Квадрики

АГ2◇1. Докажите для $n\times n$-матриц A, B формулу Тейлора: $\det(\lambda A+\mu B)=\sum\limits_{p+q=n}\lambda^p\mu^q\cdot\mathrm{tr}\left(\Lambda^pA\cdot\Lambda^qB^t\right)$, где $\Lambda^pA=\left(A_{IJ}\right)$ и $\Lambda^qB=\left(B_{\hat I\hat J}\right)$ образованы дополнительными минорами порядков p и q.

АГ2◇2. Обозначим через $S\subset\mathbb{P}_N=\mathbb{P}(S^2V^*)$ множество всех вырожденных квадрик на $\mathbb{P}_n=\mathbb{P}(V)$. Покажите, что **а)** S является алгебраической гиперповерхностью, и точка $Q\in S$ является неособой точкой поверхности S тогда и только тогда, когда соответствующая квадрика $Q\subset\mathbb{P}_n$ имеет единственную особую точку $p\in Q$ **б)** касательная гиперплоскость $T_QS\subset\mathbb{P}_N$ в такой неособой точке $Q\in S$ состоит из всех квадрик на $\mathbb{P}_n$, проходящих через особую точку p квадрики $Q\subset\mathbb{P}_n$.

АГ2◇3 (спинорное разложение). Пусть $V=\mathrm{Hom}(U_-,U_+)$, где $\dim U_\pm=2$. Покажите, что $V=U_-^*\otimes U_+$, разложение $V^{\otimes 2}$ на симметричную и косую сотавляющие иммеет вид

$$\underbrace{\left(\left(S^2U_-^*\otimes S^2U_+\right)\oplus\left(\Lambda^2U_-^*\otimes\Lambda^2U_+\right)\right)}_{S^2V}\bigoplus\underbrace{\left(\left(S^2U_-^*\otimes\Lambda^2U_+\right)\oplus\left(\Lambda^2U_-^*\otimes S^2U_+\right)\right)}_{\Lambda^2V}\ .$$

АГ2◇4. Пусть $G\subset\mathbb{P}_3=\mathbb{P}(V)$ — невырожденная квадрика, заданная квадратичной формой g, поляризация которой есть $\widetilde{g}$. Покажите, что билинейная форма $\Lambda^2\widetilde{g}$ на Λ^2V, заданная как

$$\Lambda^2\widetilde{g}(\,v_1\wedge v_2\,,\,w_1\wedge w_2\,)\overset{\text{def}}{=}\det\begin{pmatrix}\widetilde{g}(v_1,w_1)&\widetilde{g}(v_1,w_2)\\ \widetilde{g}(v_2,w_1)&\widetilde{g}(v_2,w_2)\end{pmatrix}\ ,$$

является симметричной и неврожденной, запишите ее матрицу Грама в базисе $e_i\wedge e_j$, где e_i составляют g-ортонормальный базис в V, и покажите, что пересечение квадрики, задаваемой в $\mathbb{P}_5=\mathbb{P}(\Lambda^2g)$ квадратичной формой Λ^2g, с квадрикой Плюккера $\mathrm{Gr}(2,V)\subset\mathbb{P}_5$ состоит из плюккеровых образов всех касательных прямых к квадрике $G\subset\mathbb{P}_3$.

АГ2◇5. В обозначениях предыдущей задачи покажите, что вложение Плюккера $\mathrm{Gr}(2,V)\hookrightarrow\mathbb{P}(\Lambda^2V)$ переводит два семейства прямых на квадрике Сегре $G\subset\mathbb{P}(V)=\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(U_-,U_+))$ в пару гладких коник, высекаемых из квадрики Плюккера $P\subset\mathbb{P}(\Lambda^2V)$ двумя дополнительными плоскостями

$$\Lambda_-=\mathbb{P}\left(S^2U_-^*\otimes\Lambda^2U_+\right)\quad\text{и}\quad\Lambda_+=\mathbb{P}\left(\Lambda^2U_-^*\otimes S^2U_+\right)\ ,$$

лежащими в $\mathbb{P}(\Lambda^2\mathrm{Hom}(U_-,U_+))$ по зад. АГ2◇3. Более того, обе коники вложены в эти плоскости по Веронезе, т. е. мы имеем следующую коммутативную диаграмму[1]:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}(U_+) \arrow[rr, hook, "\text{Веронезе}"'] & & \mathbb{P}(S^2U_+)\simeq\Lambda_+ \arrow[d, hook] \\
\mathbb{P}_1^+\times\mathbb{P}_1^- \arrow[u, "\pi_+"] \arrow[d, "\pi_-"'] \arrow[r, "\text{Сегре}", "\sim"'] & G\subset\mathbb{P}\mathrm{Hom}(U_-,U_+) \arrow[r, dashed, "\text{Плюккер}"] & P\subset\mathbb{P}\begin{pmatrix}\Lambda^2U_-^*\otimes S^2U_+\\ \oplus\\ S^2U_-^*\otimes\Lambda^2U_+\end{pmatrix} \\
\mathbb{P}(U_-^*) \arrow[rr, hook, "\text{Веронезе}"] & & \mathbb{P}(S^2U_-^*)\simeq\Lambda_- \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

АГ2◇6 (звёздочка Ходжа). В условиях предыдущих трёх задач оператор $*\,:\,\Lambda^2V\xrightarrow{\omega\mapsto\omega^*}\Lambda^2V$ задаётся соотношением $\omega_1\wedge\omega_2^*=\Lambda^2\widetilde{g}(\omega_1,\omega_2)\cdot e_1\wedge e_2\wedge e_3\wedge e_4$, где $\omega_{1,2}\in\Lambda^2$ любые, а $e_i\in V$ составляют фиксированный ортонормальный базис формы g. Покажите что это определение корректно (не зависит от выбора базиса), найдите собственные значения и собственные подпространства оператора Ходжа и укажите место последних на предыдущей картинке.

[1] Плюккер пунктирный, ибо отображает прямые в точки

Персональный табель _____________________________________ . Листок № 2 (20.09.2013)

(напишите свои имя, отчество и фамилию)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2а			
б			
3			
4			
5			
6			