

Аффинные алгебраические многообразия.

АГ5◊1. Для аффинных алгебраических многообразий $X \subset \mathbb{A}^n, Y \subset \mathbb{A}^m$, уравнения которых известны, опишите систему уравнений, реализующих $X \times Y$ в качестве подмногообразия в \mathbb{A}^{n+m} и покажите, что $X \times Y$ неприводимо, если X и Y неприводимы.

АГ5◊2. Докажите, что проекция аффинной гиперповерхности $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ из любой точки $p \notin V(f)$ на любую гиперплоскость $H \ni p$ доминантна.

АГ5◊3. Покажите, что образ доминантного морфизма содержит открытое плотное множество.

АГ5◊4 (лемма Нётер о нормализации). Покажите, что любая гиперповерхность $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ допускает конечную сюръекцию на некоторую гиперплоскость $\mathbb{A}^{n-1} \subset \mathbb{A}^n$.

АГ5◊5. Покажите, что открытое подмножество U аффинного многообразия X является его аффинным подмногообразием¹ тогда и только тогда, когда для некоторых $f_1, f_2, \dots, f_m \in \mathbb{k}[U]$, порождающих единичный идеал в кольце $\mathbb{k}[U]$, каждое из главных открытых подмножеств $U_i = \mathcal{D}(f_i)$ является аффинным многообразием с координатным кольцом $\mathbb{k}[U_i]$.

АГ5◊6 (рациональные функции). Кольцо частных² $Q_{\mathbb{k}[X]}$ координатной алгебры $\mathbb{k}[X]$ аффинного многообразия X называется *алгеброй рациональных функций* на X и обозначается $\mathbb{k}(X)$. Множество $D_f = \{x \in X \mid \exists p, q \in \mathbb{k}[X] : q(x) \neq 0 \ \& \ f = p/q\}$ называется *областью определения* рациональной функции $f \in \mathbb{k}(X)$. Покажите, что: а) если $x \in D_f$, то значение $f(x) = p(x)/q(x) \in \mathbb{k}$ не зависит от способа записи $f = p/q$ с $p, q \in \mathbb{k}[X]$ и $q(x) \neq 0$ б) D_f открыто и плотно в X в) отображение $f : D_f \rightarrow \mathbb{k}, x \mapsto f(x)$, непрерывно³ г) идеал $I_f = \{q \in \mathbb{k}[X] \mid qf \in \mathbb{k}[X]\}$ порождается содержащимися в нём неделителями нуля д) $D_f = X \setminus V(I_f)$ е) если $\mathcal{D}(h) \subset D_f$, где $h \in \mathbb{k}[X]$, то $f = g/h^m$ для некоторых $g \in \mathbb{k}[X]$ и $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ж) если $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_m$ — разложение на неприводимые компоненты, то имеется изоморфизм⁴:

$$\mathbb{k}(X) \cong \mathbb{k}(X_1) \times \mathbb{k}(X_2) \times \dots \times \mathbb{k}(X_m), \quad f \mapsto (f|_{X_1}, f|_{X_2}, \dots, f|_{X_m}).$$

АГ5◊7. Найдите D_f для а) $f = (1 - y)/x$ на $V(x^2 + y^2 - 1) \subset \mathbb{A}^2$ б) $f = y/x$ на $V(x^3 + x^2 - y^2) \subset \mathbb{A}^2$ в) $f = x_1/x_3$ на $X = V(x_1x_4 - x_2x_4) \subset \mathbb{A}^4$ и выясните, лежит ли f в $\mathbb{k}[X]$.

АГ5◊8 (фактор по конечной группе). Пусть конечная группа \mathfrak{G} действует регулярными автоморфизмами на аффинном алгебраическом многообразии X над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Обозначим через $R = \mathbb{k}[X]^{\mathfrak{G}} \subset \mathbb{k}[X]$ подалгебру инвариантов. Покажите, что а) \mathbb{k} -линейный оператор $\natural : \mathbb{k}[X] \rightarrow R$, переводящий функцию $f \in \mathbb{k}[X]$ в центр тяжести её \mathfrak{G} -орбиты $f^\natural \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|\mathfrak{G}|} \sum_{\sigma \in \mathfrak{G}} \sigma f$, обладает $\forall f \in \mathbb{k}[X]$ и $\forall h \in R$ свойствами: $f^\natural \in R, h^\natural = h, (fh)^\natural = f^\natural h$

б) алгебра R конечно порождена и не имеет нильпотентов.

в) Постройте такое аффинное алгебраическое многообразие X/\mathfrak{G} и конечную регулярную сюръекцию $\pi : X \rightarrow X/\mathfrak{G}$, что слои π — это в точности \mathfrak{G} -орбиты и для любого регулярного морфизма аффинных многообразий $\varphi : X \rightarrow Y$, такого что $\forall \sigma \in \mathfrak{G}$ и $\forall x \in X \ \varphi(\sigma x) = \varphi(x)$, существует единственный регулярный морфизм $\psi : X/\mathfrak{G} \rightarrow Y$, такой что $\psi \circ \pi = \varphi$.

г) Опишите явными уравнениями в подходящем аффинном пространстве фактор $\mathbb{C}^2/\mathfrak{G}$, где $\mathfrak{G} = \mathbb{Z}/(n)$ действует на \mathbb{C}^2 по правилу $[k]_n : (x, y) \mapsto (e^{2\pi i k/n} x, e^{2\pi i k/n} y)$.

¹т. е. существует аффинное многообразие Y и регулярный морфизм $Y \hookrightarrow X$ гомеоморфно отображающий Y на U

²т. е. локализация со знаменателями в мультипликативной системе всех неделителей нуля

³в топологии Зарисского

⁴через $f|_{X_i}$ обозначен образ f при гомоморфизме $\mathbb{k}(X) \rightarrow \mathbb{k}(X_i)$, продолжающем гомоморфизм $\varphi_i^* : \mathbb{k}[X] \rightarrow \mathbb{k}[X_i]$, отвечающий замкнутому вложению $\varphi_i : X_i \hookrightarrow X$

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2			
3			
4			
5			
6а			
б			
в			
г			
д			
е			
ж			
7а			
б			
в			
8а			
б			
в			
г			