написаны координаты каких-нибудь базисных векторов $u_1, u_2, \dots, u_m$ пространства U в стандартном базисе $e_1, e_2, \dots, e_d$ координатного пространства $\Bbbk^d$. Разумеется, такое представление не единственно, и две матрицы $X, Y \in \mathrm{Mat}_{m \times d}(\Bbbk)$ максимального ранга m тогда и только тогда задают одно и то же подпространство $U \subset \Bbbk^d$, когда они получаются друг из друга левым умножением на обратимую матрицу $C \in \mathrm{GL}_m(\Bbbk)$, по строкам которой стоят коэффициенты разложений строк матрицы X по базису в U, образованному строками матрицы Y. Иначе говоря, грассманиан $\mathrm{Gr}(m, d)$ представляет собой фактор[1] пространства $m \times d$-матриц максимального ранга m по действию на нём группы $\mathrm{GL}_m(\Bbbk)$ левыми умножениями. Обратите внимание, что при $m = 1$ это описание в точности

[1]Т. е. пространство орбит.

совпадает с описанием точек проективного пространства $\mathbb{P}_{d-1} = \mathrm{Gr}(1,d)$ при помощи однородных координат, т. е. в виде ненулевых строк $(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathrm{Mat}_{1\times d}$ с точностью до умножения на ненулевые константы $\lambda \in \Bbbk^* = \mathrm{GL}_1(\Bbbk)$.

Упражнение 2.16. Убедитесь, что грассманово произведение $u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_m$ векторов $u_i = \sum e_j \cdot x_{ij}$ раскладывается по базису $e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_m}$ пространства $\Lambda^m \Bbbk^d$ как $\sum e_I \cdot \det X_I$, где X_I означает $m \times m$-подматрицу матрицы $X = \left(x_{ij}\right)$, образованную столбцами с номерами $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$.

Таким образом, плюккерово вложение $\mathfrak{u} : \mathrm{Gr}(m,d) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^m \Bbbk^d)$ переводит линейную оболочку строк матрицы $X \in \mathrm{Mat}_{m\times d}(\Bbbk)$ ранга m в точку, однородные координаты которой суть всевозможные $m \times m$-миноры матрицы X. Этот набор миноров называется *плюккеровыми координатами* подпространства $U \subset \Bbbk^d$, натянутого на строки матрицы X.

Упражнение 2.17. Убедитесь, что при замене X на CX с $C \in \mathrm{GL}_m(\Bbbk)$ плюккеровы координаты умножаются на $\det C$.

2.5.3. Стандартное аффинное покрытие и аффинные координаты. Аналогом i-той стандартной аффинной карты U_i проективного пространства[1] $\mathbb{P}_n = \mathrm{Gr}(1,n)$ на произвольном грассманиане $\mathrm{Gr}(m,d)$ является множество $U_I \subset \mathrm{Gr}(m,d)$, образованное всеми подпространств $U \subset V$, матрица X которых содержит невырожденную $m \times m$-подматрицу X_I в столбцах с номерами $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$. Умножая такую матрицу X слева на $X_I^{-1} \in \mathrm{GL}_m$, можно сделать подматрицу X_I единичной. Матрица $A_I(U) = X_I^{-1}X$ зависит только от I и U, и подпространство U восстанавливается по ней однозначно. Поэтому $m(d-m)$ её элементов $a_{ij}^{(I)}(U)$ с $j \notin I$ называются *стандартными аффинными координатами* подпространства U в карте U_I.

Карта U_I является полным прообразом относительно плюккерова вложения (2-34) стандартной аффинной карты $U_I \subset \mathbb{P}(\Lambda^m V)$, в которой отлична от нуля I-тая плюккерова координата[2].

Иначе можно сказать, что карта U_I, состоит из всех таких подпространств $U \subset V$, которые изоморфно проектируются на I-тое координатное подпространство $E_I \subset V$, натянутое на базисные векторы $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_m}$, вдоль дополнительного координатного подпространства $E_J \subset V$, натянутого на остальные базисные векторы e_j с $j \notin I$. Если взять в качестве базиса такого подпространства U прообразы базисных векторов e_i с $i \in I$ при упомянутой проекции, то матрица X, отвечающая этому базису, как раз и совпадёт с матрицей $A_I(U)$, имеющей единичную подматрицу в I-столбцах.

2.5.4. Клеточное разбиение. Метод Гаусса показывает, что любое подпространство $U \subset V$ обладает *единственным* базисом $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, матрица координат которого имеет *строгий ступенчатый вид*[3].

Упражнение 2.18. Докажите, что различные строго ступенчатые матрицы задают разные подпространства в V.

Таким образом возникает биекция между точками гассманиана $\mathrm{Gr}(m,d)$ и строгими ступенчатыми матрицами ранга m и размера $m \times d$. Строгие ступенчатые матрицы, ступеньки которых

[1] напомним, что она состоит из всех векторов, i-тая координата которых отлична от нуля, так что её можно сделать равной 1, умножая на подходящую константу

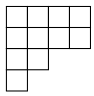
[2] Т. е. координата вдоль вектора $e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_m}$.

[3] Т. е. самый левый ненулевой элемент каждой строки равен единице, располагается строго правее, чем в предыдущей строке, и является единственным ненулевым элементом в своём столбце.

располагаются в столбцах с возрастающими номерами $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$, образуют аффинное пространство размерности

$$m\,(d-m) - \sum_{\nu=1}^{m} (i_\nu - \nu) = \dim \mathrm{Gr}(m, d) - \left(|I| - \frac{m\,(m+1)}{2} \right) .$$

Весь грассманиан $\mathrm{Gr}(m, d)$ является дизъюнктным объединением $\binom{d}{m}$ таких аффинных пространств, отвечающих различным выборам I. Эти аффинные пространства называются *открытыми* или *аффинными клетками Шуберта* . Альтернативным общепринятым способом нумерации клеток Шуберта является их индексация диаграммами Юнга[1] $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, умещающимися в прямоугольнике $m \times (d-m)$. При этом длина ν-той сверху строки λ_ν указывает на сколько клеток самый левый ненулевой элемент в ν-той *снизу* строке ступенчатой матрицы сдвинут вправо от самого левого возможного своего положения, т. е. углы ступенек в матрице типа $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ находятся в столбцах с номерами $i_\nu = (m + 1 - \nu) + \lambda_{m+1-\nu}$. Открытая клетка Шуберта, отвечающая диаграмме λ, обозначается $\mathring{\sigma}_\lambda$. Обратите внимание, что коразмерность такой клетки в грассманиане в точности равна количеству клеток $|\lambda|$ в диаграмме λ. Например, диаграмма



отвечает 13-мерной аффинной клетке Шуберта $\mathring{\sigma}_{4,4,2,1}$ $\mathrm{Gr}(4, 10)$, образованной подпространствами $U \subset \Bbbk^{10}$, порождёнными строками строгих ступенчатых матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & * & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \end{pmatrix}.$$

Пустой диаграмме $(0, 0, 0, 0)$ отвечает самое левое из всех возможных положений ступенек, т. е. 24-мерное пространство матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

представляющее собою стандартную аффинную карту $U_{(1,2,3,4)} \subset \mathrm{Gr}(4, 10)$). Самая большая диаграмма — прямоугольник $(6, 6, 6, 6)$ — описывает нульмерное аффинное пространство, ступенчатую матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[1] Т. е. выровненных по левому краю горизонтальных клетчатых полосочек, длины которых образуют невозрастающую сверху вниз последовательность $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_m \geqslant 0$.

с самым правым из возможных расположением ступенек. Над конечным полем $\Bbbk$ из q элементов разбиение $\mathrm{Gr}(m,d)=\bigsqcup\mathring{\sigma}_\lambda$ влечёт формулу

$$\binom{d}{m}_q = q^{m(d-m)}\sum_\lambda q^{-|\lambda|}\,,$$

где суммирование происходит по всем диаграммам Юнга, умещающимся в прямоугольнике $m\times(d-m)$, а

$$\binom{d}{m}_q \overset{\text{def}}{=} \frac{(q^d-1)(q^d-q)\cdots(q^d-q^{m-1})}{(q^m-1)(q^d-q)\cdots(q^m-q^{m-1})}$$

обозначает *Гауссов q-биномиальный коэффициент*.

2.5.5. Квадрика Плюккера и прямые в $\mathbb{P}_3$. Простейший грассманиан, не являющийся проективным пространством, это грассманиан $\mathrm{Gr}(2,4)=\mathrm{Gr}(2,V)$ двумерных векторных подпространств в четырёхмерном векторном пространстве $V\simeq\Bbbk^4$ или, что то же самое, множество прямых в трёхмерном проективном пространстве $\mathbb{P}_3=\mathbb{P}(V)$. Плюккерово вложение

$$\mathfrak{u}\,:\,\mathrm{Gr}(2,V)\hookrightarrow\mathbb{P}_5=\mathbb{P}(\Lambda^2V) \tag{2-35}$$

отождествляет его с множеством разложимых бивекторов $\omega\in\Lambda^2V$.

Упражнение 2.19. Для любого пространства[1] V убедитесь, что бивектор $\omega\in\Lambda^2V$ разложим тогда и только тогда, когда $\omega\wedge\omega=0$ в Λ^4V.

При $\dim V=4$ разложимые бивекторы образуют в $\mathbb{P}_5=\mathbb{P}(\Lambda^2V)$ невырожденную *квадрику Плюккера*

$$P\overset{\text{def}}{=}\{\omega\in\Lambda^2V\mid\omega\wedge\omega=0\}=V(q)\,, \tag{2-36}$$

множество изотропных векторов канонической с точностью до пропорциональности симметричной невырожденной билинейной формы $\widetilde{q}$ на $\Lambda^2\Bbbk^4$, определяемой равенством

$$\omega_1\wedge\omega_2=\widetilde{q}(\omega_1,\omega_2)\cdot e_1\wedge e_2\wedge e_3\wedge e_4\,, \tag{2-37}$$

где e_1, e_2, e_3, e_4 — произвольный базис в V.

Упражнение 2.20. Убедитесь, что эта форма симметрична, невырождена и при выборе другого базиса в V умножается на ненулевую константу. Напишите её матрицу Грама в базисе из бивекторов $e_{ij}=e_i\wedge e_j$.

В координатах x_{ij} относительно базиса из бивекторов $e_{ij}=e_i\wedge e_j$ условие разложимости $q(\omega)=$ $=\widetilde{q}(\omega,\omega)=0$ бивектора $\omega=\sum_{ij}x_{ij}e_{ij}$ принимает вид

$$x_{12}x_{34}-x_{13}x_{24}+x_{14}x_{23}=0\,,$$

а плюккерово вложение (2-35) переводит прямую (uw), порождённую векторами $u=\sum u_ie_i$, $w=\sum w_je_j$ с матрицей координат

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4\\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4\end{pmatrix}$$

[1] Необязательно четырёхмерного.

в бивектор с координатами $x_{ij} = \det\begin{pmatrix} u_i & u_j \\ w_i & w_j \end{pmatrix}$.

Упражнение 2.21. Существует ли комплексная 2×4-матрица, шесть 2×2-миноров которой, выписанные в случайном порядке, суть а) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ б) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$? Если да, то предъявите такую матрицу явно.

Лемма 2.1
Две прямые $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_3$ пересекаются , если и только если их образы при отображении Плюккера (2-35) ортогональны относительно квадратичной формы (2-37), т. е. тогда и только тогда, когда

$$\widetilde{q}(\mathfrak{u}(\ell_1), \mathfrak{u}(\ell_2)) = \mathfrak{u}(\ell_1) \wedge \mathfrak{u}(\ell_2) = 0\,.$$

Доказательство. Если $\ell_1 \cap \ell_2 = \varnothing$, то в V существует такой базис e_1, e_2, e_3, e_4, что $\ell_1 = (e_1 e_2)$, а $\ell_2 = (e_3 e_4)$. Тогда $\mathfrak{u}(\ell_1) \wedge \mathfrak{u}(\ell_2) = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \neq 0$. Если ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в точке a, то $\ell_1 = (ab)$, а $\ell_2 = (ac)$ для некоторых $b, c \in V$, и $\mathfrak{u}(\ell_1) \wedge \mathfrak{u}(\ell_2) = a \wedge b \wedge a \wedge c = 0$. □

Следствие 2.2
Для любой точки $p = \mathfrak{u}(\ell) \in P$ пересечение плюккеровой квадрики (2-36) с касательной плоскостью в точке p состоит из плюккеровых образов всех прямых, пересекающих ℓ:

$$P \cap T_p P = \{\mathfrak{u}(\ell') \mid \ell' \cap \ell \neq \varnothing\}\,.$$

Пример 2.2 (связки и пучки прямых в $\mathbb{P}_3$)
Множество прямых в $\mathbb{P}_3$ называется *связкой*, если его плюккеров образ является двумерной плоскостью, лежащей на квадрике Плюккера. Каждая такая плоскость $\pi \subset P$ линейно порождается тройкой неколлинеарных точек $p_i = \mathfrak{u}(\ell_i)$, $i = 1, 2, 3$. При этом $\pi = P \cap T_{p_1} P \cap T_{p_2} P \cap T_{p_3} P$. По лем. 2.1 и сл. 2.2 соответствующая связка прямых состоит из всех таких прямых, которые пересекают 3 данные попарно пересекающиеся прямые ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 в $\mathbb{P}_3$. Три прямых в $\mathbb{P}_3$ попарно пересекаются ровно в двух случаях: когда они лежат в одной плоскости или когда они проходят через одну точку. Таким образом, существуют два геометрически разных типа связок прямых на $\mathbb{P}_3$:

α-плоскость $\pi_\alpha(O) \subset P$ является образом *α-связки*, состоящей из всех прямых, проходящих через данную точку $O \in \mathbb{P}_3$, и линейно порождается плюккеровыми образами любых трёх некомпланарных прямых, проходящих через O

β-плоскость $\pi_\beta(\Pi) \subset P$ является образом *β-связки*, состоящей из всех прямых, лежащих в данной плоскости $\Pi \in \mathbb{P}_3$, и линейно порождается плюккеровыми образами любых трёх лежащих в Π прямых, не проходящих там через одну точку.

При этом любые две плоскости одного и того же типа всегда пересекаются ровно по одной точке

$$\pi_\beta(\Pi_1) \cap \pi_\beta(\Pi_2) = \mathfrak{u}\,(\Pi_1 \cap \Pi_2)$$
$$\pi_\alpha(O_1) \cap \pi_\alpha(O_2) = \mathfrak{u}\big((O_1 O_2)\big)\,,$$

а две плоскости различных типов $\pi_\beta(\Pi)$, $\pi_\alpha(O)$ не пересекаются при $O \notin \Pi$ и пересекаются по прямой при $O \in \Pi$. В последнем случае прямая пересечения является плюккеровым образом пучка прямых на $\mathbb{P}_3$, лежащих в плоскости Π и проходящих через точку $O \in \Pi$.

Упражнение 2.22. Покажите, что всякая прямая, лежащая на квадрике Плюккера, является пересечением α-плоскости с β-плоскостью, и тем самым, представляет собою пучок прямых, лежащих в некоторой плоскости и проходящих там через одну точку.

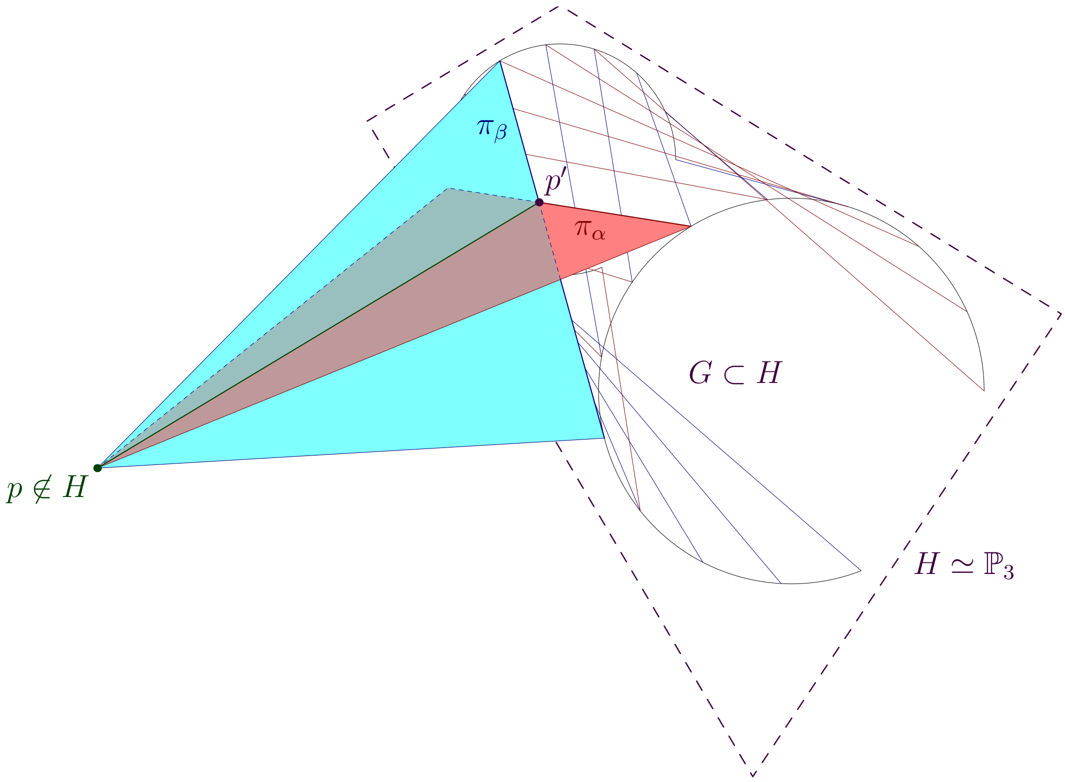


Рис. 2◇1. Конус $C = P \cap T_pP$

Пример 2.3 (клеточное разбиение плюккеровой квадрики)

Зафиксируем какую-нибудь дополнительную к точке $p \in P$ трёхмерную гиперплоскость $H \subset T_pP$ в четырёхмерном касательном пространстве T_pP к квадрике Плюккера $P \subset \mathbb{P}_5$. Особая квадрика $C = P \cap T_pP$ представляет собой простой конус с вершиной p над неособой квадрикой $G = H \cap P$, изоморфной квадрике Сегре в $\mathbb{P}_3$. Это приводит к следующей стратификации плюккеровой квадрики замкнутыми подмножествами:

$$\begin{tikzcd}
 & & \pi_\alpha \arrow[dr, hook] & & \\
p \arrow[r, hook] & \pi_\alpha \cap \pi_\beta \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & C \arrow[r, hook] & P \\
 & & \pi_\beta \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd}$$

Открытые подмножества этих стратов, дополнительные к объединению стратов меньшей размерности, задают дизъюнктное разбиение плюккеровой квадрики P на открытые клетки, естественно изоморфные аффинным пространствам:

$$\mathrm{Gr}(2,4) \;=\; \mathbb{A}^0 \sqcup \mathbb{A}^1 \sqcup \begin{pmatrix} \mathbb{A}^2 \\ \sqcup \\ \mathbb{A}^2 \end{pmatrix} \sqcup \mathbb{A}^3 \sqcup \mathbb{A}^4 \,.$$

В самом деле, сначала мы имеем проективную прямую без точки: $(\pi_\alpha \cap \pi_\beta) \smallsetminus p \;\simeq\; \mathbb{A}^1$. Затем возникает пара проективных плоскостей без проективной прямой: $\pi_\alpha \smallsetminus (\pi_\alpha \cap \pi_\beta) \simeq \pi_\beta \smallsetminus (\pi_\alpha \cap \pi_\beta) \;\simeq\; \mathbb{A}^2$. Далее идут аффинный конус над дополнением квадрики Сегре до пары прямых, высекаемых из неё касательной плоскостью

$$C \smallsetminus (\pi_\alpha \cup \pi_\beta) \simeq \mathbb{A}^1 \times \Big(G \smallsetminus \big(G \cap T_{p'}G\big)\Big),$$

и открытое плотное множество плюккеровой квадрики, дополнительное до её пресечения с касательной плоскостью в точке p

$$P \smallsetminus T_pP \simeq \mathbb{A}^4$$

Упражнение 2.23. Покажите, что проекция гладкой квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$ из любой точки $p \in Q$ на произвольную гиперплоскость $H \not\ni p$ задаёт бирациональную биекцию между дополнением $Q \smallsetminus T_pQ$ и аффинным пространством $H \smallsetminus T_pQ \simeq \mathbb{A}^{n-1}$.

Пример 2.4 (исчисление Шуберта на грассманиане $\mathrm{Gr}(2,4)$)
Аффинные пространства из построенного в прим. 2.3 разбиения плюккеровой квадрики, являются плюккеровыми образами шести аффинных клеток Шуберта $\mathring{\sigma}_\lambda \subset \mathrm{Gr}(2,4)$. Их замыкания называются (замкнутыми) *циклами Шуберта* и обозначаются σ_λ.

Упражнение 2.24. Убедитесь, что в терминах плюккеровой квадрики $P \subset \mathbb{P}_5$ циклы Шуберта грассманиана $\mathrm{Gr}(2,4)$ суть

$$\begin{aligned}
\sigma_{00} &= P \\
\sigma_{22} &= \text{ точка } p = (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1) \text{ в } \mathbb{P}_5 \\
\sigma_{10} &= P \cap T_pP \\
\sigma_{11} &= \pi_\alpha(O),\text{ где } O = (0 : 0 : 0 : 1) \in \mathbb{P}_3 \\
\sigma_{20} &= \pi_\beta(\Pi),\text{ где } \Pi = \mathrm{Ann}(x_0) \subset \mathbb{P}_3 \\
\sigma_{21} &= \pi_\alpha(O) \cap \pi_\beta(\Pi).
\end{aligned}$$

Над полем $\Bbbk = \mathbb{C}$ циклы Шуберта σ_λ образуют свободный базис $\mathbb{Z}$-модуля целочисленных гомологий $H_*\big(\mathrm{Gr}(m,\mathbb{C}^d),\mathbb{Z}\big)$, поскольку построенный по разбиению на клетки Шуберта клеточный цепной комплекс для вычисления гомологий не содержит клеток нечётной (вещественной) размерности и, стало быть, имеет нулевые дифференциалы.

Упражнение 2.25*. Опишите из каких клеток σ_μ состоит замыкание каждой клетки σ_λ и вычислите граничный оператор клеточного цепного комплекса на вещественном грассманиане $\mathrm{Gr}(m,\mathbb{R}^d)$.

Топологическое пересечение циклов задаёт на $\mathbb{Z}$-модуле $H_*(\mathrm{Gr}(m,\mathbb{C}^d),\mathbb{Z})$ структуру коммутативного кольца. Гомологические классы пересечений циклов Шуберта могут быть выражены в виде целочисленных линейных комбинаций циклов Шуберта. В общем случае способы получения таких разложений достаточно витиеваты[1]. Для простейшего грассманиана $\mathrm{Gr}(2,4)$ эти формулы легко получить геометрически.

Очевидно, что циклы, суммарная коразмерность которых меньше четырёх, имеют нулевые пересечения. Пересечения циклов дополнительной размерности уже были вычислены нами в прим. 2.2:

$$\sigma_{10}\sigma_{21} = \sigma_{20}^2 = \sigma_{11}^2 = \sigma_{22} \quad \text{и} \quad \sigma_{20}\sigma_{11} = 0\,.$$

По тем же причинам $\sigma_{10}\sigma_{20} = \sigma_{10}\sigma_{11} = \sigma_{21}$. Для вычисления σ_{10}^2 реализуем цикл σ_{10} в виде

$$\sigma_{10}(\ell) = P \cap T_{\mathrm{u}(\ell)}P = \{\ell'' \subset \mathbb{P}_3 \mid \ell \cap \ell'' \neq \varnothing\}\,.$$

Тогда σ_{10}^2 гомологичен пересечению $\sigma_{10}(\ell) \cap \sigma_{10}(\ell')$, которое при общем положении пары прямых ℓ, ℓ' представляет собой неособую квадрику Сегре с рис. 2◇1. Если продеформировать прямую ℓ' так, чтобы она стала пересекаться с прямой ℓ, эта квадрика продеформируется в своём классе гомологий в пару пересекающихся плоскостей: α-связку с центром $O = \ell \cap \ell'$ и β-связку в плоскости Π, натянутой на ℓ и ℓ': $\sigma_{10}(\ell) \cap \sigma_{10}(\ell') = \pi_\alpha(O) \cup \pi_\beta(\Pi)$. Таким образом,

$$\sigma_{10}^2 = \sigma_{20} + \sigma_{11}\,.$$

В качестве приложения мы получаем «грубое» топологическое решение следующей известной задачи: сколько прямых пересекает четыре заданные попарно непересекающихся прямые в $\mathbb{P}_3$? Если заданные прямые находятся в достаточно общем положении, то ответ даётся коэффициентом при σ_{22} в четырёхкратном самопересечении σ_{10}^4. Согласно предыдущему,

$$\sigma_{10}^4 = (\sigma_{20} + \sigma_{11})^2 = \sigma_{20}^2 + \sigma_{11}^2 = 2\sigma_{22}\,,$$

т. е. в общем случае есть ровно две такие прямые.

2.6. Многообразие Сегре $\boldsymbol{S(m_1, m_2, \dots, m_n)}$ представляет собою образ *вложения Сегре*

$$s : \mathbb{P}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{P}_{m_n} \to \mathbb{P}_m\,,$$

переводящего прямое произведение проективных пространств $\mathbb{P}_{m_i} = \mathbb{P}(V_i)$ в пространство $\mathbb{P}_m = \mathbb{P}\left(V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n\right)$, отправляя набор одномерных подпространств, порождённых ненулевыми векторами $v_i \in V_i$, в их тензорное произведение, порождённое вектором

$$v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \in V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n\,.$$

Упражнение 2.26. Проверьте, что это отображение корректно определено[2] и является вложением.

Так как разложимые тензоры линейно порождают всё пространство $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$, многообразие Сегре не лежит ни в какой гиперплоскости, хотя его размерность обычно сильно меньше размерности объемлющего пространства. По построению, многообразие Сегре заметается n семействами проективных подпространств размерностей $m_1, m_2, \dots, m_n$, где $m_i = d_i - 1$. Квадрика Сегре из n° 1.4.4 на стр. 18 является простейшим примером такого многообразия.

[1] см. книги: *W. Fulton Young Tableaux* (CUP, LMS Stud. Texts 35), *Ф. Гриффитс, Дж. Харрис Принципы алгебраической геометрии, I* (Мир, 1982), *У. Фултон Теория пересечений* (Мир, 1989), *И. Макдоналд Симметрические функции и многочлены Холла* (Мир, 1985)

[2] Т. е. тензор $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n$ отличен от нуля и заменяется на пропорциональный при замене векторов v_i на пропорциональные.

Пример 2.5 (операторы ранга 1)
Для конечномерных векторных пространств U, W каноническое отображение

$$U^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(U, V)\,,$$

сопоставляющее разложимому тензору $\xi \otimes u$ линейное отображение ранга 1

$$\xi \otimes u : U \to W\,, \quad u \mapsto \xi(u) \cdot w\,, \tag{2-38}$$

является изоморфизмом. Таким образом, проективизация множества операторов ранга 1 представляет собою многообразие Сегре $S(m, n) \subset \mathbb{P}_{mn-1} = \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(U, W))$. Если зафиксировать в пространствах U, W какие-нибудь базисы, записать все линейные отображения $U \to W$ матрицами в этих базисах и использовать матричные элементы a_{ij} в качестве однородных координат на $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(V, W))$, многообразие Сегре будет задаваться в этих координатах системой квадратичных уравнений

$$\det \begin{pmatrix} a_{ij} & a_{ik} \\ a_{\ell j} & a_{\ell k} \end{pmatrix} = a_{ij} a_{\ell k} - a_{ik} a_{\ell j} = 0\,,$$

констатирующих зануление всех миноров второго порядка. В этих координатах отображение Сегре переводит пару точек с однородными координатами $(x_1 : x_2 : \dots : x_n)$ и $(y_1 : y_2 : \dots : y_n)$ в точку, однородными координатами которой являются mn всевозможных произведений $x_j y_i$ — матричные элементы произведения $y^t \cdot x$ столбца y на строку x. Два семейства «координатных плоскостей» $\xi \times \mathbb{P}_{m-1}$ и $\mathbb{P}_{n-1} \times w$ при этом перейдут в два семейства проективных пространств, заметающих многообразие Сегре. При $\dim U = \dim W = 2$ мы получаем в точности обсуждавшуюся в **??** биекцию между $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ и детерминантной квадрикой Сегре в $\mathbb{P}_3$.

2.6.1. Многообразие Сегре как линейное сечение грассманиана. Рассмотрим сумму

$$W = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$$

конечномерных векторных пространств V_i и для каждого $k \in \mathbb{N}$ и таких целых неотрицательных $m_1, m_2, \dots, m_n$, что $0 \leqslant m_i \leqslant \dim V_i$ и $\sum_\nu m_\nu = k$, обозначим через $W_{m_1, m_2, \dots, m_n} \subset \Lambda^k W$ линейную оболочку всевозможных произведений $w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_k$ содержащих m_1 сомножителей из пространства V_1, m_2 сомножителей из пространства V_2, и т. д.

Упражнение 2.27. Убедитесь, что правило $\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \dots \otimes \omega_n \mapsto \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_n$ корректно задаёт изоморфизм векторных пространств

$$\Lambda^{m_1} V_1 \otimes \Lambda^{m_2} V_2 \otimes \dots \otimes \Lambda^{m_n} V_n \xrightarrow{\sim} W_{m_1, m_2, \dots, m_n}\,,$$

и докажите, что

$$\Lambda^k W = \bigoplus_{m_1, m_2, \dots, m_n} W_{m_1, m_2, \dots, m_n} \simeq \bigoplus_{m_1, m_2, \dots, m_n} \Lambda^{m_1} V_1 \otimes \Lambda^{m_2} V_2 \otimes \dots \otimes \Lambda^{m_n} V_n\,.$$

Таким образом, тензорное произведение $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$ канонически отождествляется с векторным подпространством $W_{1,1,\dots,1} \subset \Lambda^n W$. Разложимые тензоры $v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n$ переходят при этом отождествлении в разложимые поливекторы $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_n$, что позволяет отождествить многообразие Сегре $S(m_1, m_2, \dots, m_n)$ с сечением грассманиана $\mathrm{Gr}(n, W) \subset \mathbb{P}(\Lambda^n W)$ проективным подпространством $\mathbb{P}\left(W_{1,1,\dots,1}\right) \subset \mathbb{P}(\Lambda^n W)$. Таким образом, многообразие Сегре задаётся в проективном пространстве $\mathbb{P}\left(W_{1,1,\dots,1}\right)$ системой однородных квадратных уравнений — ограничениями соотношений Плюккера предл. 2.4 на стр. 34 для пространства $\Lambda^n W$ на подпространство $W_{1,1,\dots,1} \subset \Lambda^n W$.

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 2.1. См. Лемму 1.1 из лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/1415/lec-01.pdf.

Упр. 2.3. Для любого линейного отображения $f : V \to A$ отображение

$$V \times V \times \cdots \times V \to A\,,$$

переводящее $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ в произведение $f(v_1) \cdot f(v_2) \cdot \cdots \cdot f(v_n) \in A$ полилинейно, и значит, корректно определяет для каждого $n \in \mathbb{N}$ линейное отображение $V^{\otimes n} \to A$. Вместе они задают гомоморфизм алгебр $\boldsymbol{T}V \to A$, продолжающий f. Всякий гомоморфизм $\boldsymbol{T}V \to A$, продолжающий f, переводит всякий разложимый тензор $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$ в $\varphi(v_1) \cdot \varphi(v_2) \cdot \cdots \cdot \varphi(v_n) \in A$, и стало быть, совпадает с построенным продолжением. Это доказывает выполнение универсального свойства. Тот факт, что $\boldsymbol{T}V$ и ι однозначно определяются этим универсальным свойством, доказывается стандартным рассуждением, как в Лемме 1.1 из лекции http://gorod.bogomolov-lab.ru/ps/stud/algebra-3/1415/lec-01.pdf.

Упр. 2.4. Ответ: $\binom{n+d-1}{d-1}$, т. е. число решений уравнения $m_1 + m_2 + \cdots + m_d = n$ в неотрицательных целых числах $m_1, m_2, \dots, m_d$.

Упр. 2.5. Поскольку разложимые тензоры линейно порождают $V^{*\otimes n}$ и формула

$$v \llcorner \varphi(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) = \varphi(v, w_1, w_2, \dots, w_{n-1})$$

линейна по v и φ, достаточно проверять её для форм φ, переводимых изоморфизмом (**??**) в разложимые тензоры вида $\xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_n$, а для таких форм она очевидна из построения.

Упр. 2.6. Выберем в V такой базис $e_1, \dots, e_p, u_1, \dots, u_q, w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_s$, что векторы e_i образуют базис в $U \cap W$, векторы u_j и w_k дополняют его до базисов в U и W соответственно, а векторы v_m дополняют всё предыдущее до базиса в V. Разложим t по базисным тензорным мономам. Условие $t \in U^{\otimes n} \cap W^{\otimes n}$ означает, что в t входят только мономы, не содержащие никаких иных векторов, кроме e_i.

Упр. 2.7. Стабилизатор каждого слагаемого в симметрической группе S_n состоит из

$$m_1!\, m_2! \cdots m_d!$$

независимых перестановок одинаковых сомножителей между собою. Остаётся применить формулу для длины орбиты.

Упр. 2.8. Свёртка базисного симметричного тензора $x_{[m_1, m_2, \dots, m_d]} \in \mathrm{Sym}^n(V^*)$ с тензором $v^{\otimes n} \in V^{\otimes n}$ представляет собой сумму $n!/(m_1! \cdot m_2! \cdots m_d!)$ одинаковых произведений

$$x_1(v)^{m_1} x_2(v)^{m_2} \cdot x_d(v)^{m_d}$$

и совпадает со значением на векторе v полиномиальной функции

$$(x_1, x_2, \dots, x_d) \mapsto \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdots m_d!} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_d^{m_d}\,.$$

Упр. 2.10. Поскольку утверждение линейно по v, f и g достаточно проверить его для $v = e_i$, $f = x_1^{m_1} \dots x_d^{m_d}$, $g = x_1^{k_1} \dots x_d^{k_d}$, что делается прямо по определению.

Упр. 2.11. Это следует из равенства $\widetilde{f}(v, x, \dots, x) = \frac{1}{n} \cdot \partial_v f(x)$, где $n = \deg f$.

Упр. 2.13. Это аналогично упр. 2.10.

Упр. 2.14. Фиксируем в U базис $e_1, e_2, \dots, e_m$. Если $\omega \notin \Lambda^m U$, то в ω есть моном e_I, не содержащий какого-нибудь базисного вектора — скажем, e_i. Тогда $e_i \wedge \omega \neq 0$, поскольку будет содержать ненулевой моном $e_{i \sqcup I}$, возникающий только из произведения e_i на e_I и, стало быть, не способный ни с чем сократиться. Наоборот, если $\omega \in \Lambda^m U$, то $\omega = \lambda \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_m$ и $e_i \wedge \omega = 0$ $\forall\ i$, а значит, $u \wedge \omega = 0 \ \forall u \in U$.

Упр. 2.18. Возрастающий набор номеров $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ тех столбцов, в которых располагаются углы ступенек, однозначно восстанавливается по U как лексикографически минимальный набор набор I, такой что U изоморфно проектируется на координатное подпространство E_I вдоль дополнительного координатного подпространства, а строки матрицы — как координаты прообразов стандартных базисных векторов $e_i \in E_I$ при этой проекции.

Упр. 2.19. Если $\omega = u_1 \wedge u_2$, то $\omega \wedge \omega = u_1 \wedge u_2 \wedge u_1 \wedge u_2 = 0$. Из курса линейной алгебры известно, что произвольный бивектор $\omega \in \Lambda^2 V$ в подходящем базисе $e_1, e_2, \dots, e_d$ пространства V записывается как $\omega = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \cdots$. Если слагаемых больше одного, то $\omega \wedge \omega = 2e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 + \cdots \neq 0$, и стало быть, ω не разложим.

Упр. 2.22. (Ср. с общей теорией из **??**.) Рассмотрим конус $C = P \cap T_p P$. Он имеет вершину в p и состоит из всех прямых, проходящих через p и лежащих на P. Фиксируем 3-мерную гиперплоскость $H \subset T_p P$, которая не содержит p. Тогда $G = C \cap H$ есть невырожденная квадрика на H. Таким образом, любая прямая, проходящая через p, имеет вид $(pp') = \pi_\alpha \cap \pi_\beta$, где $p' \in G$ и плоскости π_α, π_β натянутые на p и две прямые, проходящие через p' в G (см. рис. 2◇1).

Упр. 2.23. Каждая прямая, которая проходит через p и не касается Q, пересекает квадрику ещё ровно в одной отличной от p точке, координаты которой, по теореме Виета, рационально зависят от прямой.