

Итоговый письменный экзамен (вторая попытка)



Во всех задачах основное поле по умолчанию алгебраически замкнуто и имеет характеристику нуль. Задачи можно решать в любом порядке. Полное решение каждой задачи оценивается в 10 баллов. Один ответ без объяснений оценивается в нуль баллов вне зависимости от того, верный он или нет. Да, кстати, с наступающим Новым Годом!

Задача 1 (10 баллов). Существует ли на комплексной проективной плоскости пучок коник, содержащий ровно одну особую конику и не содержащий двойной прямой?

Задача 2 (10 баллов). Покажите, что для любой гладкой гиперповерхности $X \subset \mathbb{P}_n$ степени $d \geq 2$ образ гауссова отображения $\gamma : X \rightarrow \mathbb{P}_n^\times$, $x \mapsto T_x X$, переводящего каждую точку гиперповерхности в её касательную гиперплоскость, является гиперповерхностью в \mathbb{P}_n^\times .

Задача 3 (10 баллов). Покажите, что два пучка квадрик на \mathbb{P}_n , содержащие ровно по $n + 1$ различных особых квадрик, переводятся один в другой проективным автоморфизмом¹ \mathbb{P}_n , если и только если наборы из тех $n + 1$ значений параметров этих пучков, что отвечают особым квадрикам, переводятся один в другой дробно линейным автоморфизмом \mathbb{P}_1 .

Задача 4 (10 баллов). Покажите, что двумерные плоскости на квадрике Плюккера

$$\mathrm{Gr}(2, 4) = \mathrm{Gr}(2, V) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 V) = \mathbb{P}_5$$

образуют замкнутое подмногообразие в грассманиане $\mathrm{Gr}(3, 6) = \mathrm{Gr}(3, \Lambda^2 V)$ двумерных плоскостей в \mathbb{P}_5 , и постройте изоморфизм этого многообразия с дизъюнктивным объединением

$$\mathbb{P}_3 \sqcup \mathbb{P}_3^\times = \mathbb{P}(V) \sqcup \mathbb{P}(V^*).$$

Задача 5 (10 баллов). Покажите, что при $n > 3$ прямые, лежащие на гладкой квадрике $Q \subset \mathbb{P}_n$, образуют неприводимое замкнутое подмногообразие грассманиана прямых в \mathbb{P}_n , и найдите размерность этого многообразия.

¹То есть существует линейный автоморфизм $\mathbb{P}_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_n$ биективно отображающий квадрики одного пучка на квадрики другого.