Гладкость

АГ9◇1. Покажите, что любое неприводимое n-мерное алгебраическое многообразие X бирационально изоморфно неприводимой гиперповерхности в $\mathbb{A}^{n+1}$, т. е. найдутся неприводимый многочлен $f \in \Bbbk[\mathbb{A}^{n+1}]$, плотные открытые $U \subset X$, $W \subset V(f)$ и регулярный изоморфизм $U \simeq W$.

АГ9◇2 (теорема Крулля). Пусть X — неприводимое аффинное многообразие. **а)** Покажите, что алгебра $\Bbbk[X]$ факториальна тогда и только тогда, когда любое неприводимое подмногообразие коразмерности 1 в X имеет вид $V(f)$ для некоторого $f \in \Bbbk[X]$. **б)** Приведите пример неприводимого аффинного многообразия X с нефакториальной алгеброй $\Bbbk[X]$.

АГ9◇3. Покажите, что в нётеровом локальном кольце с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ **а)** $\bigcap \mathfrak{m}^k = 0$ **б)** если последовательность $(f_1, f_2, \dots, f_k) \subset \mathfrak{m}$ регулярна, то регулярны и все её перестановки.

АГ9◇4. Пусть $f_1 = x(y-1)$, $f_2 = y$, $f_3 = z(y-1)$. Регулярны ли в $\Bbbk[x,y,z]$ последовательности **а)** (f_1, f_2, f_3) **б)** (f_1, f_3, f_2) ?

АГ9◇5. Какие перестановки функций $f_1 = x(1-2xyz)(1-3xyz)$, $f_2 = y(1-xyz)(1-3xyz)$, $f_3 = z(1-xyz)(1-2xyz)$ являются регулярными последовательностями в $\mathbb{C}[x,y,z]$?

АГ9◇6 (неразветвлённые морфизмы). Пусть $\varphi : X \to Y$ регулярный морфизм аффинных многообразий, точка $x \in X$ и $y = f(x) \in Y$. Докажите эквивалентность друг другу следующих свойств[1]: **а)** $\varphi^* : \mathfrak{m}_y / \mathfrak{m}_y^2 \to \mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2$ эпиморфен **б)** $d_x\varphi : T_xX \to T_yY$ инъективен **в)** $d_x\varphi : C_xX \to C_yY$ является замкнутым вложением **г)** $\varphi^*(\mathfrak{m}_y)$ порождает $\mathfrak{m}_x$ над $\mathcal{O}_x$ **д)** существует такая открытая аффинная окрестность $U \subset X$ точки x, что[2] $\Bbbk[U]/\varphi^*(\mathfrak{m}_y) \simeq \Bbbk$. **е)** Покажите, что при выполнении этих условий существуют такие аффинные открытые окрестности $x \in U \subset X$ и $\varphi(x) \in W \subset Y$, что $\varphi|_U : U \to W$ является замкнутым вложением.

АГ9◇7 (гладкие точки). Пусть X — аффинное многообразие, $p \in X$ — точка с локальным кольцом $\mathcal{O}_p$, максимальным идеалом $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}_p$, касательным пространством $T_pX = \operatorname{Spec_m} S(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ и касательным конусом $C_pX = \operatorname{Spec_m} \bigoplus\limits_{k\geqslant 0} \mathfrak{m}^k$, и пусть $\dim_p X = n$. Покажите, что следующие свойства равносильны друг другу[3]: **а)** $\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = n$ **б)** $C_pX = T_pX$ **в)** $\bigoplus\limits_{k\geqslant 0} \mathfrak{m}^k / \mathfrak{m}^{k+1} \simeq \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$

г) $\mathfrak{m}$ порождается регулярной последовательностью длины n

д) всякий конечно порождённый $\mathcal{O}_p$-модуль M имеет конечную свободную резольвенту[4]

$$0 \to F_m \to F_{m-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0\,. \tag{1}$$

АГ9◇8. Покажите, что множество гладких точек **а)** неприводимой гиперповерхности в $\mathbb{A}^{n+1}$ **б)** произвольного алгебраического многообразия[5] открыто и плотно.

АГ9◇9 (свойства гладких точек). Пусть $p \in X$ гладкая точка, $\dim_p X = n$ и дифференциалы функций $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathfrak{m}_p$ линейно независимы. Покажите, что **а)** для любого ненулевого однородного многочлена $f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ произвольной степени k значение $f(u_1, u_2, \dots, u_n) \notin \mathfrak{m}^{k+1}$ **б)** для любой функции $f \in \mathcal{O}_{X,p}$ существует единственная последовательность однородных многочленов $f_m \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$, $\deg f_m = m$, такая что $f - f_m(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathfrak{m}_p^{m+1}$ **в)** через точку p проходит ровно одна неприводимая компонента многообразия X **г)** k-мерная замкнутая подсхема $Y \subset X$, $Y \ni p$, тогда и только тогда гладка в точке p, когда $Y = V(f_1, f_2, \dots, f_{n-k})$, где $f_i \in \mathfrak{m}_p$ имеют линейно независимые дифференциалы **д)** каждый конечно порождённый $\mathcal{O}_{X,p}$-модуль M имеет резольвенту (1) с $m \leqslant n$ **е**[*]**)** у точки p имеется открытая аффинная окрестность с факториальным координатным кольцом.

---

[1] морфизм φ с такими свойствами называется *неразветвлённым* в точке x

[2] это условие равносильно равенству $\Bbbk[U] \underset{\Bbbk[Y]}{\otimes} \big(\Bbbk[Y]/\mathfrak{m}_y\big) \simeq \Bbbk[U]/\mathfrak{m}_x$ и означает, что схемный прообраз $\varphi^{-1}(y)$ точки y совпадает в окрестности U с точкой x

[3] точка $p \in X$ с такими свойствами называется *гладкой*

[4] т. е. включается в точную последовательность $\mathcal{O}_p$-модулей (1), в которой все F_i свободны конечного ранга

[5] тут существенно, что не схемы

Персональный табель ____ . Листок № 9 (21.02.2014)
(напишите свои фамилию, имя и отчество)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2а			
б			
3а			
б			
4а			
б			
5			
6а			
б			
в			
г			
д			
е			
7а			
б			
в			
г			
д			
8а			
б			
9а			
б			
в			
г			
д			
е			