Итоговый письменный экзамен

Задачи можно решать в любом порядке. Полное решение каждой задачи оценивается в 10 баллов. Один ответ без объяснений оценивается в нуль баллов вне зависимости от того, верный он или нет. Для получения 100%-ного результата достаточно набрать 40 баллов. Во всех задачах основное поле $\Bbbk$ предполагается алгебраически замкнутым характеристики нуль.

Задача 1 (10 баллов). Для векторного пространства V размерности $n > k$ и любого $m \in \mathbb{N}$ грассманово отображение Веронезе[1]

$$\mathrm{gv}_{k,m} : \mathrm{Gr}(k, V) \to \mathrm{Gr}\left(N, S^m V\right), \quad \text{где} \quad N = \binom{m+k-1}{k-1},$$

сопоставляет векторному подпространству $U \subset V$ векторное подпространство $S^m U \subset S^m V$. Покажите, что это отображение инъективно, и его образ является замкнутым подмногообразием в $\mathrm{Gr}\left(N, S^m V\right)$.

Задача 2 (10 баллов). Для n-мерного векторного пространства V и k-мерного векторного подпространства $U \subset V$ обозначим через $I_m(U) \subset S^m V^*$ пространство однородных многочленов степени m, тождественно зануляющихся на U. Найдите $\dim I_m(U)$.

Задача 3 (10 баллов). Покажите, что рациональные нормальные кривые в $\mathbb{P}_n$ образуют открытое по Зарисскому подмножество в некотором неприводимом проективном многообразии, и найдите размерность этого многообразия.

Задача 4 (10 баллов). Покажите, что пучок квадрик $\lambda G + \mu Q$ в $\mathbb{P}_n$ тогда и только тогда содержит ровно $(n+1)$ различных особых квадрик, когда $\mathrm{codim}_{\mathbb{P}_n}(T_p G \cap T_p Q) = 2$ в каждой точке[2] $p \in G \cap Q$.

Задача 5 (10 баллов). Для пары проективных алгебраических многообразий $X, Y \subset \mathbb{P}(V)$ обозначим через $\mathcal{J}(X,Y) \subset \mathrm{Gr}(2,V)$ замыкание множества точек, изображающих всевозможные прямые (x,y) с $x \in X$, $y \in Y$, а через $J(X,Y) \subset \mathbb{P}(V)$ обозначим объединение всех прямых $\ell \subset \mathbb{P}(V)$, изображаемых точками многообразия $\mathcal{J}(X,Y)$. Покажите, что $J(X,Y)$ является замкнутым подмногообразием[3] в $\mathbb{P}(V)$. Для неприводимых X, Y с $X \cap Y = \varnothing$ выясните, неприводимы ли многообразия $\mathcal{J}(X,Y)$ и $J(X,Y)$, и найдите их размерности.

Задача 6 (10 баллов). Для двух различных точек $a, b \in \mathbb{P}_2$ обозначим через W линейную систему[4] коник, проходящих через a, b, а через $S \subset W^\times$ замыкание образа отображения $\mathbb{P}_2 \smallsetminus \{a,b\} \to W^\times$, задаваемого этой линейной системой[5]. Найдите размерность проективного пространства W, а также размерность и степень алгебраического многообразия $S \subset W^\times$. Опишите пучки коник, отвечающие всем лежащим на S прямым. Верно ли, что любая гладкая поверхность степени $\deg S$ в пространстве $W^\times$ получается таким образом из некоторых точек a и b?

---

[1]При $k = 1$ оно превращается в обычное вложение Веронезе $\mathbb{P}(V) \hookrightarrow \mathbb{P}(S^m V)$, переводящее вектор $v \in V$ в $v^m \in S^m V$.

[2]Такие пересечения гиперповерхностей называются *трансверсальными*.

[3]Оно называется *линейным соединением* многообразий X и Y.

[4]Т. е. проективное пространство.

[5]Оно сопоставляет точке $p \in \mathbb{P}_2 \smallsetminus \{a,b\}$ гиперплоскость в W, состоящую из всех коник $C \in W$, проходящих через p.